Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Neven Balenović

Youngove mjere i primjene

Magistarski rad

Zagreb, srpnja 1999.

Predgovor

Parametrizirane mjere je prvi uveo Lawrence C. Young tridesetih godina kao poopćena rješenja zadaća optimalnog upravljanja, i smatraju se jednom od preteča Schwartzove teorije distribucija. Youngove mjere su slabo–$*$ izmjerive familije vjerojatnosnih Radonovih mjera na $\mathbf{R}^r$. Pokazale su se kao izuzetno efikasan objekt za proučavanje titranja u nelinearnim zadaćama, u kojem kontekstu su po prvi puta uvedene, uz kompaktnost kompenzacijom.

Rad se sastoji iz dva dijela; prvog, koji je tehničke prirode i daje pregled općenitih rezultata iz teorije Youngovih mjera, te drugog, u kojem su prikazane neke njihove primjene.

U prvom se dijelu dokazuje općenit teorem egzistencije, čija važnost je u tomu što daje eksplicitnu karakterizaciju slabih limesa u terminima Youngovih mjera. Dokazani su i teoremi homogenizacije i lokalizacije, s pomoću kojih zadanoj Youngovoj mjeri pridružujemo *homogenu* mjeru, koja je jednostavnije strukture, ali još uvijek sadrži relevantne informacije o nizu funkcija kojeg proučavamo. Na kraju prvog dijela naveden je pregled rezultata o gradijentnim Youngovim mjerama.

Drugi dio posvećen je primjenama Youngovih mjera. Pored spomenute kompenzirane kompaktnosti, naveden je i niz primjena u varijacijskom računu. Pokazano je kako se Youngove mjere uspješno koriste pri razmatranju dvaju osnovnih pitanja varijacijskog računa: slabe poluneprekinutosti odozdo i relaksacije. Vrijedno je istaknuti primjer primjene Youngovih mjera u teoriji optimalnog dizajna, gdje je dano poopćenje rezultata Mũnoza i Pedregala iz 1998. godine. U tu svrhu razvijena je metoda homogenizacije i teorija $H-$konvergencije za linearne eliptičke jednadžbe četvrtog reda po uzoru na Tartarov pristup jednadžbi drugog reda.

Ovaj rad nastao je pod vodstvom doc. dr. sc. Nenada Antonića, mog mentora i prijatelja. Njegova podrška i razumijevanje, a ponekad i strpljenje, doveli su do toga da rad dostigne postojeću razinu kvalitete. Zapravo nema riječi kojima bih mu mogao adekvatno zahvaliti na svemu što mi je pružio u posljednjih pet godina.

Iskoristio bih priliku zahvaliti i članovima Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu, u prvom redu prof. dr. sc. I. Aganoviću i prof. dr. sc. Z. Tuteku, na korisnim sugestijama i *neugodnim* pitanjima koja su doprinijela mojoj matematičkoj zrelosti i kvaliteti mojih izlaganja. Zahvalio bih i mr. sc. Josipu Tambači, Marku Vrdoljaku i Andriji Ragužu, koji su doprinijeli tome da moja radna okolina bude ugodna i poticajna.

Konačno, izrazio bih divljenje svojoj obitelji i prijateljima koji su stalno bili uz mene, pa i onda kad stvari nisu išle najbolje. Bez njihove ljubavi i podrške ništa od ovog ne bi bilo moguće, niti bi imalo smisla.

U Zagrebu, srpnja 1999.

Neven Balenović

mome Peri

Sadržaj

Predgovor . . . . **i**

Sadržaj . . . . **iii**

Prvi dio: YOUNGOVE MJERE

I. Funkcijski prostori i mjere 3

1. Definicija Youngove mjere **4**

2. Funkcijski prostori vezani uz Youngove mjere 5

2.1. Normirani prostori neprekinuto diferencijabilnih funkcija 6

2.2. Radonove mjere 7

2.3. Prostor $\mathrm{L}^\infty_*(\Omega;\mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$ 9

3. Slaba konvergencija u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ **10**

4. Vitalijev teorem o pokrivanju **16**

II. Analiza Youngovih mjera 19

1. Teorem egzistencije **20**

2. Reprezentacija slabih limesa s pomoću Youngovih mjera . . . **25**

3. Karakterizcija L^p–Youngovih mjera **28**

3.1. Dokaz u slučaju $p=\infty$ 29

3.2. Dokaz u slučaju $1\le p<\infty$ 30

3.3. Karakterizacija L^g–Youngovih mjera 33

4. Drugi pristup teoriji Youngovih mjera **35**

5. Homogenizacija i lokalizacija Youngovih mjera **37**

III. Gradijentne Youngove mjere 45

1. Uvod **46**

2. Homogenizacija i lokalizacija **46**

3. Kvazikonveksnost **49**

4. Karakterizacija gradijentnih p–Youngovih mjera **52**

4.1. Dokaz nužnosti 53

4.2. Dokaz dovoljnosti 55

Drugi dio: PRIMJENA YOUNGOVIH MJERA

IV. Kompaktnost kompenzacijom 63

1. Uvod 64

2. Teorem kompenzirane kompaktnosti 64

3. Primjena Youngovih mjera na skalarne zakone sačuvanja . . . 67

3.1. Uvjet entropije 68

3.2. Dokaz osnovnog teorema 71

V. Varijacijske zadaće i poluneprekinutost 73

1. Nepostizanje ekstrema u varijacijskom računu 74

2. Varijacijska zadaća vezana uz model crno–bijelog tiska 78

2.1. Dokaz tvrdnji (b) i (c) 78

2.2. Konstrukcija minimizacijskog niza 80

3. Primjena u homogenizaciji i optimalnom dizajnu 84

3.1. Postavljanje zadaće 84

3.2. Rezultat kompenzirane kompaktnosti 84

3.3. Inačica H–konvergencije 85

3.4. Efektivna svojstva ploče izgrađene od slojevitih materijala 89

3.5. Relaksacija 91

4. Nelokalne varijacijske zadaće 94

4.1. Slaba poluneprekinutost odozdo 95

4.2. Relaksacija 97

Literatura 101

Sažetak 105

Summary 107

Životopis 109

Prvi dio
Youngove mjere

I. Funkcijski prostori i mjere

1. Definicija Youngove mjere

Neka je Ω otvoren (općenitije Borelov) podskup prostora $\mathbf{R}^d$, te μ Lebesgueova mjera na Ω. Ukoliko nije drugačije naglašeno, pretpostavljamo da je Ω konačne mjere. Promatramo izmjeriv prostor $\Omega \times \mathbf{R}^r$ s pripadnom σ–algebrom Borelovih skupova. U daljnjem je svaki izmjeriv prostor nad σ–algebrom Borelovih skupova.

Definicija 1. *Youngova mjera* na $\Omega \times \mathbf{R}^r$ je pozitivna mjera τ, takva da za svaki Borelov skup $A \subseteq \Omega$ vrijedi

$$\tau(A \times \mathbf{R}^r) = \mu(A) . \tag{1}$$

∎

Drugim riječima, vrijedi formula $\lambda = \tau \circ \pi_1^{-1}$, pri čemu je $\pi_1 : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \Omega$ kanonska projekcija na Ω.

Ovo posljednje pak znači da je Lebesgueova mjera na Ω slika Youngove mjere τ s obzirom na kanonsku projekciju π_1; točnije

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_0(\Omega \times \mathbf{R}^r)) \quad \int_{\Omega\times\mathbf{R}^r} \varphi \, d\tau = \int_\Omega \varphi \circ \pi_1 \, d\mu . \tag{2}$$

Moguća su i razna poopćenja gornje definicije Youngove mjere. Tako, na primjer, umjesto (Ω, μ) možemo promatrati općenit prostor mjere. S druge strane, kako većina rezultata ne ovisi o linearnoj strukturi na $\mathbf{R}^r$, kao drugi faktor u produktu može se uzeti općenit metrički prostor.

Definicija 2. Za izmjerivo preslikavanje $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ definiramo mjeru τ_u kao (jedinstvenu) Youngovu mjeru na $\Omega \times \mathbf{R}^r$, čiji je nosač sadržan u grafu funkcije u. Za takvu mjeru kažemo da je *Youngova mjera pridružena preslikavanju* u.

∎

Lako se pokaže da, za svaki par Borelovih skupova A i B u Ω i $\mathbf{R}^r$ redom, vrijedi

$$\tau_u(A \times B) = \mu(A \cap u^{-1}(B)) . \tag{3}$$

Ukoliko definiramo preslikavanje $g_u : \Omega \longrightarrow \Omega \times \mathbf{R}^r$ formulom $g_u(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$, slijedi

$$\tau_u = \mu \circ g_u^{-1} ,$$

što znači da je Youngova mjera pridružena preslikavanju u slika Lebesgueove mjere na Ω s obzirom na preslikavanje g_u:

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_0(\Omega \times \mathbf{R}^r)) \quad \int_{\Omega\times\mathbf{R}^r} \varphi \, d\tau_u = \int_\Omega \varphi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} . \tag{4}$$

Vrijedi sljedeća lema

Lema 1. *Neka su τ^1 i τ^2 Youngove mjere pridružene funkcijama u_1 i u_2. Tada vrijedi*

$$\tau^1 = \tau^2 \iff u_1 = u_2 \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega) .$$

∎

Budući da je Lebesgueova mjera kanonska projekcija Youngove mjere na $\mathbf{R}^d$, iz teorema o dezintegraciji (vidi L. C. Evans [E]) neposredno slijedi

Teorem 1. *Za skoro svaki* $\mathbf{x} \in \Omega$ *postoji nenegativna vjerojatnosna Radonova mjera* $\nu_{\mathbf{x}}$ *na* $\mathbf{R}^r$*, takva da za svaku ograničenu neprekinutu funkciju* $f : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ *vrijedi*

(a) *preslikavanje* $\mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})$ *je izmjerivo, i*

(b) $\int_{\Omega\times\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, d\tau(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x}$. ∎

Lako se dokazuje sljedeća karakterizacija Youngovih mjera pridruženih funkcijama:

Lema 2. *Youngova mjera* τ *je pridružena funkciji* u *ako i samo ako vrijedi*

$$\nu_{\mathbf{x}} = \delta_{u(\mathbf{x})} \quad (ss\ \mathbf{x} \in \Omega)\ . \tag{5}$$

∎

Teorem 1 ima za posljedicu da je svakoj Youngovoj mjeri τ pridružena jedinstvena familija vjerojatnosnih mjera $(\nu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in\Omega}$.

Obrnuto, ako je zadana familija vjerojatnosnih mjera $(\nu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in\Omega}$, onda je formulom (b) iz gornjeg teorema definirana Youngova mjera na $\Omega \times \mathbf{R}^r$, u smislu definicije s početka ovog odjeljka. *Zbog toga u daljnjem pod Youngovom mjerom podrazumijevamo familiju vjerojatnosnih mjera pridruženu mjeri* τ*.*

Tvrdnja (a) Teorema 1 kaže da je preslikavanje $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{R}^r)$, pri čemu $\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)$ označava dual prostora $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ (v. odjeljak 2.2.), izmjerivo u izvjesnom slabom smislu. Tu izmjerivost zovemo slaba–$*$ izmjerivost i o njoj će biti nešto više riječi na sljedećim stranicama.

Rezimirajmo: Youngova mjera na Ω je svako preslikavanje $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{R}^r)$, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \nu_{\mathbf{x}}$ koje je

(a) slabo–$*$ izmjerivo i vrijedi

(b) $\|\nu_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)} = 1$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$).

Završimo ovaj odjeljak s dvije definicije.

Definicija 3. Skup svih Youngovih mjera na $\Omega \times \mathbf{R}^r$ označavamo s $\mathcal{Y}(\Omega; \mathbf{R}^r)$. Za Youngovu mjeru kažemo da je *homogena* ako je preslikavanje $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) := \nu$ skoro svuda konstanta, i u tom slučaju Youngovu mjeru označavamo s njenom vrijednošću ν. ∎

Definicija 4. Za Carathéodoryjevu funkciju $f : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ definiramo njenu srednju vrijednost s obzirom na Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu}$ formulom

$$f_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})\,.$$

∎

U slučaju funkcije $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ gornja srednja vrijednost svodi se na dualni produkt

$$\varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) = \langle \nu_{\mathbf{x}}, \varphi \rangle\,.$$

2. Funkcijski prostori vezani uz Youngove mjere

Prije no što prijeđemo na izučavanje Youngovih mjera, uvest ćemo funkcijske prostore koje ćemo u daljnjem koristiti. U ovom je odjeljku dan kraći pregled rezultata o prostorima neprekinutih funkcija, osnovno o Radonovim mjerama te o prostorima Lebesgue integrabilnih funkcija s vrijednostima u Banachovim prostorima. Svrha ovog odjeljka je u prvom redu navesti rezultate koji će biti od interesa u daljnjem tekstu te uvesti notaciju.

2.1. Normirani prostori neprekinuto diferencijabilnih funkcija

Za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, s $\mathcal{K}(\Omega)$ označavamo skup svih kompaktnih skupova sadržanih u Ω, s obzirom na relativnu topologiju naslijeđenu iz $\mathbf{R}^d$.

Za $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ s $\mathrm{C}(K) := \mathrm{C}(K; \mathbf{C})$ označavamo *prostor neprekinutih kompleksnih funkcija na* K. Ovaj (vektorski) prostor možemo na prirodan način opskrbiti normom:

$$(6) \qquad \|u\|_{\mathrm{C}(K)} := \sup_{\mathbf{x}\in K} |u(\mathbf{x})| \,.$$

Lako se vidi da je gornjim izrazom zaista dana norma na $\mathrm{C}(K)$, te da u toj normi Cauchyjevi nizovi u $\mathrm{C}(K)$ konvergiraju, pa je $\Big(\mathrm{C}(K), \|\cdot\|_{\mathrm{C}(K)}\Big)$ potpun normiran linearan prostor (Banachov prostor).

Potpuno analogno se definira i prostor $\mathrm{C}(K; E)$, pri čemu je K kompaktan topološki prostor (drugim riječima kompaktan skup u topološkom prostoru s naslijeđenom, relativnom, topologijom), a E proizvoljan Banachov prostor. Norma na $\mathrm{C}(K; E)$ definira se kao u (6), s tom razlikom što na desnoj strani namjesto apsolutne vrijednosti stoji norma u prostoru E.

Ako je X topološki prostor, a E, kao i ranije, Banachov prostor, definira se prostor $\mathrm{C}_b(X; E)$ svih *omeđenih neprekinutih funkcija* $u : X \longrightarrow E$, koji je uz normu

$$\|u\|_{\mathrm{C}_b(X;E)} := \sup_{x\in X} \|u(x)\|_E \,,$$

također Banachov.

Primijetimo da $\|\cdot\|_{\mathrm{C}_b(X;E)}$ nije norma na prostoru $\mathrm{C}(X; E)$. Naime, neprekinute funkcije nisu nužno i omeđene. U slučaju omeđene i jednoliko neprekinute funkcije $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$, pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren, postoji jedinstveno neprekinuto proširenje na $\mathsf{Cl}\,\Omega$. Skup svih takvih funkcija označavamo s $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Lako se vidi da je uz *supremum* normu $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ Banachov prostor. Valja, međutim, uočiti da je prostor $\mathrm{C}(\overline{\mathbf{R}^d})$ svih ograničenih i jednoliko neprekinutih funkcija na $\mathbf{R}^d$ različit od (zapravo, pravi podskup) prostora $\mathrm{C}(\mathsf{Cl}\,\mathbf{R}^d) = \mathrm{C}(\mathbf{R}^d)$. U slučaju omeđenog i otvorenog skupa Ω, zatvarač $\mathsf{Cl}\,\Omega$ je kompaktan pa su prostori $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ i $\mathrm{C}(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ međusobno jednaki.

Analogno se definiraju prostori $\mathrm{C}^m(\Omega)$ i $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})$ neprekinuto diferencijabilnih funkcija reda $m \in \mathbf{N}$. Prostor $\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})$ je Banachov uz normu

$$\|u\|_{\mathrm{C}^m(\overline{\Omega})} := \max_{\boldsymbol{\alpha}\leq m} \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x})| \,.$$

Na kraju ovog pododjeljka navedimo još dva klasična rezultata vezana uz prostore neprekinutih funkcija na kompaktnom skupu.

Teorem 2. *(***Stone–Weierstrass***) Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ omeđen skup. Tada je skup restrikcija svih polinoma na $\mathsf{Cl}\,\Omega$ gust u $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$.* ∎

Teorem 3. *(***Arzelá–Ascoli***) Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ omeđeno područje. Podskup $A \subseteq \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ je pretkompaktan, ako vrijedi*

(a) A je jednoliko omeđen,

(b) $(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \delta > 0)\, (\forall\, u \in A)(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega) \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta \Longrightarrow |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})| < \varepsilon.$ ∎

Definicija 5. Za skup koji zadovoljava svojstvo (b) gornjeg teorema kažemo da je *ekvineprekinut.* ∎

Definicija 6. *Nosač* funkcije $u : X \longrightarrow V$, s vrijednostima u vektorskom prostoru V, definira se formulom

$$\operatorname{supp} u := \mathsf{Cl}\,\{x \in X : u(x) \neq 0\}\ . \tag{7}$$

∎

Nosač je stoga najmanji zatvoreni skup u domeni funkcije na kojemu funkcija poprima vrijednosti različite od nule.

Lako se vidi da je ekvivalentno reći kako je nosač funkcije komplement najvećeg otvorenog skupa na kojem je funkcija jednaka nuli. Ovaj ćemo oblik definicije moći primijeniti i na distribucije.

Za $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ i $k \in \mathbf{N}$ definiramo

$$p_{k,K}(u) := \max_{\mathbf{x}\in K} \sum_{\boldsymbol{\alpha}\leq k} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x})|\ .$$

Funkcije $p_{k,K}$ su polunorme na $\mathrm{C}^m(\Omega)$; posebno su to i $p_{m,K}$.

Na vektorskom prostoru $\mathrm{C}^m(\Omega)$ uvodimo metriku:

$$d_m(u,v) := \sum_{n\in\mathbf{N}_0} \frac{1}{2^n} \frac{p_{m,K_n}(u-v)}{1+p_{m,K_n}(u-v)}\ , \tag{8}$$

pri čemu je (K_n) niz kompaktnih skupova koji *iscrpljuju* Ω. Drugim riječima, vrijedi

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}_0) \quad K_n \subseteq \mathsf{Int}\, K_{n+1} \quad \& \quad \bigcup_{n\in\mathbf{N}_0} K_n = \Omega\ .$$

Posebno, za prostor $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ promatramo

$$d_\infty(u,v) := \sum_{n\in\mathbf{N}_0} \frac{1}{2^n} \frac{p_{n,K_n}(u-v)}{1+p_{n,K_n}(u-v)}\ . \tag{9}$$

Navedene metrike induciraju topološku strukturu na prostorima $\mathrm{C}^m(\Omega)$ i $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ u kojoj su zbrajanje vektora i množenje vektora sa skalarom neprekinute operacije. Takvi se linearni prostori nazivaju *topološki vektorski prostori*. Kao metrički prostori oni su i potpuni, dakle Fréchetovi.

Za $m \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$ definiramo prostor $\mathrm{C}^m_c(\Omega)$ kao skup svih funkcija $u \in \mathrm{C}^m(\Omega)$ čiji je nosač kompaktan podskup u Ω. Ovi se prostori opskrbljuju nemetrizabilnom (lokalno konveksnom) topologijom strogog induktivnog limesa.

2.2. Radonove mjere

Za $p \in [1,\infty]$ definiramo prostor $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ kao skup svih izmjerivih preslikavanja $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ takvih da vrijedi

$$(\forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega)) \quad f\chi_K \in \mathrm{L}^p(K;\mathbf{R}^r)\ .$$

Prostor $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ sadrži sve (neograničene) neprekinute funkcije. Posebno je zanimljiv $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, budući da svaka funkcija $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ definira antilinearan funkcional na prostoru $\mathrm{C}_c(\Omega)$ formulom:

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\ .$$

Štoviše, tako definiran funkcional zadovoljava i sljedeće svojstvo *neprekinutosti u nuli:* $(\forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega))\, (\exists\, C > 0)\, (\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega))$

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq K \quad \Longrightarrow \quad \Big|\int_\Omega f(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\Big| \leqslant C \sup_{\mathbf{x}\in K} |\varphi(\mathbf{x})|\ .$$

Gornje je svojstvo ekvivalentno neprekinutosti na prostoru $\mathrm{C}_c(\Omega)$ opskrbljenom lokalno konveksnom topologijom strogog induktivnog limesa (v. [LS]).

Apstraktna identifikacija funkcije f s mjerom se sastoji u tome da zapravo f identificiramo s mjerom $f\mu$, gdje s μ, kao i ranije, označujemo Lebesgueovu mjeru (volumen) na $\mathbf{R}^d$. Pri toj identifikaciji važna je činjenica da se radi upravo o Lebesgueovoj mjeri. Ta identifikacija odgovara prirodnoj izometriji prostora $\mathrm{L}^2(\Omega)$ na njegov dual; dakle, identifikaciji $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ s $f\mu \in (\mathrm{L}^2(\Omega))'$.

Definicija 7. *Radonova mjera* ν je svaki antilinearan funkcional na prostoru $\mathrm{C}_c(\Omega)$, koji je neprekinut u nuli u sljedećem smislu: $(\forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega))\, (\exists\, C > 0)\, (\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega))$

$$\operatorname{supp}\varphi \subseteq K \quad \Longrightarrow \quad |\langle \nu, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{\mathbf{x}\in K} |\varphi(\mathbf{x})|\ .$$

∎

U daljnjem tekstu ćemo promatrati samo funkcije s vrijednostima u $\mathbf{R}^r$, pa ćemo pod Radonovim mjerama podrazumijevati linearne funkcionale, budući da se u realnim vektorskim prostorima pojmovi linearnosti i antilinearnosti podudaraju.

U teoriji mjere na lokalno kompaktnom Hausdorffovom prostoru X *Radonova mjera* se definira kao Borelova mjera, regularna izvana na $\mathcal{B}$, iznutra na $\mathcal{K}$, koja je konačna na kompaktima. Po Rieszovom teoremu reprezentacije prostor (realnih, kompleksnih) Radonovih mjera je izomorfan dualu $\mathrm{C}_c(\Omega)$.

S druge strane, na prostoru $\mathrm{C}_c(\Omega)$ možemo gledati i topologiju naslijeđenu iz Banachovog prostora $\mathrm{C}_b(\Omega)$; upotpunjenje toga prostora je prostor $\mathrm{C}_0(\Omega)$, neprekinutih funkcija koje trnu k nuli van kompakata u Ω. Dual toga prostora je ponovno Banachov prostor, prostor svih omeđenih Radonovih mjera, koji označujemo s $\mathcal{M}(\Omega)$. Norma mjere ν u prostoru $\mathcal{M}(\Omega)$ jednaka je totalnoj varijaciji $|\nu|(\Omega)$.

Nas će posebno zanimati prostor $\mathcal{M}(\Omega)$, jer je Banachov. S druge strane, kako prostori $\mathrm{C}_0(\Omega)$ nisu refleksivni, to će nam, pored norme, od interesa biti i slaba–$*$ topologija na $\mathcal{M}(\Omega)$.

Uočimo da je $\mathrm{L}^1(\Omega)$ prirodno uložen u $\mathcal{M}(\Omega)$, što donekle uklanja nedostatke slabe topologije na $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Naime, omeđen skup u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ je omeđen i u $\mathcal{M}(\Omega)$, gdje je slabo–$*$ relativno kompaktan.

Teorem 4. *(***Banach–Alaoglu–Bourbaki***) Neka je E Banachov prostor. Zatvorena jedinična kugla u E' je kompaktan skup u slaboj–$*$ topologiji $\sigma(E', E)$.* ∎

Često ćemo (implicitno) koristiti sljedeći teorem i njegov korolar (v. [Br] ili [DS])

Teorem 5. *Neka je E Banachov prostor. Tada je jedinična kugla u E' metrizabilna u slaboj $*$ topologiji ako i samo ako je E separabilan.* ∎

Korolar 1. *Neka je E separabilan Banachov prostor. Svaki omeđen niz u E' ima slabo $*$ konvergentan podniz.* ∎

Na kraju dajmo još karakterizaciju slabe–$*$ konvergencije Radonovih mjera.

Lema 3. *Niz Radonovih mjera* (μ_n) *konvergira k mjeri* μ *u slaboj* $*$ *topologiji (topologie vague) ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c(\Omega)) \quad \langle \mu_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle \mu, \varphi \rangle \ .$$

∎

2.3. Prostor $\mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$

Iznesimo najprije neke osnovne pojmove vezane uz prostore Lebesgue integrabilnih funkcija s vrijednostima u Banachovim prostorima. Neka E označava Banachov prostor s dualom E', te neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup. Za $p \in [1, \infty\rangle$ definiramo *normu*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;E)} := \left(\int_\Omega \|f(\mathbf{x})\|_E^p \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Definicija 8. Kažemo da je funkcija $f : \Omega \longrightarrow E$ *p–jako izmjeriva* ukoliko postoji niz jednostavnih izmjerivih funkcija (f_n) koji je Cauchyjev u gornjoj *normi*, takvih da $f_n(\mathbf{x}) \longrightarrow f(\mathbf{x})$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$). ∎

Imajući u vidu gornju definiciju definiramo prostor $\mathrm{L}^p(\Omega; E)$ kao skup svih p–jako izmjerivih funkcija $f : \Omega \longrightarrow E$, takvih da vrijedi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;E)} < \infty \, . \tag{10}$$

Definicija 9. Funkcija $f : \Omega \longrightarrow E$ je *slabo izmjeriva* ukoliko je za svako $T \in E'$ preslikavanje $\mathbf{x} \mapsto \langle T, f(\mathbf{x}) \rangle$ izmjerivo. Preslikavanje $f : \Omega \longrightarrow E'$ je *slabo–$*$ izmjerivo* ako je za svako $T \in E$ preslikavanje $\mathbf{x} \mapsto \langle f(\mathbf{x}), T \rangle$ izmjerivo. ∎

Sada analogno možemo definirati prostor $\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}(\Omega; E)$ svih slabo izmjerivih funkcija $f : \Omega \longrightarrow E$ takvih da je preslikavanje $\mathbf{x} \mapsto \|f(\mathbf{x})\|_E$ izmjerivo, te da vrijedi

$$\|f\|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}(\Omega;E)} := \int_\Omega \|f(\mathbf{x})\|_E^p \, d\mathbf{x} < \infty \, , \tag{11}$$

odnosno prostor $\mathrm{L}^p_*(\Omega; E')$ svih slabo–$*$ izmjerivih funkcija $f : \Omega \longrightarrow E'$, za koje je preslikavanje $\mathbf{x} \mapsto \|f(\mathbf{x})\|_{E'}$ također izmjerivo i vrijedi

$$\|f\|^p_{\mathrm{L}^p_*(\Omega;E')} := \int_\Omega \|f(\mathbf{x})\|_{E'}^p \, d\mathbf{x} < \infty \, . \tag{12}$$

U slučaju $p = \infty$ umjesto integrala na desnoj strani računamo esencijalne supremume. Lako se vidi da su s (10), (11) i (12) doista dane norme na prostorima $\mathrm{L}^p(\Omega; E)$, $\mathrm{L}^p_{\mathrm{w}}(\Omega; E)$ i $\mathrm{L}^p_*(\Omega; E')$, te da su ti prostori s tim normama Banachovi. Vrijedi sljedeći teorem (v. [Pe97]).

Teorem 6. *Neka je E separabilan Banachov prostor s dualom E'. Tada vrijedi*

$$(\mathrm{L}^p(\Omega; E))' = \mathrm{L}^{p'}_*(\Omega, E') \, , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \, ,$$

s obzirom na dualnost

$$\langle f, g \rangle := \int_\Omega {}_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\langle\, f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \,\rangle_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)} \, d\mathbf{x} \, ,$$

pri čemu je $f \in \mathrm{L}^p(\Omega; E)$, a $g \in \mathrm{L}^{p'}_*(\Omega, E')$.

∎

Posebno, u slučaju da je $E = \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ imamo dualnost

$$(\mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)))' = \mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r)) .$$

Uz normu

$$\|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty_*(\Omega;\mathcal{M}(\mathbf{R}^r))} := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\Omega}\|\mu(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)} ,$$

taj je prostor Banachov, a zbog separabilnosti prostora $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ on je izometrički izomorfan dualu prostora $\mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))$. Taj izomorfizam svakom elementu $\mu \in \mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$ pridružuje neprekinut linearan funkcional

$$\psi \mapsto \int_\Omega \langle \mu(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}, \cdot)\rangle \, d\mathbf{x}$$

na $\mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))$. Kako je $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ separabilan, to je i $\mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))$ takav, pa su ograničeni skupovi u $\mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$ slabo–$*$ relativno kompaktni (v. Korolar 1).

3. Slaba konvergencija u $\mathrm{L}^1(\Omega)$

Jedna od temeljnih specifičnosti prostora $\mathrm{L}^1(\Omega)$ u odnosu na druge L^p prostore je u tome što ograničeni nizovi u L^1–normi nisu slabo konvergentni. Da bismo postigli slabu konvergenciju potreban je dodatan uvjet ekviintegrabilnosti:

Definicija 10. Kažemo da je niz funkcija (u_n) u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ *ekviintegrabilan* ukoliko za proizvoljan $\varepsilon > 0$ možemo naći $\delta > 0$ takav da je

$$\int_E |u_n(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < \varepsilon ,$$

za svako $n \in \mathbf{N}$ i za svaki izmjeriv skup $E \subseteq \Omega$, takav da je $\mu(E) < \varepsilon$. ∎

Vrijedi sljedeći

Teorem 7. *Niz (u_n) u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ je slabo relativno kompaktan ako i samo ako vrijede sljedeća dva svojstva*
(a) (u_n) je ograničen u $\mathrm{L}^1(\Omega)$,
(b) niz (u_n) je ekviintegrabilan. ∎

Sljedeća propozicija daje korisnu inačicu svojstva ekviintegrabilnosti

Propozicija 1. *Ograničen niz (u_n) u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, je slabo relativno kompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ ako i samo ako vrijedi*

$$\lim_k \left(\sup_n \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega : |u_n(\mathbf{x})| \geq k\}} |u_n(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \right) = 0 . \tag{13}$$

Dokaz. Neka je

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|u_n\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \leq C < \infty .$$

Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\mu\{\mathbf{x}\in\Omega : |u_n(\mathbf{x})| \geq k\} &= \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} 1\, d\mathbf{x}\\ &\leq \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} \frac{|u_n(\mathbf{x})|}{k}\, d\mathbf{x}\\ &\leq \int_\Omega \frac{|u_n(\mathbf{x})|}{k}\, d\mathbf{x} \leq \frac{C}{k}\,.\end{aligned}$$

Stoga za dovoljno veliki k gornje postaje po volji maleno. Zbog ekviintegrabilnosti vrijedi

$$\int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} |u_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leq \varepsilon\,,$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$, pa slijedi (13).

Obrnuto, pretpostavimo da vrijedi (13), te neka je zadan $\varepsilon > 0$. Tada postoji $k_0 \in \mathbf{N}$, takav da vrijedi

$$\int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} |u_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$ i svaki $k \geq k_0$. Uzmimo $\delta := \frac{\varepsilon}{2k_0}$, te neka je $E \subseteq \Omega$ proizvoljan izmjeriv podskup, takav da je $\mu(E) < \delta$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\int_E |u_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} &= \int_{E\cap\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\leq k_0\}} |u_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} + \int_{E\cap\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|> k_0\}} |u_n(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}\\ &\leq k_0\mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,\end{aligned}$$

pa je niz (u_n) ekviintegrabilan.

Q.E.D.

Jedan od najvažnijih kriterija slabe kompaktnosti u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ je sljedeći de la Vallée–Poussinov kriterij (v. Delacherie & Meyer [DM]).

Teorem 8. (**de la Vallée–Poussin**) *Neka je Ω ograničen izmjeriv skup. Niz izmjerivih funkcija (u_n) je nizovno slabo relativno kompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ ako i samo ako*

$$\sup_n \int_\Omega \psi(|u_n(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} < \infty\,,$$

za neku funkciju $\psi : [0,\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$, za koju vrijedi

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{\psi(t)}{t} = \infty\,.$$

∎

Primjer 1. U slučaju kada promatrani niz ne zadovoljava uvjet ekviintegrabilnosti, može doći do pojave *koncentracije* (v. P. L. Lions [L84,L85]), koji je odgovoran za nemogućnost integralne reprezentacije slabih limesa s pomoću Youngovih mjera. Promotrimo primjer jednog takvog niza.

Neka je $\Omega = \langle 0, 1\rangle$, te neka je niz zadan formulama

$$u_n(x) := \begin{cases} \frac{n^2}{2}\,, & x \in \left\langle \frac{k}{n+1} - \frac{1}{n^3}, \frac{k}{n+1} + \frac{1}{n^3}\right\rangle\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,\\ 0\,, & \text{inače}\,.\end{cases}$$

Tada su u_n jedinični vektori u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ za svaki n, te za svaku neprekinutu funkciju φ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(x)u_n(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k}{n+1}-\frac{1}{n^3}}^{\frac{k}{n+1}+\frac{1}{n^3}} \frac{n^2}{2}\varphi(x)\,dx \\ &= \frac{n^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n^3}\varphi(x_k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k) \longrightarrow \int_0^1 \varphi(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

pri $n \longrightarrow \infty$. Točke x_k su iz intervala $\left\langle \frac{k}{n+1} - \frac{1}{n^3}, \frac{k}{n+1} + \frac{1}{n^3} \right\rangle$. Dokazali smo stoga da vrijedi

$$u_n \rightharpoonup 1 \quad \text{slabo}-* \text{ u } \mathcal{M}(0,1)\,.$$

S druge pak strane, za čvrsti $r > 0$, ukoliko je $n^2/2 \geq r$, vrijedi

$$\{x \in \langle 0,1\rangle : |u_n(x)| \geq r\} = \{x \in \langle 0,1\rangle : u_n(x) \neq 0\}\,,$$

pa imamo

$$\int_{\{x\in\langle 0,1\rangle:|u_n(x)|\geq r\}} |u_n(x)|\,dx = 1\,.$$

Stoga vrijedi nejednakost

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}\sup_n \int_{\{x\in\langle 0,1\rangle:|u_n(x)|\geq r\}} |u_n(x)|\,dx \geq 1\,,$$

pa tada ovaj niz ne može biti slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ (v. Propozicija 1). ∎

Kada god ograničen niz u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ nije ekviintegrabilan, možemo *odstraniti* dio skupa Ω na kojemu se javlja efekt koncentracije, a na ostatku imati *dobar* niz. O tome govori *Chaconova lema o nagrizanju* (v. [Pe97])

Teorem 9. (**Chaconova lema**) *Neka je (u_n) ograničen niz u $\mathrm{L}^1(\Omega)$*

$$\sup_n \|u_n\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} = C < \infty\,.$$

Tada postoji podniz (označimo ga na isti način) i opadajući niz izmjerivih podskupova $\Omega_m \subseteq \Omega$, takav da $\mu(\Omega_m) \longrightarrow 0$, te funkcija $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ tako da vrijedi

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{u } \mathrm{L}^1(\Omega \setminus \Omega_m)\,,$$

za svaki $m \in \mathbf{N}$.

Dokaz. Za $n, k \in \mathbf{N}$ definirajmo

$$\alpha_{n,k} := \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} |u_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \geq 0\,.$$

Niz $(\sup_n \alpha_{n,k})_k$ monotono raste, te vrijedi

$$L := \lim_k \sup_n \alpha_{n,k} \geq 0\,.$$

Ukoliko je $L = 0$, tada (v. Propozicija 1) možemo uzeti $\Omega_m = \emptyset$ za svako m, jer u tom slučaju postoji slabo konvergentan podniz ovog niza. Pretpostavimo, stoga, da je $L > 0$. Za svako $l \in \mathbf{N}$ neka je n_l indeks za koji vrijedi

$$\alpha_{n_l,2^l} \geq \sup_n \alpha_{n,2^l} - \frac{1}{l}\,.$$

Stoga vrijedi

$$\alpha_{n_l,2^l} \geq L - \frac{1}{l}\,. \tag{14}$$

Zbog monotonosti također postoji limes

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \sup_l \int_{\left\{\mathbf{x}\in\Omega: r\leq|u_{n_l}(\mathbf{x})|<2^l\right\}} |u_{n_l}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = L' \geq 0\,.$$

Posebno, postoji podniz $(u_{n_{l(r)}})$ takav da je

$$\int_{\left\{\mathbf{x}\in\Omega: r\leq|u_{n_{l(r)}}(\mathbf{x})|<2^{l(r)}\right\}} |u_{n_{l(r)}}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \geq \frac{L'}{2}\,.$$

Imajući na umu monotonost niza $(\sup_n \alpha_{n,k})$ i gornji račun, slijedi

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{r\longrightarrow\infty} \sup_n \alpha_{n,r} \\
&\geq \lim_{r\longrightarrow\infty} \sup_l \alpha_{n_l,r} \\
&\geq \lim_{r\longrightarrow\infty} \alpha_{n_{l(r)},r} \\
&= \lim_{r\longrightarrow\infty} \Bigg(\int_{\left\{\mathbf{x}\in\Omega: r\leq|u_{n_{l(r)}}(\mathbf{x})|<2^{l(r)}\right\}} |u_{n_{l(r)}}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \\
&\qquad\qquad + \int_{\left\{\mathbf{x}\in\Omega: |u_{n_{l(r)}}(\mathbf{x})|\geq 2^{l(r)}\right\}} |u_{n_{l(r)}}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \Bigg) \\
&\geq \frac{L'}{2} + \lim_{r\longrightarrow\infty} \alpha_{n_{l(r)},2^{l(r)}} \geq \frac{L'}{2} + L\,.
\end{aligned}$$

Odatle slijedi $L' = 0$, drugim riječima

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \left(\sup_l \int_{\left\{\mathbf{x}\in\Omega: r\leq|u_{n_l}(\mathbf{x})|<2^l\right\}} |u_{n_l}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \right) = 0\,. \tag{15}$$

Definirajmo skup Ω_m formulom

$$\Omega_m := \bigcup_{l=m}^{\infty} \{\mathbf{x}\in\Omega : |u_{n_l}(\mathbf{x})| \geq 2^l\} \subseteq \Omega\,.$$

Vrijedi sljedeća nejednakost

$$2^l \mu\{\mathbf{x}\in\Omega : |u_{n_l}(\mathbf{x})| \geq 2^l\} \leq \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega: |u_{n_l}(\mathbf{x})|\geq 2^l\}} \leq C\,,$$

te
$$\mu(\Omega_m) \le \sum_{l=m}^{\infty} \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |u_{n_l}(\mathbf{x})| \ge 2^l\} \le C \sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{2^l} \longrightarrow 0\,, \quad \text{pri} \;\; n \longrightarrow \infty\,.$$
Time smo pokazali da niz (Ω_m) ima sljedeća svojstva:
(a) $\Omega_{m+1} \subseteq \Omega_m$, za svako m,
(b) $\mu(\Omega_m) \longrightarrow 0$.

S druge strane, imajući na umu (15), za čvrsti m imamo
$$\begin{aligned} 0 &\le \lim_{r\longrightarrow\infty} \sup_{l\ge m} \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega : r \le |u_{n_l}(\mathbf{x})|\}\setminus\Omega_m} |u_{n_l}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \\ &\le \lim_{r\longrightarrow\infty} \sup_{l\ge m} \int_{\left\{\mathbf{x}\in\Omega : r \le |u_{n_l}(\mathbf{x})| < 2^l\right\}} |u_{n_l}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \le 0\,. \end{aligned}$$
Posljednje pak ima za posljedicu da je niz (u_{n_l}) nizovno slabo relativno kompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega \setminus \Omega_m)$, za svaki m. Tvrdnja teorema sada slijedi iz sljedeće propozicije (v. Pe97).

Q.E.D.

Propozicija 2. *Neka je (u_n) niz funkcija koji je ograničen u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, takav da postoje skupovi $\Omega_{m+1} \subseteq \Omega_m \subseteq \Omega$, $\mu(\Omega_m) \longrightarrow 0$, takvi da je niz (u_n) nizovno relativno kompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega \setminus \Omega_m)$. Tada postoji podniz (u_{n_k}) i $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ takav da vrijedi*
$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{u } \mathrm{L}^1(\Omega \setminus \Omega_m)\,,$$
za svaki $m \in \mathbf{N}$. ∎

Definicija 11. Niz (u_n) u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ konvergira ka funkciji $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ u *nagrizajućem smislu* (engl. biting) i pišemo
$$u_n \overset{b}{\rightharpoonup} u \quad \text{u} \;\; \mathrm{L}^1(\Omega)\,,$$
ukoliko postoji nerastući niz izmjerivih skupova (Ω_m) takav da $\mu(\Omega_m) \longrightarrow 0$ i da
$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{u} \;\; \mathrm{L}^1(\Omega \setminus \Omega_m)\,,$$
za svaki m. ∎

Imajući u vidu gornju definiciju, Chaconovu lemu možemo preformulirati na sljedeći način: Ograničen niz u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ ima podniz koji konvergira u nagrizajućem smislu ka nekoj funkciji iz $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

U nekim se slučajevima nagrizajuća konvergencija može poboljšati do slabe konvergencije, tako da pripadne Youngove mjere ipak mogu reprezentirati slabi limes (v. odjeljak II.2). Sljedeća lema daje nužne i dovoljne uvjete za to poboljšanje

Lema 4. *Neka je $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$ niz izmjerivih funkcija u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, koje konvergiraju u nagrizajućem smislu ka funkciji $u \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Taj niz ima podniz koji konvergira slabo u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ ako i samo ako vrijedi*

(16) $$\liminf_{n} \int_\Omega u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \le \int_\Omega u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

Štoviše, niz (u_n) konvergira slabo u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ ka u ako i samo ako

(17) $$\limsup_{n} \int_\Omega u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \le \int_\Omega u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

Dokaz. Slaba konvergencija u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ očito povlači (16) odnosno (17). Pokažimo obrat.

Neka je (Ω_m) niz podskupova skupa Ω takav da $\Omega_{m+1} \subseteq \Omega_m$, $\mu(\Omega_m) \longrightarrow 0$, te

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{slabo u } \ \mathrm{L}^1(\Omega \setminus \Omega_m)\,,$$

za svako m. Prijelaskom na odgovarajući podniz možemo pretpostaviti da vrijedi

$$\lim_n \int_\Omega u_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_\Omega u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < \infty\,. \tag{18}$$

Pretpostavimo da niz (u_n) ne sadrži niti jedan podniz koji slabo konvergira u $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Prema Dunford–Pettisovom kriteriju postoji $\varepsilon > 0$ i monoton niz prirodnih brojeva (k_m), takav da za dovoljno veliki m vrijedi

$$\varepsilon \leq \int_{\Omega_m} u_{k_m}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

Posebno, za $i > m$, zbog $u_{k_i} \geq 0$, imamo

$$\varepsilon \leq \int_{\Omega_i} u_{k_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega_m} u_{k_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,,$$

te za čvrst m, za proizvoljan $i > m$ slijedi

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_{k_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_m} u_{k_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega\setminus\Omega_m} u_{k_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &\geq \varepsilon + \int_{\Omega\setminus\Omega_m} u_{k_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

Konačno, prijelaskom na limes po i slijedi

$$\lim_i \int_\Omega u_{k_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geq \varepsilon + \int_{\Omega\setminus\Omega_m} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

Kako to vrijedi za svaki m, vrijedi i nejednakost

$$\lim_i \int_\Omega u_{k_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geq \varepsilon + \int_\Omega u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,,$$

što je u suprotnosti s (18).

Q.E.D.

U dokazu McShaneovog teorema (v. Teorem II.12) trebat će nam i karakterizacija slabe konvergencije u L^p prostorima za $p > 1$. Dokaz sljedećeg važnog teorema može se naći u [Da82].

Teorem 10. (Karakterizacija slabe konvergencije u L^p) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren skup i $p \in \langle 1, \infty]$.*

Ako je $p \in \langle 1, \infty\rangle$, $f_n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^p(\Omega)} f$ ako i samo ako je ispunjeno

(a) $(\exists\, K > 0)\, (\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad \|f_n\|_{L^p} \leq K$, *i*

(b) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_D (f_n(x) - f(x))dx = 0$ *za svaki hiperkub $D \subseteq \Omega$.*

Niz (f_n) zadovoljava $f_n \xrightharpoonup{\ *\ } f$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ ako i samo ako vrijedi

(c) $(\exists\, K > 0)\, (\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad \|f_n\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq K$, *i*

(d) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_D (f_n(x) - f(x))dx = 0$ *za svaki hiperkub $D \subseteq \Omega$.* ∎

4. Vitalijev teorem o pokrivanju

Kraj ovog uvoda posvetit ćemo Vitalijevom teoremu o pokrivanju, koji igra važnu ulogu u analizi Youngovih mjera (odjeljci II.5 i III.2)

Definicija 12. Kažemo da se niz skupova (E_n) *prikladno sužava k točki* $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^d$ ukoliko vrijedi $(\exists\, \alpha > 0)\,(\forall\, i \in \mathbf{N})\,(\exists\, r_n > 0)\,(\exists\, E_n \subseteq K(\mathbf{a}, r_n))$

$$\mu(E_n) \geqslant \alpha\mu(K(\mathbf{a}, r_n)) \quad \& \quad \lim_n r_n = 0\,.$$

Kažemo da je familija otvorenih skupova $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *Vitalijev pokrivač* skupa $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ako za svaki $\mathbf{a} \in \Omega$ postoji niz skupova (A_n) u familiji $\mathcal{A}$ koji se prikladno sužava k točki $\mathbf{a}$.

∎

Teorem 11. *(***Vitalijev o pokrivanju***) Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i ograničen skup. Tada postoji prebrojiva familija $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ koja je Vitalijev pokrivač za Ω.*

Dokaz. Neka je $B \subseteq \mathbf{R}^d$ proizvoljna otvorena kugla takva da je $\Omega \subset B$. Za čvrsti $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$, konstruirajmo familiju skupova $\mathcal{A}_k$ s

$$\mathcal{A}_k := (\mathbf{a} + \varepsilon\Omega)_{\mathbf{a}\in\Omega, \varepsilon\in D(\mathbf{a},k)}\,,$$

pri čemu je

$$D(\mathbf{a}, k) := \left\{\varepsilon \in \left\langle 0, \frac{1}{k}\right\rangle : \mathbf{a} + \varepsilon\overline{\Omega} \subset \Omega\right\}\,.$$

Tvrdimo da je familija $\mathcal{A}_k$ Vitalijev pokrivač za skup Ω. Neka je $\mathbf{a} \in \Omega$ proizvoljan, i $\varepsilon \in D(\mathbf{a}, k)$. Definirajmo

$$\alpha := \frac{\mu(\Omega)}{\mu(B)}\,.$$

Tada iz translacijske invarijantnosti Lebesgueve mjere slijedi

$$(\forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{R}^d)(\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(\mathbf{a} + \varepsilon\Omega) = \alpha\mu(\mathbf{a} + \varepsilon B)\,,$$

odakle zaključujemo da se za proizvoljan niz (ε_i) u $D(\mathbf{a}, k)$ sa svojstvom

$$\lim_i \varepsilon_i = 0$$

niz skupova $E_i^k(\mathbf{a}) := \mathbf{a} + \varepsilon_i\Omega$ prikladno sužava k točki $\mathbf{a} \in \Omega$.

Konačno, odabirući prebrojiv gust podskup $\mathcal{G} \subseteq \Omega$, te definirajući

$$\mathcal{A} := (\mathbf{a} + \varepsilon_i\Omega)_{\mathbf{a}\in\mathcal{G}, i\in\mathbf{N}}\,,$$

dolazimo do prebrojivog Vitalijevog pokrivača za skup Ω.

Valja uočiti da iz gornje konstrukcije slijedi kako elemente Vitalijevog pokrivača možemo odabrati tako da im dijametri budu po volji maleni, drugim riječima, da ti skupovi budu po volji malene mjere.

Q.E.D.

Korolar 2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i ograničen skup i $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Vitalijev pokrivač za Ω. Tada za svaki $\delta > 0$ postoji prebrojiva podfamilija u parovima disjunktnih skupova (A_{λ_i}) takva da vrijedi*

$$\mu\left(\Omega\backslash\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\lambda_i}\right) = 0 \quad \& \quad (\forall\, i \in \mathbf{N}) \quad \mu(A_{\lambda_i}) \leqslant \delta\,.$$

∎

Za dokaz korolara vidjeti npr. [EG].

Od posebne će nam koristi biti sljedeća lema, a posljedica Vitalijevog teorema o pokrivanju:

Lema 5. *Neka je $p \in [1, \infty\rangle$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i ograničen skup takav da je $\mu(\partial\Omega) = 0$, te neka je $N \subseteq \Omega$ takav da je $\mu(N) = 0$. Neka je $r_k : \Omega \backslash N \longrightarrow \mathbf{R}^+$ proizvoljan niz preslikavanja, te neka je $f_j \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ proizvoljan niz.*

Tada postoji prebrojivo točaka $\mathbf{a}_{k,i} \in \Omega \backslash N$ i prebrojivo pozitivnih brojeva $\varepsilon_{k,i}$ tako da vrijedi

(a) $(\forall\, k, i \in \mathbf{N}) \quad \varepsilon_{k,i} \leqslant r_k(\mathbf{a}_{k,i})\,,$

(b) $(\forall\, k \in \mathbf{N}) \quad i_1 \neq i_2 \Rightarrow \left\{\mathbf{a}_{k,i_1} + \varepsilon_{k,i_1}\overline{\Omega}\right\} \cap \left\{\mathbf{a}_{k,i_2} + \varepsilon_{k,i_2}\overline{\Omega}\right\} = \emptyset\,,$

(c) $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{\mathbf{a}_{k,i} + \varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}\right\} \cup N_k\,, \quad \mu(N_k) = 0\,,$

(d) $(\forall\, j \in \mathbf{N})(\forall\, \xi \in \mathrm{L}^q(\Omega))$

$$\int_\Omega \xi(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_j(\mathbf{a}_{k,i}) \int_{\mathbf{a}_{k,i} + \varepsilon_{k,i}\Omega} \xi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

Dokaz. Definirajmo skupove

$$D_j := \left\{\mathbf{a} \in \Omega : \lim_{\rho \longrightarrow 0} \frac{1}{\mu(\mathbf{a} + \rho\Omega)} \int_{\mathbf{a} + \rho\Omega} |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a})|^p\, d\mathbf{x} = 0\right\}\,,$$

$$D := \bigcap_{j=1}^{\infty} D_j\,.$$

Prema Lebesgue-Besicovitchevom teoremu o deriviranju (v. [EG]) slijedi

$$\mu(\Omega \backslash D_j) = 0 \quad \text{i} \quad \mu(\Omega \backslash D) = 0\,.$$

Stoga za $A := \Omega \backslash N$ zaključujemo da je familija

$$\mathcal{F}_k := \Big\{\mathbf{a} + \varepsilon\overline{\Omega} \subseteq \Omega : \mathbf{a} \in A, \varepsilon \leqslant r_k(\mathbf{a}),$$
$$\frac{1}{\mu(\mathbf{a} + \varepsilon\Omega)} \int_{\mathbf{a} + \varepsilon\Omega} |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a})|^p d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{k}, 1 \leqslant j \leqslant k\Big\}$$

Vitalijev pokrivač za A. Naime, lako se vidi da se za proizvoljnu točku $\mathbf{x} \in A$ niz $(\mathbf{x} + \frac{1}{m}\overline{\Omega})$, koji zadovoljava sve pretpostavke iz definicije $\mathcal{F}_k$, uz

$$\alpha := \frac{\mu(\Omega)}{\mu(K(\mathbf{x}, 1))}$$

prikladno sužava k točki $\mathbf{x}$.

Stoga po teoremu 11 postoji prebrojiva podfamilija u parovima disjunktnih skupova koja je također Vitalijev pokrivač. Točnije, možemo pisati

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{\mathbf{a}_{k,i} + \varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}\right\} \cup N_k'\,, \quad \mu(N_k') = 0\,,$$

odnosno

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\mathbf{a}_{k,i} + \varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}\} \cup N_k\,, \quad \mu(N_k) = 0\,.$$

Odaberimo proizvoljnu funkciju $\xi \in \mathrm{L}^q(\Omega)$, te $k \geqslant j$. Tada, koristeći Hölderovu nejednakost za integrale i nizove, slijedi ocjena

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \xi(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{\infty} f_j(\mathbf{a}_{k,i}) \int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \\
&\quad = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} \xi(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{\infty} f_j(\mathbf{a}_{k,i}) \int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \\
&\quad = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} (f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a}_{k,i}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \\
&\quad \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a}_{k,i}|^p\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} |\xi(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a}_{k,i}|^p\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} |\xi(\mathbf{x})|^q\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \leqslant \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega})\right)^{\frac{1}{p}} \|\xi\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{k,i}^n\right)^{\frac{1}{p}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|\xi\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Nadalje, uočimo da vrijedi

$$\varepsilon_{k,i}^n = \frac{\mu(\mathbf{a}_{k,i} + \varepsilon_{k,i}\Omega)}{\mu(\Omega)}\,.$$

Budući da je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathbf{a}_{k,i} + \varepsilon_{k,i}\Omega) = \mu(\Omega)\,,$$

zaključujemo da vrijedi jednakost

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{k,i}^n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathbf{a}_{k,i} + \varepsilon_{k,i}\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1\,.$$

Time smo pokazali nejednakost

$$\left|\int_\Omega \xi(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{\infty} f_j(\mathbf{a}_{k,i}) \int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}} \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|\xi\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}\,,$$

čime je dokazana i posljednja tvrdnja leme.

Q.E.D.

II. Analiza Youngovih mjera

1. Teorem egzistencije

Podsjetimo se da je preslikavanje $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{R}^r) = (\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))'$ slabo–$*$ izmjerivo ukoliko je za svaku test funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ funkcija

$$\mathbf{x} \mapsto \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) := \langle \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \varphi \rangle$$

izmjeriva. U prošlom je poglavlju definiran prostor $\mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$ kao skup svih klasa ekvivalencije slabo–$*$ izmjerivih preslikavanja $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{R}^r)$, koja su esencijalno ograničena. To je ambijentni prostor za Youngove mjere. Naime, pokazat ćemo da je skup svih Youngovih mjera upravo jedinična sfera u $\mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$.

Prije nego li prijeđemo na osnovni teorem o Youngovim mjerama, definirajmo još jednu vrstu konvergencije funkcija.

Definicija 1. Kažemo da niz izmjerivih funkcija $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *konvergira u mjeri* ka izmjerivom skupu $K \subseteq \mathbf{R}^r$, ako za svaku otvorenu okolinu U skupa K vrijedi

$$\lim_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : u_n(\mathbf{x}) \notin U\} = 0\,.$$

∎

U dokazu idućeg teorema važnu će ulogu odigrati sljedeća jednostavna lema

Lema 1. *Neka je $v_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz izmjerivih funkcija, te neka je $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^r)$ takva da $f \circ v_n \longrightarrow 0$ u mjeri. Tada $f \circ v_n \rightharpoonup 0$ slabo–$*$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.*

∎

Teorem 1. (**Osnovni teorem o Youngovim mjerama**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ Lebesgue izmeriv skup, $K \subseteq \mathbf{R}^r$ zatvoren, te neka je zadan niz izmjerivih funkcija $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ takav da $u_n \longrightarrow K$ u mjeri. Tada postoji podniz (u_{n_k}) i slabo–$*$ izmjeriva familija nenegativnih Radonovih mjera $\boldsymbol{\nu} := (\nu_\mathbf{x})_{\mathbf{x}\in\Omega}$ (parametrizirana mjera) za koju vrijedi:*

(a) $\|\nu_\mathbf{x}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)} \leq 1 \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,,$
(b) $\operatorname{supp} \nu_\mathbf{x} \subseteq K \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,,$
(c) $(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)) \quad \varphi \circ u_{n_k} \rightharpoonup \varphi_{\boldsymbol{\nu}}$ *slabo–$*$ u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)\,.$

Ako k tome niz (u_n) zadovoljava i uvjet ograničenosti

$$(\forall\, R > 0) \quad \lim_k \sup_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega \cap K(\mathbf{0}, R) : |u_n(\mathbf{x})| \geq k\} = 0\,, \tag{1}$$

tada je pripadna parametrizirana mjera u stvari Youngova mjera.

Nadalje, za svaki izmjeriv podskup $A \subseteq \Omega$, te za svaku Carathéodoryjevu funkciju $f : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$, za koju je niz $(f(\cdot, u_n))$ nizovno slabo relativno kompaktan u $\mathrm{L}^1(A)$, vrijedi

$$f(\cdot, u_n) \rightharpoonup f_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^1(A)\,.$$

Dokaz. Za dani $n \in \mathbf{N}$, neka je $\boldsymbol{\nu}^n$ Youngova mjera pridružena funkciji u_n. Prema Lemi 2, skoro svuda vrijedi $\nu^n_\mathbf{x} = \delta_{u_n(\mathbf{x})}$. Kako je

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad \|\boldsymbol{\nu}^n\|_{\mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))} = 1\,,$$

to iz diskusije na početku odjeljka slijedi da iz niza $(\boldsymbol{\nu}^n)$ možemo izdvojiti podniz koji konvergira slabo–$*$ u prostoru $\mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$ k parametriziranoj mjeri $\boldsymbol{\nu}$. Označimo taj podniz ponovo na isti način, kao i pripadni podniz funkcija (u_n). Tada vrijedi

$$(\forall\, f \in \mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))) \qquad \int_\Omega f(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \longrightarrow \int_\Omega \langle \nu_\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \cdot)\rangle\, d\mathbf{x}\,.$$

Posebno, promatramo li test funkcije oblika $f := \psi \boxtimes \varphi$, pri čemu je $\psi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, a $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$, slijedi tvrdnja (c).

Budući da je norma $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty_*(\Omega;\mathcal{M}(\mathbf{R}^r))}$ slabo–$*$ poluneprekinuta odozdo, to vrijedi i tvrdnja (a).

Dakle, preostaje pokazati (b). Neka je $K \neq \mathbf{R}^r$ zatvoren skup (u suprotnom je tvrdnja trivijalno ispunjena), te neka je $g \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ takva da je $g_{|K} = 0$. Za dani $\varepsilon > 0$ promotrimo skup

$$U_\varepsilon := \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r : |g(\mathbf{y})| < \varepsilon\}\,.$$

U tom je slučaju tvrdnja $u_n(\mathbf{x}) \notin U_\varepsilon$ ekvivalentna činjenici $|g(u_n(\mathbf{x}))| \geq \varepsilon$. No tada, zbog pretpostavke da niz (u_n) konvergira u mjeri ka skupu K, vrijedi

$$\lim_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |g(u_n(\mathbf{x}))| \geq \varepsilon\} = \lim_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : u_n(\mathbf{x}) \notin U_\varepsilon\} = 0\,.$$

Drugim riječima, $g \circ u_n \longrightarrow 0$ u mjeri. No tada iz Leme 1 slijedi da $g \circ u_n \rightharpoonup 0$ slabo–$*$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Iskoristimo li ponovo slabu–$*$ konvergenciju niza $(\boldsymbol{\nu}^n)$ uzimajući test funkcije oblika $f := \psi \boxtimes \varphi$, pri čemu je $\psi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, a $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ takva da je $\varphi_{|K} = 0$, slijedi

$$\int_\Omega \psi(\mathbf{x})\langle \nu_\mathbf{x}, \varphi\rangle \, d\mathbf{x} = \lim_n \int_\Omega \psi(\mathbf{x})(\varphi \circ u_n)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0\,.$$

No tada slijedi da za svaku test funkciju φ, koja se poništava na danom zatvorenom skupu K, vrijedi

$$\langle \nu_\mathbf{x}, \varphi\rangle = 0 \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,,$$

što povlači i tvrdnju (b).

Ovime je dokazan prvi dio teorema. Pretpostavimo da uz prethodno vrijedi i uvjet ograničenosti (1). Za $m \in \mathbf{N}$ definirajmo niz funkcija $\theta_m \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ formulama

$$\theta_m(\boldsymbol{\lambda}) := \begin{cases} 1\,, & |\boldsymbol{\lambda}| \leq m\,, \\ 1 + m - |\boldsymbol{\lambda}|\,, & m < |\boldsymbol{\lambda}| \leq m+1\,, \\ 0\,, & |\boldsymbol{\lambda}| > m+1\,. \end{cases}$$

Tada za proizvoljan ograničen i izmjeriv skup $E \subseteq \Omega$ vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{\mu(E)} \int_E \theta_m(u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} &= \frac{1}{\mu(E)} \int_E \langle \nu_\mathbf{x}, \theta_m\rangle \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E \|\nu_\mathbf{x}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)}\, d\mathbf{x}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

S druge strane, vrijedi

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E (1 - \theta_m(u_n(\mathbf{x})))\, d\mathbf{x} \leq \frac{\mu\{\mathbf{x} \in E : |u_n(\mathbf{x})| \geq m\}}{\mu(E)}\,.$$

Odatle slijedi

$$1 - \frac{1}{\mu(E)} \int_E \theta_m(u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \leq \frac{\sup_n \mu\{\mathbf{x} \in E : |u_n(\mathbf{x})| \geq m\}}{\mu(E)}\,.$$

Prijelaskom na limes po n, te korištenjem (2) slijedi

$$(\forall\, m \in \mathbf{N}) \quad 1 - \frac{1}{\mu(E)} \int_E \|\nu_\mathbf{x}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)}\, d\mathbf{x} \leq \frac{\sup_n \mu\{\mathbf{x} \in E : |u_n(\mathbf{x})| \geq m\}}{\mu(E)}\,,$$

a odatle, prijelaskom na limes po m, iz uvjeta rasta, slijedi da za proizvoljan izmjeriv ograničen podskup E vrijedi

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E \|\nu_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)}\,d\mathbf{x} = 1\,,$$

odakle zaključujemo da vrijedi

$$\|\nu_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)} = 1 \quad (\text{s.s. } \mathbf{x}\in\Omega)\,,$$

odnosno da je $\boldsymbol{\nu}$ Youngova mjera.

Pokažimo još posljednju tvrdnju. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je $f:\mathbf{R}^r\longrightarrow\mathbf{R}$ neprekinuta funkcija, takva da je niz $(f\circ u_n)$ nizovno slabo relativno kompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Prema Dunford–Pettisovom teoremu (v. [DS, p292]) i funkcije $f^{\pm}$ su takve, pa možemo dodatno pretpostaviti da je f nenegativna. Pretpostavimo k tome i da je $A\subseteq\Omega$ ograničen, te neka je χ slabi limes niza $(f\circ u_n)$ u prostoru $\mathrm{L}^1(A)$. Cilj nam je dokazati da vrijedi

$$\chi(\mathbf{x}) = f_\nu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^r} f(\boldsymbol{\lambda})\,d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})\,.$$

Za $m\in\mathbf{N}$ definirajmo niz funkcija $f_m := f\theta_m$ u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$. Tvrdimo da za proizvoljnu funkciju $\psi\in\mathrm{L}^\infty(A)$ vrijedi

$$\lim_m \int_A \psi(\mathbf{x})f_m(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = \int_A \psi(\mathbf{x})f(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\,,$$

uniformno po $n\in\mathbf{N}$.

Da bismo to pokazali, ocijenimo razliku

$$\begin{aligned}\left|\int_A \psi(\mathbf{x})f_m(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} - \int_A \psi(\mathbf{x})f(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\right| &\le \int_A |\psi(\mathbf{x})||\theta_m(\mathbf{x})-1|f(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\\ &\le C\int_{\{\mathbf{x}\in A:|u_n(\mathbf{x})|\ge m\}} f(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

S druge strane, iz Dunford–Pettisovog teorema slijedi

$$(\forall\,\varepsilon>0)\,(\exists\,c>0)\quad \sup_n \int_{\{\mathbf{x}\in A:f(u_n(\mathbf{x}))\ge c\}} f(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\{\mathbf{x}\in A:|u_n(\mathbf{x})|\ge m\}} f(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} &= \int_{\{\mathbf{x}\in A:|u_n(\mathbf{x})|\ge m\}\cap\{\mathbf{x}\in A:f(u_n(\mathbf{x}))\ge c\}} f(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\\ &\quad+\int_{\{\mathbf{x}\in A:|u_n(\mathbf{x})|\ge m\}\{\mathbf{x}\in A:f(u_n(\mathbf{x}))<c\}} f(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + c\,\mu\{\mathbf{x}\in A: |u_n(\mathbf{x})|\ge m\}\,.\end{aligned}$$

Zbog ograničenosti niza (u_n) postoji $m_0\in\mathbf{N}$ takav da je za svako $m\ge m_0$ posljednji član u gornjoj nejednakosti manji od $\frac{\varepsilon}{2c}$, drugim riječima, čitav integral je manji od ε, neovisno o $n\in\mathbf{N}$. Time smo dokazali uniformnu konvergenciju.

S druge pak strane, tvrdnja (c) povlači

$$\lim_n \int_A \psi(\mathbf{x}) f_m(u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_A \psi(\mathbf{x}) \langle \nu_{\mathbf{x}}, f_m \rangle\, d\mathbf{x}\,.$$

Načinimo li rastav

$$\begin{aligned}\int_A \psi(\mathbf{x})(\langle \nu_{\mathbf{x}}, f_m\rangle - \chi(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = &\int_A \psi(\mathbf{x})\left(\langle \nu_{\mathbf{x}}, f_m\rangle - f_m(u_n(\mathbf{x}))\right)\, d\mathbf{x} \\ &+ \int_A \psi(\mathbf{x})\left(f_m(u_n(\mathbf{x})) - f(u_n(\mathbf{x}))\right)\, d\mathbf{x} \\ &+ \int_A \psi(\mathbf{x})\left(f(u_n(\mathbf{x})) - \chi(\mathbf{x})\right)\, d\mathbf{x}\,,\end{aligned}$$

lako se vidi da korištenjem prethodnih razmatranja gornju razliku možemo načiniti po volji malom za dovoljno veliki m.

S druge strane, zbog činjenice da je (f_m) rastući niz nenegativnih funkcija koji po točkama konvergira k f, zaključujemo da je $(\langle \nu_{\mathbf{x}}, f_m\rangle)$, za skoro svaki $\mathbf{x}$ iz Ω, također rastući niz nenegativnih funkcija, koji monotono skoro svuda konvergira ka $f_{\boldsymbol{\nu}}$, i stoga, primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji, slijedi

$$\int_A \psi(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_m \int_A \psi(\mathbf{x})\langle \nu_{\mathbf{x}}, f_m\rangle\, d\mathbf{x} = \int_A \psi(\mathbf{x}) f_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,,$$

za svaku test funkciju $\psi \in \mathrm{L}^\infty(A)$ takvu da je $\psi \geq 0$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$). No tada gornja jednakost očito vrijedi za svaku test funkciju ψ, što ima za posljedicu

$$f_{\boldsymbol{\nu}} \in \mathrm{L}^1(A) \quad \& \quad \chi(\mathbf{x}) = f_n u(\mathbf{x}) \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in A)\,.$$

U slučaju da skup A nije ograničen, ponovimo gornje razmatranje za skup $A_R := A \cap K(\mathbf{0}, R)$, za $R > 0$, te gornji zaključak slijedi za skoro svaki $\mathbf{x}$ iz A_R. Kako se svaki $\mathbf{x} \in A$ može dobiti kao element A_R, za dovoljno velik R, to tvrdnja vrijedi na A.

Q.E.D.

U slučaju konkretnog niza funkcija (u_n) od interesa je odrediti za koje je funkcije f kompozicija $(f \circ u_n)$ slabo nizovno relativno kompaktna u $\mathrm{L}^1(\Omega)$. U slučaju kad je niz (u_n) ograničen u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)$, lako se vidi da za proizvoljnu neprekinutu funkciju $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ i dani podniz vrijedi

$$f \circ u_n \rightharpoonup f_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo}-* \ \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega)\,.$$

S druge pak strane, kad je Ω ograničen i kad je niz (u_n) ograničen u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$, tada se može zaključiti da (v. Schonbek [S])

$$f \circ u_n \rightharpoonup f_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^r(\Omega)\,,$$

za svaku neprekinutu funkciju $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$, koja zadovoljava ocjenu

$$|f(\boldsymbol{\lambda})| \leq C(1 + |\boldsymbol{\lambda}|^q)\,,$$

pri čemu je $q > 0$ i $1 \leq r < \frac{p}{q}$. Posebno, u slučaju kada je $q < p$ (to jest, kada vrijedi $f(\boldsymbol{\lambda}) = o(|\boldsymbol{\lambda}|^p)$, pri $|\boldsymbol{\lambda}| \longrightarrow \infty$), iz de la Vallée Poussinovog kriterija slijedi da je $(f \circ u_n)$ nizovno slabo relativno kompaktno u $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Uvjet ograničenosti iz iskaza teorema je vrlo slab i može se iskazati u ekvivalentnoj formi danoj sljedećom lemom.

Lema 2. *Uvjet ograničenosti (1) je ispunjen ako i samo ako vrijedi sljedeće: Za svaki $R > 0$ postoji neprekinuta funkcija $g_R : [0, \infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$, takva da vrijedi*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\longrightarrow\infty} g_R(t) = \infty \,, \\ (3) \qquad &\sup_n \int_{\Omega\cap K(\mathbf{0},R)} g_R(|u_n(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} < \infty \,. \end{aligned}$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi (3). Tada iz činjenice da je funkcija g_R neopadajuća slijedi

$$\sup_n \mu \left\{\mathbf{x} \in \Omega \cap K(\mathbf{0}, R) : |u_n(\mathbf{x})| \geq t\right\} \, g_R(t) \leq \sup_n \int_{\Omega\cap K(\mathbf{0},R)} g_R(|u_n(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} \,.$$

Odatle i iz (3) slijedi uvjet rasta.

Obrnuto, ukoliko vrijedi uvjet rasta, tada možemo odabrati niz $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j < t_{j+1} < \ldots$, takav da vrijedi

$$\sup_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega \cap K(\mathbf{0}, R) : |u_n(\mathbf{x})| \geq t_j\} \leq \frac{1}{j^2} \,.$$

Definiramo li preslikavanje $\bar{g}_R(t) := j$ za $t \in [t_j, t_{j+1}\rangle$, $j \in \mathbf{N}$, tada odabirom odgovarajuće neprekinute funkcije $g_r \leq \bar{g}_R$, slijedi (3).

Q.E.D.

Posebno je važan primjer funkcije $g_R(t) := t^p$, za $p \in [1, \infty\rangle$. U tom slučaju svaki ograničen niz u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ određuje Youngovu mjeru u smislu gornjeg teorema. Radi jednostavnosti, u daljnjem ćemo pretpostavljati da je Ω ograničen, a skup svih Youngovih mjera na $\mathbf{R}^r$ određenih ograničenim nizovima u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$ označavat ćemo s $\mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$. U narednim će odjeljcima biti više riječi o karakterizaciji takvih Youngovih mjera.

Važno je uočiti da je za identifikaciju Youngove mjere pridružene određenom nizu funkcija (u_n) dovoljno provjeriti da za proizvoljnu test funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ vrijedi

$$\varphi \circ u_n \rightharpoonup \varphi_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo--}* \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega) \,.$$

Štoviše, dovoljno je provjeriti da vrijedi

$$\lim_n \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi(u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \,,$$

za funkcije ξ i φ koje pripadaju prebrojivim gustim podskupovima prostora $\mathrm{L}^1(\Omega)$ i $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$. Ukoliko je to zadovoljeno za danu Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu}$, a niz (u_n) zadovoljava uvjet ograničenosti (1), tada je $\boldsymbol{\nu}$ Youngova mjera pridružena nizu (u_n) i stoga vrijedi

$$\psi(\cdot, u_n) \rightharpoonup \psi_{\boldsymbol{\nu}} \,,$$

za svaku Carathéodoryjevu funkciju ψ za koju je niz $(\psi(\cdot, u_n))$ slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Sljedeća lema koristi ovu napomenu.

Lema 3. *Neka su nizovi (u_n) i (v_n) ograničeni u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$.*

(a) Ako $\mu\{\mathbf{x} \in \Omega : u_n(\mathbf{x}) \neq v_n(\mathbf{x})\} \longrightarrow 0$, tada oba niza određuju istu Youngovu mjeru.

(b) Ukoliko $u_n - v_n \longrightarrow 0$ jako u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$, tada ponovo oba niza određuju istu Youngovu mjeru

Dokaz. Neka je $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$, te neka je $\xi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Tada vrijedi

$$\left|\int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi(u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} - \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi(v_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\right|$$
$$\leq \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:u_n(\mathbf{x})\neq v_n(\mathbf{x})\}} 2\|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^r)}|\xi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\,.$$

Integral na desnoj strani očito trne k nuli pri $n \longrightarrow \infty$, pa zaključujemo kako oba niza $(\varphi \circ u_n)$ i $(\varphi \circ v_n)$ imaju isti slabi limes, stoga iz prethodne napomene zaključujemo kako (u_n) i (v_n) generiraju istu Youngovu mjeru. U dokazu druge tvrdnje na gornju razliku primjenjujemo teorem o dominiranoj konvergenciji.

Q.E.D.

Primjer 1. Neka je niz (u_n) uniformno ograničen u $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^r)$, te neka je $\boldsymbol{\nu}$ pripadna Youngova mjera. Promotrimo niz režućih operatora

$$T_k(\boldsymbol{\lambda}) := \begin{cases} \boldsymbol{\lambda}\,, & |\boldsymbol{\lambda}| \leq k\,,\\ k\frac{\boldsymbol{\lambda}}{|\boldsymbol{\lambda}|}\,, & |\boldsymbol{\lambda}| > k\,.\end{cases}$$

Za proizvoljan podniz $(T_{k_n})_n$ pripadna Youngova mjera niza $(T_{k_n}(u_n))_n$ je ponovno $\boldsymbol{\nu}$. Naime, primijetimo da vrijedi

$$\mu\{\mathbf{x}\in\Omega : |u_n(\mathbf{x})| \geq k_n\} \leq \frac{\sup \|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}}{k_n^p} \longrightarrow 0\,,$$

pa zaključak slijedi iz tvrdnje (a) prethodne leme. ∎

2. Reprezentacija slabih limesa s pomoću Youngovih mjera

Jedan od osnovnih nedostataka teorema egzistencije je taj što, da bismo imali integralnu reprezentaciju slabih limesa $(f(\cdot,u_n))$ s obzirom na danu Youngovu mjeru pridruženu nizu izmjerivih funkcija (u_n), moramo imati slabu konvergenciju u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ niza $(f(\cdot,u_n))$. Na žalost, uniformne ocjene u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ nisu dovoljne da bi osigurale tu konvergenciju. S-toga je nužno koristiti kriterije slabe kompaktnosti u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ kako bismo odredili za koje Carathéodoryjeve funkcije $f:\Omega\times\mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ imamo ispunjenu pretpostavku teorema egzistencije. Sljedeći teorem daje odgovor na to pitanje, a kao jednostavna posljedica slijedi i razmatranje o Youngovim mjerama pridruženim ograničenim nizovima u L^p prostorima iz prethodnog odjeljka.

Propozicija 1. *Neka je $f:\Omega\times\mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ Carathéodoryjeva funkcija takva da vrijedi*

$$|f(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})| \leq \tilde{f}(|\boldsymbol{\lambda}|) \quad (\text{s.s. } \mathbf{x}\in\Omega)\,,$$

pri čemu je $\tilde{f} \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. Neka je, nadalje, (u_n) niz izmjerivih funkcija takav da za nenegativnu neprekinutu i neopadajuću funkciju g, takvu da je $\lim_{t\longrightarrow\infty} g(|t|) = \infty$, vrijedi

$$\sup_n \int_\Omega g(|u_n(\mathbf{x})|)\,d\mathbf{x} = C < \infty\,.$$

Ukoliko je

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{\tilde{f}(t)}{g(t)} = 0\,, \tag{4}$$

tada vrijedi

$$f(\cdot,u_n) \rightharpoonup f_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{u } \mathrm{L}^1(\Omega)\,,$$

gdje je $\boldsymbol{\nu}$ Youngova mjera pridružena nizu (u_n).

Dokaz. Cilj je, dakle, dokazati da vrijedi

$$\lim_n \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,, \tag{5}$$

za proizvoljnu funkciju $\xi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Budući da je $\tilde{f} \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, to možemo naći niz realnih brojeva (m_k), takav da $m_k \longrightarrow \infty$, te da je ispunjeno

$$\left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r : \tilde{f}(|\boldsymbol{\lambda}|) \geq k \right\} \subseteq \{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r : |\boldsymbol{\lambda}| \geq m_k \}\,.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_{\{\mathbf{x}\in\Omega : |f(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))| \geq k\}} |f(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))|\, d\mathbf{x} &\leq \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega : \tilde{f}(|u_n(\mathbf{x})|) \geq k\}} \tilde{f}(|u_n(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} \\
&\leq \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega : |u_n(\mathbf{x})| \geq m_k\}} \tilde{f}(|u_n(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} \\
&\leq \frac{1}{M_k} \int_\Omega g(|u_n(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} \leq \frac{C}{M_k} \longrightarrow 0\,,
\end{aligned}$$

uniformno po n, pri čemu je $g(t) \geq M_k \tilde{f}(t)$, za $t \geq m_k$, te $M_k \longrightarrow \infty$. Ovo povlači slabu konvergenciju niza $(f(\cdot, u_n))$ u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, pa iz teorema egzistencije (v. teorem 1) slijedi reprezentacija slabog limesa (5).

Q.E.D.

U slučaju kada nemamo ocjene iz propozicije 1, već samo uniformnu ocjenu u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, Chaconova lema daje sljedeći rezultat

Propozicija 2. *Neka je (u_n) niz izmjerivih funkcija, kojemu je pridružena Youngova mjera $\boldsymbol{\nu}$. Ukoliko je $f : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ Carathéodoryjeva funkcija takva da je niz $(f(\cdot, u_n))$ uniformno ograničen u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, tada, do na podniz, vrijedi sljedeća konvergencija*

$$f(\cdot, u_n) \xrightarrow{b} f_{\boldsymbol{\nu}}\,.$$

Dokaz. Iz Chaconove leme slijedi postojanje niza izmjerivih podskupova (Ω_m) i funkcije $\tilde{f} \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, takvih da $\mu(\Omega_m) \longrightarrow 0$, te

$$f(\cdot, u_n) \rightharpoonup \tilde{f}\,, \quad \text{u} \;\; \mathrm{L}^1(\Omega \setminus \Omega_m)\,,$$

za svaki m. Prema teoremu egzistencije za Youngove mjere slijedi da je $\tilde{f} = f_{\boldsymbol{\nu}}$. Kako $\mu(\Omega_m) \longrightarrow 0$, zaključujemo da je $\tilde{f} = f_{\boldsymbol{\nu}}$, (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$).

Q.E.D.

Sljedeća je lema, koja će biti od koristi u analizi gradijentnih Youngovih mjera (v. lema III.10), je neposredna posljedica leme I.4.

Lema 4. *Neka je (u_n) niz vektorskih funkcija s pripadnom Youngovom mjerom $\boldsymbol{\nu}$. Ukoliko za nenegativnu Carathéodoryjevu funkciju φ_0 vrijedi*

$$\lim_n \int_\Omega \varphi_0(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} \varphi_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,,$$

tada, za svaki izmjeriv skup $E \subseteq \Omega$ i svaku Carathéodoryjevu funkciju φ koja zadovoljava nejednakost $|\varphi| \leq C(1 + \varphi_0)$, vrijedi

$$\lim_n \int_E \varphi(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_E \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,.$$

∎

Dokažimo jednu korisnu propoziciju.

Propozicija 3. *Neka je* (u_n) *niz izmjerivih funkcija s pripadnom parametriziranom mjerom* $\boldsymbol{\nu}$. *Tada, za svaku nenegativnu Carathéodoryjevu funkciju* ψ *i svaki izmjeriv podskup* $E \subseteq \Omega$, *vrijedi*

$$\liminf_n \int_E \psi(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \geq \int_E \int_{\mathbf{R}^r} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,.$$

Dokaz. Ukoliko desna strana gornje nejednakosti nije konačna, nema se što za dokazivati. U suprotnom je niz $(\psi(\cdot, u_n))$ ograničen u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, stoga vrijedi

$$\psi(\cdot, u_n) \xrightarrow{b} \psi_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{u } \mathrm{L}^1(E)\,.$$

Stoga prema lemi I.4 nije moguće imati strogu nejednakost

$$\int_E \psi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} > \liminf_n \int_E \psi(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\,.$$

Q.E.D.

Na kraju ovog odjeljka pogledajmo kako jaka konvergencija utječe na Youngove mjere. Budući da Youngove mjere na neki način bilježe oscilacije nizova koje promatramo, a jaka konvergencija upravo isključuje taj fenomen, očekujemo da će Youngove mjere pridružene jako konvergentnim nizovima biti u izvjesnom smislu trivijalne. Sljedeći rezultat opravdava to očekivanje u slučaju $g(t) = t^p$.

Teorem 2. *Neka je* (u_n) *niz u* $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$, *takav da je niz* $(|u_n|^p)$ *slabo konvergentan u* $\mathrm{L}^1(\Omega)$, *za neki* $p \in [1, \infty\rangle$. *Neka je* $\boldsymbol{\nu}$ *tom nizu pridružena Youngova mjera. Tada* $u_n \longrightarrow u$ *jako u* $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$ *ako i samo ako vrijedi* $\nu_{\mathbf{x}} = \delta_{u(\mathbf{x})}$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$).

Dokaz. Promotrimo Carathéodoryjevu funkciju $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := |\boldsymbol{\lambda} - u(\mathbf{x})|^p$. Zbog pretpostavki teorema, niz $(f(\cdot, u_n))$ je slabo relativno konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, pa stoga vrijedi integralna reprezentacija

$$\lim_n \int_\Omega f(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\delta_{u(\mathbf{x})} d\mathbf{x}\,,$$

pa imamo jaku konvergenciju $u_n \longrightarrow u$ u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$.

Obrnuto, ukoliko vrijedi $u_n \longrightarrow u$, jako u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$, tada za svaku neprekinutu i ograničenu funkciju $\psi : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ imamo također jaku konvergenciju $\psi \circ u_n \longrightarrow \psi \circ u$, u $\mathrm{L}^p(\Omega)$. To posebno povlači da za svaki izmjeriv skup $E \subseteq \Omega$ vrijedi

$$\int_E \psi(u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_E \int_{\mathbf{R}^r} \psi(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,.$$

Odatle zaključujemo da vrijedi

$$\psi(u(\mathbf{x})) = \int_{\mathbf{R}^r} \psi(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,.$$

Kako je ψ proizvoljno, slijedi jednakost $\nu_{\mathbf{x}} = \delta_{u(\mathbf{x})}$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$).

Q.E.D.

Valja uočiti da gornji rezultat ne vrijedi u slučaju kada je $p = \infty$. Naime, tada možemo uzeti $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ i $u_n(x) := x^n$. Lako se vidi da je pripadna Youngova mjera δ_0, no niz (u_n) ne konvergira jako k nuli u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Definicija 2. Kažemo da niz (u_n), koji slabo–$*$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ konvergira k limesu u, pokazuje *oscilaciju* u Ω ukoliko pripadna Youngova mjera $\boldsymbol{\nu}$ zadovoljava

$$\nu_{\mathbf{x}} =\neq \delta_{u(\mathbf{x})}$$

na skupu pozitivne mjere.

Niz (u_n), koji konvergira k u slabo u $\mathrm{L}^2(\Omega)$ pokazuje *koncentracijski efekt* u Ω, ako postoji njegov podniz (označimo ga na isti način), tako da vrijedi

$$|u_n|^2 \rightharpoonup |u|^2 + \tau$$

slabo–$*$ u smislu Rasonovih mjera, pri čemu mjera τ nema gustoću s obzirom na Lebesgueovu mjeru.

∎

Imajući na umu gornju definiciju i Teorem 2 možemo reći da niz funkcija konvergira jako u $\mathrm{L}^p(\Omega)$ ukoliko ne oscilira na Ω. Zbog toga u daljnjem nazivamo oscilatornima one nizove koji konvergiraju slabo, ali ne i jako.

U slučaju niza vektorskih funkcija može se dogoditi da samo neke komponente konvergiraju jako, dok preostale konvergiraju slabo. U tom slučaju o strukturi pripadne Youngove mjere govori sljedeći teorem

Teorem 3. *Neka je* $\mathsf{u}_n := (u_n^1, u_n^2) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{R}^{r_2}$ *ograničen niz u* $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{R}^{r_2})$, *takav da* (u_n^1) *konvergira jako k* u_1 *u* $\mathrm{L}^p(\Omega)$. *Neka je* $\boldsymbol{\nu}$ *Youngova mjera pridružena nizu* (u_n). *Tada vrijedi*

$$\nu_{\mathbf{x}} = \delta_{u^1(\mathbf{x})} \boxtimes \tau_{\mathbf{x}} \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,,$$

pri čemu je $\boldsymbol{\tau}$ *Youngova mjera pridružena nizu* (u_n^2).

Dokaz. Neka su $\psi^1 : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^{r_1}$ i $\psi^2 : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^{r_2}$ neprekinute i ograničene funkcije, takve da vrijedi

$$\begin{aligned}
\psi^1 \circ u_n^1 &\longrightarrow \psi^1 \circ u\,, \quad \text{u } \mathrm{L}^p(\Omega)\,,\\
\psi^2 \circ u_n^2 &\rightharpoonup \psi^2_{\boldsymbol{\tau}}\,, \quad \text{u } \mathrm{L}^{p'}(\Omega)\,.
\end{aligned}$$

Za svaki izmjeriv skup $E \subseteq \Omega$ tada vrijedi

$$(\psi^1 \circ u_n^1)(\psi^2 \circ u_n^2) \rightharpoonup (\psi^1 \circ u)\psi^2_{\boldsymbol{\tau}}\,, \quad \text{u } \mathrm{L}^1(E)\,,$$

pa stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
&\int_E \int_{\mathbf{R}^{r_1}\times\mathbf{R}^{r_2}} \psi^1(\boldsymbol{\lambda}_1)\psi^2(\boldsymbol{\lambda}_2)\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) d\mathbf{x}\\
&\qquad = \int_E \int_{\mathbf{R}^{r_1}\times\mathbf{R}^{r_2}} \psi^1(\boldsymbol{\lambda}_1)\psi^2(\boldsymbol{\lambda}_2)\, d(\delta_{u^1(\mathbf{x})}(\boldsymbol{\lambda}_1) \boxtimes \tau_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}_2)) d\mathbf{x}\,.
\end{aligned}$$

Kako su ψ^1, ψ^2 i E proizvoljni, slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

3. Karakterizcija L^p–Youngovih mjera

Teorem egzistencije Youngovih mjera daje da svaki niz izmjerivih funkcija određuje neku parametriziranu mjeru. Ukoliko taj niz zadovoljava (vrlo slab) uvjet ograničenosti (1), tada je pripadna parametrizirana mjera ujedno i vjerojatnosna, dakle, Youngova mjera. U praksi najčešći oblik ograničenosti je ona u Lebesgueovim prostorima, stoga je od interesa znati karakterizirati Youngove mjere generirane nizovima u $\mathrm{L}^p(\Omega)$. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 4. *Neka je* $\boldsymbol{\nu} \in \mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$, *te neka je* $1 \le p \le \infty$. *Tada je* $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$ *ako i samo ako* $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ *i vrijedi*

(a) $\int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} |\boldsymbol{\lambda}|^p \, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} < \infty$, *za* $p \in [1, \infty\rangle$,

(b) $(\exists\, K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^r)) \quad \operatorname{supp} \nu_{\mathbf{x}} \in K \quad \text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega$, *za* $p = \infty$. ∎

Kako su slučajevi $p = \infty$ i $p \in [1, \infty\rangle$ bitno različiti, dani su odvojeni dokazi u sljedeća dva pododjeljka.

3.1. Dokaz u slučaju $p = \infty$

Za omeđen niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ pripadna Youngova mjera očito zadovoljava tvrdnju (b). Dokažimo obrat.

Promatrajmo prostor $\mathcal{M}(\bar\Omega \times K)$ svih Radonovih mjera na $\bar\Omega \times K$, pri čemu pretpostavljamo da je skup Ω ograničen a K kompaktan (što ima za posljedicu da je produkt $\bar\Omega \times K$ kompaktan skup u $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^r$). Dual prostora $\mathcal{M}(\bar\Omega \times K)$ je (separabilan prostor) $\mathrm{C}(\bar\Omega \times K)$ uz supremum normu. Stoga se slaba–$*$ topologija u $\mathcal{M}(\bar\Omega \times K)$ može okarakterizirati konvergencijom nizova. Razmotrimo skup

$$\mathcal{A} := \left\{ \tau_u \in \mathcal{M}(\bar\Omega \times K) : \langle \tau_u, \psi \rangle = \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\,,\ \psi \in \mathrm{C}(\bar\Omega \times K)\,,\ u : \Omega \longrightarrow K \right\},$$

te neka je Radonova mjera $\tau \in \mathcal{M}(\bar\Omega \times K)$ definirana s

$$\langle \tau, \psi \rangle := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \int_K \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,.$$

Familija $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \Omega}$ je izabrana tako da bude zadovoljeno $\operatorname{supp} \nu_{\mathbf{x}} \in K$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$).
Korak 1. Zatvarač skupa $\mathcal{A}$ u slaboj–$*$ topologiji, u oznaci $\bar{\mathcal{A}}$, je konveksan skup.

Doista, uzmimo $t \in \langle 0, 1\rangle$, te neka su u_i, $i = 1, 2$ izmjerive funkcije koje poprimaju vrijednosti u skupu K. Željeli bismo zaključiti da vrijedi

$$t\tau_{u_1} + (1 - t)\tau_{u_2} \in \bar{\mathcal{A}}\,.$$

Označimo s χ_t karakterističnu funkciju skupa $\langle 0, t\rangle$ u $\langle 0, 1\rangle$, proširenu po periodičnosti na čitav realni pravac. Za proizvoljnu točku $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^d$ označimo

$$\chi_k(\mathbf{x}) := \chi_t(k\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\,.$$

Lako se pokaže da u tom slučaju vrijedi $\chi_k \rightharpoonup t$ slabo–$*$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Razmotrimo niz funkcija definiran s

$$u^k(\mathbf{x}) := \chi_k(\mathbf{x}) u_1(\mathbf{x}) + (1 - \chi_k(\mathbf{x})) u_2(\mathbf{x})\,.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$\tau_{u^k} \rightharpoonup t\tau_{u_1} + (1 - t)\tau_{u_2} \quad \text{slabo–}* \text{ u } \mathcal{M}(\bar\Omega \times K)\,.$$

Zaista, za svaku neprekinutu funkciju ψ vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_k \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, u^k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} &= \lim_k \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, \chi_k(\mathbf{x}) u_1(\mathbf{x}) + (1 - \chi_k(\mathbf{x})) u_2(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \\
&= \lim_k \int_\Omega (\chi_k(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, u_1(\mathbf{x})) + (1 - \chi_k(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x}, u_2(\mathbf{x})))\, d\mathbf{x} \\
&= \langle t\tau_{u_1} + (1 - t)\tau_{u_2}, \psi \rangle\,.
\end{aligned}$$

Korak 2. Vrijedi $\tau \in \bar{\mathcal{A}}$.

Da bismo to dokazali koristimo Hahn–Banachov teorem. Pretpostavimo da je T linearan funkcional reprezentiran određenom funkcijom $\psi \in \mathrm{C}(\bar{\Omega} \times K)$, takav da za sve izmjerive funkcije $u : \Omega \longrightarrow K$ vrijedi $\langle \tau_u, \psi \rangle \geq 0$, odnosno

$$\int_\Omega \psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \geq 0\,.$$

Uzmimo posebno

$$u(\mathbf{x}) := \min_{\boldsymbol{\lambda}} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\,,$$

Kako vrijedi $\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$, zbog nenegativnosti mjere τ slijedi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times K} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\tau(\mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}) &\geq \int_{\Omega\times K} \psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\, d\tau(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ &= \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \geq 0\,.\end{aligned}$$

Korak 3. Zbog koraka 2 možemo naći niz izmjerivih funkcija (u_n) takvih da vrijedi

$$\lim_n \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \int_K \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,,$$

za sve neprekinute funkcije ψ. Posebno, ukoliko je $\varphi : K \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekinuta, niz $(\varphi \circ u_n)$ (eventualno njegov podniz) će konvergirati slabo–$*$ u smislu mjera k $\varphi_{\boldsymbol{\nu}}$. Zbog jedinstvenosti limesa vrijedit će

$$\varphi \circ u_n \rightharpoonup \varphi_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo–}* \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega)\,,$$

stoga je $\boldsymbol{\nu}$ doista Youngova mjera pridružena nizu (u_n).

3.2. Dokaz u slučaju $1 \leq p < \infty$

Dokaz provodimo u pet koraka. Prva četiri koraka dokazuju nužnost, dok posljednji, peti korak, dokazuje dovoljnost. Prije nego što prijeđemo na dokaz, definirajmo funkcijski prostor $\mathrm{C}_p(\mathbf{R}^r)$:

$$\mathrm{C}_p(\mathbf{R}^r) := \{\varphi \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^r) : \varphi(\boldsymbol{\lambda}) = o(|\lambda|^p)\,,\ \text{pri } |\boldsymbol{\lambda}| \longrightarrow \infty\}\,.$$

Iz razmatranja nakon osnovnog teorema o Youngovim mjerama slijedi da svaki omeđen niz u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$ sadrži podniz (kojeg označujemo na isti način) te $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$, tako da vrijedi

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_p(\mathbf{R}^r)) \quad \varphi \circ u_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1(\Omega)} \varphi_{\boldsymbol{\nu}}\,.$$

Ovaj rezultat je zapravo posljedica de La Vallée-Poussinovog kriterija slabe konvergencije u $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Korak 1. (*Konstrukcija aproksimirajućeg niza* L^∞*–Youngovih mjera*)

za $n \in \mathbf{N}$ označimo s B_n zatvorenu kugnu u $\mathbf{R}^r$ polumjera n, te definirajmo rezajuću funkciju $\rho_n : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ formulom

$$\rho_n(\boldsymbol{\lambda}) := \begin{cases} 1\,, & \text{za } |\boldsymbol{\lambda}| \leq n, \\ 1 + n - |\boldsymbol{\lambda}|\,, & \text{za } n \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq n+1, \\ 0\,, & \text{za } |\boldsymbol{\lambda}| \geq n+1, \end{cases}$$

te funkciju $s_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$

$$s_n(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^r} (1 - \rho_n(\boldsymbol{\lambda}))\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})\,.$$

Definirajmo parametriziranu mjeru $\boldsymbol{\nu}^n$ kao

$$\nu_{\mathbf{x}} := \rho^n \nu_{\mathbf{x}} + s_n(\mathbf{x})\delta_0\,.$$

Lako se vidi da je za svako $n \in \mathbf{N}$ i skoro svaki $\mathbf{x} \in \Omega$, $\nu^n_{\mathbf{x}}$ vjerojatnosna mjera s nosačem sadržanim u B_{n+1}, te da je preslikavanje $\mathbf{x} \mapsto \nu^n_{\mathbf{x}}$ slabo$-*$ izmjerivo, stoga je $\boldsymbol{\nu}^n \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbf{R}^r)$.
Korak 2. (*Konvergencija $\boldsymbol{\nu}^n$ ka $\boldsymbol{\nu}$*) Željeli bismo pokazati da za svaku funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_p(\mathbf{R}^r)$ vrijedi

$$\varphi_{\boldsymbol{\nu}^n} \rightharpoonup \varphi_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^1(\Omega)\,.$$

Za proizvoljnu funkciju $\psi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ računajmo

$$\begin{aligned}
&|(\varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \varphi_{\boldsymbol{\nu}^n}(\mathbf{x}))\, \psi(\mathbf{x})| \\
&\quad \le |\varphi(0)s_n(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})| + \left|\psi(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(\boldsymbol{\lambda})(1 - \rho_n(\boldsymbol{\lambda}))\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})\right| \\
&\quad \le |\varphi(0)s_n(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})| + |\psi(\mathbf{x})| \int_{\mathbf{R}^r \setminus B_n} |\varphi(\boldsymbol{\lambda})|\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) \\
&\quad = T_n^1(\mathbf{x}) + T_n^2(\mathbf{x})\,.
\end{aligned}$$

Budući da za svaki $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r$ vrijedi

$$\lim_n (1 - \rho_n(\boldsymbol{\lambda})) = 0\,,$$

iz teprema o dominiranoj konvergenciji slijedi $\lim_n s_n(\mathbf{x}) = 0$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$). Stoga vrijedi $T_n^1(\mathbf{x}) \longrightarrow 0$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$). Također vrijedi

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^r \setminus B_n} |\varphi(\boldsymbol{\lambda})|\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,,$$

budući da vrijedi $|\varphi_{\boldsymbol{\nu}}| < \infty$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$) te jer je ispunjeno

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbf{R}^r \setminus B_n) = \emptyset\,.$$

Time smo pokazali da također $T_n^1(\mathbf{x}) \longrightarrow 0$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$). Označimo li

$$C(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^r} |\boldsymbol{\lambda}|^p\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})$$

možemo načiniti preciznije ocjene

$$\begin{aligned}
T_n^1(\mathbf{x}) &\le |\varphi(0)||\psi(\mathbf{x})|\,, \\
T_n^1(\mathbf{x}) &\le |\psi(\mathbf{x})| \int_{\mathbf{R}^r \setminus B_n} |\varphi(\boldsymbol{\lambda})|\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) \\
&\le |\psi(\mathbf{x})| \left(\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r} \frac{\varphi(\boldsymbol{\lambda})}{1 + |\boldsymbol{\lambda}|^p}\right) (1 + C(\mathbf{x}))\,.
\end{aligned}$$

Stoga vrijedi nejednakost

$$|(\varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \varphi_{\boldsymbol{\nu}^n}(\mathbf{x}))\,\psi(\mathbf{x})| \le |\psi(\mathbf{x})| \left(\sup_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^r} \frac{\varphi(\boldsymbol{\lambda})}{1+|\boldsymbol{\lambda}|^p}\right)(2 + C(\mathbf{x}))\,.$$

Odatle, koristeći Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_n \langle \varphi_{\boldsymbol{\nu}} - \varphi_{\boldsymbol{\nu}^n}, \psi\rangle = 0\,.$$

Zbog proizvoljnosti $\psi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ slijedi

$$\varphi_{\boldsymbol{\nu}^n} \rightharpoonup \varphi_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^1(\Omega)\,.$$

Korak 3. Kako je nošena na ograničenom skupu B_{n+1}, Youngova mjera $\boldsymbol{\nu}^n$ pripada skupu $\mathcal{Y}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^r)$, stoga postoji niz $(u_k^n)_k$ takav da

$$\varphi\circ u_k^n \rightharpoonup \varphi_{\boldsymbol{\nu}^n} \quad \text{slabo–}* \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega)\ ,\ \text{pri } k \longrightarrow \infty\,.$$

Zbog ograničenosti skupa Ω gornja kompozicija konvergira slabo i u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ k istom limesu.
Korak 4. Dokazali smo da vrijedi

$$\lim_n \lim_k \varphi\circ u_k^n = \varphi_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^1(\Omega)\,.$$

Odaberimo odgovarajuću mrežu $\left(u_{k_\lambda}^{n_\lambda}\right)_{\lambda\in\Lambda}$ tako da vrijedi

$$\lim_{\lambda\in\Lambda} \varphi\circ u_{k_\lambda}^{n_\lambda} = \varphi_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^1(\Omega)\,.$$

Za svaki $n\in\mathbf{N}$ čvrst, vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_k \int_\Omega |u_k^n(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x} &= \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} |\boldsymbol{\lambda}|^p\,\nu_{\mathbf{x}}^n(\boldsymbol{\lambda})d\mathbf{x} \\
&\le \int_\Omega \int_{B_{n+1}} |\boldsymbol{\lambda}|^p\,\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})d\mathbf{x} \\
&\le \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} |\boldsymbol{\lambda}|^p\,\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})d\mathbf{x} = \|C\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} < \infty\,.
\end{aligned}$$

Zbog toga možemo, bez smanjenja općenitosti, pretpostaviti da je niz $(u_k^n)_k$ sadržan unutar kugle u $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^r)$, polumjera $\|C\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}^{1/p} + 1$, neovisno o $n\in\mathbf{N}$. Posebno, čitava mreža $\left(u_{k_\lambda}^{n_\lambda}\right)_{\lambda\in\Lambda}$ je ograničena u $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^r)$. Kako smo lokalizirali mrežu u ograni:čenom skupu u $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^r)$, prirodan prostor integranada $\mathrm{L}^\infty(\Omega)\otimes \mathrm{C}_p(\mathbf{R}^r)$ možemo zamijeniti prostorom $\mathrm{L}^1(\Omega;\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))$. To nam omogućuje činjenica da oba prostora imaju isti zatvarač u prirodnom prostoru integranada

$$\mathcal{V} := \{h : \Omega\times\mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R} : \big(\exists\, a\in \mathrm{L}^1(\Omega)\big)\,(\exists\, b\in\mathbf{R}) \quad |h(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})| \le a(\mathbf{x}) + b|\lambda|^p\}\,,$$

s topologijom generiranom familijom polunormi (r_n) definiranom na sljedeći način:

$$r_n(h) := \sup_{\|u\|_{\mathrm{L}^p}\le n} \left| \int_\Omega h(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\right|\,.$$

Budući da je prostor $\mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))$ separabilan, možemo uzeti $\Lambda = \mathbf{N}$.

Korak 5. (Obrnuta implikacija) Uzmimo omeđen niz (u_k) u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te neka je $\boldsymbol{\nu}$ pripadna Youngova mjera. Zbog slabe poluneprekinutosti odozdo preslikavanja

$$\boldsymbol{\nu} \mapsto \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} |\boldsymbol{\lambda}|^p \, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} \,,$$

slijedi

$$\int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} |\boldsymbol{\lambda}|^p \, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} \leq \liminf_k \int_\Omega |u_k(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} < \infty \,,$$

što je i trebalo dokazati.

3.3. Karakterizacija L^g–Youngovih mjera

Na kraju ovog odjeljka dajmo općenitiji rezultat karakterizacije Youngovih mjera. Neka je $g : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$ neopadajuća neprekinuta funkcija, takva da vrijedi $\lim_{t \longrightarrow \infty} g(t) = \infty$. Promotrimo skup

$$\mathrm{L}^g(\Omega; \mathbf{R}^r) := \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r : \int_\Omega g(|u(\mathbf{x})|) \, d\mathbf{x} < \infty \right\} . \tag{6}$$

Bez daljnjih zahtjeva na funkciju g, $\mathrm{L}^g(\Omega; \mathbf{R}^r)$ neće biti vektorski prostor. Posebno, za $g(t) := t^p$, dobijamo uobičajene Lebesgueove prostore. Definirajmo također

$$\mathcal{E}^g := \left\{ \varphi \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^r; \mathbf{R}) : \lim_{|\lambda| \longrightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda)}{1 + g(|\lambda|)} \text{ postoji} \right\} . \tag{7}$$

Prostor $\mathcal{E}^g$ je uz normu

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}^g} := \left\| \frac{\varphi}{1 + g(|\cdot|)} \right\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^r)}$$

separabilan Banachov prostor. Vrijedi sljedeći

Teorem 5. *Prostor $\mathcal{E}^g$ je izomorfan prostoru $\mathrm{C}(\mathcal{K})$, s obzirom na supremum normu, pri čemu je $\mathcal{K}$ kompaktifikacija $\mathbf{R}^r$ jednom točkom. Njegov dual $(\mathcal{E}^g)'$ strogo sadrži vjerojatnosne mjere na $\mathbf{R}^r$ za koje vrijedi*

$$\int_{\mathbf{R}^r} g(|\boldsymbol{\lambda}|) \, d\mu(\boldsymbol{\lambda}) < \infty \,.$$

∎

U slučaju funkcija g, takvih da je $g(t) := \infty$, za $t > R$, definicija prostora $\mathcal{E}^g$ postaje

$$\mathcal{E}^\infty := \left\{ \varphi \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^r; \mathbf{R}) : \lim_{|\lambda| \longrightarrow R} \frac{\varphi(\lambda)}{1 + g(|\lambda|)} \text{ postoji} \right\} . \tag{8}$$

Od posebnog su interesa prostori $\mathcal{E}^p$, za $p \in [1, \infty\rangle$, koji odgovaraju funkcijama $g(t) := t^p$.

Od interesa su i neseparabilni prostori

$$X^p := \{\varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{M}_{r \times d}; \mathbf{R}) : \left(\exists C \in \mathbf{R}^+\right) \ |\varphi(\Xi)| \leq C(1 + |\Xi|^p)\} \,. \tag{9}$$

Može se pokazati da je $\mathcal{E}^p$ zatvoren podprostor prostora X^p. Njegov dual $(X^p)'$ se može identificirati sa skupom konačnih Radonovih mjera τ na $\mathrm{M}_{r \times d}$, takvih da je preslikavanje $\Xi \mapsto |\Xi|^p$ element prostora $\mathrm{L}^1(\mathrm{M}_{r \times d}, \tau)$.

Uz gornje definicije možemo dokazati i općenitiji rezultat karakterizacije Youngovih mjera, za nizove s općenitijim uvjetima ograničenosti. Na primjer, tvrdnja (a) teorema 4 je poseban slučaj teorema 7.

Prije no što prijeđemo na teorem karakterizacije, iskažimo jednostavniji rezultat za homogene Youngove mjere.

Teorem 6. *Neka je ν vjerojatnosna mjera na $\mathbf{R}^r$, takva da vrijedi*

$$\int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} g(|\boldsymbol{\lambda}|)\, d\nu(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} < \infty\,.$$

Tada postoji niz funkcija (u_n), takav da je niz $(g \circ |u_n|)$ slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ i njemu pridružena Youngova mjera je homogena mjera ν. ∎

Iako je ovaj teorem zapravo poseban slučaj sljedećeg, pa ga ovdje ispuštamo. Za dokaz vidjeti [Pe97, teorem 7.6].

Teorem 7. *Neka je $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{Y}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te neka je $g : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$ neprekinuta funkcija, takva da vrijedi $\lim_{t\longrightarrow\infty} g(t) = \infty$.. Tada postoji niz izmjerivih funkcija (u_n), takav da je niz $(g \circ |u_n|)$ slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ i pridružena Youngova mjera mu je upravo $\boldsymbol{\nu}$, ako i samo ako vrijedi*

$$\int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} g(|\boldsymbol{\lambda}|)\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} < \infty\,. \tag{10}$$

Dokaz. Nužnost je očita zbog reprezentacije limesa u terminima Youngovih mjera. Pokažimo stoga dovoljnost. Mjera $\boldsymbol{\nu}$ će biti Youngova mjera pridružena nizu (u_n) ukoliko dokažemo da vrijedi

$$\lim_n \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi(u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,,$$

za sve $\xi \in \Gamma$ i sve $\varphi \in S$, pri čemu su Γ i S prebrojivi gusti podskupovi prostora $\mathrm{L}^1(\Omega)$ i $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ redom.

Uvjet (10) ima za posljedicu da za skoro svaki $\mathbf{a} \in \Omega$ vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}^r} g(|\boldsymbol{\lambda}|)\, d\nu_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\lambda}) < \infty\,.$$

Neka je N komplement skupa na kojem vrijedi gornje (dakle, $\mu(N) = 0$). Iz leme I.5, uz $p = \infty$, $q = 1$, te

$$r_k(\mathbf{a}) := \frac{1}{k}\,,$$

za sve $\mathbf{a} \in \Omega \setminus N$, imamo

$$\int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_k \sum_i \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(a_{ki}) \int_{a_{ki}+\varepsilon_{ki}\Omega} \xi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,,$$

za sve $\xi \in \Gamma$ i sve $\varphi \in S$, pri čemu je

$$\Omega = \bigcup_i (a_{ki} + \varepsilon_{ki}\Omega) \cup N_k\,, \quad \mu(N_k) = 0\,.$$

Ovdje su $\mathbf{a}_{ki} \in \Omega \setminus N$, te skupovi u gornjoj uniji su u parovima disjunktni. Prema troremu 6 možemo naći niz funkcija (u_n^{ki}) s pridruženom Youngovom mjerom $\nu_{\mathbf{a}_{ki}}$. Definirajmo

$$u_k(\mathbf{x}) := u_n^{ki}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{ki}}{\varepsilon_{ki}}\right) \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{a}_{ki} + \varepsilon_{ki}\Omega\,,$$

pri čemu je $n = n(k,i)$ odabran na sljedeći način: Načinimo particiju $\Gamma \times S = \cup_k D_k$, pri čemu je (D_k) rastući niz konačnih skupova. Za čvrste k i i odaberimo n takav da za sve $(\xi,\varphi) \in D_k$ vrijedi

$$\left|\varepsilon_{ki}^d \int_\Omega \xi(\mathbf{a}_{ki} + \varepsilon\mathbf{y})\varphi\left(u_n^{ki}(\mathbf{y})\right)\, d\mathbf{y} - \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a}_{ki}) \int_{\mathbf{a}_{ki}+\varepsilon_{ki}\Omega} \xi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right| \leq \frac{1}{k2^i}\,.$$

Ovo možemo načiniti upravo zbog toga što je mjera $\nu_{\mathbf{a}_{ki}}$ generirana nizom (u_n^{ki}).

Neka su $\xi \in \Gamma$ i $\varphi \in S$. Neka je $k \geq k_0$, pri čemu je $(\xi, \varphi \in D_{k_0}$. Iz prethodnog tada slijedi

$$\begin{aligned}\lim_k \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi(u_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} &= \lim_k \sum_i \varepsilon_{ki}^d \int_\Omega \xi(\mathbf{a}_{ki} + \varepsilon_{ki}\mathbf{y})\varphi\left(u_n^{ki}(\mathbf{y})\right)\, d\mathbf{y} \\ &= \lim_k \sum_i \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a}_{ki}) \int_{\mathbf{a}_{ki}+\varepsilon_{ki}\Omega} \xi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \qquad (11) \\ &= \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

Iz Chaconove leme slijedi da postoji opadajući niz izmjerivih skupova Ω_m, takvih da za svaki m vrijedi

$$g(|u_k|) \rightharpoonup (g \circ |\cdot|)_{\boldsymbol{\nu}} \quad \text{slabo u} \;\; \mathrm{L}^1(\Omega \setminus \Omega_m)\,.$$

Primijenimo li (11) na $\xi = 1$, slijedi

$$\begin{aligned}\lim_m \lim_k \int_{\Omega_m} g(|u_k(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} = &= \lim_m \lim_k \left(\int_\Omega g(|u_k(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} - \int_{\Omega\setminus\Omega_m} g(|u_k(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x}\right) \\ &= \lim_m \int_{\Omega_m} (g \circ |\cdot|)_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0\,,\end{aligned}$$

što slijedi iz činjenice da je $(g \circ |\cdot|)_{\boldsymbol{\nu}}$ funkcija iz $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Q.E.D.

4. Drugi pristup teoriji Youngovih mjera

Cilj ovog odjeljka je pokazati kako se elementi prostora $\mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$ mogu identificirati s izmjerivim preslikavanjima u određeni kompaktni metrički prostor. Ovaj pristup razvio je M. Sičev 1997. godine (v. [Sy96, Sy97]).

Označimo sa K_c zatvorenu kuglu $\{\nu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^r) : \|\nu\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)} \leq c\}$, te neka je $\{\varphi_i : i \in \mathbf{N}\}$ $(\varphi_i \neq 0)$, prebrojiv gust podskup u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$. Na K_c možemo definirati metriku

$$\rho_c(\nu,\tau) := \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i\|\varphi_i\|_{\mathrm{C}}}|\langle \nu - \tau, \varphi_i\rangle|\,. \qquad (12)$$

Vrijedi sljedeća lema

Lema 5. *Svaki niz (ν^n) u K_c sadrži Cauchyjev podniz.* ∎

Zbog gustoće skupa $\{\varphi_i : i \in \mathbf{N}\}$ u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$, za svaki $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$, možemo definirati funkcional l formulom

$$l(\varphi) := \lim_n \langle \nu^n, \varphi \rangle .$$

Funkcional l je očito neprekinut linearan funkcional na $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$, ograničen u normi konstantom c. Prema Rieszovom teoremu reprezentacije, postoji Radonova mjera ν, norme manje ili jednake c, takva da vrijedi

$$(\forall \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)) \quad l(\varphi) := \langle \nu, \varphi \rangle .$$

No, iz konstrukcije tada slijedi da je $\lim_n \rho_c(\nu^n, \nu) = 0$, što znači da je (K_c, ρ_c) kompaktan metrički prostor. Budući da konvergencija $\rho_c(\nu^n, \nu) \longrightarrow 0$ povlači slabu–$*$ konvergenciju ν^n ka ν u $\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)$, dokazali smo i slabu–$*$ kompaktnost K_c u topologiji prostora $\mathcal{M}(\mathbf{R}^r)$.

Ukoliko sa $\mathrm{L}_*(\Omega; K_c)$ označimo familiju svih slabo–$*$ izmjerivih preslikavanja $\nu : \Omega \longrightarrow K_c$, tada se može pokazati da vrijedi jednakost

$$\bigcup_{c \in \mathbf{R}} \mathrm{L}_*(\Omega; K_c) = \mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r)) .$$

Do kraja ovog odjeljka poistovjećujemo familiju $(\nu_\mathbf{x})_\mathbf{x} \in \Omega$ s preslikavanjem $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow (K_c, \rho_c)$, danim sa $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) := \nu_\mathbf{x}$. Ova identifikacija nam omogućuje korištenje nekih standardnih rezultata o izmjerivim preslikavanjima, u prvom redu Luzinovog teorema.

Teorem 8. (**Luzinova karakterizacija izmjerivih funkcija**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ograničen izmjeriv skup, a (K_c, ρ_c) kompaktan metrički prostor. Funkcija $\xi : \Omega \longrightarrow (K_c, \rho_c)$ je izmjeriva ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$ takav da je $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$ a restrikcija funkcije ξ na Ω_ε je neprekinuta.*

Dokaz. Promotrimo niz kompaktnih skupova $\Omega_i \subseteq \Omega$, takvih da vrijedi $\mu(\Omega \setminus \Omega_i) \leq 1/i$, takvih da su restrikcije ξ na skupove Ω_i neprekinute. Neka je C proizvoljan kompaktan podskup skupa K. Tada su skupovi $\tilde{\Omega}_i := \{\mathbf{x} \in \Omega_i : \xi(\mathbf{x}) \in C\}$ očito kompaktni. Budući da je $\mu(\xi^{-1}(C) \setminus \cup_i \tilde{\Omega}_i) = 0$, slijedi da je $\xi^{-1}(C)$ izmjeriv, što ima za posljedicu izmjerivost funkcije ξ.

Da bismo dokazali obrat, najprije ćemo pokazati da za proizvoljan $\delta > 0$ postoji kompaktan skup $\Omega_\delta \subseteq \Omega$ takav da je $\mu(\Omega \setminus \Omega_\delta) \leq \delta$, te da za svako $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$ vrijedi nejednakost

$$\limsup_{\mathbf{y} \in \Omega_\delta \,,\, \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x}} \rho(\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{y})) \leq \delta .$$

Posebno, uzmemo li niz $\delta_n := 2^{-n}$, slijedi nejednakost

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcap_{n=k}^{\infty} \Omega_{\delta_n}\right) \leq \frac{1}{2^{k-1}} ,$$

te su restrikcije funkcije ξ na $\cap_{n=k}^\infty \Omega_{\delta_n}$ neprekinute.

Da bismo dokazali tvrdnju, razmotrimo konačan pokrivač skupa K kompaktnim skupovima $K_1, K_2, \ldots, K_{m(\delta)}$, čiji su dijametri manji od δ. Označimo s Ω_1 skup $\xi^{-1}(K_1)$. Zatim odaberimo kompaktan skup $\tilde{\Omega}_1 \subseteq \Omega_1$ za koji je $\mu(\Omega_1 \setminus \tilde{\Omega}_1) < \delta/2$. Neka je $\Omega_2 := \xi^{-1}(K_2) \setminus \Omega_1$, te neka je $\tilde{\Omega}_2$ njegov kompaktan podskup za koji vrijedi $\mu(\Omega_2 \setminus \tilde{\Omega}_2) < \delta/4$.

Nastavimo ovaj postupak za $i = 3, dots, m(\delta)$: za dane $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_i$, neka je $\tilde{\Omega}_{i+1}$ kompaktan podskup

$$\Omega_{i+1} := \xi^{-1}(K_{i+1}) \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \Omega_j = \xi^{-1}(K_{i+1}) \setminus \xi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{i} K_j\right) ,$$

za koji vrijedi $\mu(\Omega_{i+1} \setminus \tilde{\Omega}_{i+1}) < \delta/2^{i+1}$. Definirajmo

$$\Omega_\delta := \bigcup_{i=1}^{m(\delta)} \tilde{\Omega}_i \,.$$

U tom slučaju vrijedi

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\delta)}\right) \leq \delta \,,$$

pri čemu su $\tilde{\Omega}_i$ disjunktni kompaktni skupovi. Stoga, za $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{i_0}$, $\mathbf{x}_k \in \Omega_\delta$ i $\mathbf{x}_k \longrightarrow \mathbf{x}_0$, tada je $\mathbf{x}_k \in \Omega_{i_0}$ za dovoljno velik k, pa vrijedi $\rho_c(\xi(\mathbf{x}_k), \xi(\mathbf{x}_0)) \leq \delta$, što smo i htjeli dokazati.

Q.E.D.

Dokažimo sljedeću lemu.

Lema 6. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ograničen izmjeriv skup, te neka je $\nu_\mathbf{x} \in K_c$,* s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$. *Familija $(\nu_\mathbf{x})_\mathbf{x} \in \Omega$ je slabo–$*$ izmjeriva ako i samo ako je preslikavanje $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow (K_c, \rho_c)$ izmjerivo.*

Dokaz. Neka je $(\nu_\mathbf{x})_\mathbf{x} \in \Omega$ familija u $\mathrm{L}_c(\Omega; K_c)$, te neka je (φ^i) gust niz u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$. Za svake zadane $\varepsilon > 0$, $i \in \mathbf{N}$, postoji kompaktan skup $\Omega_i \subseteq \Omega$ takav da je restrikcija preslikavanja $\varphi^i_{\boldsymbol{\nu}} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ na Ω_i neprekinuta, te vrijedi $\mu(\Omega \setminus \Omega_i) \leq \varepsilon/2^i$. Tada je $\mu(\Omega \setminus \cap_i \Omega_i) \leq \varepsilon$ i restrikcije svih funkcija $\varphi^i_{\boldsymbol{\nu}}$ na $\cap_i \Omega_i$ su neprekinute. Kako je niz (φ^i) gust u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$, isto vrijedi za proizvoljnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$. To znači da je restrikcija preslikavanja $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow (K_c, \rho_c)$ na $\cap_i \Omega_i$ neprekinuta, stoga ima Luzinovo svojstvo (v. teorem 8), pa je i izmjerivo.

Obrnuto, neka je $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow (K_c, \rho_c)$ izmjerivo preslikavanje. Tada, prema teoremu 8, za svaki čvrst $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan podskup Ω_ε takav da je $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$, te da je restrikcija funkcije $\boldsymbol{\nu}$ na Ω_ε neprekinuta u metrici ρ_c. To, međutim, ima za posljedicu da je neprekinuta i restrikcija na Ω_ε funkcije $\varphi_{\boldsymbol{\nu}}$, za svako $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$, što povlači izmjerivost na čitavom Ω. Time je dokaz završen.

Q.E.D.

5. Homogenizacija i lokalizacija Youngovih mjera

U praksi je od interesa danu Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu}$ zamijeniti odgovarajućom homogenom Youngovom mjerom koja će još uvijek sadržavati sve relevantne informacije sadržane u pojedinačnim elementima $\nu_\mathbf{x}$. To vodi na postupak *usrednjenja* ili *homogenizacije* Youngove mjere $\boldsymbol{\nu}$.

Definicija 3. Za danu parametriziranu mjeru $\boldsymbol{\mu} \in \mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r))$ definiramo usrednjenje $\mathrm{Av}(\boldsymbol{\mu})$ formulom

$$(\forall\, \varphi \in \Omega) \quad \langle \mathrm{Av}(\boldsymbol{\mu}), \varphi \rangle := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \varphi_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

∎

Lako se vidi da je $\mathrm{Av}(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{M}(\Omega)$, norme manje ili jednake $\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathrm{L}^\infty_*(\Omega;\mathcal{M}(\mathbf{R}^r))}$. Time je definirano preslikavanje $\mathrm{Av} : \mathrm{L}^\infty_*(\Omega; \mathcal{M}(\mathbf{R}^r)) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega)$. Sljedeća propozicija daje svojstvo neprekinutosti funkcije Av:

Propozicija 4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^r$ ograničen i izmjeriv skup, te neka su $\boldsymbol{\nu}^1, \boldsymbol{\nu}^2 \in \mathrm{L}_*(\Omega; K_c)$. Tada vrijedi*

(a) *Za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(c) > 0$ i $\Omega_\delta \subseteq \Omega$ takav da vrijedi: Ako za svako $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$ vrijedi $\rho_c(\nu^1_{\mathbf{x}}, \nu^2_{\mathbf{x}}) \leq \delta$ i $\mu(\Omega \setminus \Omega_\delta) \leq \delta\mu(\Omega)$, tada imamo*

$$\rho_c(\mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu}^1), \mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu}^2)) \leq \varepsilon\,,$$

pri čemu δ ne ovisi o Ω.

(b) *Ukoliko niz $w_n := \rho_c(\boldsymbol{\nu}^n, \boldsymbol{\nu})$ konvergira k nuli u mjeri, pri čemu su $\boldsymbol{\nu}^n$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathrm{L}_*(\Omega; K_c)$, tada vrijedi*

$$\boldsymbol{\nu}^n \longrightarrow \boldsymbol{\nu}\,, \quad \text{slabo} - * \;\; \text{u } \mathrm{L}_*(\Omega; K_c)\,.$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz reprezentacijske formule za metriku ρ_c (12). Definiramo li funkcije ψ_i formulom

$$\psi_i := \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|_{\mathrm{C}}}\,,$$

slijedi

$$\begin{aligned}
\rho_c(\mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu}^1), \mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu}^2)) &= \sum_i \frac{1}{2^i} \left| \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu}^1)(\boldsymbol{\lambda}) - \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu}^2)(\boldsymbol{\lambda}) \right| \\
&= \frac{1}{\mu(\Omega)} \sum_i \frac{1}{2^i} \left| \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu^1_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} - \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu^2_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} \right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \sum_i \frac{1}{2^i} \int_\Omega \left| \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu^1_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) - \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu^2_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) \right| d\mathbf{x} \\
&\leq 2c\delta + \frac{1}{\mu(\Omega)} \sum_i \frac{1}{2^i} \int_{\Omega_\delta} \left| \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu^1_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) - \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu^2_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) \right| d\mathbf{x} \\
&\leq 2c\delta + \fint_{\Omega_\delta} \left(\sum_i \frac{1}{2^i} \left| \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu^1_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) - \int_{\mathbf{R}^r} \psi_i(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu^2_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) \right| \right) d\mathbf{x} \\
&\leq 2c\delta + \fint_{\Omega_\delta} \rho_c(\nu^1_{\mathbf{x}}, \nu^2_{\mathbf{x}})\, d\mathbf{x} \leq (2c+1)\delta\,.
\end{aligned}$$

Odatle, odabirom δ, tako da vrijedi $(2c+1)\delta \leq \varepsilon$, slijedi tvrdnja. Tvrdnja (b) je izravna posljedica tvrdnje (a).

Q.E.D.

Lako se dokazuje sljedeća lema.

Lema 7. *Youngova mjera $\boldsymbol{\nu}$ je homogena ako i samo ako vrijedi $\mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu}$.* ∎

Teorem 9. (**homogenizacija Youngovih mjera**) *Neka su Ω i D regularne domene u $\mathbf{R}^d$ takve da vrijedi $\mu(\partial\Omega) = \mu(\partial D) = 0$. Neka je $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz izmjerivih funkcija takvih da vrijedi*

$$(\exists\, C > 0) \qquad \int_\Omega g(|u_n(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} \leqslant C\ ,$$

uniformno po $n \in \mathbf{N}$, pri čemu je $g : [0, \infty\rangle \longrightarrow [0, \infty\rangle$ neopadajuća, nenegativna neprekinuta funkcija koja zadovoljava uvjet

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} g(t) = \infty\ .$$

Neka je $\boldsymbol{\nu}$ Youngova mjera pridružena nizu (u_n). Tada postoji niz izmjerivih funkcija $w_j : D \longrightarrow R$ takvih da vrijedi

$$\sup_{j \in \mathbf{N}} \int_D g(|w_j(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} < \infty\ ,$$

i čija je pripadna Youngova mjera $\mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu})$

Dokaz. Koristimo Vitalijev teorem o pokrivanju. Naime, familija

$$\mathcal{A}_j := \left\{\mathbf{a} + \varepsilon\,\bar{\Omega} : \mathbf{a} \in D\,, \varepsilon \in D(\mathbf{a}, j)\right\}$$

čini Vitalijev pokrivač za skup D. Po Korolaru 1 postoji prebrojiva podfamilija u parovima disjunktnih skupova $\mathbf{a}_{ij} + \varepsilon_{ij}\bar{\Omega}$ koja je također Vitalijev pokrivač, odnosno vrijedi

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\mathbf{a}_{ij} + \varepsilon_{ij}\bar{\Omega}) \cup N_j\ , \quad \mu(N_j) = 0\ .$$

Slično kao u prethodnom teoremu račun daje

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{i,j}^n &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathbf{a}_{ij} + \varepsilon_{ij}\bar{\Omega})}{\mu(\bar{\Omega})} \\ &= \frac{1}{\mu(\bar{\Omega})}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_{ij} + \varepsilon_{ij}\bar{\Omega}\right) = \frac{\mu(D)}{\mu(\bar{\Omega})}\ .\end{aligned}$$

Definirajmo funkcije $w_j : D \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$w_j|_{\mathbf{a}_{ij}+\varepsilon_{ij}\bar{\Omega}}(\mathbf{x}) := u_n\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)\ .$$

Sada zbog disjunktnosti skupova $\mathbf{a}_{ij} + \varepsilon_{ij}\bar{\Omega}$ zamjenom varijabli

$$\mathbf{y} := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\ , \quad d\mathbf{x} = \varepsilon_{ij}^d d\mathbf{y}$$

slijedi

$$\begin{aligned}(\forall\, j \in \mathbf{N}) \quad \int_D g(|w_j(\mathbf{x})|)\, d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{a}_{ij}+\varepsilon_{ij}\bar{\Omega}} g\left(\left|u_n\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)\right|\right)\, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{ij}^d \int_\Omega g(|u_n(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \\ &= \frac{\mu(D)}{\mu(\bar{\Omega})} \int_\Omega g(|u_n(\mathbf{y})|)\, d\mathbf{y} \leqslant C\frac{\mu(D)}{\mu(\bar{\Omega})}\ .\end{aligned}$$

S druge strane, za proizvoljne $\xi \in \mathrm{C}(\bar{D})$ i $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^m)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_D \varphi(w_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{a}_{ij}+\varepsilon_{ij}\bar{\Omega}} \varphi(w_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^d \varphi(u_n(\mathbf{y}))\xi(\mathbf{a}_{ij}+\varepsilon_{ij}\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\;.\end{aligned}$$

Koristeći klasičan teorem srednje vrijednosti za integrale neprekinutih funkcija zaključujemo da postoje $\bar{\mathbf{y}}_{ij} \in \Omega$ takvi da vrijedi

$$\int_{\Omega} \varphi(u_n(\mathbf{y}))\xi(\mathbf{a}_{ij}+\varepsilon_{ij}\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \xi(\mathbf{a}_{ij}+\varepsilon_{ij}\bar{\mathbf{y}}_{ij}) \int_{\Omega} \varphi(u_n(\mathbf{y}))\;.$$

Kako je $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{ij}^d \mu(\Omega) = \mu(D)$, to je izraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{ij}^d \mu(\Omega)\xi(\mathbf{a}_{ij}+\varepsilon_{ij}\bar{\mathbf{y}}_{ij})$$

integralna suma za Riemannov integral $\int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. Stoga je

$$\begin{aligned}\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_D \varphi(w_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_D \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \lim_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega} \varphi(u_n(\mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_D \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^m} \varphi_\lambda d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda)\,d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Posljednja jednakost slijedi iz osnovnog teorema o Youngovim mjerama i činjenice da je $\chi_\Omega \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

Dakle, definiramo li $\bar{\nu} \in \mathcal{M}(\Omega)$ s $\bar{\nu} := \mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu})$, tada vrijedi

$$(\forall\, \xi \in \mathrm{C}(\bar{D}))(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_0(\Omega)) \qquad \lim_{j\longrightarrow\infty} \int_D \varphi(w_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \langle \bar{\nu}, \varphi \rangle \int_D \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

i tvrdnja slijedi zbog homogenosti $\bar{\nu}$ i gustoće $\mathrm{C}(\bar{D})$ u $\mathrm{L}^1(D)$.

Q.E.D.

Sljedeći rezultat kompaktnosti za parametrizirane mjere u bitnom koristi operaciju homogenizacije (za dokaz vidjeti [Sy97])

Teorem 10. **(teorem kompaktnosti** *) Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ograničen izmjeriv skup, te neks je $(\boldsymbol{\nu}^n)$ niz u $\mathrm{L}_*(\Omega; K_c)$. Tada postoji podniz (kojeg ćemo označiti na isti načni) i $\boldsymbol{\nu} \in \mathrm{L}_*(\Omega; K_c)$, tako da vrijedi*

$$\boldsymbol{\nu}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\nu}\,, \quad \text{slabo} - * \text{ u } \mathrm{L}_*(\Omega; K_c)\,.$$

∎

Postupak *lokalizacije* omogućuje nam da ustanovimo svojstva pojedinačnih elemenata parametrizirane mjere. Ovaj se rezultat u bitnom oslanja na Radon–Nikodymov i Lebesgueov teorem o deriviranju.

Teorem 11. (**lokalizacija Youngovih mjera**) *Neka su Ω i D regularne domene u $\mathbf{R}^d$ takve da vrijedi $\mu(\partial\Omega) = \mu(\partial D) = 0$. Neka je $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz izmjerivih funkcija takvih da vrijedi*

$$(\exists\, C > 0) \qquad \int_\Omega g(|u_n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leqslant C \ ,$$

uniformno po $n \in \mathbf{N}$, pri čemu je $g : [0, \infty\rangle \longrightarrow [0, \infty\rangle$ neopadajuća, nenegativna neprekinuta funkcija koja zadovoljava uvjet

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} g(t) = \infty \ .$$

Neka je $\boldsymbol{\nu}$ Youngova mjera pridružena nizu u_n. Tada za skoro svaki $\mathbf{a} \in \Omega$ postoji niz $u_n^{\mathbf{a}} : D \longrightarrow \mathbf{R}$ izmjerivih funkcija takvih da je

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \int_\Omega g(|u_n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty \ ,$$

i da je Youngova mjera pridružena nizu $(u_n^{\mathbf{a}})$ upravo homogena Youngova mjera $\nu_{\mathbf{a}}$.

Dokaz. Zbog neprekinutosti ulaganja $\mathrm{L}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}(\Omega)$, pretpostavke teorema i Banach-Alaogluovog teorema postoji podniz niza (u_n) (koji isto označimo) takav da vrijedi

$$g \circ |u_n| \xrightarrow{\mathcal{M}(\Omega)*} \tau \ ,$$

gdje je τ nenegativna ograničena Radonova mjera na Ω. Stoga vrijedi

$$(\forall\, \xi \in \mathrm{C}_0(\Omega)) \qquad \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) g(|u_n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) d\tau(\mathbf{x}) \ .$$

Uočimo da iz definicije prostora $\mathrm{C}_0(\Omega)$ slijedi da za čvrste $\mathbf{a} \in \Omega$ i $\rho > 0$ možemo naći $\xi_{\mathbf{a},\rho} \in \mathrm{C}_0(\Omega)$ takvu da je

$$0 \leqslant \chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{x}) \leqslant \xi_{\mathbf{a},\rho}(\mathbf{x}) \leqslant \chi_{\mathbf{a}+2\rho D}(\mathbf{x}) \ .$$

Nakon množenja s $g(|u_n|)$, integriranja po Ω imamo

$$\limsup_{j \longrightarrow \infty} \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega \xi_{\mathbf{a}.\rho}(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \leqslant \limsup_{j \longrightarrow \infty} \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{a}+2\rho D}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \ .$$

Lako se provjeri da vrijedi

$$\limsup_{\rho \longrightarrow 0} \frac{1}{\rho^n} \int_\Omega \chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{x}) d\tau(\mathbf{x}) = \mu(D) \limsup_{\rho \longrightarrow 0} \frac{\tau(\mathbf{a} + \rho D)}{\mu(\mathbf{a} + \rho D)} = \mu(D) D_\mu \tau \ ,$$

te je stoga (isp. [EG])

$$\lim_{\rho \longrightarrow 0} \limsup_{j \longrightarrow \infty} \frac{1}{\rho^n} \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) \chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leqslant \mu(D) D_\mu \tau < \infty \ (\text{ss } \mathbf{a} \in \Omega) \ .$$

Definirajmo funkcije $z_{j,\rho}^{\mathbf{a}} : D \longrightarrow \mathbf{R}$ s $z_{j,\rho}^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := u_n(\mathbf{a} + \rho\mathbf{x})$. Uz standardnu zamjenu varijabli za proizvoljne $\xi \in \mathrm{L}^\infty(D)$, $\varphi \in \mathrm{C}_0(\Omega)$ imamo

$$\int_D \varphi(z_{j,\rho}^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) \xi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{\rho^n} \int_\Omega \varphi(u_n(\mathbf{x})) \chi_{\mathbf{a}+\rho D} \xi \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\rho} \right) d\mathbf{y} \ .$$

Uz standardnu notaciju, osnovni teorem o Youngovim mjerama daje

$$(\forall\,\psi \in \mathrm{L}^1(\Omega)) \qquad \int_\Omega \varphi(u_n(\mathbf{y}))\psi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \longrightarrow \int_\Omega \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y})\psi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\ ,$$

te odabirom $\psi(\mathbf{y}) := \chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{y})\xi(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{a}}{\rho})$ slijedi

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{1}{\rho^n}\int_\Omega \varphi(u_n(\mathbf{y}))\chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{y})\xi\left(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{a}}{\rho}\right)\,d\mathbf{y} = \frac{1}{\rho^n}\int_\Omega \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y})\chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{y})\xi\left(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{a}}{\rho}\right)\,d\mathbf{y}\ ,$$

što nakon ponovne zamjene varijabli daje

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\lim_{j\longrightarrow\infty}\int_D \varphi(z^{\mathbf{a}}_{j,\rho}(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lim_{\rho\longrightarrow 0}\int_D \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a}+\rho\mathbf{x})\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,.$$

Direktna posljedica Lebesgue–Besicovitchevog teorema o deriviranju (v. [F]) je sljedeća konvergencija za lokalno integrabilne funkcije f

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\int_D |f(\mathbf{a}+\rho\mathbf{y}) - f(\mathbf{a})|\,d\mathbf{y} = 0\ .$$

Odmah slijedi

$$(\forall\,\eta \in \mathrm{L}^\infty(D)) \qquad \lim_{\rho\longrightarrow 0}\int_D \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a}+\rho\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a})\int_D \eta(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,,$$

a potom, koristeći da je $f := \varphi_{\boldsymbol{\nu}} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ također slabi–$*$ limes pripadnog niza i gustoću $\mathrm{L}^\infty(D)$ u $\mathrm{L}^1(D)$, i

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\lim_{j}\int_D \varphi(z^{\mathbf{a}}_{j,\rho}(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a})\int_D \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\ .$$

Na ovom mjestu primijetimo da je $\mathrm{C}_0(\Omega)$ zapravo zatvarač prostora $\mathrm{C}_c(\Omega)$ u L^∞–normi, te je kao takav separabilan. Kako je i $\mathrm{L}^1(\Omega)$ separabilan, to uzastopnim provođenjem Cantorovog dijagonalnog postupka redom zaključujemo: uz $u^{\mathbf{a}}_n := z^{\mathbf{a}}_{n,\frac{1}{n}}$ najprije je

$$\lim_{n}\int_D \varphi(u^{\mathbf{a}}_n(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a})\int_D \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\ ,$$

a onda i

$$\lim_{n}\int_D \varphi(u^{\mathbf{a}}_n(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\ = \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a})\int_D \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

uniformno po ξ iz prebrojivog gustog skupa u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ i φ iz prebrojivog gustog skupa u $\mathrm{C}_0(\Omega)$. Nadalje, primjenom uobičajenog argumenta gustoće vidimo da vrijedi

$$(\forall\,\varphi \in \mathrm{C}(\Omega))(\forall\,\xi \in \mathrm{L}^1(\Omega)) \quad \lim_{n}\int_D \varphi(u^{\mathbf{a}}_n(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a})\int_D \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\ ,$$

u smislu uniformnog limesa po ξ i φ, stoga slijedi tvrdnja teorema.

Q.E.D.

Od interesa su netrivijalni primjeri Youngovih mjera pridruženih danom nizu funkcija. Riemann–Lebesgueova lema i njezina posljedica McShaneov teorem su među najzanimljivijim primjerima, gdje se pripadna Youngova mjera može eksplicitno odrediti.

Teorem 12. (**McShane**) *Neka je* $\Omega = \prod_{i=1}^{d}\langle a_i, b_i\rangle$, $u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. *Proširimo u po periodičnosti na cijeli* $\mathbf{R}^d$, *te definirajmo* $u_n(\mathbf{x}) := u(n\mathbf{x})$.
(a) *Ako je* $1 \le p < \infty$, *tada* $u_n \rightharpoonup \bar{u} = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ *slabo u* $\mathrm{L}^p(\Omega)$.
(b) *Ako je* $p = \infty$, *tada* $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ *slabo–∗ u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Dokaz. Cilj nam je pokazati da vrijede pretpostavke teorema I.10 , iz čega odmah slijedi tvrdnja teorema.

Korak 1. Računajmo L^p normu članova niza (u_n)

$$\int_\Omega |u_n(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x} = \int_\Omega |u(n\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x} = \frac{1}{n^d}\int_{n\Omega} |u(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x} = \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x}\,,$$

pri čemu posljednja jednakost vrijedi zbog periodičnosti funkcije u. Odavdje slijedi jednakost normi $\|u_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \|u\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$. U slučaju $p = \infty$ tvrdnja je trivijalna.

Korak 2. Neka je $D \subset \Omega$ hiperkub. Tada za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoje $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^d$, takvi da, uz oznaku $\alpha + \beta\Omega := \prod_{i=1}^{d}\langle\alpha_i + \beta_i a_i, \alpha_i + \beta_i b_i\rangle$, vrijedi

$$|\mu(D) - \mu(\alpha + \beta\Omega)| < \varepsilon\,.$$

Stoga možemo pisati:

$$\begin{aligned}
\int_D (f_n(\mathbf{x}) - \bar{f})\,d\mathbf{x} &= \int_{\alpha+\beta\Omega} (f(n\mathbf{x}) - \bar{f})\,d\mathbf{x} = \frac{1}{n^d}\int_{n\alpha+n\beta\Omega} (f(\mathbf{y}) - \bar{f})\,d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{n^d}\int_{n\alpha+\lfloor n\beta\rfloor\Omega} (f(\mathbf{y}) - \bar{f})\,d\mathbf{y} + \frac{1}{n^d}\int_{n\alpha+(n\beta-\lfloor n\beta\rfloor)\Omega} (f(\mathbf{y}) - \bar{f})\,d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{n^d}\int_{n\alpha+(n\beta-\lfloor n\beta\rfloor)\Omega} (f(\mathbf{y}) - \bar{f})\,d\mathbf{y} + \frac{\lfloor n\beta\rfloor^d}{n^d}\int_\Omega (f(\mathbf{y}) - \bar{f})\,d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{n^d}\int_{n\alpha+(n\beta-\lfloor n\beta\rfloor)\Omega} (f(\mathbf{y}) - \bar{f})\,d\mathbf{y}\,,
\end{aligned}$$

pri čemu $\lfloor\ \rfloor$ označava funkciju *najveće cijelo*. Odatle slijedi

$$\begin{aligned}
\left|\int_D (f_n(\mathbf{x}) - \bar{f})\,d\mathbf{x}\right| &\le \frac{1}{n^d}\int_{n\alpha+(n\beta-\lfloor n\beta\rfloor)\Omega} |f(\mathbf{y}) - \bar{f}|\,d\mathbf{y} \\
&\le \frac{1}{n^d}\int_\Omega |f(\mathbf{y}) - \bar{f}|\,d\mathbf{y}\,,
\end{aligned}$$

što teži k nuli pri $n \longrightarrow \infty$.

Korak 3. Neka je zadan $\delta > 0$. Definiramo funkciju g_δ formulom

$$g_\delta(\mathbf{x}) := \begin{cases} \min\{\delta, f(\mathbf{x})\}, & f(\mathbf{x}) \geqslant 0 \\ -\min\{\delta, -f(\mathbf{x})\}, & f(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}\,,$$

te funkciju $h_\delta(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) - g_\delta(\mathbf{x})$. Kako svaku izmjerivu funkciju možemo odozdo aproksimirati rastućim nizom jednostavnih funkcija, to vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\quad \int_\Omega |h_\delta(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Proširujući g_δ i h_δ po periodičnosti s Ω na $\mathbf{R}^d$, kao u prvom koraku dokaza, imamo:

$$\int_\Omega |h_\delta(\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x} = \int_\Omega |h_\delta(n\mathbf{x})|^p\,d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Zato slijedi

$$\int_E |f(n\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x} \le \int_E |h_\delta(n\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x} + \int_E |g_\delta(n\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x} < \mu(E)\delta^p + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Stoga, ako odaberemo $\lambda(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{2\delta^p}$, dobivamo

$$\int_E |f_n(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \varepsilon\,,$$

čime je dokaz dovršen.

Q.E.D.

Riemann–Lebesgueova lema je izravna posljedica teorema o homogenizaciji Youngovih mjera.

Teorem 13. (**Riemann–Lebesgueova lema**) *Neka su Ω i D regularne domene u $\mathbf{R}^d$ takve da vrijedi $\mu(\partial\Omega) = \mu(\partial D) = 0$ i neka je $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. Tada postoji niz (f_j) čije je pripadna Youngova mjera homogena i (za neprekinutu i ograničenu φ) definirana s*

$$\langle \bar{\boldsymbol{\nu}}, \varphi \rangle := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \varphi(f(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\,.$$

Dokaz. Uz oznake kao u teoremu 11 definiramo $f_j : D \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$f_j(\mathbf{x}) := f\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{a}_{ij} + \varepsilon_{ij}\Omega\,.$$

te tvrdnja slijedi iz teorema 11.

Q.E.D.

Posebno, uzimjaući $u_j(\mathbf{x}) := f(j(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i))$ za $\mathbf{x} \in \mathbf{a}_i + \frac{1}{j}\Omega$, gdje je

$$\Omega = \bigcup_i \left(\mathbf{a}_i + \frac{1}{j}\Omega\right)$$

Vitalijev pokrivač za Ω, imamo upravo McShaneovu lemu.

III. Gradijentne Youngove mjere

1. Uvod

Gradijentne Youngove mjere su, pojednostavljeno rečeno, Youngove mjere generirane gradijentima nizova izmjerivih funkcija. One se prirodno pojavljuju u varijacijskom računu, gdje je odgovarajući minimizacijski niz za danu zadaću obično ograničen u nekom Soboljevljevom prostoru. Stoga pripadni niz gradijenata određuje p–Youngovu mjeru.

U daljnjem je Ω otvorena i ograničena domena, takva da je $\mu(\partial\Omega) = 0$.

Definicija 1. Youngova mjera $\boldsymbol{\nu}$ je *gradijentna p–Youngova mjera* ukoliko postoji niz (u_n) u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ koji konvergira slabo u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ (odnosno slabo–$*$ u slučaju $p = \infty$), takav da je niz $(|\nabla u_n|^p)$ ekviintegrabilan (odnosno da je $\Big(\|\nabla u_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^r)}\Big)$ ekviograničen za $p = \infty$), te da (∇u_n) određuje $\boldsymbol{\nu}$. ∎

Ukoliko $u_n \rightharpoonup u_0$ u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, onda vrijedi

$$\nabla u_0(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \Xi \, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi)\,, \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,.$$

Funkcija u_0 se zove *pridružena deformacija*. U daljnjem s $\mathrm{M}_p(\mathbf{A})$ označujemo skup svih homogenih gradijentnih p–Youngovih mjera s centrom mase u $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{r\times d}$.

S $\boldsymbol{\nu} * \mathbf{A}$ označavamo mjeru dobivenu tako da se centar mase mjere $\boldsymbol{\nu}$ zamjeni u $\mathbf{A}$. Vrijedi sljedeća

Lema 1. *Neka je $\boldsymbol{\nu}$ gradijentna p–Youngova mjera određena nizom (∇u_n), s centrom mase u $\mathbf{B} \in \mathrm{M}_{r\times d}$. Tada je mjera $\boldsymbol{\nu} * \mathbf{A}$ generirana nizom $(\nabla u_n + l_{\mathbf{A}-\mathbf{B}})$, pri čemu za $\mathbf{Y} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ vrijedi $l_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}) := \mathbf{Y}\mathbf{x}$.* ∎

2. Homogenizacija i lokalizacija

U ovom odjeljku su dani temeljni rezultati o lokalizaciji i homogenizaciji Youngovih mjera generiranih nizovima gradijenata (isp. teoremi II.9 i II.11).

Podsjetimo, usrednjenje ili homogenizacija Youngove mjere $\boldsymbol{\nu}$ dana je djelovanjem na test funkcije na sljedeći način:

$$\langle \mathrm{Av}(\boldsymbol{\mu}), \varphi\rangle := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \varphi_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,.$$

Sljedeći teorem je inačica rezultata o lokalizaciji za gradijentne p–Youngove mjere (v. teorem 9).

Teorem 1. *Neka je (u_n) niz funkcija iz $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, takvih da*

$$(\exists\, \mathbf{Y} \in \mathrm{M}_{r\times d})\, (\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad u_n - l_{\mathbf{Y}} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)\,. \tag{1}$$

Neka je $\boldsymbol{\nu}$ Youngova mjera generirana nizom (∇u_n). Tada postoji niz (w_n), koji je ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ i zadovoljava rubni uvjet (1), takav da mu je pripadna Youngova mjera $\mathrm{Av}(\boldsymbol{\nu})$. ∎

Dokaz ovog teorema je potpuno analogan dokazu teorema II.9. Koristeći Vitalijev teorem o pokrivanju, načinimo dekompoziciju skupa Ω

$$\Omega = \bigcup_i (\mathbf{a}_{in} + \varepsilon_{in} \mathsf{Cl}\, \Omega) \cup N_n\,, \quad \mu(n_n) = 0\,.$$

Možemo naći niz funkcija (w_n) u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ tako da za $\mathbf{x}\in\mathbf{a}_{in}+\varepsilon_{in}\Omega$ vrijedi

$$\nabla w_n(\mathbf{x}) = \nabla u_n\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}_{in}}{\varepsilon_{in}}\right). \tag{2}$$

Ovo možemo ispuniti ako, za $\mathbf{x}\in\mathbf{a}_{in}+\varepsilon_{in}\Omega$, definiramo

$$w_n(\mathbf{x}) := \varepsilon_{in}u_n\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}_{in}}{\varepsilon_{in}}\right).$$

Međutim, ovako definiran w_n ne mora biti u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$. Naime, za dovoljno veliki p, w_n mora biti neprekinuta. Jedini poznati način za osiguravanje neprekinutosti funkcije w_n jest da funkciji u_n nametnemo afin rubni uvjet. Neka je $\mathbf{Y}\in\mathrm{M}_{r\times d}$, te neka je $u_n - l_{\mathbf{Y}}\in\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)$, tada je funkcija

$$w_n(\mathbf{x}) := \begin{cases}\varepsilon_{in}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}_{in}}{\varepsilon_{in}}\right) & ,\ \mathbf{x}\in\mathbf{a}_{in}+\varepsilon_{in}\Omega,\\ l_{\mathbf{Y}} & ,\ \text{inače}\ ,\end{cases} \tag{3}$$

budući da je neprekinuta, dobro definirana funkcija u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$. Funkcija w_n zadovoljava

$$w_n - l_{\mathbf{Y}}\in\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)\,,$$

a njen gradijent uvjet (2). Ovim je ova skica dokaza dovršena.

Slijedi verzija Riemann–Lebesgueove leme.

Teorem 2. *Neka su Ω i D domene u $\mathbf{R}^d$, te neka je $u\in\mathrm{W}^{1,p}(D;\mathbf{R}^r)$ takva da vrijedi $u-l_{\mathbf{Y}}\in\mathrm{W}^{1,p}_0(D;\mathbf{R}^r)$. Tada postoji niz (w_n) ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, $w_n-l_{\mathbf{Y}}\in\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)$, takav da niz gradijenata (∇w_n) određuje homogenu Youngovu mjeru ν danu sa*

$$(\forall\,\varphi\in X^p)\quad \langle\nu,\varphi\rangle := \frac{1}{\mu(D)}\int_D \varphi(\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\,.$$

∎

Podsjetimo, prostor X^p je definiran u (II.9). Dokaz se i u ovom slučaju svodi na jednostavnu primjenu Vitalijevog teorema o pokrivanju. Naime, za $n\in\mathbf{N}$ neka je

$$\left\{\mathbf{a}_{in}+\varepsilon_{in}D : \varepsilon_{in}\le\frac{1}{n}\right\}$$

Vitalijev pokrivač skupa Ω. Drugim riječima

$$\Omega = \bigcup_i(\mathbf{a}_{in}+\varepsilon_{in}D)\cup N_n\,,\quad \mu(n_n)=0\,,$$

pri čemu su podskupovi $\mathbf{a}_{in}+\varepsilon_{in}D$ u parovima disjunktni. Preostaje definirati niz w_n s (3) i lema je dokazana.

Razmotrimo na kraju ovog odjeljka postupak lokalizacie za gradijentne p–Youngove mjere. Vrijedi sljedeći teorem lokalizacije:

Teorem 3. *Neka je (u_n) ograničen niz u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, te neka je $\boldsymbol{\nu}$ Youngova mjera pridružena nizu gradijenata (∇u_n). Za $\mathbf{a}\in\Omega$ definirajmo*

$$F(\mathbf{a}) := \int_{\mathrm{M}_{r\times d}}\Xi\,d\nu_{\mathbf{a}}(\Xi)\,,$$

te $u_{\mathbf{a}} := l_{F(\mathbf{a})}$. Za skoro svaki $\mathbf{a}\in\Omega$ postoji niz $(w^{\mathbf{a}}_n)$ ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, takav da vrijedi

$$(\forall\,n\in\mathbf{N})\quad w^{\mathbf{a}}_n - u_{\mathbf{a}}\in\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)\,,$$

te da niz gradijenata $(\nabla w^{\mathbf{a}}_n)$ određuje homogenu Youngovu mjeru $\nu_{\mathbf{a}}$.

∎

Kako je dokaz ovog teorema također analogan već načinjenom dokazu u odjeljku I.5, ovdje je dana samo skica. Naime, jedino što treba načiniti jest definirati novi niz funkcija koji će generirati Youngovu mjeru $\nu_{\mathbf{a}}$. U ovom slučaju trebali bismo imati ($\rho > 0$)

$$\nabla u^{\mathbf{a}}_{n\rho}(\mathbf{x}) = \nabla u_n(\mathbf{a} + \rho\mathbf{x}) .$$

Kao i u dokazu teorema 11, pokaže se da je niz $\left(u^{\mathbf{a}}_{n\rho}\right)$ ograničen u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathrm{M}_{r\times d})$ po oba indeksa, za skoro svaki $\mathbf{a} \in \Omega$. Također se analogno pokaže da, ukoliko je $\boldsymbol{\nu}$ gradijentna Youngova mjera koja odgovara nizu u_n, niz gradijenata $\left(u^{\mathbf{a}}_{n\rho}\right)$ generira homogenu Youngovu mjeru $\nu_{\mathbf{a}}$.

Da bismo dobili traženi niz $\left(u^{\mathbf{a}}_{n\rho}\right)$, definirajmo

$$F(\mathbf{x}) := \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \Xi \, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi) ,$$
$$C_{\mathbf{a}} := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega u_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} .$$

Sada možemo definirati funkcije $u^{\mathbf{a}}_{n\rho}$ formulom

$$u^{\mathbf{a}}_{n\rho}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\rho}(u_n(\mathbf{a} + \rho\mathbf{x}) - M_{\mathbf{a}n\rho}) ,$$

pri čemu je konstanta $M_{\mathbf{a}n\rho}$ odabrana tako da vrijedi

$$\int_\Omega u^{\mathbf{a}}_{n\rho}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = C_{\mathbf{a}} .$$

Koristeći Poincaréovu nejednakost lako se dokaže da je niz $\left(u^{\mathbf{a}}_{n\rho}\right)$ doista ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, neovisno o n i ρ, za skoro svaki $\mathbf{a} \in \Omega$.

Posljednji korak u dokazu je konstruirati niz w_n, koji zadovoljava afini rubni uvjet i definira lokaliziranu, homogenu Youngovu mjeru $\nu_{\mathbf{a}}$ u skoro svakoj točki $\mathbf{a}$. Za to će nam trebati sljedeća lema:

Lema 2. *Neka je niz (v_n) ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, takava da niz gradijenata (∇v_n) generira Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu}$, te neka je u pripadna pridružena deformacija.*

Tada postoji niz (u_n) ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, takav da (∇u_n) generira istu Youngovu mjeru, te vrijedi

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad u_n - u \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{R}^r) .$$

Ukoliko je za $p < \infty$ niz $(|\nabla v_n|^p)$ ekviintegrabilan, tada je i $(|\nabla u_n|^p)$ takav.

Dokaz. Neka je η_k niz rezajućih funkcija koje zadovoljavaju

(a) $\eta_k = 1$ na $\partial\Omega$,
(b) $\eta_k = 0$ na $\Omega_k := \left\{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathbf{x}, \partial\Omega) \geq \frac{1}{k}\right\}$,
(c) $|\nabla\eta_k| \leq \frac{C}{k}$ za neku pozitivnu konstantu C.

Promotrimo funkcije w_{nk} definirane formulom

$$w_{nk}(\mathbf{x}) := \eta_k(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + (1 - \eta_k(\mathbf{x}))v_n(\mathbf{x}) .$$

Očito za sve n i k vrijedi $w_{nk} - u \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te vrijedi

$$\nabla w_{nk}(\mathbf{x}) = \eta_k(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) + (1 - \eta_k)\mathbf{x}))\nabla v_n(\mathbf{x}) + (u(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x})) \otimes \nabla\eta_k(\mathbf{x}) .$$

Kako je niz (v_n) ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, možemo pretpostaviti da $v_n \longrightarrow u$ jako u $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^r)$. Stoga možemo odabrati podniz (v_{n_k}) tako da posljednji član u gornjoj jednakosti konvergira k nuli, slabo u $\mathrm{L}^1(\Omega;\mathrm{M}_{r\times d})$. Prvi član je očito slabo konvergentan, dok je drugi ograničen ili slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega;\mathrm{M}_{r\times d})$. Definiramo li niz funkcija (u_k) sa

$$u_k := w_{n_k k}\,,$$

tada je $(|\nabla u_k|^p)$ te $u_k - u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$.

Kratak račun daje

$$\mu\{\mathbf{x}\in\Omega : \nabla v_n(\mathbf{x}) \neq \nabla w_{n_k k}(\mathbf{x})\} = \mu\{\mathbf{x}\in\Omega : \eta_k < 1\} \longrightarrow 0\,, \text{pri} \quad k \longrightarrow \infty\,.$$

No tada i niz (∇u_k) određuje Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu}$, pa je lema dokazana.

Q.E.D.

3. Kvazikonveksnost

Kvazikonveksnost je važno svojstvo u varijacijskom računu. Naime, pokazuje se da je u vektorskom slučaju konveksnost jak uvjet, te da je dovoljan uvjet za nizovnu slabu poluneprekinutost odozdo upravo kvazikonveksnost. U sljedećem ćemo odjeljku vidjeti kako je kvazikonveksnost prirodno utkana u strukturu gradijentnih p–Youngovih mjera, stoga su one *pravo* sredstvo za proučavanje vektorskog slučaja u varijacijskom računu.

Mi ćemo koristiti definiciju kvazikonveksnosti u smislu Morreya:

Definicija 2. Za funkciju $\varphi : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ kažemo da je *kvazikonveksna* ukoliko za svaku funkciju $u \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ i svaku matricu $\mathbf{Y} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ vrijedi

$$\varphi(\mathbf{Y}) \le \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \varphi(\mathbf{Y} + \nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\,. \tag{4}$$

∎

Tipičan primjer kvazikonveksne funkcije je determinanta.

Lema 3. *Neka je $d = r = 2$, te neka je $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega,\mathbf{R}^2)$ takva da vrijedi $u - l_{\mathbf{Y}} \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbf{R}^2)$. Tada vrijedi*

$$\int_\Omega \det(\nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \mu(\Omega)\det \mathbf{Y}\,.$$

Dokaz. Neka je $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbf{R}^2)$, te promotrimo funkciju $v := \varphi + l_{\mathbf{Y}}$. Tvrdimo da vrijedi

$$\int_\Omega \det(\nabla v(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \mu(\Omega)\det(\mathbf{Y})\,.$$

Točnije, vrijedi

$$\det(\nabla v) = \det(\mathbf{Y} + \nabla\varphi) = \det(\mathbf{Y}) + \det(\nabla\varphi) - \mathrm{adj}\,(\mathbf{Y})^\tau \cdot \nabla\varphi\,.$$

Drugi i treći član u gornjoj jednakosti pri integriranju iščezavaju zbog teorema o divergenciji, pa tvrdnja leme u ovom slučaju slijedi. Tvrdnja leme u općem slučaju slijedi zbog gustoće i neprekinutosti determinante u jakoj topologiji prostora $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega,\mathbf{R}^2)$

Q.E.D.

Za neprekinutu funkciju $\varphi : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ možemo definirati njenu *kvazikonveksifikaciju* formulom

$$Q\varphi(\mathbf{Y}) := \frac{1}{\mu(\Omega)} \inf\left\{ \int_\Omega \psi(\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} : u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)\,, u - l_\mathbf{Y} \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(\Omega;\mathbf{R}^r) \right\}.$$

Vrijedi sljedeća lema:

Lema 4. *Funkcija $\varphi : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ je kvazikonveksna ako i samo ako vrijedi $\varphi = Q\varphi$.* ∎

Pojam kvazikonveksifikacije ne ovisi o izboru skupa Ω. O tome govori sljedeća lema (za dokaz vidjeti [Pe97]).

Lema 5. *Neka su Ω i Ω' dva otvorena i ograničena podskupa $\mathbf{R}^d$, takva da vrijedi $\mu(\partial\Omega) = \mu(\partial\Omega') = 0$, te neka je $\varphi : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ zadana funkcija. Tada, za svaku matricu $\mathbf{Y} \in \mathrm{M}_{r\times d}$, su infimumi*

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \inf\left\{ \int_\Omega \psi(\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} : u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)\,, u - l_\mathbf{Y} \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(\Omega;\mathbf{R}^r) \right\},$$

i

$$\frac{1}{\mu(\Omega')} \inf\left\{ \int_{\Omega'} \psi(\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} : u \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega';\mathbf{R}^r)\,, u - l_\mathbf{Y} \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(\Omega';\mathbf{R}^r) \right\},$$

međusobno jednaki. ∎

Analogno se definira i pojam p–kvazikonveksnosti:

Definicija 3. Funkcija $\varphi : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ je p–kvazikonveksna ukoliko za svaku funkciju $u \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)$ i svaku matricu $\mathbf{Y} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ vrijedi nejednakost (4). ∎

Slično kao i konveksifikacija definira se i *p–kvazikonveksifikacija* formulom

$$Q^p\varphi(\mathbf{Y}) := \frac{1}{\mu(\Omega)} \inf\left\{ \int_\Omega \psi(\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} : u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)\,, u - l_\mathbf{Y} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r) \right\}.$$

I u ovom slučaju se može dokazati analogon leme 5, drugim riječima, p–kvazikonveksifikacija ne ovisi o izboru ograničenog i otvorenog skupa Ω iz gornje definicije.

Lako se vidi da za $1 \le p \le q < \infty$ vrijede nejednakosti

$$Q^p\varphi \le Q^q\varphi \le Q\varphi\,.$$

Sljedeća lema daje vezu između kvazikonveksnosti i p–kvazikonveksnosti.

Lema 6. *Neka je $\varphi : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekinuta funkcija, takva da*

$$c \le \varphi(\Xi) \le C(1 + |\Xi|^p)\,, \tag{5}$$

za neke pozitivne konstante c i C. Tada je φ kvazikonveksna ako i samo ako je p–kvazikonveksna.

Dokaz. Kako je skup Ω ograničen, p–kvazikonveksnost će očito povlačiti kvazikonveksnost. Preostaje pokazati obrat.

Pretpostavimo da je funkcija φ kvazikonveksna. Neka je $\mathbf{Y} \in \mathrm{M}_{r\times d}$, te neka je $\varphi \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, takva da je $u - l_\mathbf{Y} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)$,

Promotrimo niz (u_n) u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ koji konvergira jako k funkciji u u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, te vrijedi $u_n - l_\mathbf{Y} \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)$.

Iz gornje ocjene slijedi

$$C(|\nabla u_n|^p + 1) - \varphi(\nabla u_n) \geq 0\,,$$

stoga po Fatouovoj lemi slijedi

$$\int_\Omega (C|\nabla u(\mathbf{x})|^p + 1) - \varphi(\nabla u)\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \leq \liminf_n \int_\Omega (C|\nabla u_n(\mathbf{x})|^p + 1) - \varphi(\nabla u_n)\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\,.$$

Stoga vrijedi

$$\limsup_n \int_\Omega \varphi(\nabla u_n(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \leq \int_\Omega \varphi(\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\,,$$

pa kako je φ kvazikonveksna vrijedi

$$\varphi(\mathbf{Y}) \leq \int_\Omega \varphi(\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\,,$$

odnosno funkcija φ je p–kvazikonveksna.

Q.E.D.

U daljnjem nećemo razlikovati pojmove kvazikonveksnosti i p–kvazikonveksnosti, već ćemo eksplicitno pretpostavljati (5) gdje god to bude potrebno.

Od interesa je sljedeća lema (za dokaz vidjeti [Pe97, lema 8.12]):

Lema 7. *Neka je $\varphi : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ odozgo poluneprekinuta funkcija. Tada vrijedi*

$$Q\varphi = \sup\{\psi : \psi \leq \varphi, \psi \text{ je kvazikonveksna}\}$$

∎

Na kraju ovog odjeljka definirajmo skup $M_\mathbf{Y}$ formulom

$$M_\mathbf{Y} := \Big\{\nu \in \mathcal{M}(\mathrm{M}_{r\times d}) : \nu = \mathrm{Av}(\delta_{\nabla u})\,,\ u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)\,,\ u - l_\mathbf{Y} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)\Big\}\,,$$

pri čemu je $\mathbf{Y} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ proizvoljna matrica. Očito vrijedi $M_\mathbf{Y} \subseteq (\mathcal{E}^p)'$. U dokazu teorema karakterizacije gradijentnih p–Youngovih mjera trebat će nam sljedeća lema:

Lema 8. *Skup $M_\mathbf{Y}$ je konveksan.*

Dokaz. Neka su $u_i \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, $(i = 1,2)$ funkcije koje zadovoljavaju $u_i - l_\mathbf{Y} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)$, te neka su $\nu_i := \mathrm{Av}(\delta_{\nabla u_i})$. Uzmimo $\lambda \in \langle 0,1\rangle$, te neka je $D \subseteq \Omega$ regularan otvoren podskup takav da je $\mu(\Omega) = \lambda\mu(D)$. Promotrimo sljedeće prebrojive familije podskupova D i $\Omega\setminus D$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &:= \{\mathbf{a}_k + \varepsilon_k\Omega : \mathbf{a}_k \in D\,,\ \varepsilon_k > 0\,,\ \mathbf{a}_k + \varepsilon_k\Omega \subseteq D\,,\ k \in \mathbf{N}\}\,,\\
\mathcal{B} &:= \{\mathbf{b}_k + \rho_k\Omega : \mathbf{b}_k \in \Omega\setminus D\,,\ \rho_k > 0\,,\ \mathbf{b}_k + \rho_k\Omega \subseteq \Omega\setminus D\,,\ k \in \mathbf{N}\}\,.
\end{aligned}$$

Tada vrijedi

$$D = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} (\mathbf{a}_k + \varepsilon_k\Omega) \cup N\,,\quad \mu(N) = 0\,,$$

$$\Omega\setminus D = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} (\mathbf{b}_k + \rho_k\Omega) \cup N'\,,\quad \mu(N') = 0\,.$$

Definirajmo funkciju u formulom

$$u(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varepsilon_k u_1\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}_k}{\varepsilon_k}\right) + l_{\mathbf{Y}}(\mathbf{a}_k)\,, & \mathbf{x} \in \mathbf{a}_k + \varepsilon_k\Omega\,, \\ \rho_k u_2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}_k}{\rho_k}\right) + l_{\mathbf{Y}}(\mathbf{b}_k)\,, & \mathbf{x} \in \mathbf{b}_k + \rho_k\Omega\,, \\ l_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})\,, & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Tada vrijedi $u - l_{\mathbf{Y}} \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ te

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \nabla u_1\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}_k}{\varepsilon_k}\right)\,, & \mathbf{x} \in \mathbf{a}_k + \varepsilon_k\Omega\,, \\ \nabla u_2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}_k}{\rho_k}\right)\,, & \mathbf{x} \in \mathbf{b}_k + \rho_k\Omega\,. \end{cases}$$

Sada, za $\varphi \in \mathcal{E}^p$, imamo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi(\nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} &= \sum_k \left(\varepsilon_k^d \int_\Omega \varphi(\nabla u_1(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} + \rho_k^d \int_\Omega \varphi(\nabla u_2(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\right) \\ &= \lambda \int_\Omega \varphi(\nabla u_1(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} + (1-\lambda) \int_\Omega \varphi(\nabla u_2(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \\ &= \langle \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2, \varphi\rangle\,. \end{aligned}$$

Posebno zaključujemo kako je $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ i $\lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2 \in M_{\mathbf{Y}}$.

Q.E.D.

4. Karakterizacija gradijentnih p–Youngovih mjera

Središnji rezultat ovog odjeljka je sljedeći teorem koji karakterizira gradijentne p–Youngove mjere:

Teorem 4. *Neka je $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in\Omega}$ slabo–$*$ izmjeriva familija pozitivnih vjerojatnosnih mjera koja je nošena na prostoru matrica $\mathrm{M}_{r\times d}$. Familija $\boldsymbol{\nu}$ je gradijentna p–Youngova mjera ako i samo ako vrijedi: u slučaju $p \in \langle 1, \infty\rangle$*

(a) $\nabla u(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \Xi\, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi)\,, \quad$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$), *za neku funkciju* $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$.

(b) Za svaku funkciju $\varphi \in \mathcal{E}^p$, koja je kvazikonveksna i ograničena odozdo, vrijedi

$$\int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \varphi(\Xi)\, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi) \geq \varphi(\nabla u) \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,,$$

(c) $\int_\Omega \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} |\Xi|^p\, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi) d\mathbf{x} < \infty\,.$

U slučaju $p = \infty$ vrijedi (a), te

(b') Za svaku kvazikonveksnu i ograničenu odozdo funkciju φ vrijedi

$$\int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \varphi(\Xi)\, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi) \geq \varphi(\nabla u) \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,,$$

(c') Postoji $K \in \mathcal{K}(\mathrm{M}_{r\times d})$, takav da je $\operatorname{supp}\nu_{\mathbf{x}} \subseteq K$, (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$). ∎

Zbog opsežnosti i specifičnosti tehnika koje se koriste, dokaz ovog teorema proveden je u sljedeća dva pododjeljka. Valja napomenuti kako, iako to nije rečeno u iskazu, teorem daje dovoljne uvjete i u slučaju $p = 1$, iako to nije dokazom obuhvaćeno.

4.1. Dokaz nužnosti

Podsjetimo, dokazujemo sljedeće

Teorem 5. *Neka je (u_n) niz u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, $p \in \langle 1, \infty]$, te neka je $\boldsymbol{\nu}$ Youngova mjera pridružena nizu gradijenata (∇u_n). Za $p \in \langle 1,\infty\rangle$ tada vrijede tvrdnje (a), (b) i (c), dok u slučaju $p = \infty$ vrijede tvrdnje (a), (b') i (c') teorema 4.* ∎

Prije nego što prijeđemo na dokaz gornjeg, podsjetimo na definiciju maksimalnog operatora. Za $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ stavimo

$$Mf(\mathbf{x}) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(K(\mathbf{x},r))} \int_{K(\mathbf{x},r)} |f(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}\,.$$

Za $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbf{R}^d)$ definiramo operator M^* formulom

$$M^*\varphi(\mathbf{x}) := M(|\varphi(\mathbf{x})|) + M(|\nabla\varphi(\mathbf{x})|)\,.$$

Lako se vidi da je $M^*\varphi \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d)$, te da vrijedi ocjena

$$\|M^*\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)} \le C(d,p)\|\varphi\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\mathbf{R}^d)}\,, \quad p \in \langle 1,\infty]\,. \tag{6}$$

Također se može dokazati i sljedeća nejednakost:

$$\mu\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : M^*\varphi(\mathbf{x}) \ge \lambda\} \le \frac{C(d,p)}{\lambda^p}\|\varphi\|^p_{\mathrm{W}^{1,p}(\mathbf{R}^d)}\,, \quad p \in [1,\infty\rangle\,.$$

Vrijedi sljedeća lema

Lema 9. *Neka je $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_0(\mathbf{R}^d)$, te neka je $\lambda > 0$. Definirajmo skup*

$$H^\lambda := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : M^*\varphi(\mathbf{x}) < \lambda\}\,.$$

Tada vrijedi nejednakost

$$(\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in H^\lambda) \quad \frac{|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \le C\lambda\,,$$

pri čemu konstanta C ovisi samo o dimenziji prostora d. ∎

Lema 10. *Neka je (v_n) ograničen niz u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$. Tada postoji niz Lipschitzovih funkcija (u_n) takav da je niz $(|\nabla u_n|^p)$ ekviintegrabilan, te da nizovi (∇v_n) i (∇u_n) određiju istu Youngovu mjeru.*

Dokaz. Dokaz provodimo u dva koraka.
Korak 1. Pretpostavimo da je (v_n) niz u $\mathrm{C}^\infty_0(\mathbf{R}^d)$, te razmotrimo niz (M^*v_n). Zbog ocjene (6) slijedi da je taj niz ograničen i u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, te neka je $\boldsymbol{\mu}$ pridružena Youngova mjera. Razmotrimo niz rezajućih operatora (T_k) iz primjera I.1. Kako je za čvrsti k niz $(T_k M^* v_n)$ ograničen u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$, vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_k \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} |T_k M^* v_n(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x} &= \lim_k \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}} |T_k(\boldsymbol{\lambda})|^p\, d\mu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}} |\boldsymbol{\lambda}|^p\, d\mu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,,\end{aligned}$$

pri čemu smo u računanju posljednjeg limesa koristili teorem o monotonoj konvergenciji. Primijetimo da je funkcija g, definirana formulom

$$g(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}} |\boldsymbol{\lambda}|^p \, d\mu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})$$

element prostora $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Nadalje, možemo naći podniz, takav da vrijedi

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} |T_{k_n} M^* v_n(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^d} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, .$$

S druge pak strane, Youngova mjera pridružena nizu $(T_{k_n} M^* \nabla v_n)_n$ je također $\boldsymbol{\mu}$ (v. primjer I.1), stoga prema lemi II.4 zaključujemo da vrijedi

$$|T_{k_n} M^* \nabla v_n|^p \rightharpoonup g \, , \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d) \, .$$

Definirajmo niz skupova

$$A_n := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : M^* v_n(\mathbf{x}) > k_n\} \, .$$

Kako je niz $(M^* v_n)$ ograničen u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, slijedi da $\mu(A_n) \longrightarrow 0$. Odaberimo niz Lipschitzovih funkcija (u_n), takav da izvan skupova A_n vrijedi $u_n = v_n$. Tada prema lemi 9 vrijedi

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad |\nabla u_n| \leq C(d) k_n \, .$$

Kako $\mu(A_n) \longrightarrow 0$, to iz leme II.3 slijedi da oba niza određuju istu Youngovu mjeru. Nejednakost $|\nabla v_n| \leq M^* v_n$ povlači ocjenu

$$|\nabla u_n|^p \leq C(d)^p |T_{k_n} M^* v_n|^p \, ,$$

pa tvrdnja leme slijedi iz činjenice da je desna strana gornje nejednakosti ekviintegrabilna. Korak 2. Pretpostavimo da $v_n \rightharpoonup u$, u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, za neko $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$. Štoviše, zbog leme 2, možemo pretpostaviti da je $v_n - u \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)$. Definirajmo funkcije $w_n := v_n - u$, te ih proširimo nulom na čitav $\mathbf{R}^d$. Zbog gustoće, možemo naći niz $(\tilde{w}_n)$ u $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{R}^r)$, takav da vrijedi

$$\|\tilde{w}_n - w_n\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)} \longrightarrow 0 \, .$$

Primijenimo prvi korak na niz $(\tilde{w}_n)$. Time smo dobili niz $(\bar{u}_n)$, takav da je niz funkcija $(|\nabla \bar{u}_n|^p)$ ekviintegrabilan, te da je ispunjeno

$$\mu\{\mathbf{x} \in \Omega : \nabla \tilde{w}_n(\mathbf{x}) \neq \nabla \bar{u}_n(\mathbf{x})\} \longrightarrow 0 \, .$$

Stoga, opet koristeći lemu II.3, zaključujemo kako su Youngove mjere (restrikcija) nizova (∇w_n), $(\nabla \tilde{w}_n)$ i $(\nabla \bar{u}_n)$ iste. Definirajmo na koncu niz funkcija

$$u_n := \bar{u}_n|_\Omega + u \, ,$$

čime je lema dokazana.

Q.E.D.

Prijeđimo na dokaz teorema. Tvrdnja (a) je očita posljedica reprezentacijske formule za slabe limese uz pomoć Youngovih mjera.

Prema propoziciji II.3 slijedi

$$\int_\Omega \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} |\Xi|^p \, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi) d\mathbf{x} \leq \liminf_n \int_\Omega \varphi(\nabla u) \, d\mathbf{x} < \infty \,,$$

čime je dokazana i tvrdnja (c). U slučaju $p = \infty$, tvrdnja (c') je trivijalno ispunjena, jer je (u_n) niz ograničen u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, pa stoga pripadna Youngova mjera mora imati kompaktan nosač, uniformno po $\mathbf{x} \in \Omega$.

Dokažimo (b). Neka je $\mathbf{x} \in \Omega$ proizvoljna točka, te označimo $\nu := \nu_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{Y} := \nabla u(\mathbf{x})$. Prema teoremu 3, za skoro svaki $\mathbf{x} \in \Omega$, postoji niz (v_n) koji slabo konvergira ka $l_{\mathbf{Y}}$ u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ te vrijedi $u_n - l_{\mathbf{Y}} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Štoviše, Youngova mjera pridružena nizu (∇v_n) je homogena mjera ν.

Neka je $\varphi \in \mathcal{E}^p$ kvazikonveksna funkcija koja je ograničena odozdo. Poteškoća je u tome što niz $(\varphi(\nabla v_n))$ nije nizovno slabo kompaktan. Koristeći leme 2 i 10, neka je (u_n) niz u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ koji generira Youngovu mjeru ν, takav da je $u_n - l_{\mathbf{Y}} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te da je $(|\nabla u_n|^p)$ ekviintegrabilan. Zbog kvazikonveksnosti funkcije φ tada vrijedi

$$\mu(\Omega)\varphi(\mathbf{Y}) \leq \lim_n \int_\Omega \varphi(\nabla u_n) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \varphi(\Xi) \, d\nu(\Xi) \,,$$

čime je dokazana tvrdnja (b).

Slučaj $p = \infty$ je ponovo jednostavniji. Neka je (v_n) zadani ograničen niz u prostoru $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te neka je φ kvazikonveksna, stoga i neprekinuta, funkcija. Kako je niz (∇v_n) ograničen u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_{r\times d})$, (pod)niz $(\varphi(\nabla v_n))$ je slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, stoga vrijedi

$$\lim_n \int_\Omega \varphi(\nabla v_n(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \mu(\Omega) \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \varphi(\Xi) \, d\nu(\Xi) \,.$$

S druge strane, zbog kvazikonveksnosti funkcije φ slijedi

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad \mu(\Omega)\varphi(\mathbf{Y}) \leq \int_\Omega \varphi(\nabla v_n) \, d\mathbf{x} \,.$$

Stoga, kombinirajući prethodna dva izraza, slijedi nejednakost

$$\varphi(\mathbf{Y}) \leq \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \varphi(\Xi) \, d\nu(\Xi) \,,$$

što je upravo tvrdnja (b'), pa je time teorem 5 u cijelosti dokazan.

Valja napomenuti kako je teorem 5 istinit i u slučaju $p = 1$, uz dodatnu pretpostavku $u_n \rightharpoonup u$ slabo u $\mathrm{W}^{1,1}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te uz nešto izmijenjen dokaz.

4.2. Dokaz dovoljnosti

Dokazujemo sljedeći teorem:

Teorem 6. *Neka je $\boldsymbol{\nu} := (\nu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in\Omega}$ slabo–$*$ izmjeriva familija vjerojatnosnih mjera na $\mathrm{M}_{r\times d}$, takva da vrijedi (a), (b) i (c) iz teorema 4 u slučaju $p \in \langle 1, \infty\rangle$, odnosno (a), (b') i (c') u slučaju $p = \infty$. Tada postoji niz funkcija (u_n) u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, takav da je niz $(|\nabla u_n|^p)$ slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{M}_{r\times d})$, te da $(|\nabla u_n|)$ određuje Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu}$.* ∎

Dokažimo najprije gornji teorem u slučaju homogene Youngove mjere ν.

Propozicija 1. *Neka je $\tau \in (\mathcal{E}^p)'$ vjerojatnosna mjera za koju vrijedi*

$$(\forall\, \varphi \in \mathcal{E}^p) \quad Q\varphi(\mathbf{Y}) \le \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \varphi(\Xi)\, d\tau(\Xi)\,, \tag{7}$$

pri čemu je

$$\mathbf{Y} := \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \Xi\, d\tau(\Xi)\,,$$

a $Q\varphi(\mathbf{Y})$ kvazikonveksifikacija funkcije φ u $\mathbf{Y}$. Tada je τ homogena gradijentna p–Youngova mjera.

Dokaz. U dokazu koristimo Hahn–Banachov teorem. Neka je T linearan funkcional na $(\mathcal{E}^p)$ u slaboj–$*$ topologiji, koji je nenegativan na (konveksnom skupu) $M_{\mathbf{Y}}$. Tada postoji $\psi \in \mathcal{E}^p$ takav da vrijedi

$$(\forall\, \nu \in M_{\mathbf{Y}}) \quad 0 \le \langle T, \nu\rangle = \langle \psi, \nu\rangle = \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \psi(\Xi)\, d\nu(\Xi)\,.$$

Posebno, za $\nu := \mathrm{Av}(\delta_{\nabla u})$, pri čemu je $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, $u - l_{\mathbf{Y}} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)$, imamo

$$0 \le \int_\Omega \psi(\nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\,,$$

stoga je $Q\psi(\mathbf{Y}) \ge 0$. Iz (7) slijedi

$$0 \le Q\psi(\mathbf{Y}) \le \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \psi(\Xi)\, d\tau(\Xi) = \langle T, \tau\rangle\,.$$

Stoga je $\tau \in \mathsf{Cl}\, M_{\mathbf{Y}}$, pri čemu je zatvarač načinjen u slaboj–$*$ topologiji. Kako je $\mathcal{E}^p$ separabilan, ograničeni skupovi u njgovu dualu su u slaboj–$*$ topologiji metrizabilni, pa je konvergencija opisana nizovima. Prema tome, u svakoj ograničanoj okolini τ postoji niz (u_k) u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, takav da je $u_k - l_{\mathbf{Y}} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te vrijedi

$$(\forall\, \psi \in \mathcal{E}^p) \quad \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \psi(\Xi)\, d\tau(\Xi) = \lim_k \int_\Omega \psi(\nabla u_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\,. \tag{8}$$

Neka je ν gradijentna p–Youngova mjera pridružena nizu (∇u_k). Kako se (8) ne mijenja u procesu homogenizacije, možemo pretpostaviti da je ν homogena mjera. No tada slijedi

$$(\forall\, \psi \in \mathrm{C}_0(\mathrm{M}_{r\times d})) \quad \langle \psi, \tau\rangle = \langle \psi, \nu\rangle\,,$$

što ima za posljedicu $\tau = \nu$.

Q.E.D.

Lema 11. *Neka je $\psi \in \mathcal{E}^p$ takva da je $\psi \ge C$. Tada je $Q\psi \in \mathcal{E}^p$, te vrijedi $Q\psi \ge C$.*

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $C = 0$. Neka je

$$\lim_{|\Xi|\longrightarrow 0} \frac{\psi(\Xi)}{1 + |\Xi|^p} =: \alpha > 0\,.$$

Ukoliko je $\alpha = 0$, tada također trivijalno vrijedi

$$\lim_{|\Xi|\longrightarrow 0} \frac{Q\psi(\Xi)}{1 + |\Xi|^p} = 0\,.$$

Pretpostavimo stoga da je $\alpha > 0$, te neka je $0 < \varepsilon < \alpha$. Tada postoji M_ε, takav da je za $|\Xi| \geq M_\varepsilon$

$$\psi(\Xi) \geq (\alpha - \varepsilon)|\Xi|^p + (\alpha - \varepsilon)\,.$$

S druge pak strane, za $|\Xi| < M_\varepsilon$, možemo pisati $\psi(\Xi) \geq -C_\varepsilon$, $C_\varepsilon > 0$, pa imamo

$$(\forall\, \Xi \in \mathrm{M}_{r\times d}) \quad \psi(\Xi) \geq (\alpha - \varepsilon)(|\Xi|^p - M_\varepsilon^p) - C_\varepsilon\,.$$

Kako je desna strana u gornjoj nejednakosti konveksna funkcija u varijabli Ξ, koristeći lemu PE-8.12, zaključujemo

$$(\forall\, \Xi \in \mathrm{M}_{r\times d}) \quad Q\psi(\Xi) \geq (\alpha - \varepsilon)(|\Xi|^p - M_\varepsilon^p) - C_\varepsilon\,.$$

Konačno, prijelaskom na limes slijedi

$$\liminf_{|\Xi|\longrightarrow\infty} \frac{Q\psi(\Xi)}{1 + |\Xi|^p} \geq \alpha - \varepsilon\,.$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ i činjenice da $Q\psi \leq \psi$ imamo zaključak

$$\alpha \leq \liminf_{|\Xi|\longrightarrow\infty} \frac{Q\psi(\Xi)}{1 + |\Xi|^p} \leq \liminf_{|\Xi|\longrightarrow\infty} \frac{\psi(\Xi)}{1 + |\Xi|^p} = \alpha\,.$$

U slučaju $C \neq 0$ primijenimo gornje na funkciju $\tilde{\psi} := \psi - C$.

Q.E.D.

Koristeći gornju lemu možemo dokazati sljedeći dovoljan uvjet za homogene Youngove mjere:

Teorem 7. *Vjerojatnosna mjera $\tau \in (\mathcal{E}^p)'$ je homogena gradijentna p–Youngova mjera ukoliko, za svaku kvazikonveksnu i ograničenu odozdo funkciju $\varphi \in \mathcal{E}^p$, vrijedi*

$$\varphi\left(\int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \Xi\, d\tau(\Xi)\right) \leq \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \varphi(\Xi)\, d\tau(\Xi)\,.$$

Dokaz. Neka je $\psi \in \mathcal{E}^p$. Definirajmo

$$\psi_n := \max\{\psi, \alpha_n\} = \psi\chi_{\{\mathbf{x}\in\Omega:\psi(\mathbf{x})\geq\alpha_n\}} + \alpha_n\chi_{\{\mathbf{x}\in\Omega:\psi(\mathbf{x})<\alpha_n\}}\,.$$

pri čemu je (α_n) niz brojeva koji zadovoljava $\alpha_n \longrightarrow -\infty$. Lako se vidi da je (ψ_n) niz u $\mathcal{E}^p$, te da monotono konvergira ka ψ. Prema prethodnoj lemi, i $(Q\psi_n)$ je niz u $\mathcal{E}^p$. Kako je, za svaki n, funkcija $Q\psi_n$ kvazikonveksna, vrijedi

$$Q\psi(\mathbf{Y}) \leq Q\psi_n(\mathbf{Y}) \leq \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} Q\psi_n(\Xi)\, d\tau(\Xi) \leq \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \psi_n(\Xi)\, d\tau(\Xi)\,.$$

No tada, koristeći teorem o monotonoj konvergenciji imamo

$$\int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \psi_n(\Xi)\, d\tau(\Xi) \longrightarrow \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \psi(\Xi)\, d\tau(\Xi)\,,$$

pa tvrdnja teorema slijedi iz propozicije 1.

Q.E.D.

Prijeđimo sada na dokaz teorema 6. Dokaz provodimo o dva koraka.
Korak 1. Pretpostavimo da je funkcija $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ iz (a) i (b) jednaka nuli. Dovoljno je naći niz u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ koji zadovoljava svojstvo

$$\lim_k \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi(\nabla u_k(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \varphi(\Xi)\,d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi) d\mathbf{x}\,,$$

za sve $\xi \in \Gamma$ i $\varphi \in S$, pri čemu su Γ i S, slično kao i ranije, prebrojivi gusti podskupovi prostora $\mathrm{L}^1(\Omega)$ i $\mathrm{C}_0(\mathrm{M}_{r\times d})$. Zbog leme 10, niz $(|\nabla u_k|^p)$ je ekviintegrabilan.

Sada primjenjujemo lemu I.5 za $p=\infty$ i $q=1$ na funkcije u S uzimajući

$$r_k := \frac{1}{k}\,,$$

te nalazimo $\mathbf{a}_k^i \in \Omega\setminus N$ i $\varepsilon_k^i \le \frac{1}{k}$, takve da, za svako $\xi \in \Gamma$ i $\varphi \in S$, vrijedi

$$\int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lim_k \sum_i \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a}_k^i)\int_\Omega \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,.$$

Možemo pretpostaviti da $\mathbf{a}_k^i \notin N$, $\mu(N)=0$. Prema (b) i teoremu 7, $\nu_{\mathbf{a}_k^i}$ je homogena gradijentna p–Youngova mjera, te postoji niz $\left(u_n^{k,i}\right)_n$, takav da

$$u_n^{k,i} \rightharpoonup 0\,,$$

te vrijedi

$$(\forall\,\xi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega))\quad \lim_n \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi\left(\nabla u_n^{k,i}(\mathbf{x})\right)\,d\mathbf{x} = \varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{a}_k^i)\int_\Omega \xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,.$$

Štoviše, lema 2 nam omogućuje da pretpostavimo da za svako n vrijedi $u_n^{k,i} \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$. Definirajmo niz u_k formulom

$$u_k(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varepsilon_k^i u_n^{k,i}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}_k^i}{\varepsilon_k^i}\right) & ,\ \text{za } \mathbf{x} \in \mathbf{a}_k^i + \varepsilon_k^i\Omega,\\ 0 & ,\ \text{inače,}\end{cases}$$

pričemu za čvrste k, i biramo $n = n(k,i)$ dovoljno velik tako da za svako $(\xi,\varphi) \in D_k$ vrijedi

$$\left|\left(\varepsilon_k^i\right)^d \int_\Omega \xi\left(\mathbf{a}_k^i + \varepsilon_k^i\mathbf{y}\right)\varphi\left(\nabla u_n^{k,i}(\mathbf{y})\right)\,d\mathbf{y} - \varphi_{\boldsymbol{\nu}}\left(\mathbf{a}_k^i\right)\int_{\mathbf{a}_k^i+\varepsilon_k^i\Omega}\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \le \frac{1}{k2^i}\,.$$

Ovdje smo iskoristili rastav $\Gamma\times S = \cup_k D_k$, pri čemu su D_k konačni i vrijedi $D_k \subset D_{k+1}$.

Imajući u vidu prethodno, za svako $(\xi,\varphi) \in \Gamma\times S$ vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_k \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi(\nabla u_k(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} &= \lim_k \sum_i \left(\varepsilon_k^i\right)^d \int_\Omega \xi\left(\mathbf{a}_k^i+\varepsilon_k^i\mathbf{y}\right)\varphi\left(\nabla u_n^{k,i}(\mathbf{y})\right)\,d\mathbf{y}\\ &= \lim_k \sum_i \varphi_{\boldsymbol{\nu}}\left(\mathbf{a}_k^i\right)\int_{\mathbf{a}_k^i+\varepsilon_k^i\Omega}\xi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\\ &= \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\varphi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,.\end{aligned}$$

Korak 2. Neka je zadana familija $\boldsymbol{\nu}$ koja zadovoljava (a), (b) i (c). Definiramo li familiju Radonovih mjera $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ formulom

$$\langle \tilde{\nu}_{\mathbf{x}}, \psi \rangle := \langle \nu_{\mathbf{x}}, \psi(\cdot - \nabla u(\mathbf{x})) \rangle \,,$$

lako se vidi da $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ odgovara slučaju iz prvog koraka. Naime, uvijek možemo odabrati kvazikonveksnu funkciju iz (b) tako da vrijedi $\varphi(\mathbf{0}) = 0$.

Stoga postoji niz (v_n) koji generira $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ kao gradijentnu p–Youngovu mjeru, takav da je niz $(|\nabla v_n|^p)$ ekviintegrabilan. Tvrdimo da niz $u_n := v_n + u$ generira $\boldsymbol{\nu}$. Ako to pokažemo, dokazali smo teorem.

Neka je $\psi : \Omega \times \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ Carathéodoryjeva funkcija, te definirajmo $\tilde{\psi}$ formulom

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, \Xi) := \psi(\mathbf{x}, \Xi + \nabla u(\mathbf{x}))\,.$$

Funkcija $\tilde{\psi}$ je očito također Carathéodoryjeva, te vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_n \int_\Omega \psi(\mathbf{x}, \nabla u_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} &= \lim_n \int_\Omega \tilde{\psi}(\mathbf{x}, \nabla v_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \tilde{\psi}(\mathbf{x}, \Xi)\, d\tilde{\nu}_{\mathbf{x}}(\Xi) d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \tilde{\psi}(\mathbf{x}, \Xi - \nabla u(\mathbf{x}))\, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi) d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \psi(\mathbf{x}, \Xi)\, d\nu_{\mathbf{x}}(\Xi) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti funkcije ψ slijedi da je Youngova mjera pridružena nizu (∇u_n) upravo $\boldsymbol{\nu}$.

U slučaju $p = \infty$ dokaz je u osnovi sličan, no zahtijeva dodatne tehnikalije pa je stoga ovdje ispušten.

Drugi dio

Primjene Youngovih mjera

IV. Kompaktnost kompenzacijom

1. Uvod

Kompaktnost kompenzacijom je metoda koja omogućuje da u određenim slučajevima prelazimo na limes u bilinearnim veličinama samo uz pretpostavku slabe konvergencije. Kompenzacija je u tome što, iako promatrani nizovi konvergiraju slabo, njihov produkt (u slučaju $\mathsf{div}-\mathsf{rot}$ leme), odnosno neka druga bilinearna kombinacija konvergira slabo k odgovarajućem produktu slabih limesa.

Teoriju kompenzirane kompaktnosti razvili su F. Murat i L. Tartar i prvi rezultat tog tipa je $\mathsf{div}-\mathsf{rot}$ lema koju su dokazali 1974. godine tijekom njihovih nastojanja da ujedine sve slučajeve u kojima se H–limesi (v. odjeljak V.III) mogu eksplicitno izračunati. Zanimljivo je da je nazivu kompenzirana kompaktnost *kumovao* J. L. Lions 1976. godine.

Teorem 1. **(div-rot lema)** *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ *ograničen i otvoren skup, te neka su* $(\mathbf{D}^n)$ *i* $(\mathbf{E}^n)$ *ograničeni nizovi u* $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^d)$ *takvi da je ispunjeno*

(a) $(\mathsf{div}\,\mathbf{D}^n)$ *leži u pretkompaktnom skupu u* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$

(b) $(\mathsf{rot}\,\mathbf{E}^n)$ *leži u pretkompaktnom skupu u* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega;\mathbf{R}^d)$.

Neka, nadalje, vrijede konvergencije

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^n &\rightharpoonup \mathbf{D}\,,\\ \mathbf{E}^n &\rightharpoonup \mathbf{E}\,, \end{aligned}$$

u $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^d)$. *Tada slijedi*

$$\mathbf{D}^n\cdot\mathbf{E}^n \rightharpoonup \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

slabo–$*$ u smislu Radonovih mjera. ∎

Budući da je ovaj rezultat jednostavna posljedica idućeg teorema (v. primjer 1), dokaz ovdje ispuštamo. U sljedećem poglavlju dokazan je sličan rezultat u slučaju derivacija drugog reda (v. lema V.5).

2. Teorem kompenzirane kompaktnosti

Središnji rezultat ovog odjeljka je kvadratični teorem kompenzirane kompaktnosti, kojemu je $\mathsf{div}-\mathsf{rot}$ lema jednostavna posljedica. U daljnjem $A^1,\ldots,A^d$ su realne matrice tipa $m\times r$. Definirajmo skupove

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \left\{(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\xi})\in\mathbf{R}^r\times S^{d-1} : \left(\sum_{k=1}^d A^k\boldsymbol{\xi}_k\right)\boldsymbol{\lambda}=0\right\}\,,\\ \Lambda &:= \left\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^r : \left(\exists\,\boldsymbol{\xi}\in S^{d-1}\right)\quad\left(\sum_{k=1}^d A^k\boldsymbol{\xi}_k\right)\boldsymbol{\lambda}=0\right\}\,. \end{aligned}$$

Teorem 2. *Neka je* $\Omega\subseteq\mathbf{R}^d$ *otvoren ograničen skup, te neka je* Q *kvadratična forma na* $\mathbf{R}^r$ *za koju vrijedi*

$$(\forall\,\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda)\quad Q(\boldsymbol{\lambda})\geq 0\,.$$

Ukoliko vrijedi

$$\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u}\quad\textit{slabo u } \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^r)\,,$$

te ukoliko je

$$\sum_{k=1}^{d} A^k \partial_k \mathsf{u}_n$$

sadržano u (jako) pretkompaktnom skupu u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, *onda za svaki podniz postoji Radonova mjera* $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$, *tako da*

$$Q \circ \mathsf{u}_{n_l} \rightharpoonup \nu \quad \textit{slabo–}* \textit{ u } \mathcal{M}(\Omega)\,.$$

Nadalje, vrijedi nejednakost

$$\nu \geq Q \circ \mathsf{u} \quad \textit{na } \Omega$$

u smislu Radonovih mjera.

Dokaz. Odaberimo test funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{c}}(\Omega)$ te definirajmo niz

$$\mathsf{v}_n := \varphi(\mathsf{u}_n - \mathsf{u})\,.$$

Ukoliko pokažemo da vrijedi

$$\liminf_n \int_{\mathbf{R}^d} Q(\mathsf{v}_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \geq 0\,, \tag{1}$$

teorem će slijediti.

Doista, neka je B simetrična bilinearna forma na $\mathbf{R}^r$ pridružena Q. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^d} Q(\mathsf{v}_n(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2(\mathbf{x})(Q(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) - 2B(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}), \mathsf{u}(\mathbf{x})) + Q(\mathsf{u}(\mathbf{x})))\, d\mathbf{x}\\ &\longrightarrow \langle \nu, \varphi^2 \rangle - \int_{\mathbf{R}^d} \varphi^2(\mathbf{x}) Q(\mathsf{u}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\,,\end{aligned}$$

pa je desna strana, po pretpostavljenom, nenegativna, što je upravo tvrdnja teorema.

Funkcije v_n su definirane na $\mathbf{R}^d$ i zadovoljavaju

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \mathsf{v}_n &\subseteq \operatorname{supp} \varphi\,,\\ \mathsf{v}_n &\rightharpoonup 0 \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)\,,\\ \sum_{k=1}^{d} A^k \partial_k \mathsf{v}_n &\longrightarrow 0 \quad \text{jako u } \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^m)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Uzimanjem Fourierove transformacije te korištenjem Plancherelovog teorema, $(2)_2$ i $(2)_3$ prelazi u

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathsf{v}_n &\rightharpoonup 0 \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r)\,,\\ \frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|} \sum_{k=1}^{d} A^k \boldsymbol{\xi}_k \mathcal{F}\mathsf{v}_n &\longrightarrow 0 \quad \text{jako u } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^m)\,. \end{aligned}$$

Prema tome, nejednakost (1) je ekvivalentna s

$$\liminf_n \int_{\mathbf{R}^d} Q(\mathcal{F}\mathsf{v}_n(\boldsymbol{\xi}))\, d\boldsymbol{\xi} \geq 0\,, \tag{3}$$

pri čemu je Q proširena do Hermitske forme na $\mathbf{C}^r$.

Kako je niz (v_n) omeđen u u $\mathrm{L}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$, to je $(\mathcal{F}\mathsf{v}_n)$ omeđen i u prostoru $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)$, te

$$\mathcal{F}\mathsf{v}_n(\boldsymbol{\xi}) \longrightarrow 0$$

skoro svuda. Primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\mathcal{F}\mathsf{v}_n(\boldsymbol{\xi}) \longrightarrow 0 \quad \text{jako u}$$

Da bismo pokazali (3) rastavimo integral na dva integrala: po jediničnoj kugli u $\mathbf{R}^d$ i njenom komplementu. Integral po kugli očito teži k nuli, zbog konvergencije u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$. Za ocjenu integrala po komplementu iskoristimo sljedeće:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, C > 0)(\forall\, \mathsf{w} \in \mathbf{C}^r)(\forall\, \boldsymbol{\eta} \in S^{d-1}) \\ &\qquad \mathsf{Re}\, Q(\mathsf{w}) \geq -\varepsilon|\mathsf{w}|^2 - C \left| \sum_{k=1}^d A^k \boldsymbol{\eta}_k \mathsf{w} \right|_2^2 . \end{aligned}$$

Uvrštavanjem

$$\mathsf{w} := \mathcal{F}\mathsf{v}_n(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\eta} := \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} ,$$

te uočavajući da vrijedi

$$\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{1 + |\boldsymbol{\xi}|} \geq \frac{1}{2} \quad \text{za } |\boldsymbol{\xi}| > 1 ,$$

zaključujemo da

$$\liminf_n \int_{K(\mathbf{0},1)^c} \mathsf{Re}\, Q(\mathcal{F}\mathsf{v}_n(\boldsymbol{\xi}))\, d\boldsymbol{\xi} \geq -\varepsilon M^2 ,$$

pri čemu je M gornja ograda za $\|\mathsf{v}_n\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)}$. Prijelaskom na limes pri $\varepsilon \longrightarrow 0$ dobivamo tvrdnju (3), odnosno (1).

Preostaje još pokazati (4). U suprotnom

$$\begin{aligned} &(\exists\, \varepsilon_0 > 0)\, (\forall\, n \in \mathbf{N})\, (\exists\, \mathsf{w}_n \in \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^r) \left(\exists\, \boldsymbol{\eta}^n \in S^{d-1}\right) \\ &\qquad \mathsf{Re}\, Q(\mathsf{w}_n) < -\varepsilon_0|\mathsf{w}_n|^2 - C \left| \sum_{k=1}^d A^k \boldsymbol{\eta}_k^n \mathsf{w}_n \right|_2^2 . \end{aligned}$$

Zbog homogenosti možemo uzeti da je $|\mathsf{w}_n| = 1$. Zbog omeđenosti forme Q tada nužno slijedi

$$\sum_{k=1}^d A^k \mathsf{w}_n \boldsymbol{\xi}_k^n \longrightarrow 0 .$$

Kako su w_n i $\boldsymbol{\eta}_n$ ograničeni nizovi, to postoji gomilište w_0 i $\boldsymbol{\eta}_0$ za koje vrijedi

$$\sum_{k=1}^d A^k \mathsf{w}_0 \boldsymbol{\xi}_k^0 = 0 ,$$

pa je $\mathsf{Re}\, Q(\mathsf{w}_0) \leq -\varepsilon_0$. Međutim, gornje povlači da je $\mathsf{w}_0 = \Lambda + i\Lambda$, odakle zabog $Q(\Lambda) \geq 0$ slijedi

$$\mathsf{Re}\, Q(\Lambda + i\Lambda) \geq 0 ,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom.

Q.E.D.

Korolar 1. *Neka je Q realna kvadratična forma na $\mathbf{R}^r$ takva da je $Q(\Lambda) = \{0\}$. Ako vrijedi*

$$\mathsf{u}_n \rightharpoonup \mathsf{u} \quad \textit{slabo u } \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r)\,,$$

te ukoliko je

$$\sum_{k=1}^{d} A^k \partial_k \mathsf{u}_n$$

sadržano u (jako) pretkompaktnom skupu u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, onda je ispunjeno

$$Q \circ \mathsf{u}_n \rightharpoonup Q \circ \mathsf{u}\,,$$

slabo–$*$ u smislu Radonovih mjera.

Dokaz. Primjenom teorema 2 na $-Q$ i Q slijedi rezultat.

Q.E.D.

Primjer 1. Uzmemo li $r := 2d$, $u_k := E_k$ i $u_{d+k} := D_k$, za $k = 1, \ldots, d$, slijedi

$$\Lambda = \{(\mathbf{E}, \mathbf{D}) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d : \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = 0\}\,,$$

stoga kvadratna forma $Q(u) := \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ zadovoljava pretpostavke korolara, dok je zaključak u stvari div–rot lema. ∎

3. Primjena Youngovih mjera na skalarne zakone sačuvanja

Središnji rezultat koji dokazujemo u ovom odjeljku je sljedeći teorem.

Teorem 3. *Neka je $u_0 \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R})$. Tada Cauchyjeva zadaća*

$$(Z) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

ima slabo rješenje $u \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathsf{Cl}\,\Omega)$. ∎

U dokazu ovog teorema koristit ćemo metodu iščezavajuće viskoznosti. Naime, načinit ćemo paraboličku aproksimaciju polazne zadaće:

$$(Z_n) \qquad \begin{cases} \partial_t u_n + \partial_x f(u_n) = \frac{1}{n}\partial_{xx} u_n \\ u_n(0, \cdot) = u_0\,. \end{cases}$$

Za ovu je pak zadaću poznat klasičan rezultat egzistencije (v. [Ol]). Željeli bismo prijeći na limes pri $n \longrightarrow \infty$, te na taj način dobiti rješenje zadaće (Z). Jedini problematičan član u gornjoj jednadžbi je nelinearna kompozicija $f \circ u_n$ i tu Youngove mjere ulaze u igru. Dokažimo jednostavnu lemu koja će nam biti potrebna.

Lema 1. *Neka je $(u^n)_n$ niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ takav da $u_n \xrightharpoonup{*} u$. Tada $u_k \to u$ jako u $\mathrm{L}^p(\Omega)$ za $p < \infty$, ako i samo ako je $\nu_x = \delta_{u(x)}$.*

Dokaz. Dokažimo najprije nužnost. Iz $u_n \xrightharpoonup{*} u$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ prema osnovnom teoremu o Youngovim mjerama slijedi da postoji podniz $(u^{n_k})_k$ i familija vjerojatnostnih mjera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ takva da

$$f \circ u^k \xrightharpoonup{*} f_{\boldsymbol{\nu}} = \int_{\mathbf{R}} f(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\,,$$

za svaku neprekinutu funkciju $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Budući da $u^n \to u$ u $\mathrm{L}^p(\Omega)$, to postoji podniz $(u^{n_j})_j$ takav da $u^{n_j} \to u(\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)$, pa i $f \circ u^{n_j} \to f \circ u$ (s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$). Prijelaskom na zajednički podniz dobivamo

$$f \circ u = \int_{\Omega} f\, d\nu.\,,$$

odnosno $\boldsymbol{\nu} = \delta_u$.

Dokažimo obrat. Jednakost $\boldsymbol{\nu} = \delta_u$ povlači da za svaki $p \in \langle 1, \infty\rangle$ imamo

$$(u^n)^p \xrightharpoonup{*} (u)^p$$

i $u^n \xrightharpoonup{*} u$. Budući da je Ω skup konačne mjere, (u^n) je sadržan u $\mathrm{L}^p(\Omega)$ i omeđen u njemu. Dakle, zbog refleksivnosti prostora $\mathrm{L}^p(\Omega)$, (u^n) ima slabo konvergentan podniz u $\mathrm{L}^p(\Omega)$, a iz jedintvenosti limesa slijedi da slabo konvegira k u. No, uzmemo li za $f = |\cdot|^p$, imajući u vidu da je na skupu omeđene mjere konstanta 1 integrabilna funkcija, dobivamo

$$\int_{\Omega} |u^n(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x} \to \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p\, d\mathbf{x}\,,$$

odnosno i norme konvergiraju, što povlači da $u^n \to u$ u $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Q.E.D.

3.1. Uvjet entropije

U ovom odjeljku dokazujemo sljedeći teorem.

Teorem 4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ ograničen i otvoren skup, te $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$. Nadalje, neka je (u_n) niz funkcija u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ takav da vrijedi*

$$u_n \xrightharpoonup{*} u\,,$$

te neka za svaku konveksnu funkciju $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vrijedi da su

$$(E) \qquad \partial_t(\Phi \circ u_n) + \partial_x(Y \circ u_n)$$

sadržani u kompaktnom skupu u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, pri čemu Y zadovoljava $Y' = f'\Phi'$. Tada vrijedi

$$(5) \qquad f \circ u_n \xrightharpoonup{*} f \circ u \quad \text{u } \mathrm{L}^\infty(\Omega)$$

i

$$(6) \qquad f' \circ u_n \longrightarrow f' \circ u \quad \text{u } \mathrm{L}^p(\Omega),$$

za svaki $p < \infty$.Ukoliko f ni na kojem intervalu nije afina, onda štoviše vrijedi i

$$(7) \qquad u_n \longrightarrow u \quad \text{u } \mathrm{L}^p(\Omega),$$

za svaki $p < \infty$. ∎

Funkciju Φ iz iskaza teorema zovemo *entropija*, dok Y nazivamo *tokom entropije*.

Dokaz. Teorem dokazujemo u dva koraka.
Korak 1: Dokazujemo (5). Odaberimo čvrstu konveksnu funkciju Φ, te uvedimo oznake

$$v_n = f \circ u_n, w_n = \Phi \circ u_n \text{ i } z_n = f \circ u_n \,,$$

i promatrajmo nizove

$$\mathsf{u}_n = \begin{bmatrix} -v_n \\ u_n \end{bmatrix} \text{ i } \mathsf{v}_n = \begin{bmatrix} w_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^2)$. Postoje podnizovi takvi da

$$\mathsf{u}_n \xrightarrow{*} \begin{bmatrix} -v \\ u \end{bmatrix} \text{ i } \mathsf{v}_n \xrightarrow{*} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$$

u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Prema uvjetu entropije (E) slijedi

$$\mathsf{div}\, \mathsf{v}_n = \partial_t w_n + \partial_x z_n$$

leži u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, a uzmemo li za Φ funkciju $\Phi(x) = x$ isto slijedi i za

$$\mathsf{rot}\, \mathsf{u}_n = \partial_t u_n + \partial_x v_n \,.$$

Primjenom div–rot leme zaključujemo da vrijedi jednakost

$$u_n z_n - v_n w_n \xrightarrow{*} uz - vw$$

u smislu distribucija. S druge pak strane produkt $\mathsf{u}_n \cdot \mathsf{v}_n$ je ograničen niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ pa ima slabo $*$ konvergentan podniz, odakle zbog jedinstvenosti limesa slijedi

$$u_n z_n - v_n w_n \xrightarrow{*} uz - vw \,,$$

odnosno

$$u_n Y(u_n) - f(u_n)\Phi(u_n) \xrightarrow{*} uz - vw \,. \tag{8}$$

Primjenom osnovnog teorema o Youngovim mjerama skoro svuda imamo

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \langle \nu_{t,x}, 1_{\mathbf{R}} \rangle \\ v(t,x) &= \langle \nu_{t,x}, f \rangle \\ w(t,x) &= \langle \nu_{t,x}, \Phi \rangle \\ z(t,x) &= \langle \nu_{t,x}, Y \rangle \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Uz gornji zapis zaključujemo da za svaku konveksnu funkciju Φ i Y takvu da je $Y' = f'\Phi'$ vrijedi

$$\langle \nu_{t,x}, 1_{\mathbf{R}} Y - f\Phi \rangle = \langle \nu_{t,x}, 1_{\mathbf{R}} \rangle \langle \nu_{t,x}, Y \rangle - \langle \nu_{t,x}, f \rangle \langle \nu_{t,x}, \Phi \rangle \,. \tag{10}$$

Ovo se često naziva Murat–Tartarova jednakost za entropije. Odaberimo čvrst par (t,x), te ovog puta uzmino posebnu konveksnu funkciju $\Phi(\lambda) := |\lambda - u|$. Sada, za općenitu f imamo da je

$$Y = \begin{cases} f(u) - f(\lambda), & \lambda \leqslant u \\ f(\lambda) - f(u), & u \leqslant \lambda \,. \end{cases}$$

Uvrštavanjem u (10) slijedi

$$(v - f(u))\langle \nu, |\lambda - u|\rangle = 0\,,$$

odakle zaključujemo da je

$$v = f(u) \quad \text{ili} \quad \langle \nu, |\lambda - u|\rangle = 0\,.$$

Druga mogućnost vodi na $\boldsymbol{\nu} = \delta_u$, odnosno ponovo na $v = f(u)$, čime je dokazano (5).

Korak 2. Dokazujemo da je nosač mjere $\nu_{t,x}$ sadržan u intervalu na kojem je f afina.

Radi jednostavnosti računanja, pretpostavimo da u točki (t, x) vrijedi

$$u(t,x) = f(u(t,x)) = 0\,.$$

Tada (10) prelazi u

$$\langle \nu, 1_{\mathbf{R}} Y - f\Phi\rangle = 0\,,$$

za svaku konveksnu funkciju Φ. Koristeći (9) možemo zapisati

$$\begin{aligned} \langle \nu, 1_{\mathbf{R}}\rangle &= 0 \\ \langle \nu, f\rangle &= 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Odaberimo α i β tako da je $\overline{\text{conv}}(\operatorname{supp}\nu) = [\alpha, \beta]$. Tada $(11)_1$ povlači da je $\alpha \leqslant 0 \leqslant \beta$. Ukoliko bi jedna od vrijednosti α ili β bila jednaka nuli, tada bi i druga vrijednost bila nula. To bi povlačilo da je $\nu = \delta$, što je trivijalan slučaj, stoga pretpostavljamo da je $\alpha < 0 < \beta$. Definirajmo pomoćne funkcije g i h formulama:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_\alpha^\lambda \xi\, d\nu(\xi) \\ h(\lambda) &= \int_\alpha^\lambda f(\xi)\, d\nu(\xi) \end{aligned} \tag{12}$$

i proširimo ih nulom izvan $[\alpha, \beta]$. Proširenjem dobivamo neprekinutu funkciju, zbog odabira intervala i (11). Također iz (11) i definicije g vidimo da je za $\lambda \in \langle \alpha, \beta\rangle$ ispunjeno

$$g(\lambda) < 0\,.$$

Iz (12) vidimo i da je

$$\begin{aligned} g'(\lambda) &= \lambda\nu \\ h'(\lambda) &= f(\lambda)\nu\,, \end{aligned} \tag{13}$$

pa slijedi

$$\langle g', Y\rangle - \langle h', \Phi\rangle = 0\,,$$

odnosno

$$-\langle g, Y'\rangle + \langle h, \Phi'\rangle = 0\,.$$

Uvrstimo li $Y' = f'\Phi'$ dobivamo:

$$\langle -gf' + h', \Phi'\rangle = 0\,.$$

To vrijedi za svaku konveksnu funkciju Φ, odnosno

$$\langle -gf' + h', \varphi\rangle = 0$$

vrijedi za svaku rastuću funkciju φ. Stoga zaključujemo da to vrijedi i za razliku neopadajućih funkcija, i dalje, za sve glatke funkcije φ. Tako smo dobili da je

$$h(\lambda) - f'(\lambda)g(\lambda) = 0\,, \tag{14}$$

a (13) daje da vrijedi jednakost

$$f(\lambda)g'(\lambda) - \lambda h'(\lambda) = 0\,.$$

Jedno i drugo povlači

$$(f(\lambda)g(\lambda) - h(\lambda))' = 0\,,$$

što zajedno s činjenicom da je $g = h = 0$ izvan $[\alpha, \beta]$ daje

$$f(\lambda)g(\lambda) - h(\lambda) = 0\,.$$

Posljednje, zajedno s (14) i činjenicom da je $g < 0$ na $\langle\alpha, \beta\rangle$ daje $f(\lambda) - \lambda f'(\lambda) = 0$, odakle slijedi da na istom intervalu vrijedi

$$f(\lambda) = c\lambda\,,$$

pa je tvrdnja (6) trivijalno ispunjena.

Ako nema intervala na kojem je f afina onda je $\operatorname{supp}\nu \subseteq \{\alpha\}$, pa tvrdnja slijedi iz Leme 1.

Q.E.D.

3.2. Dokaz osnovnog teorema

Promotrimo paraboličku aproksimaciju Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} \partial_t u_n + \partial_x f(u_n) = \frac{1}{n}\partial_{xx} u_n \\ u(0, \cdot) = u_0\,. \end{cases}$$

Standardni rezultat za paraboličku jednadžbu gornjeg tipa [Ol] je egzistencija klasičnog rješenja u_n takvog da za svaki ograničeni skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$ vrijedi da su u_n i $\frac{1}{n}\partial_x u_n$ ograničeni u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Zbog ograničenosti postoji slabo $*$ konvergentan podniz. Označimo takav podniz na isti način $u_n \xrightarrow{*} u$.

Cilj nam je pokazati da je tada gomilište u traženo slabo rješenje. Dovoljno je pokazati da vrijedi (E), jer tada tvrdnja izlazi iz teorema 4.

Neka je $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ konveksna funkcije, a funkcija Y takva da vrijedi $Y' = f'\Phi'$. Računamo:

$$\begin{aligned} \partial_t(\Phi \circ u_n) + \partial_x(Y \circ u_n) &= (\Phi' \circ u_n)\partial_t u_n + \partial_x(Y' \circ u_n)\partial_x u_n \\ &= (\Phi' \circ u_n)(\partial_t u_n + \partial_x(f \circ u_n)) \\ &= (\Phi' \circ u_n)\tfrac{1}{n}\partial_{xx} u_n \\ &= \tfrac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi \circ u_n) - \tfrac{1}{n}(\Phi'' \circ u_n)(\partial_x u_n)^2\,. \end{aligned}$$

Uočimo najprije da je $\partial_t(\Phi \circ u_n) + \partial_x(Y \circ u_n)$ sadržano u ograničenom podskupu prostora $\mathrm{W}^{-1,\infty}(\Omega)$.

Nadalje tvrdimo da je $\frac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi\circ u_n)$ sadržano u kompaktnom skupu u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Dovoljno je vidjeti da $\|\frac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi\circ u_n)\|_{\mathrm{H}^{-1}}\to 0$ kad $n\to\infty$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\|\tfrac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi\circ u_n)\|_{\mathrm{H}^{-1}} &= \sup_{\substack{\varphi\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)\\ \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}\leqslant 1}} \left|\int_\Omega \tfrac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi\circ u_n)\varphi\, dtdx\right| \\
&= \sup_{\varphi\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)} \left|\int_\Omega \tfrac{1}{n}\partial_{x}(\Phi\circ u_n)\partial_x\varphi\, dtdx\right| \\
&\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{n}}\,\|\Phi'\circ u_n\|_{\mathrm{L}^\infty}\,\left\|\sqrt{\tfrac{1}{n}}\partial_x u_n\right\|_{\mathrm{L}^2}\sup_{\varphi\in\mathrm{H}^1_0(\Omega)}\|\partial_x\varphi\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{n}}C
\end{aligned}$$

Pomnožimo li paraboličku aproksimaciju diferencijalne jednadžbe s u_n i integriramo po Ω, kraći račun daje ograničenost niza $\sqrt{\frac{1}{n}}\partial_x u_n$ u prostoru $\mathrm{L}^2(\Omega)$, stoga imamo gornju jednoliku ocjenu.

Tvrdimo, k tome, i da su $(\Phi''\circ u_n)$ sadržani u ograničenom skupu u $\mathcal{M}(\Omega)$. Ovo je očito zbog konveksnosti od Φ i činjenice da je $\frac{1}{n}(\partial_x u_n)^2$ L^1 funkcija.

Tvrdnja teorema sada slijedi iz

Lema 2. **(Murat)** *Neka je (g^n) niz koji je sadržan u $(A+B)\cap C$, gdje je: A kompaktan u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, B ograničen u $\mathcal{M}(\Omega)$ i C ograničen u $\mathrm{W}^{-1,\infty}(\Omega)$.*

Tada je (g^n) sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Dokaz. Promotrimo Dirichletovu zadaću

$$\begin{cases}\triangle v^n = g^n & \text{u } \Omega\\ v^n = 0 & \text{na } \partial\Omega\,.\end{cases}\tag{15}$$

Za $p > d(=2)$ kompaktnost ulaganja $\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)\hookrightarrow \mathrm{C}_0(\Omega)$ (v. [Br, teorem IX.16]) povlači da je ulaganje $\mathcal{M}(\Omega)\hookrightarrow \mathrm{W}^{-1,q}(\Omega)$ za $q<\frac{d}{d-1}\leqslant 2$ također kompaktno.

Po pretpostavci g^n možemo zapisati na sljedeći način

$$g^n = g^n_1 + g^n_2\,,$$

pri čemu je $g^n_1\in A$ i $g^n_2\in B$. Neka su v^1_n i v^2_n rješenja rubne zadaće (15) s g^n_1, odnosno g^n_2, na desnoj strani. Zbog linearnosti slijedi da za rješenje zadaće vrijedi $v_n = v^1_n + v^2_n$, pri čemu je, zbog eliptičke regularnosti (v. [GT]):

v^1_n sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{W}^{1,2}_0(\Omega) = \mathrm{H}^1_0(\Omega)$

v^2_n sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{W}^{1,q}_0(\Omega)$

Budući da je također $g^n\in \mathrm{W}^{-1,\infty}(\Omega)$, to zaključujemo da je i v_n sadržano u ograničenom podskupu $\mathrm{W}^{1,r}_0(\Omega)$ za $r\leqslant\infty$. Intepolacijom (v. [RS]) za $2-r$ zaključujemo da je v_n sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, što povlači i da je g^n sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Q.E.D.

V. Varijacijske zadaće i poluneprekinutost

1. Nepostizanje ekstrema u varijacijskom računu

Temelna zadaća varijacijskog računa jest među svim funkcijama iz danog Banachovog prostora, koje zadovoljavaju dani rubni uvjet, naći one koje minimiziraju zadani funkcional. Preciznije, naći $\bar{u} \in E$ tako da je ispunjeno

$$I(\bar{u}) = \inf\{I(u) : u \in E\ , u = u_0 \text{ na } \Omega\}\,,$$

pri čemu je funkcional I zadan formulom

$$I(u) := \int_\Omega f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}\,.$$

Ovdje je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren skup, $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$, $\nabla u \in \mathrm{M}_{r\times d}$ (prostor svih realnih $d \times r$ matrica), $f : \Omega \times \mathbf{R}^r \times \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekinuta (odnosno Carathéodoryjeva) funkcija, u_0 je dana funkcija a E Banachov prostor.

Definicija 1. Funkcional je I (nizovno) slabo poluneprekinut odozdo ukoliko za svaki niz (u_n), takav da $u_n \rightharpoonup u$ slabo u E, vrijedi

$$\liminf_n I(u_n) \geq I(u)\,.$$

∎

Analogno se drfinira i (nizovna) slaba–$*$ poluneprekinutost odozdo.

Svojstvo slabe poluneprekinutosti odozdo je jedno od fundamentalnih svojstava koje osigurava postojanje rješenja varijacijske zadaće. Klasičan rezultat je sljedeći teorem (v. [Da])

Teorem 1. *Neka je E refleksivan Banachov prostor te neka je funkcional $I : E \longrightarrow \mathbf{R}$ slabo poluneprekinut odozdo. Ukoliko je I koercitivan, to jest, ukoliko vrijedi*

$$\lim_{\|u\|_E} \frac{I(u)}{\|u\|_E} \geq \alpha > 0\,,$$

tada zadaća

$$\inf\{I(u) : u \in E\}$$

ima barem jedno rješenje.

∎

Pokazuje se da je u *skalarnom slučaju* ($d = 1$ ili $r = 1$) konveksnost integranda f dovoljan uvjet za postizanje slabe poluneprekinutosti odozda funkcionala I. U *vektorskom slučaju* ($d, r > 1$), pravi uvjet je kvazikonveksnost.

U slučaju nekonveksnog integranda, stoga, promatrana varijacijska zadaća nema rješenja i u tom slučaju provodimo relaksaciju zadaće. Zadatak ovog poglavlja je pokazati kako se Youngove mjere koriste u razmatranju dvaju temeljnih pitanja varijacijskog računa: slabe poluneprekinutosti odozdo promatranog funkcionala i relaksacije.

Započnimo razmatranja jednostavnim primjerom varijacijske zadaće koja ne dopušta rješenje u klasičnom smislu, već je minimizator dan Youngovom mjerom.

Primjer 1. Promotrimo funkcional

$$I(u) = \int_0^1 ((u_x^2 - 1)^2 + u^2)\, dx$$

na prostoru $\mathrm{W}_0^{1,4}(\langle 0,1\rangle)$. Tada vrijedi $\inf I(u) = 0$, međutim ne postoji $u \in \mathrm{W}_0^{1,4}(\langle 0,1\rangle)$ takva da je $I(u) = 0$.

Doista, neka je $u \in \mathrm{W}_0^{1,4}(\langle 0,1\rangle)$ takva da je $I(u) = 0$. Tada imamo $(u_x^2-1)^2+u^2 = 0$, odakle slijedi $u_x^2 = 1$ i $u = 0$, što je nemoguće. Pokažimo da je $\inf I(u) = 0$. Definirajmo funkciju $u_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ kao

$$u_0(x) := \begin{cases} x, & x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 1-x, & x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} ,$$

i proširimo je po periodičnosti na cijeli $\mathbf{R}$ s osnovnim periodom $T = 1$. Za $n \in \mathbf{N}$ stavimo

$$u^n(x) = \frac{1}{4^n} u_0(4^n x) .$$

Tada funkcija u^n ima period $\frac{1}{4^n}$ i vrijedi

$$I(u^n) \le 2\frac{1}{4^n} \longrightarrow 0 , \quad \text{kad } n \longrightarrow \infty . \tag{1}$$

Očito postoji $K > 0$ sa svojstvom $\|u^n\|_{L^4(0,1)} \le K$. Stoga je neki njegov podniz slabo konvergentan u $\mathrm{L}^4(\langle 0,1\rangle)$, pa primjenom osnovnog teorema o Youngovim mjerama zaključujemo da postoji podniz (označimo ga ponovo s (u^n)), i postoji familija vjerojatnosnih mjera $\boldsymbol{\nu} = (\nu_x)_{x\in\langle 0,1\rangle}$ takva da $I(u^n) \rightharpoonup \langle \nu_x, v\rangle$.

Lako se vidi da funkcije u^n imaju derivaciju 1 ili -1 svuda osim u točkama skupa $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbf{N}\}$. Stoga $(u_x^n)^2 \longrightarrow \pm 1$ (ss $x \in [0,1]$), odakle slijedi

$$\int_0^1 ((u_x^n)^2 - 1)^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \mathrm{supp}\nu_x \in \{1,-1\} ,$$

a jedine takve mjere su oblika $\lambda(x)\delta_{-1} + (1-\lambda(x))\delta_1$, gdje je λ proizvoljna funkcija. Znamo da vrijedi

$$v(x) = \langle \nu_x, id\rangle = \int_{\mathbf{R}} \tau d\nu_x(\tau) = \lambda(x)(-1) + (1-\lambda(x))(1) = 1 - 2\lambda(x) \quad .$$

S druge strane, teorem o Youngovim mjerama daje

$$u^n(x) = \int_0^x u_\tau^n(\tau)d\tau \longrightarrow \int_0^x v(\tau)d\tau = 0$$

ako uvažimo relaciju (1), što dalje povlači

$$0 = 1 - \lambda(x) \Rightarrow \lambda = \lambda(x) = \frac{1}{2} .$$

Budući da svaki minimizirajući niz generira Youngovu mjeru, to je $\nu_x = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, i tvrdnja je dokazana.

∎

Dakle, optimalna funkcija koja rješava zadaću iz prethodnog rprimjera je Radonova mjera $\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ koja poprima vrijednost $+1$ s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, -1 s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, dok su joj derivacije ± 1.

Zanimljivo je napomenuti da su funkcije u^n sumandi reda funkcija $\sum_{n=0}^{\infty} u^n(x)$, koji na $\mathbf{R}$ konvergira ka Van der Waerdenovoj funkciji, koja je primjer funkcije neprekinute u svakoj točki, ali koja nema derivaciju nigdje na $\mathbf{R}$.

Primjer 2. Neka je $\Omega := [0,L]\times[0,1]$ i $J : \mathrm{W}_0^{1,4}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$ funkcional definiran s

$$J(u) := \int_\Omega (u_x^2 + (u_y^2-1)^2)\, dxdy\,.$$

Tada je ponovo $\inf J(u) = 0$, ali ne postoji $u_0 \in \mathrm{W}_0^{1,4}(\Omega)$ takav da je $J(u_0) = 0$. ∎

Sljedeće dvije leme ilustriraju prednosti Youngovih mjera. Na primjer, mogućnost dobivanja rezultata poluneprekinutosti odozdo ne samo za integrande oblika $\int f(\nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$ već i za integrande oblika $\int f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$.

Lema 1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup konačne mjere i neka niz $u_k : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ generira Youngovu mjeru $(\nu_\mathbf{x})_{\mathbf{x}\in\Omega}$, te neka vrijede pretpostavke teorema II.1. Neka je $f : \Omega\times\mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}^r$ Carathéodoryjeva funkcija i neka je $(f^-(\cdot, u_k)$ slabo predkompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Tada vrijedi*

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,.$$

Ako je, štoviše, niz funkcija $\mathbf{x} \mapsto |f|(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x}))$ slabo predkompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, tada vrijedi

$$f(\cdot, u_k) \xrightharpoonup{\mathrm{L}^1(\Omega)} f_{\boldsymbol{\nu}}\,.$$

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $f \geqslant 0$. Pretpostavimo da također vrijedi

$$(\exists\, R > 0) \quad f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (\text{s.s. } \mathbf{x} \in \Omega)\,.$$

Prema Scorza-Dragonijevom teoremu (inačica Luzinovog teorema) postoji rastući niz kompaktnih skupova Ω_j takvih da vrijedi $\Omega_j \subseteq \Omega$, $\mu(\Omega\backslash\Omega_j) \longrightarrow 0$ i $f\chi_{\Omega_j\times\mathbf{R}^r} \longrightarrow \mathbf{R}$ je neprekinuta. Definirajmo funkcije $F : \Omega \longrightarrow \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ s $F_j(\mathbf{x}) := \chi_{\Omega_j}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, \cdot)$. Iz dokaza teorema II.1 znamo da vrijedi

$$\delta_{u_k} \xrightharpoonup{*} \boldsymbol{\nu}\,,$$

te je stoga, zbog nenegativnosti funkcije f,

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} &\geqslant \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega \chi_{\Omega_j}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \\
&= \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega \langle \delta_{u_k(\mathbf{x})}, F_j(\mathbf{x})\rangle\,d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \langle \nu_\mathbf{x}, F_j(\mathbf{x})\rangle\,d\mathbf{x} = \int_{\Omega_j}\int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})\,d\nu_\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,.
\end{aligned}$$

odnosno, primjenom teorema o monotonoj konvergenciji,

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega\int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) d\nu_\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})\,d\mathbf{x}\,.$$

Neka je (η_l) monoton niz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^r)$ koji po točkama konvergira k 1. Za proizvoljnu funkciju $f \geqslant 0$ definiramo niz $f_l := f\eta_l$. Tada po pokazanom, primjenom teorema o monotonoj konvergenciji i na niz f_l vrijedi tvrdnja teorema. Isti argumenti daju tvrdnju i za funkciju f koja je ograničena odozdo. Za općenite f i $M > 0$ definirajmo

$$h_k(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x})) = h_k^+(\mathbf{x}) - h_k^-(\mathbf{x})\,, \quad f_M(\mathbf{x}) := \max(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), -M)\,.$$

Tada slijedi

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, M > 0) \quad \sup_{k\in\mathbf{N}} \int_{h_k^- \geqslant M} h_k^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \varepsilon\ .$$

S druge strane, uvrštavanjem se lako provjeri da vrijedi

$$\max(h_k^+(\mathbf{x}) - h_k^-(\mathbf{x}), -M) \leqslant h_k^+(\mathbf{x}) - h_k^-(\mathbf{x})\chi_{h_k^- \leqslant M}(\mathbf{x})\ ,$$

odnosno

$$f_M(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x})) - h_k^-(\mathbf{x})\chi_{h_k^- \leqslant M}(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x}))\ .$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} &\geqslant \liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f_M(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} - \sup_{k\in\mathbf{N}} \int_{h_k^- \geqslant M} h_k^-(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\
&\geqslant \liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, u_k(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \varepsilon \\
&\geqslant \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} f_M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x} - \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

pa tvrdnja slijedi zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$.

Q.E.D.

Neka je sada $f : \Omega \times \mathbf{R}^r \times \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ nenegativna Carathéodoryjeva funkcija. Upravo pokazan rezultat možemo primijeniti na problem karakterizacije takvih funkcija f za koje je preslikavanje $I : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ definirano s

$$I(\mathsf{u}) := \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$$

nizovno slabo poluneprekinuto odozdo.

Zaista, ako definiramo niz funkcija $\mathsf{v}_j := \nabla \mathsf{u}_j$, pri čemu

$$\mathsf{u}_j \rightharpoonup \mathsf{u} \quad \text{slabo u } \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)\,,$$

prijelaskom na podniz slijedi $\mathsf{u}_j \longrightarrow \mathsf{u}$ skoro svuda na Ω. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
\liminf_n \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{u}_j(\mathbf{x}), \nabla \mathsf{u}_j(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} &\geqslant \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^d \times M^{m\times n}} f(\mathbf{x}, \mathsf{u}, \boldsymbol{\lambda})\, d\delta_{\mathsf{u}(\mathbf{x})}(\mu) \otimes d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda})\, d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{u}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) d\mathbf{x}\,.
\end{aligned}$$

Dakle dokaz slabe poluneprekinutosti funkcionala I svodi se na provjeru nejednakosti

$$\int_{\mathrm{M}_{r\times d}} g(\boldsymbol{\lambda})\, d\nu_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant g(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x})) = g(\langle \nu_{\mathbf{x}}, id\rangle)\,,$$

uz $g(\boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}, \mathsf{u}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\lambda})$, pri čemu su prva i druga varijabla čvrste.

2. Varijacijska zadaća vezana uz model crno–bijelog tiska

Promotrimo klasu izmjerivih funkcija $\mathcal{U}$ na ograničenom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ s vrijednostima u segmentu $[0,1]$. Zanima nas aproksimacija dane funkcije $u \in \mathcal{U}$ funkcijama v iz klase:

$$\mathcal{V} := \{v \in \mathcal{U} : v(\mathbf{x}) \in \{0,1\} \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega)\} \ ,$$

u smislu minimizacije funkcionala (ovdje μ, kao i ranije, označava Lebesgueovu mjeru na $\mathbf{R}^d$)

$$J(v) := \int_0^1 g(r) \int_\Omega \Big| \frac{1}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x},r) \cap \Omega)} \int_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)\cap\Omega} (v(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}))\, d\mathbf{y} \Big| \, d\mathbf{x}\, dr \ , \tag{2}$$

pri čemu je $g : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$ ograničena funkcija koja zadovoljava

$$(\forall\, r \in \langle 0,1]) \quad g(r) > 0 \ . \tag{3}$$

Ova je varijacijska zadaća usko vezana uz crno–bijeli tisak na digitalnim printerima. Naime, zamislimo li da Ω predstavlja pravokutnik na papiru, na kojemu printamo sliku, te neka je $\lambda \in [0,1]$ ton u skali sivog, tako da 0 odgovara čistoj bijeloj boji, a 1 to crnoj. U ovom će modelu polazna slika biti predstavljena funkcijom $u \in \mathcal{U}$, koju želimo što preciznije prikazati crnim mrljama tinte ili bijelim prazninama na papiru, dakle, aproksimirati funkcijom $v \in \mathcal{V}$. Najdublji integral u (2) predstavlja lokalno srednje odstupanje v od u. Ovu je zadaću predložio Ball u [BJ94].

Preciznije, proučavamo minimizacijsku zadaću za J na $\mathcal{V}$. Rješenje ove zadaće dano je sljedećim teoremom (v. [AB97]):

Teorem 2. *Uz gornje oznake vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) $\inf\{J(v) : v \in \mathcal{V}\} = 0$.

(b) Svaki minimizirajući niz funkcionala J određuje jedinstvenu Youngovu mjeru

$$\nu_{\mathbf{x}} = (1 - u(\mathbf{x}))\delta_0 + u(\mathbf{x})\delta_1 \text{ s.s. } \mathbf{x} \in \Omega \ .$$

(c) Minimum se postiže ako i samo ako vrijedi $u \in \mathcal{V}$. ∎

Tvrdnja (c) implicira da se za $u \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ minimum ne postiže u $\mathcal{V}$. Naime, svaki minimizacijski niz određuje *mikrostrukturu*: u nastojanju da zadovolji zahtjev na o poprimanju vrijednosti u skupu $\{0,1\}$, funkcije sve brže fluktuiraju između *mikroskopskih* područja. S druge strane, ova zadaća ima jedinstveno rješenje u širem smislu. To je upravo Youngova mjera $\boldsymbol{\nu}$.

2.1. Dokaz tvrdnji (b) i (c)

Uz pretpostavku da vrijedi (a), dokazat ćemo najprije tvrdnje (c) i (b). Za danu funkciju $w \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, definiramo preslikavanje $F_w : \Omega \times \langle 0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ formulom

$$F_w(\mathbf{x},r) := \fint_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)\cap\Omega} w(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} := \frac{1}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x},r) \cap \Omega)} \int_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)\cap\Omega} w(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \ . \tag{4}$$

Funkcija F_w zadovoljava sljedeće svojstvo neprekinutosti:

Lema 2. *Za svaku funkciju* $w \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *preslikavanje* F_w *je neprekinuto na* $\Omega \times \langle 0, 1]$. *Štoviše, vrijedi*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} F_w(\mathbf{x}, r) = w(\mathbf{x}) \quad (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; .$$

Dokaz. Za $(\mathbf{x}, r)$ i $(\mathbf{x}', r')$ iz $\Omega \times \langle 0, 1]$ promotrimo razliku

$$\begin{aligned}
F_w(\mathbf{x}, r) - F_w(\mathbf{x}', r') &= \fint_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)\cap\Omega} w(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - \fint_{\mathrm{K}(\mathbf{x}',r')\cap\Omega} w(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)} \left(\int_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)\cap\Omega} w(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - \int_{\mathrm{K}(\mathbf{x}',r')\cap\Omega} w(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)} - \frac{1}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}', r') \cap \Omega)} \right) \int_{\mathrm{K}(\mathbf{x}',r')\cap\Omega} w(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \; .
\end{aligned}$$

Uzmemo li apsolutnu vrijednost u gornjoj jednakosti, slijedi

$$\begin{aligned}
|F_w(\mathbf{x}, r) - F_w(\mathbf{x}', r')| &\leq \frac{\|w\|_{\mathrm{L}^\infty} \mu(A)}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)} + \|w\|_{\mathrm{L}^\infty} \left| 1 - \frac{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}', r') \cap \Omega)}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)} \right| \\
&\leq \frac{2\|w\|_{\mathrm{L}^\infty} \mu(A)}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)} \; ,
\end{aligned} \tag{5}$$

pri čemu A označava simetričnu razliku skupova $\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega$ i $\mathrm{K}(\mathbf{x}', r') \cap \Omega$. Budući da $\mu(A)$ teži k nuli kako se $(\mathbf{x}', r')$ približava $(\mathbf{x}, r)$, slijedi neprekinutost preslikavanja F_w.

Uočimo li da za dovoljno malen polumjer r vrijedi $\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, druga je tvrdnja leme zapravo reformulacija Lebesgue–Besicovitchevog teorema o diferenciranju (vidjeti npr. Evans & Gariepi [EG, teorem 1.7.1]).

Q.E.D.

Napomena 1. Zapravo vrijedi i više: Za svako $r_0 > 0$ funkcija F_w je u stvari uniformno neprekinuta na $\Omega \times [r_0, 1]$. Ta činjenica je jednostavna posljedica leme 4 (vidjeti odjeljak 3).

∎

Dokažimo najprije tvrdnju (c). Za $u \in \mathcal{V}$, minimum očito možemo postići tako da uzmemo $v := u$. Cilj je dokazati obrat.

Budući da je minimum funkcionala J jednak nuli (što će biti dokazano u daljnjem tekstu), pretpostavimo da vrijedi $J(v) = 0$. Stoga pretpostavka (3), zajedno s neprekinutošću preslikavanja F_{v-u}, vodi na zaključak

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \Omega)(\forall\, r \in \langle 0, 1]) \quad F_{v-u}(\mathbf{x}, r) = 0 \; .$$

Iskoristimo li drugi dio Leme 2, slijedi

$$0 = \lim_{r \longrightarrow 0} F_{v-u}(\mathbf{x}, r) = v(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) \quad (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; .$$

Stoga vrijedi $v = u$ skoro svuda na Ω, prema tome, ukoliko se minimum postiže za neku funkciju $v \in \mathcal{V}$, u nužno mora biti u danoj klasi $\mathcal{V}$, čime je dokazana tvrdnja (c).

Neka je $\boldsymbol{\nu} := (\nu_\mathbf{x})_{\mathbf{x}\in\Omega}$ Youngova mjera pridružena minimizirajućem nizu (v_n). Prema teoremu II.1, postoji podniz (v_{n_k}), takav da

$$(\forall\, f \in \mathrm{C}([0, 1])) \quad f \circ v_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f_{\boldsymbol{\nu}} \; . \tag{6}$$

Posebno, $v_{n_k} \xrightarrow{*} v$, pri čemu je

$$v(\mathbf{x}) := \int_0^1 \lambda \, d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) \ \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \ . \tag{7}$$

Budući da je (v_n) niz u $\mathcal{V}$, za svaku funkciju f in $\mathrm{C}_c([0,1])$ konvergencija u (6) povlači $\langle \nu_{\mathbf{x}}, f \rangle = 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$). Odatle slijedi da $\operatorname{supp} \nu_{\mathbf{x}} \subseteq \{0,1\}$ s.s. $\mathbf{x} \in \Omega$. Odatle zaključujemo da je Youngova mjera $\boldsymbol{\nu}$ oblika

$$\nu_{\mathbf{x}} = (1 - \omega(\mathbf{x}))\delta_0 + \omega(\mathbf{x})\delta_1 \ \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \ ,$$

za neku funkciju $\omega \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Kako je $J(v) = 0$, a dokazali smo da za takav v vrijedi $v = u$ skoro svuda na Ω, iz (7) slijedi željena formula za Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu}$, čime smo dokazali tvrdnju (b).

2.2. Konstrukcija minimizacijskog niza

Konstruirajmo najprije niz funkcija $v_n \in \mathcal{V}$, koje su na sve manjim kockama jednake srednjoj vrijednosti funkcije u. Da bismo to postigli, načinimo dekompoziciju skupa Ω na prebrojivu disjunktnu uniju kocaka, po uzoru na Rudina [R].

Za $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^d$ i $r > 0$ skup

$$Q(\mathbf{a}, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : a^i \le x^i < a^i + r, 1 \le i \le d\}$$

ćemo zvati *kocka s vrhom u* $\mathbf{a}$. Za svaki $n \in \mathbf{N}$ neka je P_n skup svih točaka iz $\mathbf{R}^d$ čije su koordinate cjelobrojni višekratnici 2^{-n}. Označimo s $\mathcal{Q}_n$ familiju svih 2^{-n}–kocaka s vrhovima u točkama iz P_n, te s $\mathcal{Q}$ uniju svih $\mathcal{Q}_n$. Vrijedi sljedeća lema (id., p. 50):

Lema 3. *Svaki neprazan otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ je prebrojiva unija disjunktnih elemenata iz $\mathcal{Q}$.*

∎

Prijeđimo na konstrukciju minimizirajućeg niza. Polazeći od dekompozicije dane prethodnom lemom (korak 0), induktivno definiramo niz (v_n), profinjujući dekompozicije na sljedeći način:

U n–tom koraku, raspolavljanjem stranica, podijelimo sve $2^{-(n-1)}$–kocke na 2^{-n}–kocke. Na taj smo način skup Ω prikazali kao disjunktnu uniju

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} Q_k^{(n)} \ ,$$

pri čemu za svaki $k \in \mathbf{N}$, $Q_k^{(n)} \in \cup_{m \ge n} \mathcal{Q}_m$. Nadalje, za svaki k neka je $I_k^{(n)}$ izmjeriv podskup skupa $Q_k^{(n)}$, takav da vrijedi

$$\mu\left(I_k^{(n)}\right) = m_k^{(n)} \mu\left(Q_k^{(n)}\right) \ ,$$

gdje $m_k^{(n)}$ označava srednju vrijednost funkcije u na kocki $Q_k^{(n)}$. Dobar izbor skupova $I_k^{(n)}$ su kocke traženih dimenzija sa središtima u točkama iz $Q_k^{(n)}$. Definirajmo

$$\Omega_n := \bigcup_{k \in \mathbf{N}} I_k^{(n)} \ ,$$

te $v_n := \chi_{\Omega_n}$, čime smo dovršili konstrukciju.

Iz gornje konstrukcije niza (v_n), jednostavnim računom slijedi da (neovisno o $n \in \mathbf{N}$) vrijedi

$$\mu(\Omega_n) = \int_\Omega u(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = m_{u,\Omega}\,\mu(\Omega)\ ,$$

pri čemu $m_{u,\Omega}$ označava srednju vrijednost funkcije u na skupu Ω. Imajući u vidu motivaciju danu u uvodu, imamo jednostavnu interpretaciju gornje jednakosti: Ukupna količina tinte potrebne za reprezentaciju polazne slike je u svakom koraku proporcionalna njenoj srednjoj tamnoći.

Da bismo dokazali kako je konstruirani niz (v_n) doista minimizirajući niz za funkcional J koristit će nam sljedeća

Lema 4. *Za $r \in \langle 0, 1]$ i $m \in \mathbf{N}$ skupovi*

$$E_m^r := \{\mathbf{x} \in \Omega : \mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega) \le 2^{-m}\}$$

su zatvoreni. Nadalje, familija (E_m^r) je opadajuća s obzirom na oba indeksa. Štoviše,

$$(\forall\, r_0 \in \langle 0, 1]) \,(\exists\, m_0 \in \mathbf{N})\, (\forall\, r \ge r_0)(\forall\, m \ge m_0) \quad E_m^r = \emptyset\ . \tag{8}$$

Dokaz. Svaki od skupova E_m^r je zatvoren kao praslika segmenta $[0, 2^{-m}]$ s obzirom na neprekinuto preslikavanje $\mathbf{x} \mapsto \mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)$. Tvrdnja o momotonosti je očita.

Metodom kontradikcije, lako se vidi da vrijedi $\cap_{m\in\mathbf{N}} E_m^r = \emptyset$. Stoga, za svako $r_0 \in \langle 0, 1]$ imamo opadajući niz kompaktnih skupova koji imaju prazan presjek. Prema tome, počevše od nekog mjesta, taj se niz nužno sastoji od praznih skupova. Kombinirajući ovu činjenicu s monotonosti u r slijedi (8).

Q.E.D.

Napomena 2. Primijetimo da lema 4 daje uniformnu ograničenost funkcije $(\mathbf{x}, r) \mapsto \mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)^{-1}$ s 2^m, za neki prirodan broj m, na skupu $\Omega \times [r_0, 1]$. ∎

Za dano $\varepsilon > 0$ moramo naći $n \in \mathbf{N}$ takav da vrijedi $J(v_n) < \varepsilon$. Rastavimo taj integral na dva dijela

$$\begin{aligned} J(v_n) &:= I_1 + I_2 \\ &= \int_0^{r_0} g(r) \int_\Omega \Big| \fint_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)\cap\Omega} (v_n(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y} \Big|\, d\mathbf{x}\, dr \\ &\quad + \int_{r_0}^1 g(r) \int_\Omega \Big| \fint_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)\cap\Omega} (v_n(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}))\,d\mathbf{y} \Big|\, d\mathbf{x}\, dr\ . \end{aligned}$$

Uzmemo li $r_0 := \frac{\varepsilon}{2\|g\|_{\mathrm{L}^\infty}\mu(\Omega)}$, imamo sljedeću ocjenu: $I_1 \le \varepsilon/2$ (ovdje smo pretpostavili da vrijedi $\varepsilon < 2\|g\|_{\mathrm{L}^\infty}\mu(\Omega)$, budući da će ε biti po volji malen).

Za dani prirodan broj $n \in \mathbf{N}$, razmotrimo particiju skupa Ω na kocke opisanu ranije, te označimo s $Q_n(\mathbf{x}, r)$ uniju svih takvih kocaka sadržanih u $\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega$. Označimo, nadalje

$$R_n(\mathbf{x}, r) := (\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega) \setminus Q_n(\mathbf{x}, r)\,.$$

Očito je da, povećavajući n, $R_n(\mathbf{x}, r)$ možemo načiniti uniformno maleno u mjeri, preciznije, manje od proizvoljnog, unaprijed zadanog $\delta > 0$. Kako je skup $R_n(\mathbf{x}, r)$ sadržan u $\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \setminus$

$Q_n(\mathbf{x}, r)$, lako se vidi da je svaki $n \geq d(d + \log_2(\theta_d/\delta))$ povoljan izbor (θ_d ovdje označava volumen jedinične kugle u $\mathbf{R}^d$).

Iz konstrukcije niza (v_n) slijedi

$$I_2 \leq \int_{r_0}^{1} g(r) \int_\Omega \frac{1}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)} \int_{R_n(\mathbf{x},r)} |v_n(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{x} \, dr \; .$$

Zbog gornje napomene zaključujemo da postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da

$$\frac{1}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)} \leq 2^m \,, \quad \text{za } \; r \geq r_0 \,,$$

stoga vrijedi

$$I_2 \leq \delta(1 - r_0) 2^{m+1} \mu(\Omega) \|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \; .$$

Uzmemo li proizvoljan n koji zadovoljava

$$n \geq d \left(d + m + 1 + \log_2 \frac{\theta_d (2\|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \mu(\Omega) - \varepsilon)}{\varepsilon} \right) \; ,$$

jednostavan račun daje ocjenu

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2^{m+2}(1 - r_0)\mu(\Omega)\|g\|_{\mathrm{L}^\infty}} \; ,$$

što daje željeni zaključak $J(v_n) < \varepsilon$, čime je teorem 1 dokazan.

Napomena 3. Pretpostavimo da je rub skupa Ω mjere nula. Prema Lebesgueovom toeremu, karakteristična funkcija skupa Ω je Riemann integrabilna. U tom slučaju umjesto dekompozicije na kubove (koja je u duhu Lebesgueove teorije), možemo ocijeniti I_2 uočavajući da je funkcija $|F_{v-u}|$ uniformno neprekinuta na $\Omega \times [r_0, 1]$, za svaki $r_0 \in \langle 0, 1]$.

Za takvu funkciju Riemannov i Lebesgueov integral se podudaraju, a ovaj prvi se može aproksimirati Riemannovom sumom. Preciznije, za dani $\varepsilon' > 0$, postoji $\delta > 0$ takav da je Riemannova suma ε'–*blizu* vrijednosti integrala.

To vrijedi za svaki $v \in \mathcal{V}$. Stoga je dovoljno uzeti onu funkciju za koju je, na mreži finijoj od δ, odgovarajuća Riemannova suma jednaka nuli. Da bismo to postigli, odaberimo mrežu $\{(\mathbf{x}_j, r_j) : 1 \leq j \leq n\}$, te definirajmo $B_j := \mathrm{K}(\mathbf{x}_j, r_j) \cap \Omega$. Za svaki od atoma $E_1, \ldots, E_{N_n}$ (i.e. nepraznih podskupova oblika $\cap_{j=1}^n A_j$, pri čemu su A_j jednak B_j ili $\Omega \backslash B_j$) definiramo v kao karakterističnu funkciju nekog izmjerivog skupa E_k, tako da vrijedi

$$\int_{E_k} v_n(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{E_k} u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \; .$$

Očito je $F_{v-u}(\mathbf{x}_j, r_j) = 0$ za $1 \leq j \leq n$, pa je pripadna Riemannova suma jednaka nuli. ∎

Napomena 4. Primijetimo da se funkcija F_w, definirana s (4) može zapisati kao

$$F_w(\mathbf{x}, r) = \langle w, e \rangle = \int_\Omega w(\mathbf{y}) e(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \; ,$$

pri čemu je $e \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ jediničan vektor, definiran s

$$e := \frac{\chi_{\mathrm{K}(\mathbf{x},r)\cap\Omega}}{\mu(\mathrm{K}(\mathbf{x}, r) \cap \Omega)} \; .$$

Za prebrojiv gust podskup $\mathcal{G} := \{(\mathbf{x}_j, r_j) : j \in \mathbf{N}\}$ skupa $\Omega \times \langle 0, 1]$ možemo dobiti niz (e_j) kojemu je linearna ljuska gusta u $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

Slaba–$*$ topologija na zatvorenoj jediničnoj kugli $\mathrm{K}_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}(0, 1)$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ je ekvivalentna topologiji generiranoj sljedećom ograničenom metrikom The weak $*$ topology on the closed unit ball $\mathrm{K}_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}[0, 1]$ in $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ is equivalent to the topology generated by the following bounded metric (dokaz ove činjenice slijedi Dunford & Schwartz [DS, teorem V.5.1]):

$$d(u, v) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left|\langle v - u, e_j\rangle\right| \ .$$

Kako proizvoljna funkcija $u \in \mathcal{U}$ može biti aproksimirana funkcijama iz $\mathcal{V}$ u slaboj–$*$ topologiji prostora $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, slijedi još jedna konstrukcija minimizirajućeg niza, koristeći Riemannove sume na sličan način kao u prethodnoj napomeni (naravno, uz istu dodatnu pretpostavku o rubu skupa Ω).

Preciznije, za danu δ–mrežu koja sesastoji iz točaka gustog skupa $\mathcal{G}$, s najvećim indeksom n, možemo naći funkciju $v \in \mathcal{V}$ tako da vrijedi

$$d(v, u) < \frac{\varepsilon}{2^n} \ .$$

To nam posebno daje

$$(\forall j \leq n) \qquad F_{v-u}(\mathbf{x}_j, r_j) = |\langle v - u, e_j\rangle| < \varepsilon \ .$$

Stoga je Riemannova suma ograničena s $\varepsilon \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \mu(\Omega)$, čime smo načinili još jednu konstrukciju minimizirajućeg niza.

∎

3. Primjena u homogenizaciji i optimalnom dizajnu

U ovom odjeljku proučavamo ponašanje tanke elastične ploče koja je simetrična s obzirom na središnji prerez. Pri tome uvažavamo Kirchhoffov model savijanja ploča pod vertikalnim teretom f, po kojemu pomak u zadovoljava eliptičku jednadžbu četvrtog reda (9). U slučaju ploče koja je učvršćena na rubu, zanima nas minimizacija rada vanjske sile f na ploču. Ta zadaća nema klasičnog rješenja (v. [KV]), stoga je provedena njena relaksacija. Muñoz i Pedregal [MP] su dokazali teorem relaksacije za ovu zadaću u slučaju *ortotropskih* materijala, to jest materijala s netrivijalnim koeficijentima M_{1111}, M_{2222} i

$$M_{1122} = M_{2211}\,, \qquad M_{1212} = M_{2112} = M_{2121}\,.$$

Ovdje je dano poopćenje tog rezultata na općenite materijale (isp. [AB99, AB99a]). U tu svrhu je razvijena je metoda homogenizacije i H–konvergencije za eliptičke jednadžbe četvrtog reda po uzoru na Tartarov pristup jednadžbi drugog reda (v. [T]). Primjeri zadaća optimalnog dizajna za hiperboličke zadaće u slučaju mješavine dvaju ili više materijala mogu se naći u [ABV, AV].

3.1. Postavljanje zadaće

Neka je Ω područje u $\mathbf{R}^2$. Zanima nas homogena Dirichletova rubna zadaća za jednadžbu:

$$\mathsf{div}\,\mathsf{div}\,(\mathbf{M}\nabla\nabla u) = f\,, \tag{9}$$

pri čemu je $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ tenzor četvrtog ranga, sa simetrijom $M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk}$ (točnije, $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ možemo shvatiti kao linearan operator na prostoru simetričnih 2×2 realnih matrica; $\mathbf{M}$ ima ukupno 9 različitih komponenti).

Množenjem jednadžbe funkcijom v i integriranjem po Ω, zbog rubnog uvjeta parcijalnom integracijom lako slijedi varijacijski oblik. Točnije, pokazat ćemo da je sljedeća varijacijska zadaća dobro postavljena:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Naći } u \in \mathrm{H}^2_0(\Omega) \text{ takav da vrijedi} \\ \qquad (\forall\, v \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)) \qquad \displaystyle\int_\Omega \mathbf{M}\nabla\nabla u \cdot \nabla\nabla v \, d\mathbf{x} = \langle f, v\rangle\,, \end{array}\right. \tag{10}$$

ako je $f \in \mathrm{H}^{-2}(\Omega)$, a $\mathbf{M}$ iz skupa $\mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$ definiranog kao skup svih tenzorskih funkcija $\mathbf{M} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathcal{L}(\mathrm{Sym};\mathrm{Sym}))$, takvih da vrijede ocjene

$$(\forall\, \mathbf{S} \in \mathrm{Sym})\ \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} \geqslant \alpha\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}\ \&\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} \geqslant \frac{1}{\beta}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}\ (\text{ss } \mathbf{x})\,.$$

Zaista, ako definiramo bilinearnu formu

$$a(u,v) := \int_\Omega \mathbf{M}\nabla\nabla u \cdot \nabla\nabla v \, d\mathbf{x}\,,$$

lako se vidi da je eliptična s konstantom α i omeđena s konstantom β, ako na $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$ gledamo normu $\|\nabla\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{M}_{2\times 2})}$ (ta je norma ekvivalentna standardnoj po prvoj Poincaréovoj nejednakosti [W, Theorem 7.6], koja vrijedi uz dopunsku pretpostavku da je Ω omeđen skup)

3.2. Rezultat kompenzirane kompaktnosti

U izgradnji teorije homogenizacije za operatore drugog reda ključnu ulogu igra $\mathsf{div}-\mathsf{rot}$ lema [T]. U našem slučaju, tu će ulogu odigrati sljedeći rezultat kompenzirane kompaktnosti:

Lema 5. *Neka su zadani nizovi*

$$w^n \xrightharpoonup{\mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)} w^\infty \ ,$$
$$\mathbf{D}^n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;M_{2\times 2})} \mathbf{D}^\infty \ ,$$

takvi da je niz $(\mathsf{div}\,\mathsf{div}\,\mathbf{D}^n)$ *sadržan u pretkompaktnom skupu u* $\mathrm{H}^{-2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Tada vrijedi

$$\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{D}^n \longrightharpoonup \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{D}^\infty$$

slabo $*$ *u smislu Radonovih mjera* (vague)*, pri čemu je* $\mathbf{E}^n := \nabla\nabla w^n$ *(analogno i za* ∞ *namjesto* n*).*

Dokaz. Po pretpostavkama, postoji podniz $(\mathsf{div}\,\mathsf{div}\,\mathbf{D}^{n_k})$ koji konvergira k $\mathsf{div}\,\mathsf{div}\,\mathbf{D}^\infty$ jako u prostoru $\mathrm{H}^{-2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (limes možemo identificirati u prostoru distribucija). S druge strane, za $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$, niz (φw^n) konvergira slabo k φw^∞ u prostoru $\mathrm{H}^2_{\mathrm{c}}(\Omega)$. Stoga vrijedi:

$$\langle \mathsf{div}\,\mathsf{div}\,\mathbf{D}^{n_k}, \varphi w^{n_k}\rangle \longrightarrow \langle \mathsf{div}\,\mathsf{div}\,\mathbf{D}^\infty, \varphi w^\infty\rangle = \int_\Omega \mathbf{D}^\infty \cdot \nabla\nabla(\varphi w^\infty)\, d\mathbf{x} \ .$$

S druge strane, parcijalnom integracijom člana na lijevoj strani, te raspisivanjem derivacije produkta, dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{D}^{n_k} \cdot \nabla\nabla(\varphi w^{n_k})\, d\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathbf{D}^{n_k} \cdot (\nabla\nabla\varphi) w^{n_k}\, d\mathbf{x} + 2\int_\Omega \mathbf{D}^{n_k} \cdot \nabla\varphi \otimes \nabla w^{n_k}\, d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega \mathbf{D}^{n_k} \cdot \varphi\nabla\nabla w^{n_k}\, d\mathbf{x} \ .\end{aligned}$$

Koristeći kompaktnost ulaganja dobivamo da

$$\begin{aligned}\nabla w^{n_k} &\xrightarrow{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^2)} \nabla w^\infty \ , \\ w^{n_k} &\xrightarrow{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)} w^\infty \ ,\end{aligned}$$

pa u prva dva člana zdesna u prethodnoj jednakosti možemo prijeći na limes.

Uspoređivanjem dobivamo i da treći član konvergira, i to k limesu:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{D}^\infty \cdot \nabla\nabla(\varphi w^\infty)\, d\mathbf{x} &- \int_\Omega \mathbf{D}^\infty \cdot (\nabla\nabla\varphi) w^\infty\, d\mathbf{x} - 2\int_\Omega \mathbf{D}^\infty \cdot \nabla\varphi \otimes \nabla w^\infty\, d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \mathbf{D}^\infty \cdot \varphi\nabla\nabla w^\infty\, d\mathbf{x} \ .\end{aligned}$$

Zbog jedinstvenosti limesa, tvrdnja vrijedi bez obzira na podniz; uz ranije oznake:

$$\int_\Omega \varphi \mathbf{E}^n \cdot \mathbf{D}^n\, d\mathbf{x} \longrightarrow \int_\Omega \varphi \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{D}^\infty\, d\mathbf{x} \ ,$$

što je upravo tvrdnja leme.

Q.E.D.

3.3. Inačica H–konvergencije

Niz tenzorskih funkcija (M^n) u $\mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$ H-konvergira k $\mathsf{M}^\infty \in \mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$ ako vrijedi:

Za svaki $f \in \mathrm{H}^{-2}(\Omega)$ niz rješenja (u_n) zadaća

(11) $$\begin{cases} \text{Naći } u_n \in \mathrm{H}_0^2(\Omega) \text{ takav da vrijedi} \\ \qquad (\forall\, v \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)) \qquad \int_\Omega \mathbf{M}^n \nabla\nabla u_n \cdot \nabla\nabla v \, d\mathbf{x} = \langle f, v \rangle \,, \end{cases}$$

konvergira k u_∞ slabo u $\mathrm{H}_0^2(\Omega)$, dok niz $(\mathbf{M}^n \nabla\nabla u_n)$ konvergira slabo k $\mathbf{M}^\infty \nabla\nabla u_\infty$ u prostoru $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathrm{Sym})$.

Uočimo da je pritom u_∞ nužno rješenje (11) s ∞ namjesto n; također, ako je niz $(\mathbf{M}^n)$ sadržan u $\mathfrak{M}_2(\alpha, \beta; \Omega)$, to ne znači da je i limes u tom skupu, nego definicija traži da se to unaprijed zna. Prvi korak u smjeru da se oslabe uvjeti gornje definicije, odnosno da se pokaže analogon teorema kompaktnosti za H-konvergenciju u slučaju eliptičkih jednadžbi drugog reda, je pokazati teorem G-konvergencije.

Za ranije definiranu bilinearnu formu a postoji operator $A \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^2(\Omega); \mathrm{H}^{-2}(\Omega))$ definiran formulom:

(12) $$Au := \mathsf{div}\,\mathsf{div}\,(\mathbf{M} \nabla\nabla u) \,,$$

koji reprezentira danu formu u smislu da vrijedi:

$$(\forall\, u, v \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)) \qquad a(u, v) = {}_{\mathrm{H}^{-2}(\Omega)}\langle\, Au, v \,\rangle_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} \,.$$

Kako je forma a omeđena i koercitivna, to vrijedi i da je operator A neprekinut i invertibilan, kao i da je A^{-1} također neprekinut. Stoga možemo primijeniti standardne rezultate za G-konvergenciju operatora, koji nam daju odgovarajuću kompaktnost (štoviše, za simetrične $\mathbf{M}^n$ imamo i kompaktnost uz iste konstante). Naravno, preostaje za pokazati da je i operator koji je G-limes operatorâ oblika (12) istog oblika.

Lema 6. *[ŽKON] Neka je V realan, refleksivan i separabilan Banachov prostor. Ako je operator $A \in \mathcal{L}(V; V')$ koercitivan (tj. $(\exists\, \alpha > 0)\, (\forall\, u \in V)\ \langle Au, u \rangle \geqslant \alpha \|u\|_V^2$), onda jednadžba $Au = f$ ima jedinstveno rješenje $u \in V$ za svaki $f \in V'$, te vrijedi:*

$$\|u\|_V = \|A^{-1} f\|_V \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'} \,.$$

∎

Neka je zadan niz $(\mathbf{M}^n)$ tenzorskih funkcija iz $\mathfrak{M}_2(\alpha, \beta; \Omega)$; definirajmo operatore $A_n : \mathrm{H}_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}^{-2}(\Omega)$ formulom (12). Za njih vrijede jednolike ocjene

$$\|A_n\| \leqslant \beta \qquad \text{i} \qquad (\forall\, u \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)) \quad \langle A_n u, u \rangle \geqslant \alpha \|u\|_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)} \,.$$

Cilj nam je pokazati kompaktnost skupa $\mathfrak{M}_2(\alpha, \beta; \Omega)$; u prvom koraku pored G-konvergencije (gdje slijedimo [T], odnosno [ŽKON]) pokazujemo i apstraktnu konvergenciju niza $\mathbf{M}^n \nabla\nabla u_n$. Tek ćemo u sljedećem koraku identificirati taj limes.

Lema 7. *Postoji podniz $(\mathbf{M}^{n_k})$ gornjeg niza, te operatori $A_\infty \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_0^2(\Omega); \mathrm{H}^{-2}(\Omega))$ i $R \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^{-2}(\Omega); \mathrm{L}^2(\Omega; \mathrm{Sym}))$ takvi da*

$$A_{n_k} \xrightarrow{G} A_\infty$$

(tj. da $A_{n_k}^{-1} \rightharpoonup A_\infty^{-1}$ slabo u smislu operatora), te da za proizvoljan $f \in \mathrm{H}^{-2}(\Omega)$ vrijedi

$$\mathbf{M}^{n_k} \nabla\nabla u_{n_k} \xrightharpoonup{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{Sym})} Rf \,,$$

pri čemu je (u_{n_k}) niz rješenja zadaća (11), uz zadani f.

Dokaz. Konstrukcija se provodi tako da u prvom koraku dijagonalnim postupkom konstruiramo operator A_∞, dok u drugom koraku ponavljamo dijagonalni postupak kako bismo konstruirali i operator R. Ova konstrukcija ukazuje na činjenicu (lako se može naći i primjer) da istom operatoru A_∞ (G-limesu) mogu biti pridruženi različiti operatori R.

Točnije, neka je $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, \ldots\}$ prebrojiv gust podskup prostora $\mathrm{H}^{-2}(\Omega)$. Operatore A_∞ i R konstruiramo tako da su definirani i zadovoljavaju tražena svojstva na $\mathcal{G}$; potom preostaje za pokazati da se mogu proširiti do neprekinutih linearnih operatora na $\mathrm{H}^{-2}(\Omega)$.

Po prethodnoj je lemi $\|A_n^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha}$, pa je niz $(A_n^{-1}f)$ omeđen u prostoru $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$, te ima slabo konvergentan podniz i pripadno gomilište koje označimo s Bf_1. Postupak ponovimo s dobivenim podnizom za f_2 i dobiveno gomilište označimo s Bf_2, potom ponavljamo za f_3 ... Na kraju, dijagonalnim postupkom izabiremo podniz (A_{n_l}) polaznog niza takav da je

$$(\forall m \in \mathbf{N}) \quad A_{n_l}^{-1} f_m \xrightharpoonup{\mathrm{H}^2_0(\Omega)} Bf_m \; .$$

Time je definirana funkcija $B : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{H}^2_0(\Omega)$, koja je omeđena s $\frac{1}{\alpha}$. Zaista:

$$\langle f, A_{n_l}^{-1} f\rangle \geqslant \alpha \|A_{n_l}^{-1} f\|^2 \; ,$$

odakle prijelaskom na limes po l slijedi:

$$\|Bf\|\|f\| \geqslant \langle f, Bf\rangle \geqslant \alpha \liminf_l \|A_{n_l}^{-1} f\|^2 \geqslant \alpha \|Bf\|^2 \; .$$

Funkciju B možemo proširiti po linearnosti na linearnu ljusku skupa $\mathcal{G}$ (proširenje je dobro definirano jer su A_n^{-1} linearni) do linearnog operatora omeđenog istom konstantom $\frac{1}{\alpha}$. Sada primjenom teorema o proširenju omeđenog linearnog operatora na zatvarač konačno dobivamo operator $B \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^{-2}(\Omega); \mathrm{H}^2_0(\Omega))$. Lako se pokazuje da je B koercitivan s konstantom $\frac{\alpha}{\beta^2}$, stoga i invertibilan. Označimo $A_\infty := B^{-1}$. Ako je (u_{n_l}) niz rješenja zadaća (11), onda vrijedi

$$u_{n_l} \xrightharpoonup{\mathrm{H}^2_0(\Omega)} u_\infty = Bf \; .$$

Preostaje konstruirati operator R.

Polazimo od niza $(\mathbf{M}^{n_l} \nabla\nabla u_{n_l})$, koji je omeđen u prostoru $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathrm{Sym})$. Dijagonalnim postupkom kao u prvom dijelu dokaza dolazimo do podniza $(\mathbf{M}^{n_k})$ takvog da za $f \in \mathcal{G}$ vrijedi

$$\mathbf{M}^{n_k} \nabla\nabla u_{n_k} \xrightharpoonup{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{Sym})} Rf \; ,$$

gdje je u_{n_k} rješenje zadaće (11) uz taj f.

Pokažimo da je $R : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega; \mathrm{Sym})$ omeđen. Uočimo najprije da je $\mathbf{M}^{n_k} \nabla\nabla u_{n_k} = \mathbf{M}^{n_k} \nabla\nabla (A_{n_k}^{-1} f)$, pa je stoga i

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{M}^{n_k} \nabla\nabla u_{n_k}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{Sym})} &\leqslant \beta \|\nabla\nabla (A_{n_k}^{-1} f)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{Sym})} \\
&= \beta \|A_{n_k}^{-1} f\|_{\mathrm{H}^2_0(\Omega)} \\
&\leqslant \frac{\beta}{\alpha} \|f\|_{\mathrm{H}^{-2}(\Omega)} \; .
\end{aligned}$$

Uzimanjem limesa inferiora po k dobivamo da je $\|R\| \leqslant \frac{\beta}{\alpha}$. Proširenje do operatora na $\mathrm{H}^{-2}(\Omega)$ provodimo posve analogno kao i za B.

Q.E.D.

Teorem 3. *Neka je* $(\mathbf{M}^n)$ *niz u* $\mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$. *Tada postoji podniz* $(\mathbf{M}^{n_k})$ *i tenzor* $\mathbf{M}^\infty \in \mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$ *takvi da*

$$\mathbf{M}^{n_k} \xrightharpoonup{H} \mathbf{M}^\infty .$$

∎

U dokazu Teorema 1 valja pokazati dvije stvari:

a) Operator A_∞ je istog oblika kao i operatori A_n (isp. Lema 7), u smislu da postoji tenzor $\mathbf{M}^\infty$ takav da je $A_\infty u = \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{M}^\infty\nabla\nabla u$,

b) Tenzor $\mathbf{M}^\infty$ je element prostora $\mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$.

Prva se tvrdnja može jednostavno dokazati koristeći postupak titrajućih probnih funkcija. Ta se metoda sastoji u tome da se konstruira niz funkcija (v_n) u $\mathrm{H}^2(\Omega)$ takav da vrijedi

$$\begin{aligned} v_n &\xrightharpoonup{\mathrm{H}^2(\Omega)} v_\infty , \\ \operatorname{div}\operatorname{div}(\mathbf{M}^n)^\tau\nabla\nabla v_n &\xrightarrow{\mathrm{H}^{-2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)} g_\infty , \\ (\mathbf{M}^n)^\tau\nabla\nabla v_n &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)} \mathbf{W}_\infty . \end{aligned} \tag{13}$$

Odaberimo područje Ω' koje sadrži zatvarač skupa Ω. Za $\mathbf{x} \in \Omega' \setminus \Omega$ definirajmo proširenje tenzora $\mathbf{M}^n(\mathbf{x}) := \alpha\mathbf{I}$. Za danu funkciju $g \in \mathrm{H}^{-2}(\Omega')$ definirajmo (v_n) kao niz rješenja rubnih zadaća

$$\begin{cases} \operatorname{div}\operatorname{div}(\mathbf{M}^n)^\tau\nabla\nabla v = g \\ \qquad\qquad v \in \mathrm{H}^2_0(\Omega') \end{cases}$$

Kako je niz $(\mathbf{M}^n)^\tau$ u prostoru $\mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega')$, to je gornja zadaća dobro postavljena. Posebno, zaključujemo da je niz rješenja (v_n) ograničen u $\mathrm{H}^2_0(\Omega')$, pa dakle i u $\mathrm{H}^2(\Omega)$, što znači da sadrži podniz koji zadovoljava (13). Konačno, kako je pripadni operator $\tilde{A}_\infty$ (isp. lema 7) izomorfizam prostora $\mathrm{H}^2_0(\Omega')$ i $\mathrm{H}^{-2}(\Omega')$, birajući povoljnu funkciju g možemo dobiti proizvoljan $v_\infty \in \mathrm{H}^2_0(\Omega')$ i obrnuto.

Pretpostavimo da imamo niz titrajućih test funkcija. Tada, koristeći Lemu 1, možemo prijeći na limes u obije strane jednakosti

$$\mathbf{M}^n\nabla\nabla u_n \cdot \nabla\nabla v_n = \nabla\nabla u_n \cdot (\mathbf{M}^n)^\tau\nabla\nabla v_n ,$$

što daje sljedeću jednakost:

$$Cu_\infty \cdot \nabla\nabla v_\infty = \nabla\nabla u_\infty \cdot \mathbf{W}_\infty ,$$

pri čemu je $C = B^{-1}R$ (isp. lema 7). Odaberemo li posebno $v_\infty(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}x_i x_j$ na Ω, imamo jednakost

$$(Cu_\infty)_{ij} = \nabla\nabla u_\infty \cdot \mathbf{W}^{ij}_\infty ,$$

drugim riječima, postoji tenzor $\mathbf{M}^\infty$ takav da vrijedi $Cu_\infty = \mathbf{M}^\infty\nabla\nabla u_\infty$.

Primijetimo da iz gornjeg postupka slijedi da je $\mathbf{M}^\infty \in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathcal{L}(\mathrm{Sym},\mathrm{Sym}))$. Kako želimo zaključiti da vrijedi $\mathbf{M}^\infty$ element prostora $\mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$, moramo dokazati precizniji rezultat $\mathbf{M}^\infty \in \mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathcal{L}(\mathrm{Sym},\mathrm{Sym}))$. U tom će nam pomoći sljedeća jednostavna lema.

Lema 8. *Pretpostavimo da je* $\mathbf{M}^\infty \in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathcal{L}(\mathrm{Sym},\mathrm{Sym}))$, *te neka je operator* $C \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^2_0(\Omega),\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{Sym}))$ *dan formulom* $Cv := \mathbf{M}^\infty\nabla\nabla v$, *takav da vrijedi*

$$\|C\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H}^2_0(\Omega),\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{Sym}))} \le \gamma .$$

Tada je $\mathbf{M}^\infty \in \mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathcal{L}(\mathrm{Sym},\mathrm{Sym}))$ *i vrijedi*

$$|\mathbf{M}^\infty(\mathbf{x})|_{\mathcal{L}(\mathrm{Sym},\mathrm{Sym})} \le \gamma \qquad \text{ss } \mathbf{x} \in \Omega .$$

∎

3.4. Efektivna svojstva ploče izgrađene od slojevitih materijala

U ovom odjeljku primjenjujemo ranija razmatranja na homogenizaciju rubne zadaće za jednadžbu ploče. Promatrat ćemo poseban slučaj slojevito izgrađene ploče, u smislu da karakteristike materijala (tenzor M) ovise samo o varijabli x_1. U provedbi procesa homogenizacije, važnu će ulogu odigrati sljedeća definicija:

Kažemo da niz (u_n) u $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *ne titra* u varijabli x_1 ukoliko vrijedi

(a) $u_n \rightharpoonup u_\infty$ u $\mathrm{L}^2(\Omega)$,

(b) Za svaki niz funkcija (f_n) iz prostora L^∞, koje ovise samo o varijabli x_1, takav da f_n slabo $*$ konvergira k f_∞, vrijedi $f_n u_n \rightharpoonup f_\infty u_\infty$ u $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Sljedeća je lema jednostavna posljedica Leme 1 i gornje definicije.

Lema 9. *Neka je* $(\mathbf{D}^n)$ *niz u* $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^d)$ *koji slabo konvergira k* $\mathbf{D}^\infty$*. Ukoliko je* $(\mathsf{div}\,\mathsf{div}\,\mathbf{D}^n)$ *sadržan u pretkompaktnom skupu u* $\mathrm{H}^{-2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$*, onda* D^n_{11} *ne titra u* x_1*.*

Dokaz. Uočimo da je $\mathbf{E}^n := f_n \mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_1$ gradijent gradijenta neke skalarne funkcije (koja ovisi samo o x_1); pa stoga tvrdnja slijedi neposredno iz Leme 5.

Q.E.D.

Teorem 4. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ *otvoren skup, te neka je* (M^n) *niz tenzora u* $\mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$ *takav da za svaki* n *tenzor* M^n *ovisi samo o varijabli* x_1*. Tada* M^n *H–konvergira k tenzoru* M^∞ *ako i samo ako vrijede sljedeće konvergencije komponenti*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \frac{1}{M^\infty_{1111}}\,,\\
\frac{M^n_{1112}}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \frac{M^\infty_{1112}}{M^\infty_{1111}}\,,\\
\frac{M^n_{1122}}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \frac{M^\infty_{1122}}{M^\infty_{1111}}\,,\\
\frac{M^n_{1211}}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \frac{M^\infty_{1211}}{M^\infty_{1111}}\,,\\
\frac{M^n_{2211}}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \frac{M^\infty_{2211}}{M^\infty_{1111}}\,,\\
M^n_{1212}-\frac{M^n_{1211}M^n_{1112}}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} M^\infty_{1212}-\frac{M^\infty_{1211}M^\infty_{1112}}{M^\infty_{1111}}\,,\\
M^n_{1222}-\frac{M^n_{1211}M^n_{1122}}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} M^\infty_{1222}-\frac{M^\infty_{1211}M^\infty_{1122}}{M^\infty_{1111}}\,,\\
M^n_{2212}-\frac{M^n_{2211}M^n_{1112}}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} M^\infty_{2212}-\frac{M^\infty_{2211}M^\infty_{1112}}{M^\infty_{1111}}\,,\\
M^n_{2222}-\frac{M^n_{2211}M^n_{1122}}{M^n_{1111}} &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} M^\infty_{2222}-\frac{M^\infty_{2211}M^\infty_{1122}}{M^\infty_{1111}}\,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Posebno, ukoliko vrijedi (14) *te ukoliko je* u_n*, za svaki* $n \in \mathbf{N}\cup\{\infty\}$*, rješenje zadaće (11) koje odgovara tenzoru* M^n*, tada* $u_n \rightharpoonup u_\infty$ *u* $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$*.*

Dokaz. Dokazujemo samo nužnost. Pretpostavimo da niz M^n H–konvergira k tenzoru M^∞. Neka je $f \in \mathrm{H}^{-2}(\Omega)$ proizvoljna, a (u_n) pripadni niz rješenja zadaća (1). Zbog H–konvergencije vrijedi

$$
\begin{aligned}
u_n &\xrightharpoonup{\mathrm{H}^2_0(\Omega)} u_\infty\,,\\
\mathsf{M}^n\nabla\nabla u_n &\xrightharpoonup{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathrm{Sym})} \mathsf{M}^\infty\nabla\nabla u_\infty\,.
\end{aligned}
$$

Za $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ uvedimo oznake

$$\mathbf{E}^n := \nabla\nabla u_n \qquad \text{i} \qquad \mathbf{D}^n := \mathsf{M}^n \mathbf{E}^n\,. \tag{15}$$

Kako je $\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{D}^n = f$, to prema Lemi 2, D^n_{11} ne oscilira u x_1. S druge strane, definirajmo $\tilde{\mathbf{D}}^n$ s

$$\tilde{D}^n_{ij} := \begin{cases} 0\,, & \text{za } i = j = 1 \\ g^n_{ij}\,, & \text{inače}\,, \end{cases}$$

pri čemu su g^n_{ij} funkcije ovisne samo o varijabli x_1. Pretpostavimo da za svaki par indeksa (i,j) funkcija g^n_{ij} konvergira k g^∞_{ij} slabo $*$ u L^∞. Budući da je $\operatorname{div}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{D}}^n = 0$, to prema Lemi 1 slijedi $\tilde{\mathbf{D}}^n \cdot \mathbf{E}^n \rightharpoonup \tilde{\mathbf{D}}^\infty \cdot \mathbf{E}^\infty$ u $\mathcal{D}'$. S druge strane, kako je niz $(\tilde{\mathbf{D}}^n \cdot \mathbf{E}^n)$ ograničen i u $\mathrm{L}^2(\Omega)$, to zbog jedinstvenosti limesa imamo i slabu konvergenciju ka istom limesu i u tom prostoru. Pogodnim odabiranjem funkcija g^n_{ij} stoga zaključujemo da za svaki par indeksa $(i,j) \neq (1,1)$ komponenta E^n_{ij} ne titra u x_1.

Ovo nam omogućuje da iz matrica $\mathbf{E}^n$ i $\mathbf{D}^n$ izdvojimo *dobre* (netitrajuće) i *loše* (titrajuće) komponente:

$$G^n_{ij} := \begin{cases} D^n_{11}\,, & \text{za } i = j = 1 \\ E^n_{ij}\,, & \text{inače} \end{cases} \qquad \text{i} \qquad O^n_{ij} := \begin{cases} E^n_{11}\,, & \text{za } i = j = 1 \\ D^n_{ij}\,, & \text{inače} \end{cases}\,.$$

Iz (15) slijedi

$$\mathbf{O}^n = \mathsf{K}^n \mathbf{G}^n\,,$$

pri čemu je $\mathsf{K}^n := \Psi(\mathsf{M}^n)$. Kraći račun daje da su komponente tenzora K^n dane s pomoću izraza na lijevim stranama konvergencija u iskazu teorema. S druge strane, iz činjenice da M^n pripada prostoru $\mathfrak{M}_2(\alpha,\beta;\Omega)$ zaključujemo da je $\alpha \le M^n_{1111} \le \beta$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$), što ima za posljedicu da je niz (K^n) omeđen u $\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathcal{L}(\mathrm{Sym};\mathrm{Sym}))$, dakle ima gomilište u slaboj $*$ topologiji.

Budući da $(\mathbf{G}^n)$ ne oscilira u x_1, a (K^n) ovisi samo o varijabli x_1, prijelaskom na podniz dobivamo

$$\mathbf{O}^\infty = \mathsf{K}^\infty \mathbf{G}^\infty\,.$$

Odatle zaključujemo da je $\mathsf{K}^\infty := \Psi(\mathsf{M}^\infty)$, odnosno

$$\Psi(\mathsf{M}^{n_k}) \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty(\Omega)_*} \Psi(\mathsf{M}^\infty)\,,$$

što je i trebalo dokazati. Kako ovo vrijedi za svako gomilište niza K^n, zaključujemo da gornja konvergencija vrijedi i za čitav niz $(\Psi(\mathsf{M}^n))$.

Q.E.D.

Obrat prethodnog teorema jednostavna je posljedica sljedećeg rezultata.

Teorem 5. *Uz oznake uvedene u dokazu Teorema 4, pretpostavimo da niz (u_n) konvergira slabo u $\mathrm{H}^2(\Omega)$ k funkciji u_∞, te da je niz $(\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{D}^n)$ sadržan u pretkompaktnom skupu u $\mathrm{H}^{-2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, te neka vrijedi*

$$\Psi(\mathsf{M}^n) \rightharpoonup \Psi(\mathsf{M}^\infty) \quad \text{u } \mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathcal{L}(\mathrm{Sym},\mathrm{Sym}))\,.$$

Tada vrijedi

$$\mathbf{D}^n \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^2)} \mathbf{D}^\infty\,.$$

∎

Kako se u dokazau gornjeg teorema koriste iste tehnike kao i u prethodnom dokazu, ovdje ga ispuštamo.

3.5. Relaksacija

U ovom odjeljku proučavamo ponašanje tanke elastične ploče, koja je simetrična s obzirom na središnji prerez. Označimo li središnju ravninu plioče s Ω (za koju pretpostavljamo da je ograničeno područje u $\mathbf{R}^2$, možemo opisati ploču kao skup

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : (x_1, x_2) \in \Omega \quad \& \quad |x_3| \leqslant h(x_1, x_2)\} .$$

Ograničavamo se Kirchhoffov model savijanja ploča pod transverzalnim teretom, prema kojemu vertikalni pomak u zadovoljava eliptičku jednadžbu četvrtog reda

$$\mathsf{div}\,\mathsf{div}\,(\mathbf{M}\nabla\nabla u) = f \qquad \text{u} \qquad \Omega\,, \tag{16}$$

pri čemu je $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ vertikalni teret, dok je $\mathbf{M}$ tenzorska funkcija dana s

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) := \frac{2}{3} h^3(\mathbf{x}) \mathbf{B}\,. \tag{17}$$

Ovdje je $\mathbf{B}$ konstantan tenzor četvrtog reda i nosi karakteristike materijala od kojeg je ploča načinjena. Za tenzor $\mathbf{B}$ (pa stoga i $\mathbf{M}$) pretpostavljamo već spomenutu simetriju

$$B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk}\,. \tag{18}$$

Radi jednostavnosti razmatranja proučavat ćemo ploču s učvršćenim rubom

$$u = \nabla_{\mathbf{n}} u = 0 \qquad \text{on} \qquad \partial\Omega\,, \tag{19}$$

drugim riječima, rješenje u tražimo u prostoru $\mathrm{H}^2_0(\Omega)$.

Da bismo osigurali dobru postavljenost zadaće (19,17), pretpostavljamo da je $\mathbf{M}$ element skupa $\mathfrak{M}_2(\alpha, \beta; \Omega)$. Doista, u tom slučaju se lako vidi da je pripadna bilinearna forma eliptična na $\mathrm{H}^2_0(\Omega) \times \mathrm{H}^2_0(\Omega)$, stoga po Lax–Milgramovoj lemi utvrđujemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja gornje zadaće.

Rad vanjskih sila definiramo formulom

$$L = \int_\Omega f(\mathbf{x}) u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{M}(\mathbf{x}) \nabla\nabla u \cdot \nabla\nabla u\, d\mathbf{x}\,.$$

Za dan *teret* f, funkcional L možemo shvatiti kao funkciju (polu)debljine ploče h. On predstavlja krutost (ili fleksibilnost) ploče opterećenu s f, stoga se čini prirodnim izučavati zadaću minimizacije funkcionala L na skupu svih dopustivih ploča s a zadanim volumenom.

U skladu s već iznesenim rezultatima ia homogenizacije, skoncentrirat ćemo se na slučaj kad funkcija h ovisi samo o varijabli x_1, pri čemu x_1 pripada intervalu I, projekciji skupa Ω na x_1–os. za danu najmanju i najveću dopuštenu debljinu ploče $h_{\min}, h_{\max}$ te volumen V, definiramo skup dopustivih funkcija

$$\mathcal{H} := \left\{ h \in \mathrm{L}^\infty(I; Q) : \int_\Omega h = V \right\} ,$$

pri čemu Q označava segment $[h_{\min}, h_{\max}]$. Naravno, gornje vrijednosti moraju biti zadane na konzistentan način

$$0 < h_{\min}\mu(\Omega) < V < h_{\max}\mu(\Omega) < \infty\,.$$

Poznato je da zadaća minimizacije funkcionala L na skupu $\mathcal{H}$ općenito nema rješenja zbog oscilacija minimizirajućih nizova (v. [KV]). zbog toga je nužno načiniti relaksaciju uvođenjem poopćenih poludebljina. Slijedeći ideje iz [MP] definiramo skup $\overline{\mathcal{H}}$ kao skup svih Youngovih mjera pridruženih nizovima u $\mathcal{H}$:

$$\overline{\mathcal{H}} := \left\{ \nu := (\nu_x)_{x\in I} : \operatorname{supp}\nu_x \in Q \text{ (ss } x), \int_I \int_Q \lambda \, d\nu_x(\lambda) dx = V \right\}.$$

Da bismo definirali prošorenje funkcionala L na skup $\overline{\mathcal{H}}$ koristimo teorem 4. Naime, neka je (h_n) minimizirajući niz za L u $\mathcal{H}$. Prema (17), nekonstantni članovi na lijevoj strani u (14) mogu se zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M^n_{1111}} &= \frac{3}{2B_{1111}} h_n^{-3}, \\
M^n_{1212} - \frac{M^n_{1211}M^n_{1112}}{M^n_{1111}} &= \frac{2}{3} h_n^3 \left(B_{1212} - \frac{B_{1211}B_{1112}}{B_{1111}} \right), \\
M^n_{1222} - \frac{M^n_{1211}M^n_{1122}}{M^n_{1111}} &= \frac{2}{3} h_n^3 \left(B_{1222} - \frac{B_{1211}B_{1122}}{B_{1111}} \right), \\
M^n_{2212} - \frac{M^n_{2211}M^n_{1112}}{M^n_{1111}} &= \frac{2}{3} h_n^3 \left(B_{2212} - \frac{B_{2211}B_{1112}}{B_{1111}} \right), \\
M^n_{2222} - \frac{M^n_{2211}M^n_{1122}}{M^n_{1111}} &= \frac{2}{3} h_n^3 \left(B_{2222} - \frac{B_{2211}B_{1122}}{B_{1111}} \right).
\end{aligned}$$

Gornji slabi limesi se mogu izraziti kao momenti reda ± 3 Youngove mjere $\boldsymbol{\nu}$ određene nizom (h_n). Stoga, koristeći

$$\begin{aligned}
m(x) &:= \int_Q \lambda^3 \, d\nu_x(\lambda), \\
c^{-1}(x) &:= \int_Q \lambda^{-3} \, d\nu_x(\lambda),
\end{aligned}$$

umjesto h^3, odnosno h^{-3}, možemo definirati komponente tenzora $\mathbf{M}^\infty$, čime je ispunjena pretpostavka (14). Teorem 4 tada daje da niz rješenja (u_n) zadaća (16,19) za tenzore $\mathbf{M}^n$ konvergiraju slabo k rješenju u_∞ za tenzor $\mathbf{M}^\infty$.

Definirajmo traženo proširenje $\overline{L}$ formulom

$$\overline{L}(\boldsymbol{\nu}) := \int_\Omega f u \, d\mathbf{x},$$

pri čemu je u rješenje rubne zadaće (16,19) s tenzorom $\mathbf{M}$ koji ovisi o $\boldsymbol{\nu}$ preko funkcija m i c, slijedi rezultat

Teorem 6. *Par $(\overline{L}, \overline{\mathcal{H}})$ je relaksacija za $(L, \mathcal{H})$.*

Dokaz. Primijetimo da za $h \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$\boldsymbol{\nu} := \delta_h \in \overline{\mathcal{H}} \quad \& \quad L(h) = \overline{L}(\boldsymbol{\nu}).$$

Stoga je ispunjeno

$$\inf_{\boldsymbol{\nu}\in\overline{\mathcal{H}}} \overline{L}(\boldsymbol{\nu}) \leq \inf_{h\in\mathcal{H}} L(h).$$

S druge strane, za svaki $\boldsymbol{\nu} \in \overline{\mathcal{H}}$ možemo naći niz (h_n) u $\mathcal{H}$ koji određuje Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu}$ stoga, koristeći teorem 4, zaključujemo slabu konvergenciju niza rješenja zadaće (16,19) ka odgovarajućem limesu, te vrijedi

$$\overline{L}(\boldsymbol{\nu}) = \lim_{n} L(h_n)\,. \tag{20}$$

Proizvoljnost parametrizirane mjere $\boldsymbol{\nu} \in \overline{\mathcal{H}}$ povlači jednakost dvaju infimuma.

Postojanje minimizatota za $(\overline{L}, \overline{\mathcal{H}})$ je evidentno. Naime, svaki minimizirajući niz za L u $\mathcal{H}$ generira Youngovu mnjeru $\boldsymbol{\nu}$ koja je dopistiva za $\overline{L}$, pa tvrdnja slijedi iz (20).

Q.E.D.

Imajući u vidu gornji rezultat, rezultat optimalne relaksacije u [MP] dokazuje se i u slučaju općenitog materijala na potpuno isti način.

4. Nelokalne varijacijske zadaće

Promatramo funkcional oblika

$$I(u) := \int_{\Omega\times\Omega} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \nabla u(\mathbf{x}_1), \nabla u(\mathbf{x}_2))\, d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2\,, \tag{21}$$

gdje funkcija $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ pripada odgovarajućem Soboljevljevom prostoru, a *gustoća energije*

$$F : \Omega \times \Omega \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \times \mathrm{M}_{r\times d} \times \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$$

je Carathéodoryjeva funkcija, neprekinuta u varijablama u i ∇u, a izmjeriva u $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$. Skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ je regularna glatka domena.

Osnovna je zadaća ovog odjeljka pokazati kako nelokalna priroda varijacijskih zadaća koje dolaze od funkcionala oblika (21) utječe na temeljna pitanja varijacijskog računa: nizovne slabe poluneprekinutosti odozdo i relaksacije.

Propozicija 1. *Neka je $\boldsymbol{\Lambda} := (\Lambda_{(x_1,x_2)\in\Omega\times\Omega})$ slabo–$*$ izmjeriva familija vjerojatnosnih mjera s nosačem u $\mathbf{R}^2$. $\boldsymbol{\Lambda}$ je Youngova mjera pridružena nizu $f_n(x_1, x_2) := (u_n'(x_1), u_n'(x_2))$, pri čemu je (u_n) niz ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, ako i samo ako vrijedi*

$$\Lambda_{(x_1,x_2)} = \nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2}\,, \tag{22}$$

za neku Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbf{R})$.

Dokaz. Testirajmo $\boldsymbol{\Lambda}$ na funkcijama oblika $\varphi := \varphi^1 \boxtimes \varphi^2$ i $\theta := \theta_1 \boxtimes \theta_2$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\Omega} \theta_1(x_1)\theta_2(x_2) \left(\int_{\mathbf{R}^2} \varphi^1(\lambda_1)\varphi^2(\lambda_2)\, d\boldsymbol{\Lambda}_{(x_1,x_2)}(\lambda_1,\lambda_2)\right) dx_1dx_2 \\
&\quad= \lim_n \int_{\Omega\times\Omega} \theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\varphi(f_n(x_1,x_2))\, dx_1dx_2 \\
&\quad= \lim_n \int_{\Omega\times\Omega} \theta_1(x_1)\theta_2(x_2)\varphi^1(u_n'(x_1))\varphi^2(u_n'(x_2))\, dx_1dx_2 \\
&\quad= \lim_n \left(\int_\Omega \theta_1(x_1)\varphi^1(u_n'(x_1))\, dx_1\right)\left(\int_\Omega \theta_2(x_2)\varphi^2(u_n'(x_2))\, dx_2\right) \\
&\quad= \left(\int_\Omega \theta_1(x_1)\varphi^1_{\boldsymbol{\nu}}(x_1)\, dx_1\right)\left(\int_\Omega \theta_2(x_2)\varphi^2_{\boldsymbol{\nu}}(x_2)\, dx_2\right) \\
&\quad= \int_{\Omega\times\Omega} \theta_1(x_1)\theta_2(x_2) \left(\int_{\mathbf{R}^2} \varphi^1(\lambda_1)\varphi^2(\lambda_2)\, d(\nu_{x_1}\otimes\nu_{x_2})(\lambda_1,\lambda_2)\right) dx_1dx_2
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Kao u ranije, za svaku funkciju $(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto f(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$, koja je izmjeriva u varijablama x_1 i x_2, a neprekinuta u λ_1 i λ_2 vrijedi

$$\lim_n \int_{\Omega\times\Omega} f(x_1, x_2, u_n'(x_1), u_n'(x_2))\, dx_1dx_2 = \int_{\Omega\times\Omega}\int_{\mathbf{R}^2} f(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1)d\nu_{x_2}(\lambda_2)\,,$$

kad god je niz funkcija $f_n(x_1, x_s) := f(x_1, x_2, u_n'(x_1), u_n'(x_2))$ slabo konvergentan u prostoru $\mathrm{L}^1(\Omega\times\Omega)$.

U daljnjem označimo s $\mathcal{A}$ skup svih Youngovih mjera $\boldsymbol{\Lambda}$ koje zadovoljavaju (22). Jednostavnosti radi identificirat ćemo Youngovu mjeru $\boldsymbol{\Lambda}$ s $\boldsymbol{\nu}$, te ćemo (nekorektno) pisati $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}$.

4.1. Slaba polineprekinutost odozdo

Promotrimo homogeni funkcional

$$I(u) := \int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2\,, \tag{23}$$

pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbf{R}$ otvoren interval, $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ takva da je $u - u_0 \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$ za neku čvrstu funkciju u_0 za koju vrijedi $I(u_0) < \infty$. Za funkciju W ćemo pretpostaviti da je neprekinuta i ograničena odozdo.

Sljedeća propozicija daje nužan i dovoljan uvjet za nizovnu slabu poluneprekinutost odozdo funkcionala I na $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.

Teorem 7. *Funkcional I je nizovno slabo poluneprekinut odozdo na $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ (slabo–$*$ u slučaju $p = \infty$) ako i samo ako za svako $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}$ vrijedi sljedeća Jensenova nejednakost*

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\times\Omega}\int_{\mathbf{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2)\, dx_1 dx_2 \\ &\qquad \geq \int_{\Omega\times\Omega} W\left(\int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_{x_1}(\lambda), \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_{x_2}(\lambda)\right) dx_1 dx_2\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}$. Tada, prema teoremu o karakterizaciji L^p–Youngovih mjera možemo nnizaći niz (u_n'), koji je ograničen u $\mathrm{L}^p(\Omega)$ takav da niz $(x_1, x_2) \mapsto (u_n'(x_1), u_n'(x_2))$ određuje Youngovu mjeru $\boldsymbol{\Lambda}$. Niz $(x_1, x_2) \mapsto W(u_n'(x_1), u_n'(x_2))$ je (do na podniz) slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1(\Omega\times\Omega)$, pa imamo reprezentaciju

$$\begin{aligned} &\lim_n \int_{\Omega\times\Omega}\int_{\mathbf{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2) dx_1 dx_2 \geq \\ &\int_{\Omega\times\Omega} W\left(\int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_{x_1}(\lambda), \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_{x_2}(\lambda)\right) dx_1 dx_2\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Ukoliko $u_n \rightharpoonup u$ slabo u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ (slabo–$*$ u slučaju $p = \infty$), slijedi

$$u'(x) = \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_x(\lambda)\,.$$

Tada, zbog (25) i slabe poluneprekinutosti odozdo, slijedi Jensenova nejednakost.

Obrnuto, pretpostavimo da funkcija W zadovoljava Jensenovu nejednakost, te neka $u_n \rightharpoonup u$ slabo u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ (slabo–$*$ u slučaju $p = \infty$). Kako je funkcija W ograničena odozdo (v. propozicija I.3), vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_n &\int_{\Omega\times\Omega} W(u_n'(x_1), u_n'(x_2))\, dx_1 dx_2 \\ &\geq \int_{\Omega\times\Omega}\int_{\mathbf{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2) dx_1 dx_2 \\ &\geq \int_{\Omega\times\Omega} W\left(\int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_{x_1}(\lambda), \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_{x_2}(\lambda)\right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} W(u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2\,. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Jensenova nejednakost (24) nije lokalan uvjet zbog interakcije između ν_{x_1} i ν_{x_2}. Da bismo postigli (24) dovoljnjo je pretpostaviti da nejednakost vrijedi na razini podintegralnih funkcija skoro svuda, što je ekvivalentno zahtjevu

$$\int_{\mathbf{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu_1(\lambda_1) d\nu_2(\lambda_2) \geq W\left(\int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_1(\lambda), \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu_2(\lambda)\right),$$

za svaki par vjerojatnosnih Radonovih mjera (ν_1, ν_2). Ovo je svojstvo pak ekvovalentno *separatnoj konveksnosti* funkcije W. S druge strane, ovo svojstvo ne uvažava činjenicu da u (24) kombinacije $\nu_{x_1} \otimes \nu_{x_1}$, $\nu_{x_1} \otimes \nu_{x_2}$, $\nu_{x_2} \otimes \nu_{x_1}$ i $\nu_{x_2} \otimes \nu_{x_2}$ uvijek dolaze zajedno. Na primjer, uzmemo li funkciju

$$W(\lambda_1, \lambda_2) := \lambda_1^2 - \lambda_2^2,$$

tada je pripadni infimum funkcionala I, zbog antisimetrije funkcije W, jednak nuli, stoga je slaba poluneprekinutost odozdo trivijalno ispunjena. S druge strane, funkcija W nije separatno konveksna.

Drugi dovoljan uvjet, koji uzima u obzir antisimetrični slučaj, je separatna konveksnost funkcije $\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2) := W(\lambda_1, \lambda_2) + W(\lambda_2, \lambda_1)$, no ni taj uvjet nije nužan.

Izvedimo sada jednostavniji nužan uvjet za postizanje nizovne slabe poluneprekinutosti odozdo. Uzmimo najprije $\nu_x = \nu$, za sve $x \in \Omega$ (drugim riječima, Youngova mjera $\boldsymbol{\nu}$ je homogena). U tom se slučaju Jensenova nejednakost svodi na

$$\int_{\mathbf{R}^2} W(\lambda_1, \lambda_2)\, d\nu(\lambda_1) d\nu(\lambda_2) \geq W\left(\int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu(\lambda), \int_{\mathbf{R}} \lambda\, d\nu(\lambda)\right),$$

što je ekvivalentno tome da za svaki par $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Omega \times \Omega$ vrijedi

$$4W\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) \leq W(\lambda_1, \lambda_1) + W(\lambda_1, \lambda_2) + W(\lambda_2, \lambda_1) + W(\lambda_2, \lambda_2).$$

Analogno se mogu dobiti nejednakosti i u slučaju kas Youngova mjera poprima konačno mnogo vrijednosti. Kako da se svaka Youngova mjera može aproksimirati takvim mjerama, vrijedi sljedeći

Teorem 8. *Neka su Ω i W kao ranije. Pripadni funkcional I je nizovno slabo poluneprekinut odozdo na $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega \times \Omega)$ (odnosno slabo–$*$ u slučaju $p = \infty$) ako i samo ako za svako $n \in \mathbf{N}$ i za svaki izbor brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ vrijedi*

$$4 \sum_{i,j=1}^{n} W\left(\frac{\lambda_{2i-1} + \lambda_{2i}}{2}, \frac{\lambda_{2j-1} + \lambda_{2j}}{2}\right) \leq \sum_{i,j=1}^{2n} W(\lambda_i, \lambda_j). \tag{26}$$

∎

Korolar 1. *Funkcional I je nizovno slabo neprekinut na $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega \times \Omega)$ (odnosno slabo–$*$ u slučaju $p = \infty$) ako i samo ako u (26) vrijedi jednakost.*

∎

Na kraju ovog odjeljka razmotrimo ukratko slučaj nehomogenog funkcionala

$$I(u) := \int_{\Omega \times \Omega} W(x_1, x_2, u'(x_1), u'(x_2))\, dx_1 dx_2, \tag{27}$$

na $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty\rangle$. Da bismo osigurali ograničenost minimizirajućih nizova, zahtijevamo sljedeći uvjet koercitivnosti

$$C \max\{|\lambda_1|^p, |\lambda_2|^p\} + c(x_1, x_2) \leq W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2), \tag{28}$$

pri čemu je $C > 0$, te $c \in \mathrm{L}^1(\Omega \times \Omega)$. Potpuno analogno kao i u slučaju homogenog funkcionala dokazuje se kriterij nizovne slabe poluneprekinutosti odozdo

Teorem 9. *Funkcional I dan s (27) je nizovno slabo poluneprekinut odozdo na* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ *(slabo–$*$ u slučaju $p=\infty$) ako i samo ako za svako $\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{A}$ vrijedi Jensenova nejednakost*

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\Omega}\int_{\mathbf{R}^2} W(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)\,d\nu_{x_1}(\lambda_1)d\nu_{x_2}(\lambda_2)\,dx_1dx_2\\
&\qquad\ge\int_{\Omega\times\Omega} W\left(x_1,x_2,\int_{\mathbf{R}}\lambda\,d\nu_{x_1}(\lambda),\int_{\mathbf{R}}\lambda\,d\nu_{x_2}(\lambda)\right)dx_1dx_2\,.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

∎

Ovaj uvjet, međutim, nije ekvivalentan tomu da imamo Jensenovu nejednakost (24) u skoro svakoj točki $(x_1,x_2)\in\Omega\times\Omega$. Razlog je ponovo u nelokalnosti zadaće koja vezuje varijable x_1 i x_2, te nehomogenosti funkcije W. Jednostavno se dokazuje sljedeća

Lema 10. *Ukoliko je funkcija $W(x_1,x_2,\cdot,\cdot)$ separatno konveksna za skoro svaku točku $(x_1,x_2)\in\Omega\times\Omega$, onda vrijedi Jensenova nejednakost* (29). ∎

Naravno, ovaj uvjet nipošto nije dovoljan, što pokazuju jednostavni primjeri. Općenitiji dovoljan uvjet (koji se također lako dokazuje) jest separatna konveksnost funkcije

$$
\tilde W(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2):=W(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)+W(x_2,x_1,\lambda_2,\lambda_1)\,.
$$

Na žalost, nije još poznat jednostavniji nužan i/ili dovoljan uvjet koji bi odgovarao uvjetu (26).

Imajući u vidu prethodno, slijedi teorem egzistencije

Teorem 10. *Uz pretpostavke (28) i* (29) *postoji rješenje minimizacijske zadaće*

$$
m=\inf\left\{I(u):u\in\mathrm{W}^{1,p}(\Omega),u-u_0\in\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)\right\}\,,
$$

pri čemu je funkcional I dan s (27), te vrijedi $I(u_0)<\infty$. ∎

4.2. Relaksacija

U slučaju kada *jezgra* W ne zadovoljava Jensenovu nejednakost (24), nužno je načiniti relaksaciju. Želja nam je dobiti novi varijacijski princip, takav da je infimum očuvan, a da nova (relaksirana) zadaća dopušta minimizator. Upravo je relaksacija mjesto na kojemu je razlika između lokalnih i nelokalnih zadaća najizraženija. Naime, za lokalne je funkcionale uobičajeno zamijeniti funkciju W njezinom konveksifikacijom W^*. Nova zadaća ima dva fundamentalna svojstva: infimum ostaje isti, te postoji točka minimuma.

U nelokalnom slučaju, nažalost, ne postoji adekvatna zamjena za konveksifikaciju funkcije W. Naime, ne postoji način da se definira odgovarajuća konveksifikacija i novo varijacijsko načelo koje će zadovoljavati gornja dva svojstva. Pokazuje se da, zbog interakcije varijabli x_1 i x_2, nije moguće po točkama definirati W^*.

Jedini poznat način za opisivanje relaksacije u ovom slučaju jest korištenje Youngovih mjera i poopćenih funkcionala na njima. Preciznije, neka je $\Omega:=\langle 0,1\rangle$, te neka je $V:=\{u\in\mathrm{W}^{1,p}(\Omega):u(0)=0,u(1)=\alpha\}$. Promotrimo zadaću

$$
m=\inf_{u\in V}\int_{\Omega\times\Omega} W(x_1,x_2,u'(x_1),u'(x_2))\,dx_1dx_2\,.
\tag{P}
$$

Ukoliko zadaća (P) nema rješenja, kod minimizirajućih će nizova doći do oscilacija i, općenito, njihovi limesi neće biti minimumi. Međutim, mi znamo da svaki takav niz određuje Youngovu mjeru $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{Y}^p(\Omega; \mathbf{R})$, pa je prirodno pokušati tražiti minimum upravo među Youngovim mjerama. Označimo s $\mathcal{A}$ skup svih Youngovih mjera $\boldsymbol{\nu}$ takvih da vrijedi

$$\int_\Omega \int_{\mathbf{R}} |\lambda|^p \, d\nu_x(\lambda) dx < \infty \quad \& \quad \int_\Omega \int_{\mathbf{R}} \lambda \, d\nu_x(\lambda) dx = \alpha \, .$$

Za $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}$ definirajmo funkcional

$$\tilde{I}(\boldsymbol{\nu}) := \int_{\Omega \times \Omega} \int_{\mathbf{R}^2} W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \, d\nu_{x_1}(\lambda_1) d\nu_{x_2}(\lambda_2) dx_1 dx_2 \, ,$$

te promotrimo zadaću

$$(\tilde{P}) \qquad \tilde{m} = \inf_{\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}} \tilde{I}(\boldsymbol{\nu}) \, .$$

Primijetimo da je za svako dopustivo rješenje u zadaće (P), Youngova mjera $\boldsymbol{\nu} := \delta_{u'}$ dopustivo rješenje zadaće $(\tilde{P})$. Vrijedi i obratno, za svako $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$u'(x) = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, d\nu_x(\lambda) \, ,$$

za neku funkciju u koja je dopustiva za (P).

Da bismo dokazali teorem relaksacije u ovom slučaju, treba nam i sljedeće ocjene za W:

$$W(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \leq M(|\lambda_1|^p + |\lambda_2|^p) + w(x_1, x_2) \, , \tag{30}$$

pri čemu je $M > 0$, te $w \in \mathrm{L}^1(\Omega \times \Omega)$.

Teorem 11. *Pretpostavimo da funkcija W zadovoljava uvjet koercitivnosti (28) i ograničenosti odozgo (30). Tada je $\tilde{m} = m$, te postoji $\boldsymbol{\nu}_0 \in \mathcal{A}$ takvo da vrijedi*

$$m = \tilde{I}(\boldsymbol{\nu}_0) \, .$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{\nu} = (\delta_{u'(x)})_{x \in \Omega}$ za funkciju u, dopustivu za (P). Ranije smo napomenuli kako je $\boldsymbol{\nu}$ tada očito dopustiva za $(\tilde{P})$, drugim riječima $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}$. Stoga vrijedi

$$\tilde{m} \leq m \, .$$

S druge pak strane, za svako $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}$ možemo naći niz (u_n) u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ koji određuje $\boldsymbol{\nu}$, takav da je niz $(|u_n'|^p)$ ekviintegrabilan u Ω. To i (30) daju da je niz funkcija

$$(x_1, x_2) \mapsto W(x_1, x_2, u_n'(x_1), u_n'(x_2))$$

ekviintegrabilan, pa vrijedi

$$m \leq \lim_n I(u_n) = \tilde{I}(\boldsymbol{\nu}) \, .$$

Odatle, uzimanjem infimuma na desnoj strani po $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}$ slijedi

$$m \leq \tilde{m} \, ,$$

drugim riječima infimumi obiju zadaća su jednaki. Preostaje pokazati da se u $(\tilde{P})$ infimum doista dostiže. To je međutim jednostavno, imajući u vidu osnovni teorem o Youngovim mjerama. Naime, neka je (u_n) bilo koji minimizirajući niz za funkcional I, te neka je $\boldsymbol{\nu}_0$ Youngova mjera koju on određuje. Tada, zbog Jensenove nejednakosti, vrijedi

$$m = \lim_n I(u_n) \geq \tilde{I}(\boldsymbol{\nu}_0) \geq \tilde{m} = m \, ,$$

čime je dovršen dokaz teorema.

Q.E.D.

Napomena 5. Umjesto funkcionala $\tilde{I}$, mogli smo razmatrati funkcional $\bar{I}$, definiran na istom skupu dopustivih funkcija kao i I na sljedeći način

$$\bar{I}(u) := \inf \left\{ \tilde{I}(\boldsymbol{\nu}) : \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{A}, u'(x) = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, d\nu_x(\lambda) \right\} .$$

Lako je pokazati da je odgovarajući minimum za $\bar{I}$ također m, te da se infimum dostiže. U lokalnom slučaju funkcional $\bar{I}$ se može reprezentirati odgovarajućom konveksifikacijom funkcije W, što u nelokalnom slučaju, kao što je napomenuto ranije, to nije moguće. ∎

Važna posljedica nepostojanja odgovarajuće konveksifikacije funkcije W u nelokalnom slučaju je činjenica da ne postoji način za određivanje nosača minimizatora $\boldsymbol{\nu}$ za funkcional $\tilde{I}$. Naime, u lokalnim varijacijskim zadaćama je nosač poopćenog rješenja uvijek sadržan u skupu gdje se W i W^* podudaraju. Ta činjenica znatno otežava proučavanje nelokalnih zadaća, čak i u slučaju prividno *jednostavnih* funkcionala.

Primjer 3. Neka je $\alpha \in \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$. Razmotrimo homogeni funkcional I određen funkcijom

$$W(\lambda_1, \lambda_2) := (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1)^2 .$$

Tada je $m = 0$, a minimizator za $\tilde{I}$ je homogena Youngova mjera

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1 + \alpha\sqrt{2}}{2} \delta_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1 - \alpha\sqrt{2}}{2} \delta_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} .$$

U slučaju kad je $|\alpha| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tada se čini da je rješenje linearna funkcija, što nije lako dokazati. ∎

Literatura

[ABFJ] Grégoire Allaire, Eric Bonnetier, Gilles Francfort, François Jouve: *Shape optimization by the homogenization method*, preprint, École Normale Superieure, 1995

[A93] Nenad Antonić: *Memory effects in Homogenisation: Linear second-order equations*, *Arch. Rat. Mech. Analysis*, **125** (1993) 1–24

[A96] Nenad Antonić: *H-measures applied to symmetric systems*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* A **126** (1996) 1133–1155

[AB97] Nenad Antonić, Neven Balenović: *On a variational problem related to a model of black and white printing*, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara*, Series A1 **46** (1997) 1–11

[AB99] Nenad Antonić, Neven Balenović: *Optimal Shape Design for Plates and Relaxation*, *Mathematical Communications*, **4** (1999), 111–119

[AB99a] Nenad Antonić, Neven Balenović: *Homogenisation and optimal design for plates*, *Zeitschrift für Angew. Mathematik und Mechanik* (u tisku)

[ABV] Nenad Antonić, Neven Balenović, Marko Vrdoljak: *Optimal design for vibrating plates*, *Zeitschrift für Angew. Mathematik und Mechanik* (u tisku)

[AV] Nenad Antonić, Marko Vrdoljak: *Optimal design and hyperbolic problems*, *Mathematical Communications* **4** (1999) 121–129

[Ba] John M. Ball: A*version of the fundamental theorem for Young measures*, *PDEs and continuum models of phase transitions*, Rascle, Serre and Slemrod (eds.), pp. 207–215, Lecture Notes in Physics 344, Springer-Verlag, 1989

[BJ87] John M. Ball, Richard D. James: *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **100** (1987) 13–52

[BJ92] John M. Ball, Richard D. James: *Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two-well problem*, *Phil. Trans. R. Soc. London* A **338** (1992) 389–450

[BJ94] John M. Ball, Richard D. James: *Mathematics of microstructure*, DMF seminar, Blaubeuren, December 1994

[BV] E. Bonnetier, M. Vogelius: *Relaxation of a compliance functional for a plate optimisation problem*, in *Applications of Multiple Scaling in Mechanics*, P. G. Ciarlet, E. Sánchez–Palencia (eds.), Masson 1987, pp. 31–53

[Br] Haïm Brezis: *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983

[Da] Bernard Dacorogna: *Direct methods in the calculus of variations*, Springer-Verlag, 1989

[DM] Claude Dellacherie, Paul-André Meyer: *Probabilités et potentiel (ch. I à IV)*, Hermann, Paris, 1975

[DS] Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz: *Linear operators I*, Wiley, 1988

[Ed] R. E. Edwards: Functional analysis: *Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965

[E] Lawrence Craig Evans: *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, Expository lectures from the CBMS regional conference held at Loyola University of Chicago, June 27–July 1 1988; American Mathematical Society, 1990

[EG] Lawrence Craig Evans, Ronald F. Gariepy: *Lecture notes on measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992

[F] Gerald B. Folland: *Real Analysis*, Willey, New York, 1984

[Ge] Patrick Gérard: *Compacité par compensation et régularité 2-microlocale*, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique (1988) VI

[GT] David Gilbarg, Neil S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer–Verlag, 1983

[KP91] David Kinderlehrer, Pablo Pedregal: *Characterizations of Young measures generated by gradients*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **115** (1991) 329–365

[KP94] David Kinderlehrer, Pablo Pedregal: *Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces*, **4** (1994) 59–90

[KV] R. V. Kohn, M. Vogelius: *Thin plates with varying thickness, and their relation to structural optimisation*, in *Homogenisation and Effective Moduli of Materials and Media*, J. Ericksen, D. Kinderlehrer, R. Kohn and J. L. Lions (eds.), IMA, Vol. 1, Springer 1986, pp. 126–169

[KR] Martin Kružik, Tomáš Roubi̇̀ček: *Explicit characterisation of* L^p*–Young Measures*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **198** (1996) 830–843

[L84] Pierre Louis Lions: *The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The locally compact case I–II*, it Annales de l'Institute Henri Poincaré **1 C** (1984) 109–145, 223–283

[L85] Pierre Louis Lions: *The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The limit case I & II*, *Revista Matemática Iberoamericana* **1** (1985) 145–201, 45–121

[LP] Pierre Louis Lions, Thierry Paul:*Sur les mesures de Wigner*, *Revista Matemática Iberoamericana* **9** (1993) 553–618

[M] Stefan Müller: *Rank–one convexity implies quasiconvexity on diagonal matrices*, MPI preprint Nr. 29/1999

[MŠ] Stefan Müller, Vladimír Šverák: *Convex integration with constraints and applications to phase transitions and partial differential equations*, MPI preprint Nr. 28/1999

[MS] David Mumford, Jayant Shah: *Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*, *Communications in Pure and Applied Mathematics* **42** (1989) 577–685

[MP] Julio Muñoz, Pablo Pedregal: *On the relaxation of an optimal design problem for plates*, *Asymptotic Analysis* **16** (1998) 125–140

[Mu77] François Murat: *H–convergence*, Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'Université de l'Alger, 1977–1978

[Mu78] François Murat: *Compacité par compensation*, *Annali della Scuola Normale Superiore Pisa* **5** (1978) 489–507

[Mu81] François Murat: *Compacité par compensation: condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant*, *Annali della Scuola Normale Superiore Pisa* **8** (1981) 69–102

[Mu87] François Murat: *A survey on compensated compactness, Contributions to modern calculus of variations*, L. Cesari, Pitman research notes in mathematics series 148, Longman, Harlow (1987) 145–183

[MT1] François Murat, Luc Tartar: *Calculus of variations and homogenisation*, in *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, A. Cherkaev, R. Kohn (eds.), Birkhäuser, 1997, pp. 139–173

[MT2] François Murat, Luc Tartar: *H-convergence*, in *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, A. Cherkaev, R. Kohn (eds.), Birkhäuser, 1997, pp. 21–43

[Ne] Hermano F. Neto: *Compacidade compensada aplicada às leis de conservação*, Colóquio Brasiliero de Matemática 19, 1996

[Ol] O. A. Oleinikova: *Construction of generalised solutions of the Cauchy problem*, *Annales Mathematics Silesians* Transl. ser. 2. **33** (1964) 277–283

[Pe92] Pablo Pedregal: *Jensen's Inequality in the Calculus of Variations*, CMU Research Report No. 92–NA–016, 1992

[Pe96] Pablo Pedregal: *Some remarks on quasiconvexity and rank-one convexity*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **126A**(1996) 1055–1065

[Pe97] Pablo Pedregal: *Nonlocal variational principles*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* **29** (1997) 1379–1392

[Pe97a] Pablo Pedregal: *Parametrized measures and variational principles*, Birkhäuser, 1997

[Pe99] Pablo Pedregal: *Optimisation, relaxation and Young measures*, *Bulletin of the AMS* **36** (1999) 27–58

[RS] Michael Reed, Barry Simon: *Methods of modern mathematical physics II: Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, 1972

[Ro] Tomáš Roubiček: *Effective Characterization of generalized Young measures generated by gradients*, *Bolletino della Unione Matematica Italiana* **7** (1995) 755–779

[R] Walter Rudin: *Real and complex analysis*, McGraw Hill, 1987

[S] Maria Elena Schonbek: *Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations*, *Communications in Partial Differential Equations* **7** (1982) 959–1000

[LS] Laurent Schwartz: *Mathematics for the physical sciences*, Hermann, Paris, 1966

[Sy96] Michael A. Sičev: *Young measure approach to characterisation of behaviour of integral functionals on weakly convergent sequences by means of their integrands*, preprint [ICTP, September 1996]

[Sy97] Michael A. Sičev: *A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy*, preprint [SISSA, March 1997]

[T79] Luc Tartar: Compensated compactness and applications to partial differential equations, Nonlinear analysis and mechanics, Heriot-Watt symposium IV, R. J. Knops (ed.), pp. 136–192, Research notes in mathematics 39, Pitman, 1979

[T86] Luc Tartar: *The appearance of oscillations in optimization problems*, Non-classical continuum mechanics, Proceedings of the London mathematical society symposium, Durham, July 1986, R. J. Knops, A. A. Lacey (eds.), pp. 129–150, London mathematical society lecture notes series 122, Cambridge University Press, 1987

[Ta87a] Luc Tartar: *A personal view on homogenization*, Limeil-Los Alamos meeting, January 1987, Los Alamos internal report

[Ta87b] Luc Tartar: *An introduction to homogenization theory*, Analysis seminar at Kent State University, December 12, 1987

[T92] Luc Tartar: *On mathematical tools for studying partial differential equations of continuum physics: H-measures and Young measures*, New developments in partial differential equations and applications to mathematical physics, G. Buttazzo, G. P. Galdi, L. Zanghirati, ur. 201–217, Plenum Press, New York, 1992

[T95] Luc Tartar: *Beyond Young measures*, *Meccanica* **30** (1995) 505–526

[T] Luc Tartar: *Homogenization, Compensated Compactness, and H-measures*, u pripremi

[Va] Michel Valadier: *A course on Young measures*, *Rendiconti dell'Instituto di Matematica dell'Università di Trieste* **26 suppl.** (1994) 349–394

[W] Joseph Wloka: *Partial differential equations*, Cambridge University Press, 1987

[Yo] Laurence C. Young: *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Chelsea, 1980

[ŽKON] V. V. Žikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, Kha T'en Ngoan: *Averaging and G-convergence of differential operators*, *Russian Math. Surveys* **34** (1979) 69–147 [*Uspehi mat. nauk* **34** (1979) 65–133]

Sažetak

Youngove (općenitije, parametrizirane) mjere su sredstvo za izučavanje slabe konvergencije i njenog ponašanja s obzirom na nelinearne funkcionale. Naime, pokazuje se da svaki niz izmjerivih funkcija generira parametriziranu mjeru. Štoviše, uz odgovarajuće pretpostavke, slabi limes kompozicije promatranog niza s nelinearnim funkcijama se može prikazati kao integral s obzirom na pripadnu parametriziranu mjeru.

Ukoliko pak niz zadovoljava izvjestan uvjet ograničenosti, pripadna familija mjera se sastoji iz vjerojatnosnih mjera i u tom slučaju je nazivamo Youngovom mjerom. Youngove mjere je uveo L. C. Young tridesetih godina radi boljeg razumijevanja oscilatorne prirode minimizirajućih nizova u varijacijskom računu, prije svega u zadaćama za koje ne postoji minimizator u klasičnom smislu.

Ovaj rad se sastoji iz dva dijela. Prvi dio je tehničke prirode i započinje pregledom funkcijskih prostora vezanih uz Youngove mjere, kao i nizom rezultata o slaboj konvergenciji u prostoru $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Naime, kako reprezentacija slabih limesa u terminima Youngovih mjera zahtijeva slabu konvergenciju promatranog niza, važno je znati koliko je ona *daleko* od uniformnih ocjena u $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Ovo razmatranje vodi na *nagrizajuću* konvergenciju i Chaconovu lemu. Pokazuje se da Youngove mjere uvijek osiguravaju nagrizajući limes. Štoviše, kad god nagrizajuću konvergenciju možemo *popraviti* do slabe konvergencije u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, Youngove mjere će reprezenirati slabi limes. Navedeni su i klasični rezultati karakterizacije slabe konvergencije u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ (Dunford–Pettisov i De La Vallée–Poussinov teorem), te veza nagrizajuće i slabe konvergencije. Poglavlje završava odjeljkom o Vitalijevom teoremu pokrivanja, koji igra važnu ulogu u postupcima lokalizacije i homogenizacije Youngovih mjera.

U drugom se poglavlju detaljno izučavaju Youngove mjere i njihova svojstva. Dokazuje se općenit teorem egzistencije Youngovih mjera, čija važnost je u tomu što daje eksplicitnu karakterizaciju slabih limesa u terminima Youngovih mjera. Na žalost, taj teorem ne osigurava i postojanje slabih limesa; to treba neovisno utvrditi drugim postupcima.

U drugom je odjeljku ovog poglavlja razmatrana spomenuta reprezentacija slabih limesa s pomoću Youngovih mjera, te veza s jakom konvergencijom. U nastavku je dokazan teorem karakterizacije Youngovih mjera generiranih nizovima u $\mathrm{L}^p(\Omega)$, kao i generalizacija na nizove koji su integrabilni u općenitijem smislu.

Naveden je i alternativni pristup Youngovim mjerama koji je razvio M. Sičev 1997. Naime, Youngove mjere se mogu identificirati s izmjerivim preslikavanjima u određeni kompaktan metrički prostor. To nam omogućuje da koristimo klasične rezultate, primjerice Luzinovo svojstvo, za dokazivanje činjenica o Youngovim mjerama. Neki su rezultati u ovom radu dokazani upravo koristeći ovaj pristup.

Poglavlje završava rezultatima o homogenizaciji i lokalizaciji Youngovih mjera. Ovi postupci imaju za cilj zadanoj Youngovoj mjeri pridružiti *homogenu* mjeru, koja je jednos-

tavnije strukture a još uvijek sadržava relevantne informacije o pripadnom nizu funkcija kojeg proučavamo.

U varijacijskom računu su osobito važni integrandi koji ovise o gradijentu. Stoga je od interesa izučavati slabu konvergenciju pridruženu nizovima gradijenata i pripadne Youngove mjere. To je sadržaj trećeg poglavlja. Navedeni su osnovni rezultati o gradijentnim Youngovim mjerama, u prvom redu teoremi lokalizacije i homogenizacije. Dokazan je i teorem karakterizacije gradijentnih Youngovih mjera generiranih nizovima u Soboljevljevim prostorima. Teorem daje vezu s kvazikonveksnošću gradijentnih Youngovih mjera, što pokazuje kako su one pogodno sredstvo za izučavanje varijacijskog računa u vektorskom slučaju.

Drugi dio rada, između ostalog, sadrži prikaz autorovih originalnih rezultata. Započinje četvrtim poglavljem o primjeni Youngovih mjera u teoriji kompenzirane kompaktnosti, koja omogućuje izračunanje limesa nekih bilinearnih veličina uz pretpostavku slabe konvergencije. Dokazan je kvadratični teorem kompenzirane kompaktnosti kojemu je $\mathsf{div}-\mathsf{rot}$ lema (F. Murat & L. Tartar, 1974) jednostavna posljedica. U nastavku je prikazana primjena Youngovih mjera na nelinearne hiperboličke zakone sačuvanja: Metodom iščezavajuće viskoznosti dobiven je niz rješenja paraboličkih aproksimacija polazne jednadžbe, dok je korištenjem Youngovih mjera omogućen prijelaz na limes u nelinearnom članu.

Posljednje, peto, poglavlje se bavi primjenama Youngovih mjera u varijacijskom računu. Na nekoliko primjera pokazano je kao se Youngove mjere koriste pri razmatranju dvaju osnovnih pitanja varijacijskog računa: slabe poluneprekinutosti odozdo i relaksacije.

Jedan od originalnih rezultata navedenih u ovom radu je analiza varijacijske zadaće vezane uz model crno–bijelog tiska. Razmatrana je zadaća aproksimacije funkcija koje poprimaju vrijednosti u segmentu $[0,1]$ funkcijama s vrijednostima u diskretnom skupu $\{0,1\}$. Ta je varijacijska zadaća usko vezana uz crno–bijeli tisak na digitalnim printerima. U ovom će modelu polazna slika biti predstavljena funkcijom $u : \Omega \longrightarrow [0,1]$, koju želimo što preciznije prikazati crnim mrljama tinte ili bijelim prazninama na papiru, dakle, aproksimirati funkcijom $v : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$, u smislu minimizacije određenog funkcionala. Zbog oscilacije minimizacijskih nizova, pokazuje se da je Youngova mjera jedinstveni (poopćeni) minimizator promatranoga funkcionala. Tu zadaću je predložio John M. Ball 1994.

Drugi originalan doprinos je primjer primjene Youngovih mjera u teoriji optimalnog dizajna, gdje je dano poopćenje rezultata Mũnoza i Pedregala iz 1998. godine. Naime, postojeći rezultat relaksacije i optimalne relaksacije za zadaću minimizacije promatranog funkcionala, koji je dokazan za klasu ortotropskih materijala, poopćen je na slučaj proizvoljnih materijala. U tu svrhu razvijena je metoda homogenizacije i teorija $H-$konvergencije za linearne eliptičke jednadžbe četvrtog reda po uzoru na Tartarov pristup jednadžbi drugog reda. Rezultat homogenizacije omogućuje definiranje relaksirane zadaće na skupu dopustivih Youngovih mjera.

Ovo poglavlje završava osvrtom na nelokalne varijacijske zadaće. Dokazano je da je nužan i dovoljan uvjet za postizanje slabe nizovne poluneprekinutosti odozdo Jensenova nejednakost. Dokazani su i nešto slabiji dovoljni uvjeti poput separatne konveksnosti integranda. Dokazan je i teorem relaksacije u slučaju integranada koji ne zadovoljavaju Jensenovu nejednakost. Upravo je relaksacija mjesto na kojemu je razlika između lokalnih i nelokalnih zadaća najizraženija. Naime, za lokalne je funkcionale uobičajeno zamijeniti nekonveksni integrand njegovom konveksifikacijom. U nelokalnom slučaju ne postoji adekvatna zamjena za konveksifikaciju, stoga je jedini poznat način za opisivanje relaksacije u ovom slučaju korištenje Youngovih mjera i poopćenih funkcionala na njima.

Summary

The Young measure (or, more generally, parametrised measures) is a tool for studying the notion of weak convergence in L^p spaces and its behaviour with respect to nonlinear functionals. It is known that every sequence of measurable functions determines a parametrised measure. Moreover, if this sequence satisfies some additional assumptions, weak limits of compositions with nonlinear functions can be represented through integrals with respect to the corresponding Young measure.

Young measures were first introduced by L. C. Young to understand the oscillatory nature of minimising sequences in the calculus of variations, primarily in variational problems which do not admit a minimiser in the classical sense.

This Thesis consists of two parts. First part is of technical nature, and it starts with a survey of functional spaces related to Young measures, as well as a number of results on the weak convergence in $L^1(\Omega)$.

However, as the representation of weak limits in terms of Young measures requires having weak convergence of the sequence involved, it is important to know how far it is from having uniform bounds in $L^1(\Omega)$. This leads us to the notion of biting convergence and Chacon's lemma. It turns out that, whenever this convergence can be improved to weak convergence, Young measures will represent weak limits. The classical results characterising of the weak convergence in $L^1(\Omega)$ (Dunford–Pettis and De La Vallée–Poussin theorems) are presented. The first chapter ends with the Vitali covering theorem, which plays an important role in the homogenisation and localisation procedures.

The second chapter provides a detailed study of Young measures. A rather general existence theorem is proved, being important in asserting explicit characterisation of weak limits in terms of Young measures. Unfortunately, this theorem does not guarantee in any way that the weak limit actually exists. This has to be shown independently.

Aforementioned characterisation of weak limits is connected to strong convergence and the characterisation of Young measures generated by sequences in $L^p(\Omega)$ is studied, together with some generalisations.

An alternative approach to Young measures, developed by M. Sychev in 1997 is also presented. Young measures can be viewed as measurable mappings into certain compact metric space. This enables us to use classical results as the Luzin property in proving the facts about Young measures.

This chapter ends with homogenisation and localisation theorems for Young measures. This procedures enable us to have a homogeneous Young measure that still keeps track of all relevant properties of the sequence in consideration.

In the calculus of variations the important role is played by integrands which depend on gradients. Therefore, the study of Young measures generated by a sequence of gradients is of particular interest. This is the content of the third chapter. Basic results, such

as theorems of homogenisation and localisation are presented. The characterisation of gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces is proved. This theorem asserts that gradient Young measures and the notion of quasiconvexity are closely related.

The second part of this Thesis contains some applications of Young measures, including original contributions of the author. It starts with the chapter dealing with an application of Young measures in the compensated compactness theory, which enables us to calculate certain weak limits of bilinear quantities without the assumption of strong convergence. Compensated compactness theorem for quadratic quantities is proved, div–rot lemma (F. Murat & L. Tartar, 1974) being a straightforward corollary. In the sequel the application of Young measures to nonlinear hyperbolic conservation laws is presented. By using the method of vanishing viscosity, a sequence of solutions to the parabolic approximation of the original problem is obtained, while Young measures took care of the limit in the nonlinear term.

The last, fifth chapter is devoted to the applications of Young measures in the Calculus of Variations. In several examples it is shown how Young measues can be used in the study of two basic questions of the Calculus of Variations: weak lower semicontinuity and relaxation.

One of the original results given in this Thesis is the study of the variational problem related to a model of black and white printing. This is basically the problem of approximating functions with values in segment $[0, 1]$ with functions taking values in the set $\{0, 1\}$, and is closely related to the black and white printing on digitalised printers. In this model the original picture will be represented by a function $u : \Omega \longrightarrow [0, 1]$, which we try to approximate as well as possible by black dots of ink and white patches of paper, represented by a function $v : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$, in the sense of minimising certain functional. It is proved that Young measure is the unique minimiser in generalised sense. This problem was suggested by John M. Ball in 1994.

Another original result presented is an application of Young measures in Optimal design: a generalisation of the result by Mũnoz and Pedregal (1998). Their result of relaxation and optimal relaxation for the problem of minimising a compliance functional for plate equation, which they proved for a narrow class of orthotropic materials, is here extended to the case of general materials. To achieve this, rather general homogenisation method and theory of H–convergence for linear elliptic equations of the fourth order has been developed, inspired by Tartar's approach to second–order equations. Our homogenisation result allowed us to define relaxed problem on the set of admissible Young measures.

This chapter ends with a survey on nonlocal variational problems. It is proved that a version of Jensen's inequality is necessary and sufficient condition for achieving weak lower semicontinuity of the functional in consideration. Several weaker sufficient conditions are also proved. In the case of integrands which do not satisfy Jensen's inequality the relaxation is performed. In the nonlocal setting, the relaxation shows the most striking difference with respect to the local case. It shows that in the nonlocal case it is not possible to define appropriate convexification of the integrand, therefore the only known to date way for describing relaxation for nonlocal functionals is the use of Young measures as generalised minimisers.

Životopis

Neven Balenović je rođen 15. listopada 1971. godine u Kotoru, Republika Crna Gora. Osnovnu i srednju školu matematičko-informatičkog usmjerenja završio je u Splitu, gdje je i maturirao u lipnju 1990. godine odličnim uspjehom. Tijekom školovanja sudjelovao je na brojnim općinskim, republičkim i saveznim natjecanjima iz matematike i fizike, gdje je postigao zapažene rezultate. U jesen 1990. odlazi na odsluženje vojnog roka u tadašnjoj JNA. Školske godine 1991/92. upisuje prvu godinu studija na PMF-u, Matematički odjel, profil *diplomirani inženjer matematike*, smjer *Primijenjena matematika i informatika*. Diplomirao je 22. prosinca 1995. godine s temom *Nelinearne valne jednadžbe* pod vodstvom prof. dr. sc. N. Antonića.

Iste godine upisao je poslijediplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu te od tada aktivno sudjeluje u radu Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu.

Od 11. ožujka 1996. godine zaposlen je kao znanstveni novak na Matematičkom odjelu Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Njegov znanstveni interes vezan je uz područje matematičke analize, parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i varijacijskog računa, s posebnim naglaskom na *Tartarov program*. Sudjelovao je na brojnim međunarodnim znanstvenim skupovima, gdje održao i nekoliko predavanja. Član je Američkog matematičkog društva (American Mathematical Society).