Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Martin Lazar

# H-mjere i primjene

**Magistarski rad**

Zagreb, srpnja 2002.

# Predgovor

H-mjere, ili kako se još nazivaju, mikrolokalne defektne mjere su početkom devedesetih godina dvadesetog stoljeća nezavisno uveli Luc Tartar i Patrick Gérard. Kako su se najprije pojavile u vezi s nekim problemima iz homogenizacije, Tartar ih je nazvao H-mjerama. One su vrsta Radonovih mjera koje opisuju limes kvadratičnih izraza $\mathrm{L}^2$ funkcija.

Za razliku od Youngovih mjera koje su indeksirane po $x$, H-mjere su indeksirane i po $x$ i po njenoj dualnoj varijabli u faznom prostoru $\xi$. Nasuprot Youngovim mjerama, koje daju samo statički opis titranja, važna primjena H-mjera proizlazi iz *prijenosnog svojstva* kojeg zadovoljavaju. To svojstvo omogućuje pridruživanje pojedinim sustavima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi posebne prijenosne jednadžbe koje opisuju ne samo širenje oscilacija, već i koncentracija.

Iako ne sadrži sve informacije koje u sebi nose Youngove mjere (ograničene su na računanje kvadratičnih izraza), mogu pomoći u provođenju određene vrste mikrolokanog računa s brojnom mogućnosti primjene. Posebno se to odnosi na računanje energije određenih sustava, budući da je, u pravilu, upravo ta veličina izražena kvadratičnim članovima.

Originalni rezultati prikazani u ovom radu se upravo odnose na računanje energije pridružene nizu nelinearnih valnih jednadžbi s različitim početnim uvjetima. Energija pridružena svakoj pojedinoj valnoj jednadžbi se može izračunati, nas, međutim, zanima limes gustoće energije, takozvana makroskopska gustoća energije. Budući da je energija izražena kvadratičnim članovima, limes se izražava pomoću H-mjera. Koristeći prijenosna svojstva H-mjera, izvodi se prijenosna jednadžba za H-mjeru, te se ona izražava pomoću H-mjera pridruženih nizu početnih uvjeta. Pokaže se da dodavanje nelinearnog člana nije rezultiralo promjenom te energije.

Rezultat se zatim dalje poopćuje na simetrične hiperboličke sustave. U tom se slučaju za H-mjeru, koja predstavlja makroskopsku gustoću energije, opet izvede pripadna prijenosna jednadžba. Zapisujući valnu jednadžbu kao hiperbolički sustav može se napraviti usporedba dvaju rezultata.

Ovaj rad nastao je pod vodstvom dr. sc. Nenada Antonića, mog mentora i prijatelja. Koristim priliku da mu se najtoplije zahvalim na svoj dosadašnjoj suradnji i potpori, te ogromnoj količini znanja koju sam stekao radeći s njim. Također zahvaljujem dr. sc. Stefanu Mülleru na čiji sam poziv proveo godinu dana na studijskom boravku na Max Planck institutu za matematiku u prirodoslovlju u Leipzigu tijekom kojeg je napravljen i dio ovog rada.

U Zagrebu, srpnja 2002.

Martin Lazar

# Sadržaj

# Prvi dio
# H-mjere

# I. Pseudodiferencijalni račun

# 1. Motivacija

Teorija općenitih pseudodiferencijalnih operatora je razvijena sredinom šezdesetih godina (vidi [KN]). Nastala je objedinjenjem singularnih integralnih i parcijalnih diferencijalnih operatora, od kojih svaka vrsta igra važnu ulogu u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, u jednu algebru operatora. Članovi te algebre nazvani su pseudodiferencijalnim operatorima zato što se mogu definirati bez posredstva singularnih integrala, te što dijele mnoga važna svojstva s diferencijalnim operatorima, na primjer, svojstvo pseudolokalnosti. Pomoću teorije pseudodiferencijalnih operatora bilo je moguće proširiti upotrebu Fourierove pretvorbe s klase linearnih diferencijalnih operatora s konstantnim koeficijentima na širu klasu linearnih diferencijalnih operatora s glatkim koeficijentima.

Naime, koristeći osnovna svojstva Fourierove pretvorbe, vidimo da za $\phi \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$\widehat{D^\alpha \phi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi),$$

pri čemu je diferencijalni operator $D^\alpha := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|} \partial^\alpha$. Fourierova inverzna formula nam daje

$$D^\alpha \phi(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} \xi^\alpha \hat{\phi}(\xi) d\xi.$$

Za općeniti linearni parcijalni diferencijalni operator s varijabilnim koeficijentima $a(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ na osnovu gornje formule dobivamo izraz

$$a(x,D)\phi(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi, \tag{1}$$

pri čemu je simbol $a(x,\xi)$ operatora $a(x,D)$ polinom u $\xi$: $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

Teorija pseudodiferencijalnih operatora temelji se na proširenju gornje formule na širu klasu simbola, koja će sadržavati i druge funkcije osim polinoma. Te funkcije odgovaraju operatorima koji ne moraju biti diferencijalni operatori, a nazivaju se pseudodiferencijalni operatori. Uzimajući dovoljno široku klasu simbola moći ćemo, za neke od tih operatora (na primjer za eliptičke), odrediti njihove inverze. Ključna ideja je u tome da se račun operatora zamijeni računom pridruženih simbola. Međutim, uvođenje varijabilnih koeficijenata je unijelo i određene komplikacije, budući da $a(x,\xi)\hat{\phi}(\xi)$ nije više Fourierov transformat $a(x,D)\phi(x)$. Kao posljedica toga operator pridružen simbolu $(a(x,\xi))^{-1}$ će biti samo aproksimativno inverz operatora $a(x,D)$.

Za izgradnju dobre teorije pseudodiferencijalnih operatora potrebno je odabrati odgovarajuće klase dopuštenih simbola, što je sadržaj sljedećeg odjeljka.

# 2. Klase simbola

Neka je $m \in \mathbf{R}$ i $a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. Kažemo da je $a$ simbol reda $m$ ako za svaki par multiindeksa $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$ postoji konstanta $C_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ takva da

$$|\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})| \leqslant C_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \lambda(\boldsymbol{\xi})^{m-|\boldsymbol{\beta}|}, \qquad (\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d.$$

Pri tom je $\lambda(\boldsymbol{\xi}) = (1+|2\pi\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{1}{2}}$, dok $\partial_k$ i $\partial^k$ označavaju derivacije s obzirom na varijable $x^k$ i $\xi_k$.

Skup takvih simbola reda $m$ se označava sa $S^m$. Lako se provjeri da je $S^l \subseteq S^m$ za $l \leqslant m$, što daje smisao uvođenju klasa $S^\infty := \bigcup_m S^m$ i $S^{-\infty} := \bigcap_m S^m$. Ukoliko je $a \in S^m, b \in S^l$, te $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$, tada je $\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} a \in S^{m-|\boldsymbol{\beta}|}$ i $ab \in S^{m+l}$.

Najjednostavniji primjer simbola iz klase $S^m$ je simbol diferencijalnog operatora reda $m$: $a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a_{\boldsymbol{\alpha}}(x)\xi^{\boldsymbol{\alpha}}$, pri čemu su koeficijenti $a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{H}^\infty = \bigcap_s \mathrm{H}^s$. Nadalje, $\lambda^m(\boldsymbol{\xi}) = (1+|2\pi\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{m}{2}}$ je simbol klase $m$.

Sljedeći primjer je vezan uz funkciju $a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ koja ima kompaktan nosač u varijabli $\mathbf{x}$, homogena je reda $m$ po $\boldsymbol{\xi}$ i klase $\mathrm{C}^\infty$ izvan $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$. Tada postoji simbol $b \in S^m$ takav da je $b(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ za $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant 1$. On je jedinstveno određen modulo $S^{-\infty}$, što znači da ukoliko je $c$ neki drugi simbol koji zadovoljava navedeno svojstvo, onda je nužno $b-c \in S^{-\infty}$. Zaista, funkcija $b(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = (1-\phi(\boldsymbol{\xi}))a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, gdje je $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$, $\operatorname{supp}\phi \subset \mathrm{K}(0,1)$ i $\phi = 1$ u okolini $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, će biti simbol klase $m$, te će biti jednaka funkciji $a$ za $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant 1$. Ukoliko je $c$ neki drugi simbol jednak funkciji $a$ za $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant 1$, onda nužno slijedi da je $b-c \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d) \subset S^{-\infty}$. Stoga u tekstu većinom nećemo praviti razliku između funkcije $a$ i njoj pridruženog simbola $b = (1-\phi)a$.

U razvoju gore spomenutog asimptotičkog računa od velike važnosti će nam biti sljedeća lema [SR, 2.2].

**Lema 1.** *Neka su $a_j \in S^{m-j}$, $j \in \mathbf{N}_0$. Tada postoji simbol $a \in S^m$ (jedinstveno određen modulo $S^{-\infty}$), takav da za svaki $k \in \mathbf{N}_0$*

$$a - \sum_{j<k} a_j \in S^{m-k}.$$

*Štoviše, $a$ može biti izabran tako da je $\operatorname{supp} a \subseteq \bigcup_j \operatorname{supp} a_j$. Koristit ćemo oznaku $a \sim \sum a_j$.* ∎

Poseban primjer gornjeg aproksimativnog razvoja se dobije ako se uzmu funkcije $a_j$ s kompaktnim nosačem po $\mathbf{x}$, homogene stupnja $m-j$ po $\boldsymbol{\xi}$, te $\mathrm{C}^\infty$ izvan $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$. Kao što je pokazano gore, njima se mogu pridružiti simboli klase $m-j$, pa koristeći prethodnu lemu dobijemo novi simbol $a \in S^m, a \sim \sum a_j$. Takvi simboli se zovu *polihomogeni* ili *klasični*. Oni čine podklasu prostora $S^\infty$ koja sadrži simbole diferencijalnih operatora i simbol $\lambda(\boldsymbol{\xi})$, te je zatvorena na diferenciranje i množenje. Za polihomogeni simbol $a \in S^m$ definira se glavni simbol, u oznaci $\sigma_m(a)$ (ili samo $\sigma(a)$, ukoliko se ne želi naglašavati stupanj simbola), kao homogeni dio stupnja $m$.

## 3. Pseudodiferencijalni operatori

Simbolima iz prethodnog odjeljka želimo pridružiti operatore pomoću relacije (1). Za $a \in S^\infty$ i $u \in \mathcal{S}$ integral u (1) konvergira i definira funkciju iz $\mathcal{S}$. To je ujedno sadržaj sljedećeg teorema, za čiji dokaz ćemo koristiti svojstva neprekidnosti Fourierove pretvorbe na $\mathcal{S}$ sadržane u Lemi 2. (za dokaz vidi [SR], 1.8).

**Lema 2.** *Fourierova pretvorba je neprekidno preslikavanje sa $\mathcal{S}$ u $\mathcal{S}$ i pri tom vrijedi da je $|\hat{\phi}|_k \leqslant C_k|\phi|_{2d+k}$. (Za $k \in \mathbf{N}_0$ s $|\cdot|_k$ označujemo polunormu $|\phi|_k := \sup\{|\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\partial_{\boldsymbol{\beta}}\phi(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d, |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant k\}$.)*

∎

**Teorem 1.** *Za $a \in S^\infty$ i $\phi \in \mathcal{S}$, izraz*

$$a(\mathbf{x},D)\phi(\mathbf{x}) = \int e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \tag{2}$$

*definira funkciju $a(\cdot,D)\phi \in \mathcal{S}$, te postoje konstante $N \in \mathbf{N}_0$ i $C_k \in \mathbf{R}^+$ za $k \in \mathbf{N}_0$ (koje ovise o $a$), takve da je $|a(\cdot,D)\phi|_k \leqslant C_k|\phi|_{k+N}$.*

Dem. Kako je za $l \leqslant m$ $S^l \subseteq S^m$, to možemo pretpostaviti da je $a \in S^{2m}$ za neki $m \in \mathbf{N}$. Stoga za $\phi \in \mathcal{S}$ možemo pisati

$$|a(\mathbf{x}, D)\phi(\mathbf{x})| \leqslant \int |\lambda^{-2m} a|_0 \, |\lambda^{2m+2d}\hat{\phi}|_0 \, \lambda^{-2d}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Budući da je $\int \lambda^{-s}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$ konačan ako i samo ako je $s > d$, zaključujemo da je $a(\cdot, D)\phi$ omeđena funkcija, te da je $|a(\cdot, D)\phi|_0 \leqslant C|\hat{\phi}|_{2m+2d} \leqslant C_0|\phi|_N$, za $N = 2m + 4d$. Nadalje, deriviranjem relacije (2) dobijemo

$$\partial_j(a(\mathbf{x}, D)\phi(\mathbf{x})) = a(\mathbf{x}, D)(\partial_j\phi)(\mathbf{x}) + (\partial_j a)(\mathbf{x}, D)\phi(\mathbf{x}),$$

a parcijalnom integracijom njene desne strane

$$x^j(a(\mathbf{x}, D)\phi(\mathbf{x})) = a(\mathbf{x}, D)(x^j\phi)(\mathbf{x}) + \frac{i}{2\pi}(\partial^j a)(\mathbf{x}, D)\phi(\mathbf{x}).$$

Stoga član $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}}(a(\mathbf{x}, D)\phi(\mathbf{x}))$ može biti prikazan kao linearna kombinacija članova oblika $(\partial_{\boldsymbol{\gamma}}\partial^{\boldsymbol{\delta}} a)(\mathbf{x}, D)(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}}\partial^{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}}\phi)(\mathbf{x})$, te je $a(\cdot, D)\phi \in S$ i $|a(\cdot, D)\phi| \leqslant C_k|\phi|_{k+N}$.

**Q.E.D.**

Sljedećim teoremom [SR 3.2] uvest ćemo operacije adjungiranja i komponiranja pseudodiferencijalnih operatora. Teorem također daje vezu između simbola prvobitnog i adjungiranog, odnosno komponiranog operatora.

**Teorem 2.** *Za svaki $a, b \in S^\infty$, te $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ vrijedi*
*(i) $\langle a^*(\cdot, D)\phi, \psi\rangle = \langle \phi, a(\cdot, D)\psi\rangle$,*
*(ii) $\langle a\sharp b(\cdot, D)\phi, \psi\rangle = \langle a(\cdot, D)b(\cdot, D)\phi, \psi\rangle$,*
*pri čemu je $a^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sim \sum \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\partial^{\boldsymbol{\alpha}} D_{\boldsymbol{\alpha}}\bar{a}$ i $a\sharp b \sim \sum \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\partial^{\boldsymbol{\alpha}} a D_{\boldsymbol{\alpha}} b$. Navedeni redovi konvergiraju jednoliko po $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ i $\boldsymbol{\xi}$ iz kompaktnog skupa u $\mathbf{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, dok $\sim$ predstavlja klasu ekvivalencije modulo $S^{-\infty}$.*

∎

Prokomentirajmo pobliže operacije adjungiranja $*$ i komponiranja $\sharp$ simbola. Ukoliko je $a$ diferencijalni simbol reda $m$ (tj. polinom po $\boldsymbol{\xi}$ s koeficijentima u $\mathrm{H}^\infty$), onda će članovi u asimptotičkom razvoju za $a^*$ biti jednaki 0 za $|\boldsymbol{\alpha}| > m$, pa je taj razvoj konačan i egzaktan. Iz istih razloga je $a\sharp b = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\partial^{\boldsymbol{\alpha}} a D_{\boldsymbol{\alpha}} b$ za svaki $b \in S^l$.

Htjeli bismo slična razmatranja provesti i za slučaj kada je $a$ polinom po $\mathbf{x}$ s koeficijentima ovisnim o $\boldsymbol{\xi}$. Međutim, takve funkcije nisu simboli (neomeđene su po $\mathbf{x}$), osim u slučaju kada je stupanj polinoma nula, to jest, kad $a$ ovisi samo o $\boldsymbol{\xi}$. U tom slučaju gornji razvoji se bitno pojednostavljuju i vrijedi $a^* = \bar{a}$ i $a\sharp b = ab$ za svaki $b \in S^l$. Posebno, za simbole $\lambda^m$ vrijedi $(\lambda^m)^* = \lambda^m$ i $\lambda^l\sharp\lambda^m = \lambda^{l+m}$.

Pomoću zadnjeg teorema možemo proširiti operator $a(\mathbf{x}, D) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ na operator sa $\mathcal{S}'$ u $\mathcal{S}'$. Za zadani simbol $a \in S^\infty$ definiramo pseudodiferencijalni operator $a(\mathbf{x}, D) : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ na sljedeći način

$$\langle a(\cdot, D)u, \phi\rangle = \langle u, a^*(\cdot, D)\phi\rangle,$$

pri čemu je $u \in \mathcal{S}'$ i $\phi \in \mathcal{S}$. Ukoliko je $a \in S^m$ kažemo da je operator $a(\mathbf{x}, D)$ reda $m$. Skup svih pseudodiferencijalnih operatora reda $m$ označava se sa $\Psi^m$. Skup svih pseudodiferencijalnih operatora je $\Psi^\infty = \bigcup \Psi^m$, dok se elementi skupa $\Psi^{-\infty} = \bigcap \Psi^m$ zovu izglađujući operatori (takav naziv će opravdati tvrdnje Teorema 4. i 7.).

Iako je gornja definicija pseudodiferencijalnog operatora definiranog na $\mathcal{S}'$ implicitna, ipak omogućuje provođenje eksplicitnog računa. U prvom dijelu sljedećeg teorema pokazat ćemo da poznavajući djelovanje operatora možemo jednoznačno odrediti njegov simbol (na taj način je uspostavljena bijekcija između $S^\infty$ i $\Psi^\infty$). U drugom dijelu teorema će biti prikazani neki detalji vezani uz račun sa *simbolima* koji su polinomi po $\mathbf{x}$. Premda iz prethodnog razmatranja znamo da takve funkcije nisu simboli, ako uzmemo $b(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant k} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} b_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})$, $b_{\boldsymbol{\alpha}} \in S^\infty$, možemo definirati operator $b(\mathbf{x}, D) : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ pomoću formule

$$b(\mathbf{x}, D)u = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant k} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}(b_{\boldsymbol{\alpha}}(D)u), \quad u \in \mathcal{S}'.$$

Gornja formula je dobra jer je $\mathcal{S}'$ zatvoreno na množenje s polinomima. Iz iskaza teorema će slijediti da za takav operator $b$ i proizvoljni $a \in S^\infty$ i dalje vrijedi formula (ii) iz Teorema 2., pri čemu će razvoj za $a\sharp b$ sadržavati samo konačno mnogo članova.

**Teorem 3.** *Neka je $a \in S^\infty$.*

*(i) Tada za proizvoljni fiksni $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ vrijedi*

$$a(\mathbf{x}, D)e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} = a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}.$$

*(ii) Ako je k tome $p$ polinom u $\mathbf{x}$ i $u \in \mathcal{S}'$ onda vrijedi*

$$a(\cdot, D)(pu) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}_0^d} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} D_{\boldsymbol{\alpha}} p(\mathbf{x})(\partial^{\boldsymbol{\alpha}} a)(\cdot, D)u.$$

Dem. (i) Izračunajmo najprije $(a^*(\cdot, D)\phi)^\wedge$ za $\phi \in \mathcal{S}$. Imamo da je

$$\langle\tilde{\psi}, (a^*(\cdot, D)\phi)^\wedge\rangle = \langle\hat{\psi}, a^*(\cdot, D)\phi\rangle = \langle a(\cdot, D)\hat{\psi}, \phi\rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}.$$

Budući da je Fourierov transformat funkcije $\hat{\psi}$ upravo $\tilde{\psi}$, to slijedi da je izraz u gornjem retku jednak

$$\int\left(\int e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\tilde{\psi}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}\right)\bar{\phi}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int\tilde{\psi}(\boldsymbol{\xi})\left(\int e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\bar{\phi}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)d\boldsymbol{\xi},$$

iz čega slijedi da je $(a^*(\cdot, D)\phi)^\wedge = \overline{\int e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\bar{\phi}(\mathbf{x})d\mathbf{x}}$. Stoga za svaki $\phi \in \mathcal{S}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle a(\mathbf{x}, D)e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}, \phi\rangle &= \langle e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}, a^*(\mathbf{x}, D)\phi\rangle \\
&= \int e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\overline{a^*(\mathbf{x}, D)\phi} \\
&= \overline{(a^*(\mathbf{x}, D)\phi)^\wedge}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\bar{\phi}(\mathbf{x})d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

što dokazuje (i).

(ii) Zbog linearnosti pseudodiferencijalnih operatora, dovoljno je tvrdnju dokazati za $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$. Najprije, za $\phi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} a^*(\mathbf{x}, D)\phi(\mathbf{x}) &= \int \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}(-D)^{\boldsymbol{\beta}}\left(a^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi})\right)d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \sum_{\boldsymbol{\alpha}\leqslant\boldsymbol{\beta}} \binom{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}} ((-D)^{\boldsymbol{\alpha}} a^*)(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\left(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}}\phi(\boldsymbol{\xi})\right)^\wedge d\boldsymbol{\xi} \\
&= \sum_{\boldsymbol{\alpha}\leqslant\boldsymbol{\beta}} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}(D^{\boldsymbol{\alpha}} a)^*(\mathbf{x}, D)((\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}})\phi)(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz činjenice da je

$$\binom{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}.$$

Na taj način smo dobili

$$\begin{aligned}\langle a(\mathbf{x},D)(\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}u),\phi\rangle &= \langle u,\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}a^*(\mathbf{x},D)\phi\rangle\\ &= \sum\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\langle u,(D^{\boldsymbol{\alpha}}a)^*(\mathbf{x},D)((\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}})\phi)\rangle\\ &= \sum\frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\langle(\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}})(D^{\boldsymbol{\alpha}}a)(\mathbf{x},D)u,\phi\rangle,\end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju.

**Q.E.D.**

Pri proučavanju diferencijalnih jednadžbi, posebno zanimljiva svojstva imaju invertibilni pseudodiferencijalni operatori. Takvi operatori se zovu eliptički. Njihova karakterizacija dana je sljedećim teoremom [SR, 2.10].

**Teorem 4.** *Za $a\in S^m$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
*(i) Postoji simbol $b\in S^{-m}$ takav da je $a\sharp b-1\in S^{-\infty}$.*
*(ii) Postoji simbol $b\in S^{-m}$ takav da je $b\sharp a-1\in S^{-\infty}$.*
*(iii) Postoji $\epsilon>0$ takav da je $|a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})|\geqslant\epsilon\lambda^m(\boldsymbol{\xi})$ za $|\boldsymbol{\xi}|\geqslant\frac{1}{\epsilon}$.*
*Kad su gornji uvjeti ispunjeni, simbol $a$ se naziva eliptičkim. Inverz $b$ simbola $a$ je jedinstven do na modulo $S^{-\infty}$.* ∎

Simboli $\lambda^m$ su eliptični budući da vrijedi $\lambda^m\sharp\lambda^{-m}=1$. Kao što je već rečeno, za diferencijalni simbol $a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}$ (kao i za općenite polihomogene simbole) definira se glavni simbol kao homogeni dio stupnja $m$, to jest kao funkcija $p(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}$. Koristeći karakterizaciju (iii) iz prethodnog teorema lako se pokaže da je takav simbol eliptičan ako i samo ako je $|\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})|\geqslant\epsilon>0$ za $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d$.

Pseudodiferencijalni operatori su uvedeni u svrhu proširenja klase diferencijalnih operatora. Zbog toga se postavlja pitanje da li oni zadovoljavaju svojstva koja imaju diferencijalni operatori. Posebno, diferencijalni operatori reda $m$ s $\mathrm{H}^\infty$ koeficijentima su neprekidni operatori s $\mathrm{H}^s$ u $\mathrm{H}^{s-m}$. Ovo svojstvo se proširuje na pseudodiferencijalne operatore proizvoljnog reda $m\in\mathbf{R}$ [SR, 3.6].

**Teorem 5.** *Neka je $a\in S^m$; tada za svaki $s\in\mathbf{R}$ postoji konstanta $C_s$ takva da je $a(\mathbf{x},D)u\in\mathrm{H}^{s-m}$ za svaki $u\in\mathrm{H}^s$, te $\|a(\cdot,D)u\|_{\mathrm{H}^{s-m}}\leqslant C_s\|u\|_{\mathrm{H}^s}$.* ∎

Ovaj teorem ima za posljedicu da su operatori reda $-\infty$ izglađujući, te da je svaki operator negativnog reda kompaktan na $\mathrm{H}^s$.

Ocjene djelovanja operatora na prostore $\mathrm{H}^s$ htjeli bismo proširiti i na $\mathrm{L}^p$ prostore. U tom slučaju svojstvo neprekidnosti zadovoljavat će samo operatori reda 0 [St VI.5].

**Teorem 6.** *Neka je $A$ pseudodiferencijalni operator pridružen simbolu $a\in S^0$. Tada se $A$ proširuje do neprekidnog operatora s $\mathrm{L}^p$ na $\mathrm{L}^p$, za $1<p<\infty$.* ∎

Pseudodiferencijalni operatori, međutim, ne nasljeđuju sva svojstva diferencijalnih operatora. Posebno, to vrijedi za svojstvo lokalnosti: općeniti pseudodiferencijalni operator ne čuva nosač funkcije, to jest ne vrijedi

$$\operatorname{supp}(a(\cdot,D)u)\subseteq\operatorname{supp}u,\quad u\in\mathcal{S}'.$$

Štoviše, može se pokazati da ukoliko $a(\mathbf{x}, D) \in \Psi^\infty$ zadovoljava gornje svojstvo, on je nužno diferencijalni operator. Međutim, ukoliko je $\phi \in \mathrm{C}^\infty$ i $\phi = 1$ na $\operatorname{supp} u$, onda je

$$a(\cdot, D)u = a(\cdot, D)(\phi u) = a\sharp\phi(\cdot, D)u.$$

Na osnovu asimptotičkog razvoja i Leme 1. dalje zaključujemo da je $a\sharp\phi = b + r$, pri čemu je $r \in S^{-\infty}$ i $\operatorname{supp} b(\cdot, D)u \subseteq \operatorname{supp}_x b \subseteq \operatorname{supp} \phi$. Stoga vidimo da ćemo s općenitim pseudodiferencijalnim operatorom zadržati neku kontrolu nad nosačem funkcije, ukoliko račun ograničimo do na djelovanje izglađujućih operatora. Ono što umjesto lokalnog svojstva ovdje vrijedi je svojstvo pseudolokalnosti, i.e. da pseudodiferencijalni operatori ne povećavaju singularni nosač

$$\operatorname{supp\,sing}(a(\cdot, D)u) \subseteq \operatorname{supp\,sing} u, \quad u \in \mathcal{S}'.$$

Budući da su eliptički operatori invertibilni modulo izglađujući operator, oni ne smanjuju singularni nosač. Ovo svojstvo se naziva hipoeliptičnost. Navedene tvrdnje dokazat ćemo u sljedećem teoremu, a prije toga ćemo iskazati dvije pomoćne leme [SR 1.14 & 1.16].

**Lema 3.** *Za $u \in \mathcal{S}'$ postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takav da je $\psi u \in \mathrm{H}^{-N}$ za $\psi \in \mathcal{S}$ ili $\psi(\mathbf{x}) = (1 + |2\pi\mathbf{x}|^2)^{-N}$.* ∎

Poseban slučaj Soboljevljevih ulaganja imamo iskazan u sljedećoj lemi.

**Lema 4.** *Neka je $k \in \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$, te $u \in \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)$ za $s > (d/2) + k$. Tada su $D^{\boldsymbol{\alpha}} u$ neprekidne omeđene funkcije za $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant k$.* ∎

**Teorem 7.** *Ako je $a \in S^{-\infty}$, onda $a(\mathbf{x}, D)$ preslikava $\mathcal{E}'$ u $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ u $\mathcal{O}$ (skup $\mathrm{C}^\infty$ funkcija najviše polinomijalnog rasta u beskonačnosti). Ako je $a \in S^\infty$, onda $a(\mathbf{x}, D)$ preslikava $\mathcal{O}$ u $\mathcal{O}$. Nadalje, svaki pseudodiferencijalni operator $a(\mathbf{x}, D) \in \Psi^\infty$ posjeduje pseudolokalno svojstvo:*

$$\operatorname{supp\,sing}(a(\cdot, D)u) \subseteq \operatorname{supp\,sing} u, \quad u \in \mathcal{S}',$$

*dok za eliptičke operatore imamo jednakost gornjih skupova, to jest $\operatorname{supp\,sing}(a(\cdot, D)u) = \operatorname{supp\,sing} u$.*

Dem. Neka je $a \in S^{-\infty}$ i $u \in \mathcal{E}'$. Tada postoji $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty$ takav da je $u = \psi u$, pa na osnovu Leme 3. zaključujemo da je $u \in H^{-N}$ za neki $N \in \mathbf{N}_0$. Na osnovu Teorema 5. zaključujemo da je $a(\cdot, D)u \in \mathrm{H}^d$. Budući da zbog Leme 4. $\mathrm{H}^d$ sadrži samo neprekidne, omeđene funkcije, ta svojstva vrijede i za $a(\cdot, D)u$.

Analognim postupkom kao i u dokazu Teorema 1. funkciju $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}}(a(\cdot, D)u)$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju članova oblika $(\partial_{\boldsymbol{\gamma}}\partial^{\boldsymbol{\delta}} a)(\mathbf{x}, D)(x^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\delta}}\partial^{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}} u)(\mathbf{x})$, koji su neprekidne i omeđene funkcije iz istog razloga zbog kojeg je i $a(\cdot, D)u$. Na taj način smo pokazali da je $a(\cdot, D)u \in \mathcal{S}$.

Uzmimo sada $u \in \mathcal{S}'$. Imamo da je

$$D_{\boldsymbol{\alpha}}(a(\cdot, D)u) = b_{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot, D)u$$

za $b_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\sharp a \in S^{-\infty}$. Na osnovu Leme 3. zaključujemo da postoji $N \in \mathbf{N}_0$, takav da je $v(\mathbf{x}) := (1 + |2\pi\mathbf{x}|^2)^{-N} u \in \mathrm{H}^{-N}$. Stoga je

$$b_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, D)u = b_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}, D)\left((1 + |2\pi\mathbf{x}|^2)^N v\right) = \sum \frac{1}{\boldsymbol{\beta}!}\left(D_{\boldsymbol{\beta}}(1 + |2\pi x|^2)^N\right)(\partial^{\boldsymbol{\beta}} b_{\boldsymbol{\alpha}})(\mathbf{x}, D)v,$$

pri čemu je i nadalje $\partial^{\boldsymbol{\beta}} b_{\boldsymbol{\alpha}} \in S^{-\infty}$. Stoga je $(\partial^{\boldsymbol{\beta}} b_{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot, D)v) \in \mathrm{H}^d$, pa pomoću Leme 4. zaključujemo da je to neprekidna i omeđena funkcija. Kako je suma na desnoj strani gornje jednakosti konačna, zaključujemo da je $D_{\boldsymbol{\alpha}}(a(\cdot,D)u) = b_{\boldsymbol{\alpha}}(\cdot,D)u$ omeđeno, to jest $a(\cdot,D)u \in \mathcal{O}$.

Za dokaz pseudolokalnog svojstva uzmimo $a \in S^{\infty}$, $u \in \mathcal{S}'$ i definirajmo skup $\Omega := \mathbf{R}^d \setminus \operatorname{supp\,sing} u$. Tada za svaki $\psi \in \mathrm{C}_c^{\infty}(\Omega)$ vrijedi da je $\psi u \in \mathrm{C}_c^{\infty}$, te za $\phi \in \mathrm{C}_c^{\infty}(\Omega)$ možemo naći $\psi \in \mathrm{C}_c^{\infty}(\Omega)$ takav da je $\psi = 1$ na $\operatorname{supp}\phi$. Stoga vrijedi

$$\phi a(\cdot,D)u = \phi a(\cdot,D)(\psi u) + \phi a(\cdot,D)((1-\psi)u).$$

Prvi član na desnoj strani gornje jednakosti je u $\mathcal{S}$, zato što je $\psi u \in \mathcal{S}$. Drugi član se može zapisati u obliku $b(\cdot,D)u$, gdje je $b = \phi a \sharp (1-\psi)$ simbol reda $-\infty$, budući da su nosači funkcija $\phi$ i $1-\psi$ disjunktni. Na taj način smo dobili da je $\phi a(\cdot,D)u \in \mathrm{C}^{\infty}$ za sve $\phi \in \mathrm{C}_c^{\infty}(\Omega)$, iz čega slijedi da je $a(\cdot,D)u \in C^{\infty}(\Omega)$, odnosno $\operatorname{supp\,sing}(a(\cdot,D)u) \subseteq \operatorname{supp\,sing} u$.

Konačno, ukoliko je $a$ eliptičan, onda postoje $b \in S^{\infty}$ i $r \in S^{-\infty}$ takvi da je $u = b\sharp a(\cdot,D)u - r(\cdot,D)u$, pri čemu je $\operatorname{supp\,sing}(b\sharp a(\cdot,D)u) \subseteq \operatorname{supp\,sing}(a(\cdot,D)u)$ i $r(\cdot,D)u \in \mathcal{O}$, kao što je dokazano gore. Na osnovu toga smo dobili i drugu inkluziju, iz čega slijedi da je $\operatorname{supp\,sing} u = \operatorname{supp\,sing}(a(\cdot,D)u)$.

**Q.E.D.**

U psudodiferencijalnom računu važnu ulogu imaju komutatori. Komutator $[A,B]$ dvaju pseudodiferencijalna operatora $A$ i $B$ je operator definiran na sljedeći način

$$[A,B] = AB - BA.$$

Na osnovu asimptotičkog razvoja simbola za kompoziciju dvaju operatora (Teorem 2.), zaključujemo da je komutator operator za jedan nižeg reda od operatora $AB$ i $BA$. Ukoliko su operatori $A$ i $B$ pridruženi polihomogenim simbolima, čiji glavni dijelovi su $a \in S^m$ i $b \in S^l$, tada je glavni simbol komutatora $[A,B]$ dan Poissonovom zagradom

$$\sigma\left([A,B]\right) = \frac{1}{2\pi i}\{a,b\} := \frac{1}{2\pi i}\left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} b - \nabla_{\mathbf{x}} a \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} b\right),$$

i vrijedi da je $\{a,b\} \in S^{m+l-1}$.

# II. Definicija i osnovna svojstva H-mjera

# 1. Uvod

H-mjere, ili kako se još nazivaju, mikrolokalne defektne mjere su početkom devedesetih godina dvadesetog stoljeća nezavisno uveli Luc Tartar [T2] i Patrick Gérard [G1]. Kako su se najprije pojavile u vezi s nekim problemima iz homogenizacije, Tartar ih je nazvao H-mjerama. One su vrsta Radonovih mjera koje opisuju limes kvadratičnih izraza $\mathrm{L}^2$ funkcija. Preciznije, neka je $(u_n)$ omeđen niz u $\mathrm{L}^2$ koji konvergira slabo k $u$. Tada je $(u_n - u)^2$ omeđen u $\mathrm{L}^1$, stoga na podnizu konvergira slabo k pozitivnoj Radonovoj mjeri $\nu$. U slučaju jake konvergencije mjera $\nu$ je nul mjera. Na taj način, ona mjeri odstupanje slabe od jake konvergencije, te ju je stoga Gérard prozvao mikrolokalnom defektnom mjerom.

Za razliku od Youngovih mjera koje su indeksirane po $x$, H-mjere su indeksirane i po $x$ i po njenoj dualnoj varijabli u faznom prostoru $\xi$. Nasuprot Youngovim mjerama, koje daju samo statički opis titranja, važna primjena H-mjera proizlazi iz *prijenosnog svojstva* kojeg zadovoljavaju. To svojstvo omogućuje pridruživanje pojedinim sustavima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi posebne prijenosne jednadžbe koje opisuju ne samo širenje oscilacija, već i koncentracija.

Iako ne sadrži sve informacije koje u sebi nose Youngove mjere (ograničene su na računanje kvadratičnih izraza), mogu pomoći u provođenju određene vrste mikrolokanog računa s brojnom mogućnosti primjene. Posebno se to odnosi na računanje energije određenih sustava, budući da je, u pravilu, upravo ta veličina izražena kvadratičnim članovima.

# 2. Postojanje H-mjera

U ovom odjeljku navest ćemo teorem o postojanju H-mjera u njegovom najopćenitijem obliku kakvom ga je objavio Gérard 1991. godine. Prije iskaza glavnog teorema uvedimo oznake koje ćemo koristiti.

Sa $\Psi^m_{\mathrm{c}}$ označit ćemo prostor pseudodiferencijalnih operatora čija distribucijska jezgra ima kompaktan nosač u $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$. Naime, po Schwartzovom teoremu o jezgri (vidi [H], I) znamo da operator $A \in \Psi^m$ ima integralni oblik

$$(Au)(\mathbf{x}) = \int K_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

i pri tome je $K_A \in \mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d\right)$ distribucijska jezgra operatora. Tvrdnja da jezgra operatora $A$ ima kompaktan nosač je ekvivaletna postojanju funkcije $\chi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ takve da je $A = \chi A \chi$ (pri tom koristimo istu oznaku za operator množenja funkcijom $\chi$, kao i za samu funkciju).

Do jezgre $K_A$ pseudodiferencijalnog operatora se moglo doći i bez Schwartzovog teorema, isključivo raspisujući formulu kojom se definira djelovanje operatora na funkciju. Naime, znamo da je

$$(Au)(\mathbf{x}) = \int\!\!\int e^{2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\xi},$$

iz čega slijedi da je

$$K_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int e^{2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Lako se provjeri da je $K_A$ kompaktno nošen ako i samo ako su nosači pripadnog simbola $a$ u varijabli $\mathbf{x}$, te njegove Fourierove pretvorbe po drugoj varijabli kompaktni. Nadalje, vrijedi da je $\operatorname{supp} Au \subseteq \operatorname{supp}_{\mathbf{x}} a$. Zbog navedenih tvrdnji operator $A \in \Psi^m_{\mathrm{c}}$ se proširuje do operatora s $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{H}^{s-m}_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d)$. Također, operator negativnog reda $A \in \Psi^m_{\mathrm{c}}, m < 0$ je *kompaktan* u smislu da ako $u_k \rightharpoonup u$, $u_k, u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}$, tada $\|Au_k - Au\|_{\mathrm{H}^{s-m}} \to 0$. Pri tom kod pisanja slabe konvergencije u $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}$ imamo na umu činjenicu da su prostori $\mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ i $\mathrm{H}^{-s}_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d)$ dualni (v. [ES], I, str. 116. ).

Mi ćemo se posebno baviti prostorima $\Psi^m_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d; \mathcal{L}(H))$ i $\Psi^m_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d; \mathcal{K}(H))$, koji se sastoje od operatora čiji simboli poprimaju vrijednosti u $\mathcal{L}(H)$, odnosno $\mathcal{K}(H)$. Pri tom je s $\mathcal{L}(H)(\mathcal{K}(H))$ označen prostor omeđenih (kompaktnih) linearnih operatora na separabilnom Hilbertovom prostoru $H$. Uz ova dva prostora linearnih operatora važnu ulogu će nam igrati i prostor operatora s tragom $\mathcal{T}r(H)$, kojega ćemo sada definirati. U tu svrhu najprije uvedimo prostor Hilbert-Schmidtovih operatora $\mathcal{HS}(H)$ koji se sastoji od operatora iz $\mathcal{L}(H)$ sa svojstvom da za proizvoljne ortonormirane baze $(\phi_i), (\psi_j)$ u $H$ vrijedi

$$\sum |\langle A\phi_i \mid \psi_j \rangle|^2 = \sum \| A^*\psi_j \|^2 = \sum \| A\phi_i \|^2 < \infty.$$

Prostor $\mathcal{HS}(H)$ je Hilbertov sa skalarnim produktom definiranim relacijom

$$\langle A \mid B \rangle_{\mathcal{HS}} = \sum \langle A\phi_i \mid B\phi_i \rangle,$$

pri čemu je $(\phi_i)$ proizvoljni potpuni ortonormirani niz u $H$. Prostor $\mathcal{T}r(H)$ se kod raznih autora definira na različite načine. Tako se, na primjer, u [Z] on definira kao prostor svih operatora $A \in \mathcal{L}(H)$ takvih da

$$\mathsf{tr}A := \sum \langle A\phi_n \mid \phi_n \rangle < \infty.$$

Pri takvoj definiciji ne vrijedi da je $\mathcal{T}r(H) \subseteq \mathcal{HS}(H)$ (na primjer, uzmimo operator $A$ s potpunim ortonormiranim sustavom svojstvenih vektora $(u_n)$ i njima pridruženih svojstvenih vrijednosti $\lambda_n = \frac{1}{n}$). Definicija koju ćemo mi koristiti (a može se naći u [S] i [DS]) je sljedeća: operator $A$ je iz prostora $\mathcal{T}r$ ukoliko je jednak produktu dvaju Hilbert-Schmidtovih operatora. U tom slučaju dobro je definiran funkcional traga na $\mathcal{T}r$:

$$\mathsf{tr}A = \sum \langle A\phi_n \mid \phi_n \rangle,$$

pri čemu je $(\phi_n)$ proizvoljna ortonormirana baza u $H$, a red konvergira apsolutno. S obzirom da svi Hilbert-Schmidtovi operatori čine algebru u $\mathcal{L}(H)$, vrijedi da je $\mathcal{T}r(H) \subseteq \mathcal{HS}(H)$. Prostor $\mathcal{T}r(H)$ je normiran s normom zadanom relacijom

$$\| A \|_{\mathcal{T}r} = \mathsf{tr}((A^*A)^{\frac{1}{2}}).$$

Zato što su operatori konačnog ranga gusti i u $\mathcal{T}r(H)$ i $\mathcal{HS}(H)$ (u odgovarajućim normama), ulaganje $\mathcal{T}r(H) \hookrightarrow \mathcal{HS}(H)$ je gusto i neprekidno (vidi [S]). Mi ćemo koristiti činjenicu da je $\Big(\mathcal{T}r(H), \|\cdot\|_{\mathcal{T}r}\Big)$ dual prostora $\Big(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(H)}\Big)$, pri čemu je dualni produkt zadan relacijom

$${}_{\mathcal{T}r(H)}\langle A, B \rangle_{\mathcal{K}(H)} = \mathsf{tr}(AB)$$

(dokaz se može naći u [MV], str. 162.). Definicija dualnog produkta je dobra zato što je $\mathcal{T}r(H)$ (kao i $\mathcal{HS}(H)$) ideal u $\mathcal{L}(H)$.

Nastavljamo dalje s definicijama prostora koje ćemo koristiti. Za lokalno kompaktan, $\sigma$-kompaktan metrizabilan Hausdorffov topološki prostor $T$ označit ćemo s $\boldsymbol{\mathcal{M}}(T; \mathcal{T}r(H))$ prostor linearnih operatora $\mu : \mathrm{C}_c(T) \to \mathcal{T}r(H)$ koji zadovoljavaju svojstvo omeđenosti:

$$(\forall K \in \mathcal{K}(T))(\exists C_K > 0)(\forall \phi \in \mathrm{C}_c(K)) \qquad \|\mu(\phi)\|_{\mathcal{T}r(H)} \leqslant C_K \sup_{t\in K} |\phi(t)|.$$

Gornje svojstvo omeđenosti je ekvivalentno omeđenosti s obzirom na topologiju strogog induktivnog limesa na $\mathrm{C}_c(T)$. Nadalje, s $\boldsymbol{\mathcal{M}}_+(T;\mathcal{T}r(H))$ ćemo označiti podskup pozitivnih elemenata iz $\boldsymbol{\mathcal{M}}(T;\mathcal{T}r(H))$, tj. skup svih $\mu \in \boldsymbol{\mathcal{M}}(T;\mathcal{T}r(H))$ takvih da je za svaku nenegativnu funkciju $\phi \in \mathrm{C}_c(T)$, $\mu(\phi)$ pozitivni hermitski operator na $H$.

Prije iskaza glavnog teorema dokažimo dvije leme koje će nam trebati za njegov dokaz. Prva od njih u (a) dijelu sadrži poopćenje Gårdingove nejednakosti.

**Lema 1.** *Neka je* $(v_k)$ *niz u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d;H)$ *takav da* $v_k \rightharpoonup 0$.

**(a)** *Ako je* $A \in \Psi^0_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d;\mathcal{K}(H))$ *takav da* $\sigma_0(A) = a$ *poprima vrijednosti u skupu pozitivnih operatora, onda vrijede relacije:*

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{Im}\,{}_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}}\langle\, Av_k, v_k \,\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} = 0,$$

$$\liminf_{k\to\infty} \mathsf{Re}\,{}_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}}\langle\, Av_k, v_k \,\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} \geqslant 0.$$

**(b)** *Za svaki* $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ *postoji* $C > 0$ *takav da za svaki* $A \in \Psi^0_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d)$

$$(\mathrm{supp}_{\,\mathbf{x}}\sigma_0(A) \subseteq K) \Longrightarrow \left(\limsup_k |{}_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}}\langle\, Av_k, v_k \,\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}}| \leqslant C \sup_{\mathbf{R}^d\times \mathrm{S}^d} \|\sigma_0(A)\|_{\mathcal{L}(H)}\right).$$

Dem. **(a)** Neka je $\delta > 0$. Tada je $a + \delta \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathcal{L}(H))$ pozitivno definitan operator, pa ima korijen $b \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathcal{L}(H))$ koji je također pozitivno definitan. Nadalje, neka je $b' := b - \delta^{1/2} = a\left(\sqrt{a+\delta}+\sqrt{\delta}\right)^{-1}$. Budući da je $\mathcal{K}(H)$ ideal u $\mathcal{L}(H)$, slijedi da je $b' \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathcal{K}(H))$. Uvedimo pseudodiferencijalne operatore $B' \in \Psi(\mathbf{R}^d;\mathcal{K}(H)), \sigma_0(B') = b'$ i $B := \phi(\delta^{1/2} + B')$, pri čemu je $\phi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ i $\phi a = a$. Iz toga slijedi da je $\sigma_0(B) = \phi b$. Koristeći simbolički račun imamo

$$\sigma_0(B^*B) = \sigma_0(B^*)\sigma_0(B) = \phi^2 b^2 = \phi^2(a+\delta).$$

Na osnovu toga zaključujemo da je

$$B^*B = \phi^2\delta + A + R, \tag{1}$$

gdje je $R \in \Psi^{-1}_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d;\mathcal{L}(H))$. S druge strane, budući da je

$$\begin{aligned} B^*B - \phi^2\delta &= \phi^2(\delta^{1/2} + (B')^*)(\delta^{1/2} + B') - \phi^2\delta \\ &= \delta^{1/2}((B')^* + B') + (B')^*B', \end{aligned}$$

slijedi da je $R \in \Psi^{-1}_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d;\mathcal{K}(H))$.

Na osnovu (1) imamo

$$0 \leqslant \langle\, Bv_k \mid Bv_k \,\rangle = \langle(\phi^2\delta + A + R)v_k, v_k\rangle,$$

odakle rastavljanjem na realni i imaginarni dio dobijemo

$$\begin{aligned} &\mathsf{Re}\,\langle Av_k, v_k\rangle \geqslant -\delta\|\phi v_k\|^2 - \mathsf{Re}\,\langle Rv_k, v_k\rangle, \\ &\mathsf{Im}\,\langle Av_k, v_k\rangle = -\mathsf{Im}\,\langle Rv_k, v_k\rangle. \end{aligned}$$

Budući da je $R$ operator negativnog reda, $\|Rv_k\| \to 0$, pa zbog proizvoljnosti broja $\delta$ slijedi tvrdnja.

**(b)** Neka je $\chi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ takav da je $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$ i $A = \chi A \chi$, te uvedimo oznaku $S := \sup_{K\times \mathrm{S}^d} \|\sigma_0(A)\|_{\mathcal{L}(H)}$. Tada je $\sigma_0(\chi^2 S^2 - A^*A) = \chi^2 S^2 I - \sigma_0(A)^*\sigma_0(A)$. Budući da je

$$\begin{aligned}\langle \sigma_0(A^*)\sigma_0(A)v, v\rangle &\leqslant \|\sigma_0(A)\|_{\mathcal{L}(H)} \|\chi v\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant S^2 \|\chi v\|_{\mathrm{L}^2} = S^2 \langle\, \chi v \mid \chi v\,\rangle,\end{aligned}$$

to slijedi da operator $\chi^2 S^2 - A^*A$ ispunjava pretpostavke u (a). Zbog toga je

$$\liminf_k \langle(\chi^2 S^2 - A^*A)v_k, v_k\rangle \geqslant 0,$$

i.e.

$$\limsup_k \langle A^*A v_k, v_k\rangle \leqslant \liminf_k S^2 \|\chi v_k\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant CS^2,$$

iz čega slijedi tvrdnja.

**Q.E.D.**

**Lema 2.** *Neka je $A$ kompaktan operator na separabilnom Hilbertovom prostoru $H$. Tada vrijedi*

$$\|\, A - \pi_n A \pi_n \,\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0,$$

*pri čemu je $\pi_n$ ortogonalna projekcija na prvih $n$ vektora baze.*

Dem. Neka je $K = \mathrm{Cl}\Big(A(K(0,1))\Big)$. Po pretpostavci je to kompaktan skup, pa ga za svaki $n \in \mathbf{N}$ možemo pokriti s konačno mnogo kugala $\mathrm{K}(f_i^n, 1/n), i = 1, \dots, j_n$. Vektore $f_i^n$ možemo birati tako da je $\{f_1^m, \dots, f_{j_m}^m\} \subseteq \{f_1^n, \dots, f_{j_n}^n\}$ za $m < n$. Zbog toga u daljnjem tekstu izostavljamo pisanje gornjeg indeksa uz vektore $f_i$. Označimo s $G_n$ skup vektora $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_{j_n}\}$, pri čemu je $e_n$ ortonormirana baza prostora $H$. Označimo nadalje s $P_{G_n}$ projekciju na prostor razapet s $G_n$, te uzmimo proizvoljni $x \in \mathrm{K}(0,1)$. Za zadani $n \in \mathbf{N}$ tada postoji $f_i \in G_n$ takav da je

$$\|\, Ax - f_i \,\| < 1/n.$$

Posebno vrijedi

$$\|\, P_{G_n} Ax - P_{G_n} f_i \,\| = \|\, P_{G_n} Ax - f_i \,\| < 1/n.$$

Kombinirajući gornje dvije nejednakosti dobijemo

$$\|\, P_{G_n} Ax - Ax \,\| < 2/n, \qquad x \in \mathrm{K}(0,1).$$

Budući da je $\pi_n x \in K(0,1)$ za $x \in \mathrm{K}(0,1)$, te $\pi_n x \to x$ u $H$, to slijedi

$$\|\, P_{G_n} A\pi_n x - Ax \,\| \leqslant \|\, P_{G_n} A\pi_n x - A\pi_n x \,\| + \|\, Ax - A\pi_n x \,\| \to 0.$$

**Q.E.D.**

**Teorem 1. (postojanje H-mjera)** *Neka je $(v_k)$ niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d; H)$ takav da $v_k \rightharpoonup 0$. Tada postoji njegov podniz $(v_{k_j})$ i mjera $\mu \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_+(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d; \mathcal{T}r(H))$, takva da za svaki $A \in \Psi^0_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d; \mathcal{K}(H))$, vrijedi*

$$\lim_{j\to\infty} {}_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{c}}}\langle\, Av_{k_j}, v_{k_j}\,\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} = \int_{\mathbf{R}^d\times \mathrm{S}^d} \mathsf{tr}\Big(a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) d\mu(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\Big), \tag{2}$$

*pri čemu je $a = \sigma_0(A)$.*

Dem. Označimo s $D$ prebrojiv skup iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d)$, gust u $\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d)$. Neka su $\phi \in D$ i $\Phi \in \Psi_c^0(\mathbf{R}^d)$ takvi da je $\sigma_0(\Phi) = \phi$. Za svaki $k \in \mathbf{N}$ dobro je definiran funkcional na $\mathcal{K}(H)$:

$$K \mapsto \langle \Phi K v_k, v_k \rangle.$$

Taj niz funkcionala je omeđen i ekvineprekidan, pa po Arzelá-Ascolijevom teoremu zaključujemo da postoji element $\mu(\phi) \in (\mathcal{K}(H))' = \mathcal{T}r(H)$ takav da vrijedi

$$(3) \qquad (\forall K \in \mathcal{K}(H)) \qquad \lim \langle \Phi K v_{k_j}, v_{k_j} \rangle = \mathsf{tr}(K\mu(\phi)).$$

Zadnja relacija vrijedi za svaki $\tilde{\Phi}$ takav da je $\sigma_0(\tilde{\Phi}) = \phi$. Cantorovim dijagonalnim postupkom možemo postići da je podniz $(v_{k_j})$ isti za svaki $\phi \in D$. Na ovaj način konstruirali smo linearni operator

$$\mu : D \to \mathcal{T}r(H).$$

Želimo ga proširiti na $\tilde{D}$, vektorski prostor razapet elementima iz $D$ i $\bar{D}$, tako da (3) vrijedi za svaki $\tilde{\Phi}$, $\sigma_0(\tilde{\Phi}) = \phi \in \tilde{D}$. Budući da je

$$\lim_k \langle \bar{\phi} K v_k, v_k \rangle = \lim_k \overline{\langle \phi K^* v_k, v_k \rangle} = \overline{\mathsf{tr}(K^* \mu(\phi))} = \mathsf{tr}(K \mu(\phi)^*),$$

vidimo da je $\mu(\bar{\phi}) = \mu(\phi)^*$. Preslikavanje $\mu$ zatim možemo proširiti po linearnosti na $\tilde{D}$.

Pokažimo da je $\mu$ omeđen u topologiji induciranoj s $\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d)$. U tu svrhu pretpostavimo najprije da je $\phi$ realan i da zadovoljava $\phi \leqslant \alpha$, pri čemu je $\alpha \geqslant 0$. Za pozitivni operator $K \in \mathcal{K}(H)$, te $\Phi \in \Psi_c^0(\mathbf{R}^d)$ i funkciju $\theta \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ takvu da je $\theta\phi = \phi$ i $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, definirajmo operator $A := (\alpha\theta - \Phi)K$. Zbog toga što je glavni simbol $\sigma_0(A) = (\alpha\theta - \phi)K$ pseudodiferencijalnog operatora $A$ pozitivan operator, možemo iskoristiti Lemu 1.(a) na osnovu koje zaključujemo

$$\begin{aligned}
\mathsf{tr}(\mu(\phi)K) &= \lim_k \langle \Phi K v_k, v_k \rangle = \lim_k \mathsf{Re}\, \langle \Phi K v_k, v_k \rangle \\
&\leqslant \lim_k \mathsf{Re}\, \langle \alpha\theta K v_k, v_k \rangle \leqslant \lim_k \alpha \int_{\mathbf{R}^d} \langle\, \theta K v_k \mid v_k \,\rangle_H d\mathbf{x} \\
&\leqslant \alpha \lim_k \int_{\mathbf{R}^d} \theta \parallel K \parallel_{\mathcal{L}} \parallel v_k \parallel_H \, d\mathbf{x} \leqslant \alpha \parallel K \parallel_{\mathcal{L}} C,
\end{aligned}$$

pri čemu konstanta $C$ ovisi isključivo o $S = \operatorname{supp} \phi$. Uzimajući posebno $\alpha = \sup \phi$ imamo

$$\|\mu(\phi)\|_{\mathcal{T}r(H)} = \sup_{\|K\|_{\mathcal{L}(H)}=1} \mathsf{tr}(\mu(\phi)K) \leqslant \alpha C.$$

Na taj način je dokazana neprekidnost operatora $\mu$ na skupu funkcija s gore navedenim svojstvima. Rastavljanjem proizvoljne funkcije $\phi \in D$ na realni i imaginarni, te pozitivni i negativni dio, zaključujemo da je operator $\mu$ neprekidan na čitavom $\tilde{D}$. Na osnovu zadnje jednakosti zaključujemo da ukoliko niz funkcija $(\phi_n)$ u $\tilde{D}$ konvergira uniformno k nuli, tada $\|\mu(\phi)\|_{\mathcal{T}r(H)} \to 0$. Zbog toga, kao i gustoće prostora $\tilde{D}$, operator $\mu$ možemo proširiti do distribucije. Pri tom smo koristili činjenicu da je linearna forma na $\mathrm{C}_c^\infty$ distribucija ako i samo ako za niz glatkih funkcija $(\phi_n)$ koji konvergira k nul funkciji u topologiji strogog induktivnog limesa na $\mathrm{C}_c^\infty$, niz $|\langle T, \phi_n \rangle|$ konvergira k nuli (vidi [CD], str. 436.).

Budući da je $\mu$ distribucija reda 0 možemo je proširiti do funkcionala na $\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d)$, odnosno vrijedi $\mu \in \boldsymbol{\mathcal{M}}(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d; \mathcal{T}r(H))$. Preostaje pokazati da je $\mu \in M_+$, to jest da je za svaku nenegativnu funkciju $\phi \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d)$ operator $\mu(\phi)$ pozitivan. Hermitičnost se lako dokaže, jer znamo da za realnu funkciju $\phi$ vrijedi

$$\mu(\phi)^* = \mu(\bar{\phi}) = \mu(\phi).$$

Nadalje, budući da je $\mu(\phi)$ hermitski operator, to postoji ortonormirana baza $(e_n)$ u kojoj $\mu(\phi)$ ima dijagonalni prikaz. Definirajmo brojeve $\mu(\phi)_{jj} := \langle\, \mu(\phi)e_j \mid e_j\,\rangle$. Označimo s $I_n$ operator koji u matričnom prikazu na prvih $n$ dijagonalnih mjesta ima jedinice, dok su ostali elementi nule. Tada koristeći Lemu 1.(a) zaključujemo

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(\phi)_{j,j} = \mathsf{tr}(\mu(\phi)I_n) = \lim_k \langle \phi I_n v_k, v_k\rangle \geqslant 0.$$

Na osnovu toga zaključujemo da je $\mu(\phi)_{jj} \geqslant 0$ za svaki $j$, odnosno da je $\mu(\phi)$ pozitivan operator.

Preostaje nam još dokazati relaciju (2). Po Rieszovom teoremu reprezentacije prostor pozitivnih linearnih funkcionala na $\mathrm{C}_c(X)$, pri čemu je $X$ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor, je izomorfan prostoru Radonovih mjera na $X$. Stoga operator $\mu(\phi)$ možemo zapisati u obliku

$$\mu(\phi) = \int_{\mathbf{R}^d\times \mathrm{S}^d} \phi d\mu,$$

pri čemu $d\mu$ označuje matričnu Radonovu mjeru. Zbog (3) slijedi da teorem vrijedi za pseudodiferencijalne operatore oblika $A = \Phi K$, pri čemu je $K$ pozitivan i kompaktan operator, a $\Phi \in \Psi^0_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d)$.

Uzmimo sada proizvoljan operator $A \in \Psi^0_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d; \mathcal{K}(H)), a = \sigma_0(A)$. Fiksirajmo zatim ortonomiranu bazu u $H$ i sa $\pi_n$ označimo ortogonalnu projekciju na vektorski prostor razapet s prvih $n$ vektora baze. Na osnovu Leme 2. zaključujemo da

$$\sup_{\mathbf{R}^d\times \mathrm{S}^d} \|\, a - \pi_n a \pi_n \,\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0. \tag{4}$$

S druge strane, primijenivši Lemu 1.(b), za operator $B \in \Psi^0_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d; \mathcal{K}(H))$ dobivamo

$$\limsup_k |\langle Bv_k, v_k\rangle| \leqslant C \sup_{\mathbf{R}^d\times \mathrm{S}^d} \|\, \sigma_0(B) \,\|_{\mathcal{L}(H)},$$

pri čemu konstanta $C$ ovisi o $\operatorname{supp} \sigma_o(B)$. Posebno, uvrštavajući operatore $B_n = A - \pi_n A \pi_n$ u zadnju nejednakost i koristeći (4) dobivamo

$$\limsup_k |\langle (A - \pi_n A \pi_n) v_k, v_k\rangle| \to 0.$$

Također, zbog (4) neposredno slijedi

$$\int_{\mathbf{R}^d\times \mathrm{S}^d} \mathsf{tr}((a - \pi_n a \pi_n)\, d\mu) \to 0.$$

Operator $\pi_n A \pi_n$ je konačna linearna kombinacija operatora oblika $\Phi K; \Phi \in \Psi^0_{\mathrm{c}}, K \in \mathcal{K}(H)$, pa za njega vrijedi relacija (2). Stoga je

$$\begin{aligned}
\limsup_k \langle Av_k, v_k\rangle &= \lim_n \limsup_k \Big( \langle (A - \pi_n A \pi_n) v_k, v_k\rangle + \langle \pi_n A \pi_n v_k, v_k\rangle \Big) \\
&= \lim_n \int_{\mathbf{R}^d\times \mathrm{S}^d} \mathsf{tr}(\pi_n A \pi_n\, d\mu) = \int_{\mathbf{R}^d\times \mathrm{S}^d} \mathsf{tr}(a\, d\mu).
\end{aligned}$$

**Q.E.D.**

**Definicija.** Mjera $\mu$ iz prethodnog teorema se zove *mikrolokalna defektna mjera* ili *H-mjera.*

Naravno, Teorem 1. se može proširiti i na $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$ nizove čiji je slabi limes različit od nule, to jest, ako vrijedi $v_k \rightharpoonup v \neq 0$. U tom slučaju konvergencija (2) prelazi u

$$\lim_{j\to\infty} {}_{\mathrm{L}^2_c}\langle A(v_{k_j} - v), v_{k_j} - v \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} = \int_{\mathbf{R}^d\times\mathrm{S}^d} \mathsf{tr}\Big(a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\mu(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\Big). \tag{5}$$

**Definicija.** Kažemo da je slabo konvergentan niz $(v_k)$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d;H)$ *čist* ako relacija (5) vrijedi za svaki njegov podniz, i.e. ako postoji $\mu \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_+(\mathbf{R}^d\times\mathrm{S}^d;\mathcal{T}r(H))$ takva da za svaki $A\in\Psi^0_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d;\mathcal{K}(H))$ vrijedi

$$\lim_k\langle A(v_k - v), v_k - v\rangle = \int_{\mathbf{R}^d\times\mathrm{S}^d} \mathsf{tr}\left(\sigma_0(A)(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\mu(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right),$$

pri čemu je $v$ njegov slabi limes.

Ukoliko je $(u^i_k)$ niz $i$-tih koordinata vektora $u_k$ i $A\in\Psi^0_{\mathrm{c}}(\mathbf{R}^d)$, čiji je pripadni glavni simbol skalarna funkcija, onda je

$$\langle Au^i_k, u^j_k\rangle \to \int \sigma_0(A)(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\mu_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), \tag{6}$$

pri čemu je $\mu_{ij}$ matrični element H-mjere $\mu$ pridružene nizu $(u_k)$.

**Korolar 1.** *Neka su $K_i\in\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ takvi da je $\operatorname{supp} u^i_k \subseteq K_i$. Tada je nosač mjere $\mu_{ij}$ sadržan u skupu $(K_i\cap K_j)\times\mathrm{S}^d$.*

Dem. Uzmimo $A\in\Psi^0$ takav da je $\sigma_0(A) = a(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\xi})$ i $\operatorname{supp} a\subseteq (K_i\cap K_j)$. Tada vrijedi

$$\langle Au^i_k \mid u^j_k\rangle = \langle \big(b\hat{u}^i_k\big)^{\check{}} \mid au^j_k\rangle = 0.$$

Stoga je $\int a(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\xi})d\mu_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \lim_k\langle Au_k \mid u_k\rangle = 0$. Tvrdnja sada slijedi zbog gustoće funkcija oblika $a(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\xi})$ u prostoru $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d\times\mathrm{S}^d)$.

**Q.E.D.**

**Korolar 2.** *Ako $u^i_k\overline{u}^j_k$ konvergira vague k $\nu_{ij}$, onda za svaku funkciju $\phi\in\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$ vrijedi $\langle\nu_{ij},\phi\rangle = \langle\mu_{ij},\phi\otimes 1\rangle$.*

Dem. Neka je $A\in\Psi^0$ takav da je $\sigma_0(A) = \phi(\mathbf{x})\in\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$. Tada vrijedi

$$\langle Au^i_k, u^j_k\rangle = \langle\phi u^i_k, u^j_k\rangle \to \int_{\mathbf{R}^d}\phi d\nu_{ij}.$$

S druge strane, po definiciji H-mjere, vrijedi $\langle Au^i_k, u^j_k\rangle\to\langle\mu_{ij},\phi\otimes 1\rangle$.

**Q.E.D.**

## 3. Primjeri H-mjera

Razmotrimo najprije najjednostavniji, skalarni slučaj, to jest, neka je $H = \mathbf{C}$. Tada je $\mu$ pozitivna Radonova mjera na $\mathbf{R}^d\times\mathrm{S}^d$. Nakon iskaza dviju pomoćnih lema (dokazi se mogu naći u [AG], str. 57. i [St], str. 341.) slijedi teorem u kojem su dani primjeri nizova za koje se H-mjera može eksplicitno izračunati.

**Lema 3.** **(Formula stacionarne faze)** *Neka je* $u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d), a \in S^m$ *i* $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ *takav da je za svaki* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, $\nabla\psi(\mathbf{x}) \neq 0$. *Tada je za svaki* $\lambda \geqslant 1$

$$a(\mathbf{x}, D)(ue^{2\pi i\lambda\psi})(\mathbf{x}) = e^{2\pi i\lambda\psi(\mathbf{x})}I(\mathbf{x}, \lambda).$$

*gdje funkcija* $I(\mathbf{x}, \lambda)$ *ima za* $\lambda \to \infty$ *asimptotički razvoj lokalno uniforman po* $\mathbf{x}$

$$I(\mathbf{x}, \lambda) \sim \sum_{\boldsymbol{\alpha}\geqslant 0} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!}\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \left(e^{2\pi i\lambda r(\mathbf{y})}u(\mathbf{y})\right)\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} D^{\boldsymbol{\alpha}}a(\mathbf{x}, \lambda\nabla\psi(\mathbf{x})),$$

*dok je* $r(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}) - \psi(\mathbf{x}) - \nabla\psi(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})$. ∎

**Lema 4.** *Neka su* $\phi, \psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ *, pri čemu* $\phi$ *nema kritične točke u nosaču funkcije* $\psi$. *Tada je za svaki* $N \geqslant 0$

$$M(\lambda) := \int e^{2\pi i\lambda\phi(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = O(\lambda^{-N}),$$

*za* $\lambda$ *dovoljno velik.* ∎

**Teorem 2.** *Neka* $\epsilon_k \searrow 0$, *te neka je* $U \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^r)$ *i* $\phi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^r$ $\mathrm{C}^\infty$ *submerzija (i.e.* $\nabla\phi$ *je u svakoj točki surjektivni operator). Definirajmo niz funkcija*

$$u_k(\mathbf{x}) = U\left(\mathbf{x}, \frac{\phi(\mathbf{x})}{\epsilon_k}\right)\epsilon_k^{-s}.$$

**(i)** *Ako je* $U$ $[0, 1\rangle^r$*-periodična funkcija s obzirom na drugu varijablu i* $s = 0$, *onda je niz* $(u_k)$ *čist i pripadna H-mjera je*

$$\mu = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^r\setminus\{0\}} |\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{p})|^2\delta_{\boldsymbol{\xi}}\left(\frac{\nabla(\mathbf{p}\cdot\phi(\mathbf{x}))}{|\nabla(\mathbf{p}\cdot\phi(\mathbf{x}))|}\right)d\mathbf{x},$$

*pri čemu je* $\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ *Fourierova transformacija funkcije* $U$ *po drugoj varijabli.*
**(ii)** *Pretpostavimo da je* $s = r/2$ *i da za svaki kompaktni skup* $K \subset \mathbf{R}^d$ *vrijedi*

$$\int_{\mathbf{R}^r} \sup_{\mathbf{x}\in K} |U(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})|^2 d\boldsymbol{\theta} < \infty. \tag{7}$$

*Tada je* $(u_k)$ *čist niz i pripadna H-mjera je zadana relacijom*

$$\mu = \int_{\mathbf{R}^r} |\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2\delta_{\phi(\mathbf{x})}\delta_{\boldsymbol{\xi}}\left(\frac{\nabla(\mathbf{y}\cdot\phi(\mathbf{x}))}{|\nabla(\mathbf{y}\cdot\phi(\mathbf{x}))|}\right)d\mathbf{y}d\mathbf{x},$$

*pri čemu je* $\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *Fourierova transformacija funkcije* $U$ *po drugoj varijabli.*

Dem. **(i)** Zbog gustoće možemo pretpostaviti da je $U \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^r)$. Koristeći Fourierov razvoj možemo pisati

$$U(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{p})e^{2\pi i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\theta}}.$$

Budući da red na desnoj strani konvergira lokalno uniformno, možemo funkciju $U$ aproksimirati konačnom sumom članova oblika $\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{p})e^{2\pi i\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\theta}}$, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv 0$ osim za konačno mnogo $\mathbf{p} \in \mathbf{Z}^r$. Stoga je

$$u_k(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{p})e^{2\pi i\mathbf{p}\cdot\phi(\mathbf{x})/\epsilon_k}.$$

Koristeći Lemu 4. zaključujemo da $e^{2\pi i\mathbf{p}\cdot\phi(\mathbf{x})/\epsilon_k} \rightharpoonup 0$ za $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, iz čega slijedi da $u_k \rightharpoonup \hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \equiv 0$.

U sljedećem koraku koristimo formulu stacionarne faze (Lema 3.), kako bismo dobili asimptotički razvoj za $Au_k$. Budući da H-mjeru niza $(u_k)$ određuje limes $\langle Au_k, u_k\rangle$, ne zanimaju nas oni članovi asimptotičkog razvoja koji teže jako k nuli. Kako su diferencijalni operatori kompaktni na $\mathrm{L}^2$ možemo u formuli stacionarne faze zanemariti članove uz $\boldsymbol{\alpha} > \mathsf{0}$. Na taj način dobijemo

$$Au_k(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^r\setminus\{0\}} \hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) e^{2\pi i\mathbf{p}\cdot\phi(\mathbf{x})/\epsilon_k} a(\mathbf{x}, \nabla(\mathbf{p}\cdot\phi(\mathbf{x}))$$

u smislu da obje strane imaju isti limes u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$. Koristeći opet da za $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ vrijedi $e^{2\pi i\mathbf{p}\cdot\phi(\mathbf{x})/\epsilon_k} \rightharpoonup 0$, zaključujemo da

$$\langle Au_k, u_k\rangle \rightharpoonup \int \sum_{\mathbf{p}\in\mathbf{Z}^r\setminus\{0\}} |\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{p})|^2 a\Big(\mathbf{x}, \nabla(\mathbf{p}\cdot\phi(\mathbf{x}))\Big) d\mathbf{x},$$

što dokazuje tvrdnju.

**(ii)** Kao i u prvom slučaju možemo pretpostaviti da je $U \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^r)$, te da $\hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ima kompaktan nosač po $\mathbf{y}$. Zbog pretpostavke (7) $u_k \rightharpoonup 0$. Koristeći da je $\mathcal{F}\left(e^{2\pi i\mathbf{h}\cdot\mathbf{x}}\right) = \delta_{\mathbf{h}}$ zaključujemo:

$$\begin{aligned} \epsilon_k^{-r}\overline{U\left(\mathbf{x}, \frac{\phi(\mathbf{x})}{\epsilon_k}\right)} e^{2\pi i\mathbf{y}\cdot\frac{\phi(\mathbf{x})}{\epsilon_k}} &= \int e^{2\pi i\mathbf{z}\cdot\phi(\mathbf{x})} \hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y} - \epsilon_k\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &\xrightharpoonup{vague} \hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\delta_{\phi(\mathbf{x})}. \end{aligned} \tag{8}$$

Pomoću formule stacionarne faze i zaključivanja kao u dokazu prvog dijela teorema dobijemo da

$$A\left(U\left(\mathbf{x}, \frac{\phi(\mathbf{x})}{\epsilon_k}\right)\right) \sim \int \hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) a(\mathbf{x}, \nabla(\mathbf{y}\cdot\phi(\mathbf{x})) e^{2\pi i\mathbf{y}\cdot\frac{\phi(\mathbf{x})}{\epsilon_k}} d\mathbf{y} \tag{9}$$

u smislu da obje strane imaju isti limes u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$.

Konačno,

$$\langle au_k, u_k\rangle \sim \int\int \hat{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) a\Big(\mathbf{x}, \nabla(\mathbf{y}\cdot\phi(\mathbf{x}))\Big) e^{2\pi i\mathbf{y}\cdot\frac{\phi(\mathbf{x})}{\epsilon_k}} \overline{U\left(\mathbf{x}, \frac{\phi(\mathbf{x})}{\epsilon_k}\right)} \epsilon_k^{-r} d\mathbf{y} d\mathbf{x},$$

pa tvrdnja slijedi iz relacija (9) i (8).

**Q.E.D.**

Prethodni primjeri su ilustrativni jer daju strukturu H-mjere u dvije standardne situacije kad slabo konvergentan niz ne konvergira jako: slučajevi oscilacije i koncentracije.

Razmotrimo sada općeniti konačnodimenzionalni slučaj. Neka je $H = \mathbf{C}^r$, tada je $\boldsymbol{\mu}$ $r \times r$ pozitivna matrica Radonovih mjera.

Ukoliko je $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, na osnovu relacije (6) imamo da

$$\langle au_k^i, u_k^i\rangle \to 0, \quad a \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d),$$

iz čega slijedi $\mathsf{u}_k \to \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$. Zaključujemo da je pripadna H-mjera niza $(\mathsf{u}_k)$ jednaka nuli ako i samo ako niz konvergira jako k nuli.

Naravno, u beskonačnodimenzionalnom slučaju ovakav zaključak ne vrijedi. Tada $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ne povlači relativnu kompaktnost niza $(u_n)$ već slabije svojstvo koje ćemo sada opisati.

**Definicija.** Niz $(u_k) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; H)$ je *relativno kompaktan modulo* $H$ ako je za svaki $h \in H$, niz $(\langle\, u_k \mid h\,\rangle)$ relativno kompaktan u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Lako se vidi da u slučaju relativne kompaktnosti modulo $H$ niza $(u_k)$, niz $(\langle\, u_k \mid h\,\rangle)$ konvergira k $\langle\, u \mid h\,\rangle$, pri čemu je $u$ slabi limes niza $(u_k)$.

U slučaju da je niz $(u_k)$ čist s H-mjerom $\mu$, tada je $(\langle\, u_k \mid h\,\rangle)$ čist s H-mjerom $\langle\, \mu h \mid h\,\rangle$. To se lako vidi iz sljedeće relacije

$$\lim \langle A\langle\, u_k \mid h\,\rangle, \langle\, u_k \mid h\,\rangle\rangle = \lim \sum_{i,j} \bar{h}_i h_j \langle A u_k^i, u_k^j\rangle = \sum_{i,j} \bar{h}_i h_j \int a\, d\mu_{i,j} = \int a \langle\, \mu h \mid h\,\rangle.$$

Zamjena limesa i sume u gornjoj relaciji je valjana zato što je $A$ kompaktan operator i može se aproksimirati nizom operatora $(\pi_n A \pi_n)$ (Lema 2.).

Sada zaključujemo da je niz $(u_k)$ relativno kompaktan modulo $H$ ako i samo ako je za svaki $h \in H \quad \langle\, \mu h \mid h\,\rangle = 0$, to jest ako i samo ako je $\mu = 0$.

Vidimo da se u konačnodimenzionalnom slučaju relativna kompaktnost modulo $H$ svodi na uobičajenu relativnu kompaktnost.

U sljedećem primjeru ćemo poopćiti gornja razmatranja na diferencijalne operatore s neglatkim simbolima. Neka su $H$ i $H^*$ separabilni Hilbertovi prostori. Za $m \in \mathbf{N}$ definiramo diferencijalni operator $P : \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; H) \to \mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega; H^*)$ formulom

$$Pu(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha (a_\alpha(\mathbf{x}) u(\mathbf{x})),$$

pri čemu su $a_\alpha \in \mathbf{C}(\Omega; \mathcal{L}(H; H^*))$.

Ako s $E_{-m}$ označimo pseudodiferencijalni operator na $\Omega$, s glavnim simbolom $|\boldsymbol{\xi}|^{-m}$, tada operator $E_{-m}P$ djeluje s $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; H)$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; H^*)$. Označimo nadalje s $p$ glavni simbol operatora $P$, zadan relacijom

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha| = m} \boldsymbol{\xi}^\alpha a_\alpha(\mathbf{x}).$$

**Teorem 3.** *Neka je $(u_k)$ čist niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; H)$, s pripadnom H-mjerom $\mu$. Tada je $(E_{-m}Pu_k)$ čist niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; H^*)$, s pripadnom H-mjerom*

$$\mu^* = p \mu p^*.$$

Dem. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da $u_n \rightharpoonup 0$. Za $A \in \Psi^0_{\mathrm{c}}(\Omega; \mathcal{K}(H^*))$ vrijedi

$$\langle A E_{-m} P u_k, E_{-m} P u_k \rangle = \langle P^* E^*_{-m} A E_{-m} P u_k, u_k \rangle. \tag{10}$$

Koristeći aproksimaciju glatkim funkcijama bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_\alpha \in \mathrm{C}^\infty(\Omega; \mathcal{L}(H; H^*))$.

Budući da je $\mathcal{K}(H)$ ideal, korištenjem pseudodiferencijalnog računa imamo da je

$$A^\sharp = P^* E^*_{-m} A E_{-m} P \in \Psi^0_{\mathrm{c}}(\Omega; \mathcal{K}(H^*)),$$

s glavnim simbolom

$$a^\sharp(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = p(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})^*\sigma_0(A)p(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), \quad (\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d.$$

Koristeći definicju H-mjera, imamo da desna strana u (10) konvergira k

$$\int \mathsf{tr}\Big(p(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})^*\sigma_0(A)p(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\mu(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\Big).$$

Rezultat slijedi zbog $\mathsf{tr}(qr) = \mathsf{tr}(rq)$.

**Q.E.D.**

Iz dokaza teorema jasno je da on vrijedi i za općeniti pseudodiferencijalni operator reda 0, a ne samo za diferencijalni operator. Međutim, važnost ovog rezultata je u glatkoći koeficijenata diferencijalnog operatora. Naime, traži se samo njihova neprekidnost, a ne i glatkoća, koja se zahtijevala za simbole iz klasa $S^m$.

Sljedeći rezultat je poopćenje Korolara 1. o nosaču H-mjera. Koristeći linearne jednadžbe sačuvanja može se preciznije odrediti nosač H-mjere u $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d$.

**Korolar 3. (Lokalizacijsko svojstvo)** *Neka je $(u_k)$ čisti niz u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; H)$, s pripadnom H-mjerom $\mu$. Pretpostavimo da postoji gusti podskup $D$ od $H^*$ takav da, za svaki $h \in D$, niz $(\langle\, Pu_k \mid h\,\rangle)$ je relativno kompaktan u $\mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Tada je*

$$p\mu = 0,$$

*drugim riječima, nosač H-mjere $\mu$ je sadržan u skupu na kojem je $p$ singularno.*

Dem. Budući da je $(Pu_k)$ omeđen niz u $\mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega; H^*)$, slijedi da je $(\langle\, Pu_k \mid h\,\rangle)$ relativno kompaktan niz u $\mathrm{H}^{-m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ za svaki $h \in H^*$.

Stoga je niz $(\langle\, E_{-m}Pu_k \mid h\,\rangle)$ relativno komapktan modulo $H^*$, što je ekvivalentno tvrdnji da je njemu pridružena H-mjera $\mu^* = \mathbf{0}$. Po prethodnom teoremu slijedi da je

$$p\mu p^* = \mathbf{0}.$$

Budući da je $\mu$ hermitska, vrijedi da je $(p\mu^{1/2})(\mu^{1/2}p^*) = (p\mu^{1/2})(p\mu^{1/2})^*$. Kako je $Im(A^*) = Ker(A)^\perp$, zaključujemo da je $(p\mu^{1/2}) = \mathbf{0}$, što povlači tvrdnju.

**Q.E.D.**

## 4. Tartarov pristup

Najprije ćemo navesti bez dokaza Tartarov teorem o postojanju H-mjera iz 1990. godine [T2].

**Teorem 4. (postojanje H-mjera)** *Neka je $(\mathsf{u}_n)$ niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)$, takav da $\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \mathsf{0}$. Tada postoji podniz (označimo ga istim indeksom) i kompleksna matrična Radonova mjera $\boldsymbol{\mu}$ na produktu $\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^{d-1}$ takva da, za svaki izbor funkcija $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ i $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^{d-1}; \mathbf{C})$, vrijedi*

$$\begin{aligned}\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}\Big(\varphi_1\mathsf{u}_n\Big) \otimes \mathcal{F}\Big(\varphi_2\mathsf{u}_n\Big)\psi\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\,d\boldsymbol{\xi} &= \langle \boldsymbol{\mu}, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi\rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^d\times\mathrm{S}^{d-1}} \varphi_1(\mathbf{x})\bar{\varphi}_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\,.\end{aligned} \tag{11}$$

*Mjeru $\boldsymbol{\mu}$ nazivamo* H-mjerom *pridruženom (pod)nizu $(\mathsf{u}_n)$.* ∎

Tartara je zanimala praktična primjena H-mjera na diferencijalne jednadžbe s koeficijentima minimalne glatkoće. Stoga je uveo novu klasu simbola, kao i njima pridružene operatore, na sljedeći način.

Neka su $a \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^d)$ i $b \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$ neprekinute funkcije. Pridružimo im operatore $A$ i $B$ na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ zadane izrazima:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(A\mathsf{u})(\boldsymbol{\xi}) &:= a\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big)\hat{\mathsf{u}}(\boldsymbol{\xi}) \ \ (\text{ss } \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}) \\
B\mathsf{u}(\mathbf{x}) &:= b(\mathbf{x})\mathsf{u}(\mathbf{x}) \ \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d) \ .
\end{aligned} \tag{12}
$$

Operatori $A$ se naziva *množiteljem*, dok je $B$ operator *množenja*. Oba operatora su omeđeni na $\mathrm{L}^2$ s normama $\|a\|_{\mathrm{L}^\infty}$ i $\|b\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Pomoću njih ćemo definirati klasu *pseudodiferencijalnih* operatora reda 0. Najprije definirajmo *dopustivi simbol* kao funkciju $P \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d)$ koja se može zapisati u obliku

$$
P := \sum_k b_k \boxtimes a_k \ , \tag{13}
$$

pri čemu su $a_k \in \mathrm{C}(\mathrm{S}^d)$ i $b_k \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, te vrijedi sljedeći uvjet ograničenosti:

$$
\sum_k \|a_k\|_\infty \|b_k\|_\infty < \infty \, . \tag{14}
$$

Kažemo da operator $L \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$ ima dopustiv simbol $P$ ukoliko može biti prikazan u obliku sume $L = L_0 + C$, pri čemu vrijedi

$$
L_0 := \sum_k A_k B_k \ , \qquad C \in \mathcal{K}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)) \ ,
$$

gdje su operatori $A_k$ i $B_k$ pridruženi funkcijama $a_k$ i $b_k$ kao ranije. Operator $L_0$ nazivamo *standardnim operatorom* pridruženim simbolu $P$.

Operator $L_0$ zadovoljava

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(L_0 u)(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_k a_k\Big(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} b_k(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} P\Big(\mathbf{x}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big) u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \ ,
\end{aligned}
$$

pri čemu je $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ proizvoljna funkcija. Odavde slijedi da je operator $L_0$ dobro definiran, u smislu da ne ovisi o izboru reprezentacije simbola $P$ s pomoću (13).

Analogno možemo promatrati operator $L_1 := \sum_k B_k A_k$, pri čemu su $A_k$ i $B_k$ isti kao iz rastava standardnog operatora $L_0$. Lako se vidi da za $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d) \cap \mathcal{F}(\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d))$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
L_1 u(\mathbf{x}) &= \sum_k b_k(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} a_k\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} P\left(\mathbf{x}, \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.
\end{aligned}
$$

Postupak pridruživanja operatora simbolu zove se *kvantizacija*. U ovom odjeljku smo istom simbolu $P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ pridružili različite operatore $L_0$ i $L_1$. Operator $L_1$ dobijen je *Kohn-Nirenbergovom kvantizacijom*, koja simbolu $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ pridružuje operator

$$
a(\mathbf{x}, D)u(\mathbf{x}) = \int e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}
$$

na način kojim je to napravljeno u prvom poglavlju. Operator $L_0$ dobiven je, pak, *adjungiranom kvantizacijom*, definiranom relacijom

$$a^{Ad}(\mathbf{x},D)u(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi}} a(\mathbf{y},\boldsymbol{\xi})u(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\boldsymbol{\xi},$$

odnosno,

$$\mathcal{F}\left(a^{Ad}(\cdot,D)u\right)(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}\left(a(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})u(\mathbf{x})\right).$$

Pri tom vrijedi da je razlika operatora pridruženih istom simbolu različitim kvantizacijama kompaktan operator, što nam daje slobodu u izboru kvantizacije. To je ujedno poopćenje sljedeće leme koju ovdje navodimo bez dokaza ([T2]).

**Lema 5. (prva komutacijska lema)** *Komutator $C := [A,B] = AB - BA$ je kompaktan operator na prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.* ∎

Razmotrimo malo pobliže novouvedenu klasu simbola i operatora. Na prvi pogled reklo bi se da nova klasa simbola predstavlja poopćenje klase $S^0$ uvedene ranije, obzirom da se ovdje radi o simbolima koji su samo neprekidni. Međutim, zahtjev (14) znatno ograničava uvedenu klasu. Naime, razmotrimo simbol $\sum b_n(\mathbf{x})a_n(\boldsymbol{\xi})$ pri čemu su $b_n, a_n \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathrm{S}^d)$, te za $i \neq j$ vrijedi $\operatorname{supp} b_i \cap \operatorname{supp} b_j = \operatorname{supp} a_i \cap \operatorname{supp} a_j = \emptyset$. Postignemo li još uz to da je $(\forall n \in \mathbf{N})\ \sup_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}} |a_n(\boldsymbol{\xi})b_n(\mathbf{x})| = \frac{1}{n}$, dobili smo simbol koji je u klasi $S^0$ (budući da je omeđen i beskonačno gladak), ali ne ispunjava zahtjev (14).

U tu svrhu uzmimo realne funkcije $a \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}), b \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})^2$ takve da je $\operatorname{supp} a \subseteq [0,1]$,
$\operatorname{supp} b \subseteq [0,1]\times[0,1]$, te $\sup|a| = \sup|b| = 1$. Definirajmo niz funkcija

$$b_n(\mathbf{x}) := nb\left(\frac{1}{n}\Big(x_1 - \sum_1^{n-1} j, x_2 - \sum_1^{n-1} j\Big)\right),$$

$$a_n(\xi) = \frac{1}{n^2}a\left(n^2\Big(p(\xi) - \sum_1^{n-1}\frac{1}{j^2}\Big)\right),$$

pri čemu je s $p$ označena spektralna projekcija sfere $\mathrm{S}^1$ na pravac. Funkcija $\sum a_n b_n$ pripada klasi $S^0$, ali je $\sum \|a_n\|_\infty \|b_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n} = \infty$. Na taj način smo dokazali da se novouvedena klasa simbola i klasa $S^0$ međusobno nalaze u općem položaju.

Tartar u svom članku pretpostavlja da je niz $(u_n)$ kojem određuje H-mjeru iz prostora $\mathrm{L}^2$, dok je Gérard uzimao $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$ nizove. Budući da H-mjera predstavlja *vague* limes niza $(u_n)$, ona je u Tartarovom slučaju omeđena Radonova mjera, dok u drugom pristupu omeđenost izostaje. Stoga je Gérard trebao jači zahtjev na simbole operatora, to jest morao je uzeti simbole s kompaktnim nosačem, kako bi dualni produkt $\langle a,\mu\rangle$ bio dobro definiran.

## 5. Prijenosna svojstva H-mjera

U ovom odjeljku ćemo statičkom lokalizacijskom svojstvu H-mjera (Korolar 3.) pridodati dinamičko svojstvo njihovog širenja. Izvest ćemo diferencijalnu jednadžbu koju H-mjera zadovoljava u dva posebna primjera: skalarnu jednadžbu prvog reda i valnu jednadžbu. Koristeći parcijalnu integraciju iz nje se dobije prijenosna jednadžba za H-mjeru, koja će nam biti polazna točka za razmatranja u sljedećem poglavlju.

Za dokaz prijenosnog svojstva, Tartar je trebao neke elemente iz teorije pseudodiferencijalnih operatora. Budući da nije koristio glatke simbole, to nije mogao koristiti klasičnu teoriju predstavljenu u prvom poglavlju, nego je ad hoc uveo dodatne zahtjeve na simbole, koji su mu omogučili dokaz potrebnih svojstava za operatore uvedene u prethodnom odjeljku.

U tu svrhu, najprije je za $m \in \mathbf{N}_0$ uveo vektorski prostor $X^m(\mathbf{R}^d)$, koji se sastoji od svih funkcija sa svojstvom da sve njihove derivacije do reda $m$ pripadaju prostoru $\mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$, to jest, njihova Fourierova pretvorba je $\mathrm{L}^1$ funkcija. Lako se vidi da je $X^m(\mathbf{R}^d)$ vektorski prostor, te da je s

$$\|w\|_{X^m} := \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^m)|\mathcal{F}w(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi} \;,$$

dana norma na $X^m(\mathbf{R}^d)$. Budući da je $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ konvolucijska algebra, to je $\mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ algebra s obzirom na množenje funkcija, pa zbog Newton-Leibnitzove formule za derivaciju produkta slijedi da je to i $X^m(\mathbf{R}^d)$. U sljedećoj su lemi navedena neka daljnja jednostavna svojstva ovih prostora.

**Lema 6.** *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

*(a)* $(\forall\, m \in \mathbf{N}_0) \quad X^m(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathrm{C}^m_0(\mathbf{R}^d)$ *(prostor funkcija čije sve derivacije do reda $m$ opadaju prema nuli u beskonačnosti),*

*(b)* $k \le m \quad \Longrightarrow \quad X^m(\mathbf{R}^d) \subseteq X^k(\mathbf{R}^d) \subseteq X^0(\mathbf{R}^d) \subseteq \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$,

*(c)* $(\forall\, s \in \mathbf{R}) \quad s > m + d/2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d) \subseteq X^m(\mathbf{R}^d)$.

Dem. Prva tvrdnja slijedi iz činjenice da Fourier (kao i njegov inverz) preslikava $\mathrm{L}^1$ u $\mathrm{C}_0$ funkcije, dok je druga tvrdnja trivijalna. Dokažimo tvrdnju (c). Za $v \in \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)$ imamo

$$\begin{aligned}\|v\|_{X^m} &= \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^m)|\mathcal{F}v(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi} \\ &\le \int_{\mathbf{R}^d} \lambda^m(\boldsymbol{\xi})|\mathcal{F}v(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \lambda^{m-s}(\boldsymbol{\xi})\lambda^s(\boldsymbol{\xi})|\mathcal{F}v(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi} \le \|\lambda^{-(s-m)}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\|v\|_{\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)} \;.\end{aligned}$$

Zadnja nejednakost slijedi iz činjenice da je $\lambda^{-r} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ za $r > d/2$.

**Q.E.D.**

Za $m \in \mathbf{N}_0$ možemo definirati i prostore $X^m_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ svih funkcija $w$ takvih da za proizvoljnu test funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ vrijedi $\varphi w \in X^m(\mathbf{R}^d)$.

**Lema 7. (druga komutacijska lema)** *Neka su $A$ i $B$ standardni operatori definirani kao i ranije, s pripadnim simbolima $a$ i $b$ koji zadovoljavaju jednu od sljedećih pretpostavki*

*(i)* $a \in \mathrm{C}^1(\mathrm{S}^d)$ *i* $b \in X^1(\mathbf{R}^d)$.

*(ii)* $a \in X^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d_*)$ *i* $b \in \mathrm{C}^1_0(\mathbf{R}^d)$ *($b$ i njegove derivacije prvog reda pripadaju prostoru $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$).*

*Tada je komutator $C := AB - BA \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d); \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$, te (proširujući po homogenosti funkciju $a$ na $\mathbf{R}^d$) operator $\nabla_{\mathbf{x}} C$ ima simbol $(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} b)\boldsymbol{\xi}$.*

Dem. Dokaz ćemo provesti samo za prvi slučaj, dok se ostatak dokaza može naći u [T2].

Izračunajmo djelovanje operatora $\nabla_{\mathbf{x}}C$ na funkciju $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{x}}Cu)(\boldsymbol{\xi}) &= 2\pi i\boldsymbol{\xi} \otimes \mathcal{F}(Cu)(\boldsymbol{\xi}) \\
&= 2\pi i\boldsymbol{\xi} \otimes (\mathcal{F}(ABu) - \mathcal{F}(BAu)) \\
&= 2\pi i\boldsymbol{\xi} \otimes \left(a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)\mathcal{F}(bu)(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{F}b * \mathcal{F}(Au)(\boldsymbol{\xi})\right) \\
&= 2\pi i\boldsymbol{\xi} \otimes \left(a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)\mathcal{F}b * \mathcal{F}u(\boldsymbol{\xi}) - \mathcal{F}b * \mathcal{F}(Au)(\boldsymbol{\xi})\right) \\
&= 2\pi i\boldsymbol{\xi} \otimes \int_{\mathbf{R}^d}\left[a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) - a\left(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\right)\right]\mathcal{F}b(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\mathcal{F}u(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}\,.
\end{aligned}$$

Koristeći da je za proizvoljne $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d_*$

$$\left|\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\right| \le \left|\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right| + \left|\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi}|} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\right| \le 2\frac{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|}{|\boldsymbol{\xi}|}\,,$$

imamo sljedeću ocjenu

$$|\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{x}}Cu)(\boldsymbol{\xi})| \le 2\pi\alpha\int_{\mathbf{R}^d}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}||\mathcal{F}b(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})||\mathcal{F}u(\boldsymbol{\eta})|\,d\boldsymbol{\eta}\,,$$

pri čemu je $\alpha$ Lipschitzova konstanta funkcije $a$ na jediničnoj sferi.

Koristeći Youngovu nejednakost za konvoluciju, dobijemo

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{\mathbf{x}}Cu\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} &= \|\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{x}}Cu)\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\le 4\pi\alpha\|1_{\mathbf{R}^d}\mathcal{F}b\|_{\mathrm{L}^1}\|\mathcal{F}u\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\le 2\alpha\|b\|_{X^1}\|\mathcal{F}u\|_{\mathrm{L}^2} = 2\alpha\|b\|_{X^1}\|u\|_{\mathrm{L}^2}\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Ovim je dokazana neprekinutost operatora $\nabla_{\mathbf{x}}C$ na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, odnosno (uz korištenje prve komutacijske leme) operatora $C$ s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)$, pri čemu je $\|C\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d);\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))} \leqslant 2\sup_{\mathrm{S}}^d|\nabla a|\|b\|_{X^1}$.

Preostaje još izračunati simbol operatora $\nabla_{\mathbf{x}}C$. Aproksimirajmo $\hat{b} \in \mathrm{W}^{1,1}(\mathbf{R}^d)$ nizom glatkih funkcija $c_n \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$, te neka je $b_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ niz funkcija takvih da je $\hat{b}_n = c_n$. Tada niz $(b_n)$ aproksimira $b$ u $X^1$. Označimo s $(B_n)$ niz operatora pridružen funkcijama $(b_n)$.

Definiramo li operatore $C_n := [A, B_n]$, iz (15) slijedi

$$\|\nabla_{\mathbf{x}}(C_n - C)u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)} \le 2\alpha\|b_n - b\|_{X^1(\mathbf{R}^d)}\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)}\,,$$

stoga niz $(\nabla_{\mathbf{x}}C_n)$ uniformno konvergira k operatoru $\nabla_{\mathbf{x}}C$. Za zaključiti dokaz teorema dovoljno je pokazati da operator $\nabla_{\mathbf{x}}C_n$ ima kao dopustivi simbol funkciju $(\boldsymbol{\xi}\otimes\nabla_{\boldsymbol{\xi}}a)\nabla_{\mathbf{x}}b_n$.

Za test funkciju $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ imamo da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}\otimes\nabla_{\boldsymbol{\xi}}a)\nabla_{\mathbf{x}}B_n u &= \left[\boldsymbol{\xi}\otimes\nabla_{\boldsymbol{\xi}}a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)\right]\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{x}}b_n\cdot u) \\
&= 2\pi i\int_{\mathbf{R}^d}\left[\boldsymbol{\xi}\otimes\nabla_{\boldsymbol{\xi}}a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)\right](\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\mathcal{F}b_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\mathcal{F}u(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

S druge strane je

$$\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{x}}C_n u)(\boldsymbol{\xi}) = 2\pi i\boldsymbol{\xi}\otimes\int_{\mathbf{R}^d}\left[a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) - a\left(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\right)\right]\mathcal{F}b_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\mathcal{F}u(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}\,.$$

Korištenjem Taylorovog razvoja prvog faktora u gornjem integrandu,

$$a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) - a\left(\frac{\boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\eta}|}\right) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)\cdot(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}) + o\left(\frac{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) ,$$

slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{x}} C_n u)(\boldsymbol{\xi}) = 2\pi i \int_{\mathbf{R}^d}\left[\boldsymbol{\xi}\otimes\nabla_{\boldsymbol{\xi}} a\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)\right]\mathcal{F}b_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\mathcal{F}u(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}\\ + 2\pi i\boldsymbol{\xi}\int_{\mathbf{R}^d} o(|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|)\mathcal{F}b_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\mathcal{F}u(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}\,.\end{aligned}$$

Prvi integral je zbog (16) jednak $\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}\otimes\nabla_{\boldsymbol{\xi}} a)\nabla_{\mathbf{x}} B_n u$ , dok drugi zbog kompaktnosti nosača funkcije $\mathcal{F}b_n$ definira kompaktan operator (vidi [HL], str. 216.). Zbog uniformne konvergencije niza $(b_n)$ slijedi tvrdnja.

**Q.E.D.**

### a) Skalarna jednadžba prvog reda

Promatrimo skalarnu linearnu jednadžbu prvog reda na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, oblika

$$\mathsf{b}\cdot\nabla u_n + c u_n = f_n \,, \tag{17}$$

pri čemu za koeficijente vrijedi $\mathsf{b}\in \mathrm{C}^1(\Omega;\mathbf{C}^d)$, $c\in\mathrm{C}(\Omega;\mathbf{C})$. Valja naglasiti kako u gornjoj jednadžbi koristimo realni skalarni produkt.

Pretpostavimo da niz $(u_n)$ konvergira slabo k nuli u $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C})$, te da definira H-mjeru $\mu$. U slučaju da imamo jaku konvergenciju k nuli u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C})$ niza $(f_n)$, tada lokalizacijsko svojstvo (Korolar 3.) povlači

$$P(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mu = \mathsf{b}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\xi}\,\mu = 0\,.$$

Primijetimo kako gornji zaključak ne ovisi o koeficijentu $c$, jer je taj član zbog slabe konvergencije u $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C})$ (a time i jake u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C})$) apsorbiran u desnoj strani jednadžbe.

Da bismo dobili prijenosno svojstvo za H-mjere moramo uvesti dodatne pretpostavke. Naime, promatrat ćemo H-mjeru $\boldsymbol{\mu}$, pridruženu nizu $(u_n, f_n)$. U tu svrhu nužno je pretpostaviti nešto *bolje* ponašanje niza $(f_n)$, odnosno njegovu slabu konvergenciju u $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C})$. U tom je slučaju H-mjera koja odgovara nizu $(u_n)$ zapravo komponenta $\mu^{11}$ matrične Radonove mjere $\boldsymbol{\mu}$.

Nadalje, jednostavnost radi, pretpostavimo da je funkcija koeficijenata $\mathsf{b}$ realna, odnosno da je jednadžba (17) hiperbolička. Ova pretpostavka nije fundamentalna, već pojednostavljuje propagacijsku formulu.

**Teorem 5.** *Uz prethodne pretpostavke, H-mjera $\mu^{11}$ zadovoljava jednadžbu*

$$\langle \mu^{11}, \{\Phi, P\} + (2\mathsf{Re}\, c - \mathsf{div}\,\mathsf{b})\Phi\rangle = 2\langle \mathsf{Re}\,\mu^{12},\Phi\rangle \,,$$

*za svaku funkciju $\Phi\in\mathrm{C}^1(\Omega\times S^{d-1})$ s kompaktnim nosačem u prvoj varijabli (pri čemu je $\Phi$ proširena na $\Omega\times{\mathbf{R}^d}_*$ po homogenosti reda nula u drugoj varijabli).*

Dem. Pomnožimo jednadžbu (17) funkcijom $\varphi\in\mathrm{C}^1_c(\Omega;\mathbf{C})$. Tada slijedi

$$\mathsf{b}\cdot\nabla(\varphi u_n) = g_n \,, \tag{18}$$

pri čemu je $g_n = \varphi(f_n - cu_n) + (\mathsf{b}\cdot\nabla\varphi)u_n$. Uvedemo li oznaku $v_n := \varphi u_n$, tada niz $(v_n, g_n)$ definira H-mjeru $\boldsymbol{\nu}$ za koju, na osnovu Teorema 3., vrijedi

$$
\begin{aligned}
\nu^{11} &= |\varphi|^2\mu^{11} ,\\
\nu^{21} &= (-c|\varphi|^2 + \bar\varphi\,\mathsf{b}\cdot\nabla\varphi)\mu^{11} + |\varphi|^2\mu^{21} .
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Djelujemo li na jednadžbu (18) standardnim operatorom $A$ sa simbolom $a \in \mathrm{C}^\infty(S^{d-1})$, zbog činjenice da $A$ komutira s derivacijama u varijabli $\mathbf{x}$, slijedi

$$
\mathsf{b}\cdot\nabla(Av_n) + \mathsf{div}\,[(A\mathsf{b} - \mathsf{b}A)v_n] + [(\mathsf{div}\,\mathsf{b})A - A(\mathsf{div}\,\mathsf{b})]v_n = Ag_n . \tag{20}
$$

Treći član na lijevoj strani gornje jednakosti je, zbog prve komutacijske leme, djelovanje kompaktnog operatora na niz $v_n$, te on neće utjecati na H-mjeru, pa ga možemo zanemariti. Srednji pak član, sada prema drugoj komutacijskoj lemi, odgovara djelovanju operatoru $K$ reda nula sa simbolom

$$
\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathsf{b})\nabla_{\boldsymbol{\xi}} a = (\nabla_{\mathbf{x}}\mathsf{b})^\tau\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\xi}} a = \{a, P\} .
$$

Zbog činjenice da su koeficijenti $\mathsf{b}$ realni, te koristeći obje jednakosti (20) i (18) uz zanemarivanje kompaktnog člana (koji pri prijelazu na limes teži k nuli), dobijemo izraz

$$
\mathsf{b}\cdot\nabla[(Av_n)\bar v_n] = (Ag_n - Kv_n)\bar v_n + (Av_n)\bar g_n .
$$

Množenjem gornje jednakosti s funkcijom $w \in \mathrm{C}^1_c(\Omega)$, te prelaskom na limes, slijedi

$$
-\langle \nu^{11}, a\,\mathsf{div}\,(\mathsf{b}w)\rangle = \langle \nu^{21}, aw\rangle - \langle \nu^{11}, w\{a, P\}\rangle + \langle \nu^{12}, aw\rangle ,
$$

drugim riječima

$$
\langle \nu^{11}, w\{a, P\} - a\,\mathsf{div}\,(\mathsf{b}w)\rangle = \langle 2\mathsf{Re}\,\nu^{12}, wa\rangle .
$$

Iskoristimo li identitet $w\{a, P\} - a\,\mathsf{div}\,(\mathsf{b}w) = \{wa, P\} - aw\,\mathsf{div}\,\mathsf{b}$, gornja jednakost prelazi u

$$
\langle \nu^{11}, \{wa, P\} - aw\,\mathsf{div}\,\mathsf{b}\rangle = \langle 2\mathsf{Re}\,\nu^{12}, wa\rangle .
$$

Koristeći vezu (19) između mjera $\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\mu}$, imamo da je

$$
\langle |\varphi|^2\mu^{11}, \{wa, P\} - aw\,\mathsf{div}\,\mathsf{b}\rangle = 2\langle(-|\varphi|^2\mathsf{Re}\,c + \mathsf{Re}\,(\mathsf{b}\cdot\nabla\varphi\bar\varphi))\mu^{11} + |\varphi|^2\mathsf{Re}\,\mu^{12}, wa\rangle
$$

Koristeći još jedan jednostavan identitet

$$
|\varphi|^2\{wa, P\} - 2\mathsf{Re}\,(\mathsf{b}\cdot\nabla\varphi\bar\varphi)wa = \{|\varphi|^2 wa, P\} ,
$$

dobijemo traženu jednadžbu u slučaju $\Phi = |\varphi|^2 wa$. Tvrdnja teorema slijedi zbog gustoće test funkcija ovog oblika u prostoru funkcija iz $\mathrm{C}^1(\Omega\times S^{d-1})$ s kompaktnim nosačem u prvoj varijabli.

**Q.E.D.**

### b) Valna jednadžba

Sljedeći nam je cilj primijeniti prethodna razmatranja u općenitijem slučaju valne jednadžbe. Taj se slučaj može transformacijom jednadžbe u simetričan sustav prvog reda svesti na situaciju analognu onoj u prethodnom odjeljku, gdje se može primijeniti poopćenje prikazane procedure (vidi [A]). Ovdje će prijenosna jednadžba za H-mjeru biti izvedena direktno. I u ovom slučaju tražena jednadžba slijedi iz kvadratičnog zakona sačuvanja, te je prirodno očekivati kako se ovaj postupak može primijeniti na većinu linearnih (ili polulinearnih) sustava u fizici i mehanici kontinuuma.

Razmotrimo najprije slučaj klasične valne jednadžbe na $\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}^d$ u mediju čija svojstva ovise neprekinuto o položaju u prostoru, a vremenski su nepromjenjiva:

$$\rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_n) = f_n\ . \tag{21}$$

Preciznije, neka koeficijenti zadovoljavaju $\rho \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d)$ i $\mathbf{A} \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_d(\mathbf{R}))$. Pretpostavimo nadalje da niz rješenja $(u_n)$ konvergira k nuli u $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, te da niz $(f_n)$ konvergira k nuli jako u prostoru $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}^d)$.

Prilikom razmatranja valne jednadžbe koristit ćemo sljedeću notaciju. Varijable u $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ ćemo označavati s $\mathbf{x} = (x^0, x^1, \dots, x^d) = (x^0, x) = (t, x^1, \dots, x^d)$, ovisno o tome što je prikladnije. Slično za *dualnu* varijablu pišemo $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d) = (\tau, \xi)$. Za derivaciju koristimo simbole $\nabla_{\mathbf{x}} = (\partial_0, \nabla_x)$, te također crticu ili točkicu za $\partial_0$.

Neka je $\boldsymbol{\mu}$ H-mjera definirana nizom $\mathsf{v}^n := \nabla_{\mathbf{x}} u_n = (\partial_0 u_n, \nabla_{\mathbf{x}} u_n) = (v_0^n, \mathsf{v}^n)$. Iz lokalizacijskog principa i simetrija koje zadovoljavaju funkcije $v_n$ slijedi rezultat.

**Lema 8.** *H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ pridružena nizu $(\mathsf{v}^n)$ je oblika*

$$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi})\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}\ , \tag{22}$$

*pri čemu nenegativna mjera $\nu := \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$ ima nosač sadržan u skupu nultočaka karakterističnog polinoma jednadžbe* (21)*; drugim riječima, vrijedi*

$$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\nu = \frac{1}{2}(\rho(\mathbf{x})\xi_0^2 - \mathbf{A}(\mathbf{x})\xi \cdot \xi)\nu = 0\ , \tag{23}$$

*u smislu Radonovih mjera.*

Dem. Iz Schwartzovih simetrija za parcijalne derivacije slijedi da komponente niza $(\mathsf{v}^n)$ zadovoljavaju

$$\partial_j v_k^n = \partial_k v_j^n \quad j, k = 0, 1, \dots, d\ .$$

Odatle i iz lokalizacijskog teorema za H-mjere slijede relacije

$$\xi_j \mu^{kl} = \xi_k \mu^{jl} \quad j, k, l = 0, 1, \dots, d\ , \tag{24}$$

pa vrijedi da je

$$\xi_j \mu^{kl} = \xi_k \mu^{jl} = \xi_k \bar{\mu}^{lj} = \xi_l \bar{\mu}^{kj} = \xi_l \mu^{jk}\ . \tag{25}$$

Pri tome smo u drugoj jednakosti koristili hermitičnost matrice $\boldsymbol{\mu}$, u trećoj evidentnu činjenicu da (24) vrijedi i za matricu $\bar{\boldsymbol{\mu}}$, te na koncu u posljednjoj jednakosti nanovo hermitičnost.

Posebno, uvrštavajući $l = k$, sumacijom po $k$ slijedi

$$\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\mu} = \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi}\ . \tag{26}$$

Na kraju, množeći (25) s $\xi_l$, te sumacijom po $l$ i korištenjem (26), slijedi (22).

Nadalje, primjenom lokalizacijskog teorema na valnu jednadžbu, zapisanu u obliku

$$\rho \frac{\partial v_0^n}{\partial t} - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\mathsf{v}^n) = f_n\ ,$$

slijede relacije

$$\xi_0 \rho \mu^{0l} - \sum_{i,j=1}^{d} \xi_i a_{ij} \mu^{jl} = 0 \quad l = 0, 1, \dots, d\ ,$$

što zajedno s (22) povlači (23).

**Q.E.D.**

Da bismo izveli prijenosnu jednadžbu za mjeru $\boldsymbol{\mu}$, odnosno, što je ekvivalentno, za skalarnu mjeru $\nu$, moramo ponovno pojačati pretpostavke: zahtijevamo da $f_n$ konvergira slabo k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}^d)$, da su koeficijenti $\rho$ i $\mathbf{A}$ realni i klase $\mathrm{C}^1$, te da vrijedi $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\tau$. Označimo s $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ H-mjeru pridruženu nizu $(\mathsf{v}^n, f_n)$. To je sada $(d+2) \times (d+2)$ matrična Radonova mjera s indeksima od nule do $d+1$. Vrijedi, naime

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} & \tilde{\mu}_{d+1} \\ \tilde{\mu}_{d+1}^* & \mu^{d+1,d+1} \end{bmatrix} ,$$

pri čemu je sa $\tilde{\mu}_{d+1}$ označen stupac s elementima $\tilde{\mu}^{i,d+1}$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Lokalizacijsko svojstvo povlači

$$\xi_j \tilde{\mu}^{i,d+1} = \xi_i \tilde{\mu}^{j,d+1} \quad i, j = 0, 1, \ldots, d ,$$

što ima za posljedicu da stupac $\tilde{\mu}_{d+1}$ možemo zapisati u obliku $\boldsymbol{\xi}\nu^{12}$, pri čemu je $\nu^{12} = \sum \xi_j \mu^{j,d+1}$ skalarna i općenito kompleksna Radonova mjera. Ovime smo mjeru $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ dodatno pojednostavili, te možemo pisati

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi})\nu & \boldsymbol{\xi}\nu^{12} \\ \boldsymbol{\xi}^\tau \bar{\nu}^{12} & \nu^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} & \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi}^\tau & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}\nu & \mathsf{e}_1 \nu^{12} \\ \mathsf{e}_1^\tau \bar{\nu}^{12} & \nu^{22} \end{bmatrix} ,$$

pri čemu smo s $\nu^{22}$ označili nenegativnu skalarnu mjeru $\mu^{d+1,d+1}$. Time smo poznavanje matrične Radonove mjere koja *a priori* ima $(d+3)(d+2)/2$ neovisnih elemenata sveli na ukupno tri skalarne mjere, od kojih u prijenosnu jednadžbu ulaze dvije. Valnoj jednadžbi, koja je višeg reda, ne pripada dakle složenija H-mjera od one definirane nizom rješenja skalarne jednadžbe prvog reda.

Uz dodatne, prirodne pretpostavke na koercitivnost funkcija koeficijenata $\rho$ i $\mathbf{A}$, i.e. $\rho > 0$, te

$$(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)(\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad \mathbf{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \alpha |\boldsymbol{\xi}|^2 ,$$

vrijedi sljedeće prijenosno svojstvo ([T2]).

**Teorem 6.** *Uz gornje pretpostavke, skalarna mjera $\nu = \mathrm{tr}\boldsymbol{\mu}$ zadovoljava prijenosnu jednadžbu:*

$$(27) \qquad \langle \nu, \{\Phi, Q\} \rangle = 2\langle \mathrm{Re}\,\nu^{12}, \Phi \rangle ,$$

*za svaku funkciju $\Phi \in \mathrm{C}^1(\Omega \times S^{d-1})$ s kompaktnim nosačem u prvoj varijabli (pri čemu je $\Phi$ proširena po homogenosti reda nula u drugoj varijabli).* ∎

# Drugi dio

# Primjena H-mjera na računanje makroskopske gustoće energije

# III. Primjena na nelinearnu valnu jednadžbu

# 1. Uvod

Polulinearnoj valnoj jednadžbi

$$\rho u'' - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u) - u^3 = 0 \tag{1}$$

pridružit ćemo funkciju gustoće energije $d$ zadanu relacijom

$$d := \frac{1}{2}\Big[\rho(u')^2 + \mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla u + \frac{1}{2}u^4\Big]\,.$$

Naš cilj je izračunati makroskopsku vrijednost gornje energije. U duhu Tartarove teorije homogenizacije u širem smislu, gledat ćemo gornju jednadžbu s pridruženim nizom početnih uvjeta $\beta_n$ i $\gamma_n$. Preciznije, Tartar je predložio da nizovi $(\beta_n)$ i $(\gamma_n)$ konvergiraju slabo k nuli u odgovarajućim prostorima, te da se makroskopska energija izrazi limesom (u smislu distribucija) niza gustoća energija $d_n$.

Ovu ideju su sproveli Gilles Francfort i François Murat [FM] u slučaju linearne valne jednadžbe. Koristili su teoriju H-mjera u cilju izračunavnja slabog limesa niza $(d_n)$. U svom radu prilagodio sam njihovu tehniku polulinearnoj valnoj jednadžbi i otkrio da dodavanje člana $u^3$ nije rezultiralo promjenom makroskopske energije. Također sam oslabio zahtjeve na regularnost koeficijenata.

# 2. Postojanje i jedinstvenost rješenja polulinearne valne jednadžbe

U svrhu dokaza egzistencije i jedinstvenosti rješenja za (1) definirajmo prostore $V := \mathrm{H}^1_0(\Omega) \cap \mathrm{L}^4(\Omega)$ i $H := \mathrm{L}^2(\Omega)$, pri čemu je $\Omega$ omeđen i otvoren skup s glatkim rubom u $\mathbf{R}^d$. $V$ je separabilan i refleksivan Banachov prostor s normom definiranom relacijom

$$\|u\|_V := \|u\|_{\mathrm{H}^1_0} + \|u\|_{\mathrm{L}^4}.$$

Dual prostora $V$ je $V' = (\mathrm{H}^1_0(\Omega))' + (\mathrm{L}^4(\Omega))' = \mathrm{H}^{-1}(\Omega) + \mathrm{L}^{4/3}(\Omega)$. Prostori $V, H$ i $V'$ tvore Geljfandovu trojku, odnosno vrijedi da je $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, pri čemu su gornja ulaganja gusta i neprekidna. Štoviše, zbog ograničenosti skupa $\Omega$, vrijedi da je $V$ i kompaktno uloženo u $H$. Naime, na ograničenom skupu $\Omega$ Soboljevljeva ulaganja $\mathrm{H}^{s+\epsilon}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{H}^s(\Omega)$ su kompaktna (vidi [Ad], str. 144.) iz čega slijedi tvrdnja. Za dokaz postojanja rješenja koristit ćemo sljedeću lemu (dokaz se može naći u [T1]).

**Lema 1.** **(Aubinova lema o kompaktnosti)** *Neka su $B_0, B_1$ i $B_2$ Banachovi prostori takvi da je $B_1 \hookrightarrow B_2$ neprekidno i $B_0 \hookrightarrow B_1$ kompaktno. Ukoliko je niz $(u_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^p(0,T;B_0)$ i $(u'_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^p(0,T;B_2)$ za neki $T < \infty$ i $p \in \langle 1, \infty\rangle$, tada je $(u_n)$ sadržan u kompaktnom skupu u $\mathrm{L}^p(0,T;B_1)$*

∎

Motivirani fizikalnim razlozima (v. [J]), pretpostavimo da koeficijenti $\rho$ i $\mathbf{A}$ ovise samo o prostornim varijablama.

Dokaz sljedeća dva teorema je varijacija tehnika korištenih u [T1].

**Teorem 1.** **(postojanje)** *Neka je $B \in \mathcal{L}(V,V')$ koercitivan, hermitski operator (i.e. $\alpha\|u\|^2_V \leqslant {}_{V'}\langle Bu, u\rangle_V \leqslant \beta\|u\|^2_V, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$), te $\rho \in \mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^+)$ takav da je $\rho \geqslant c > 0$ (ss) i $T \in \mathbf{R}^+$. Tada za svaki $f \in \mathrm{L}^1(0,T;H), u_0 \in V$ i $u_1 \in H$ postoji $u \in \mathrm{L}^\infty(0,T;V)$ takav da je $u' \in \mathrm{L}^\infty(0,T;H)$ i*

$$\begin{cases} \rho u'' + Bu + u^3 = f, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{2}$$

*Nadalje, $u'' \in \mathrm{L}^1([0,T] \times \Omega)$.*

Dem. U dokazu koristimo Galjorkinovu metodu. Izaberimo niz neovisnih vektora $(\omega_n)$ iz $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ takav da su konačne linearne kombinacije tog niza guste u $V$. To je moguće zbog separabilnosti prostora $V$, te zato što je $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ gust u $V$. Neka su, nadalje, $(u_{n,0})$ i $(u_{n,1})$ nizovi koji konvergiraju prema $u_0$ i $u_1$ u $V$, odnosno $H$. S $u_n$ označimo rješenje Cauchyjeve zadaće

$$(3)\qquad \begin{cases} {}_{V'}\Big\langle\, \rho u_n'' + Bu_n + u_n^3 - f, \omega_i \,\Big\rangle_V = 0, \\ u_n(0) = u_{n,0}, \quad u_n'(0) = u_{n,1}. \end{cases}$$

Rješenje tražimo u obliku $u_n(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t)\omega_i,\ g_i \in \mathrm{C}^2(\mathbf{R})$. Gornja jednadžba tada poprima oblik

$${}_{V'}\Big\langle \sum(\rho g_j''(t)\omega_j + g_j(t)B\omega_j) + \sum(g_j(t)\omega_j)^3 - f, \omega_i \Big\rangle_V = 0,$$

odnosno

$$(4)\qquad \sum g_j'' \Big\langle\, \rho\omega_j \mid \omega_i \,\Big\rangle_H = {}_{V'}\Big\langle\, f - \sum(g_j(t)\omega_j)^3 - \sum g_j(t)B\omega_j, \omega_i \,\Big\rangle_V.$$

Zbog linearne neovisnosti vektora $\omega_i$ njihova Grammova matrica je regularna. Budući da operacija $u \to \langle\, \rho u \mid u \,\rangle_H$ također definira skalarni produkt na $H$, matrica $[\langle\, \rho\omega_j \mid \omega_i \,\rangle_H]$ će također biti regularna. Stoga (4) možemo napisati u obliku sustava

$$g_i'' = F_i(t, g_1, \ldots, g_n),$$

pri čemu $F$ zadovoljava uvjete Picardovog teorema za obične diferencijalne jednadžbe. Na taj način smo dobili lokalnu egzistenciju i jedinstvenost funkcija $g_i$, odnosno rješenja $u_n$ na $[0, t_n\rangle$ za $t_n < T$.

U cilju dobivanja globalnog rješenja, iskoristimo sljedeće identitete

$$\begin{aligned} {}_{V'}\langle\, \rho u_n'', u_n' \,\rangle_V &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\rho}u_n'\|_H^2, \\ {}_{V'}\langle\, Bu_n', u_n \,\rangle_V &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}{}_{V'}\langle\, Bu_n, u_n \,\rangle_V, \\ {}_{V'}\langle\, u_n^3, u_n' \,\rangle_V &= \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u_n\|_{\mathrm{L}^4}^4. \end{aligned}$$

Pri tom smo u drugoj jednakosti koristili hermitičnost operatora $B$, dok je u trećoj korištena činjenica da je $V \subseteq \mathrm{L}^4(\Omega)$.

Pomnožimo jednadžbu u (3) s $g_i'$ i sumirajmo po $i$. Koristeći gornje identitete dobijemo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}u_n'\|_H^2 + \frac{1}{2}{}_{V'}\langle\, Bu_n, u_n \,\rangle_V + \frac{1}{4}\|u_n\|_{\mathrm{L}^4}^4\right) \leqslant \|f\|_H\|u_n'\|_H.$$

Za funkciju

$$\phi(t) := \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}u_n'\|_H^2 + \frac{1}{2}{}_{V'}\langle\, Bu_n, u_n \,\rangle_V + \frac{1}{4}\|u_n\|_{\mathrm{L}^4}^4$$

vrijedi da je

$$\phi' \leqslant \|f\|_H \frac{1}{\sqrt{c}}\|\sqrt{\rho}u_n'\|_H \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c}}\|f\|_H\sqrt{\phi},$$

odnosno

$$\left(\sqrt{\phi}\right)' \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{c}}\|f\|_H.$$

Integracijom gornje nejednakosti slijedi

$$\sqrt{\phi(t)} \leqslant \sqrt{\phi(0)}\frac{1}{\sqrt{2}c}\int_0^t \|f\|_H.$$

Zato što je $f \in \mathrm{L}^1(0,T;H)$, slijedi da je funkcija $\phi$ omeđena. Koristeći koercitivnost funkcije $\rho$ i operatora B imamo da je

$$\phi \geqslant \frac{1}{2}c\|u_n'\|_H^2 + \frac{1}{2}\alpha\|u_n\|_{\mathrm{H}_0^1} + \frac{1}{4}\|u_n\|_{\mathrm{L}^4}^4,$$

iz čega slijedi da je niz $(u_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^\infty(0,T;V)$, a niz $(u_n')$ omeđen u $\mathrm{L}^\infty(0,T;H)$. Na taj način smo dokazali postojanje rješenja $u_n$ na čitavom intervalu $[0,T]$.

U sljedećem koraku želimo prijeći na limes u (3). Zbog refleksivnosti prostora $V$ i omeđenosti niza $(u_n)$ u $\mathrm{L}^\infty(0,T;V)$, po Banach-Alaoglu-Bourbakijevom teoremu slijedi da (uz prijelaz na podniz kojeg označujemo jednako) $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$. Nadalje, vrijedi da

$${}_{V'}\langle\, Bu_n, \omega_i \,\rangle_V \overset{*}{\rightharpoonup} {}_{V'}\langle\, Bu, \omega_i \,\rangle_V$$

u $\mathrm{L}^\infty([0,T])$, te

$${}_{V'}\langle\, \rho u_n'', \omega_i \,\rangle_V \rightharpoonup {}_{V'}\langle\, \rho u'', \omega_i \,\rangle_V$$

u $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Preostaje nam ispitati konvergenciju preostalog člana u (3): ${}_{V'}\langle\, u_n^3, \omega_i \,\rangle_V$. U tu svrhu ćemo iskoristiti Aubinovu lemu o kompaktnosti uzimajući da je $B_0 = V$ i $B_1 = B_2 = H$. Budući da je $(u_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^\infty(0,T;B_0) \subseteq \mathrm{L}^p(0,T;B_0)$, te $(u_n')$ omeđen u $\mathrm{L}^\infty(0,T;B_2) \subseteq \mathrm{L}^p(0,T;B_2)$ za $p \in [1,\infty]$, spomenuta lema nam daje da $u_n \to u$ u $\mathrm{L}^p(0,T;B_1)$. Posebno vrijedi $u_n \to u$ u $\mathrm{L}^2([0,T]\times\Omega)$. S druge strane, zato što je $B_0 = V \subseteq \mathrm{L}^4(\Omega)$, slijedi da $u_n \rightharpoonup u$ u $\mathrm{L}^4([0,T]\times\Omega)$.

Koristeći interpolacijsku nejednakost (vidi [Br]), imamo da je

$$\|u_n - u\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant \|u_n - u\|_{\mathrm{L}^2}^{1-\theta}\|u_n - u\|_{\mathrm{L}^4}^{\theta} \to 0,$$

za $q \in [2,4\rangle$ te $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{4}$. Uzmemo li $q \geqslant 3$, gornja nejednakost povlači da $u_n^3 \to u^3$ u $\mathrm{L}^{\frac{q}{3}}([0,T]\times\Omega)$, iz čega slijedi željena konvergencija, odnosno

$${}_{V'}\langle\, u_n^3, \omega_i \,\rangle_V \to {}_{V'}\langle\, u^3, \omega_i \,\rangle_V$$

u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Prelaskom na limes u (3) slijedi da je

$${}_{V'}\langle\, \rho u'' + Bu + u^3 - f, \omega_i \,\rangle_V = 0$$

u smislu distribucija.

Zbog gustoće, zadnja jedankost vrijedi za svaki $\omega \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$. Budući da su tenzorski produkti funkcija oblika $\phi(t)\boxtimes\omega(\mathbf{x})$ gusti u $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}\times\Omega)$ slijedi da je $u$ rješenje nelinearne valne jednadžbe, pri čemu je $\rho u'' = f - u^3 - Bu \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R};\mathrm{L}^{q/3}(\Omega))$ za $q \in [3,4\rangle$.

**Q.E.D.**

U našem je slučaju operator $B = \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u)$, pa će pretpostavke teorema biti ispunjene ukoliko je $\mathbf{A}(x) \in \mathrm{Sym}$ i $\alpha\mathbf{I} \leqslant \mathbf{A} \leqslant \beta\mathbf{I}$ za neko $\alpha > 0$.

Prijeđimo sad na dokaz jedinstvenosti rješenja.

**Lema 2.** **(Gronwall)** *Ako je* $w : \langle 0,T\rangle \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$ *izmjeriva i omeđena funkcija (dakle,* $w \in \mathrm{L}^\infty(\langle 0,T\rangle;\mathbf{R}_0^+)$*), te za neku konstantu* $M \in \mathbf{R}_0^+$ *i funkciju* $p \in \mathrm{L}^1(\langle 0,T\rangle;\mathbf{R}_0^+)$ *vrijedi nejednakost:*

$$w(t) \leqslant M + \int_0^t p(s)w(s)\,ds \qquad (\text{ss } t \in \langle 0,T\rangle)\ ,$$

*onda* $w$ *zadovoljava i precizniju nejednakost:*

$$w(t) \leqslant Me^{\int_0^t p(s)\,ds} \qquad (\text{ss } t \in \langle 0,T\rangle)\ .$$

Dem. Najprije pokažimo da za funkciju $p \in \mathrm{L}^1(\langle 0,T\rangle)$ vrijedi jednakost:

$$\int_0^t p(s)e^{\int_0^s p(\sigma)\,d\sigma}ds = e^{\int_0^t p(s)\,ds} - 1 \qquad (\text{ss } t) \in \langle 0,T\rangle\ . \tag{5}$$

Ukoliko je $p$ neprekinuta funkcija, onda je formulom $q(t) := e^{\int_0^t p(s)\,ds}$ definirana funkcija klase $\mathrm{C}^1$ na $\langle 0,T\rangle$. Za njezinu derivaciju vrijedi:

$$q'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t p(s)\,ds}\right) = p(t)e^{\int_0^t p(s)\,ds}\ ,$$

odakle primjenom Newton-Leibnitzove formule $\int_0^t q'(s)\,ds = q(t) - q(0)$ slijedi tvrdnja.

Uzmimo sada funkciju $p \in \mathrm{L}^1(\langle 0,T\rangle)$, te je aproksimirajmo nizom neprekinutih funkcija $p_n \longrightarrow p$ u prostoru $\mathrm{L}^1(\langle 0,T\rangle)$. Po prethodnom, $q_n(t) := e^{\int_0^t p_n(s)\,ds}$ je funkcija klase $\mathrm{C}^1$; k tome, $q_n \rightrightarrows q$ (što nije teško pokazati). Zbog toga u formuli

$$\int_0^t p_n(s)q_n(s)ds = q_n(s) - 1$$

možemo prijeći na limes po $n \longrightarrow \infty$, te dobivamo da (5) vrijedi i za $p \in \mathrm{L}^1(\langle 0,T\rangle)$.

Prijeđimo na dokaz tvrdnje leme. Kako je $w$ omeđena funkcija, to postoji (jer je $\int p \geqslant 0$) $C \in \mathbf{R}^+$ takva da je

$$w(t) \leqslant Ce^{\int_0^t p(s)\,ds} \qquad (\text{ss } t \in \langle 0,T\rangle)\ .$$

Ako je taj $C \leqslant M$, tvrdnja je dokazana.

Pogledajmo skup svih valjanih konstanti $C$ za gornju nejednakost. Lako se vidi da je infimum tog skupa, u oznaci $C_i$ ponovno valjana konstanta (jer nejednakost nije stroga). Pokažimo još da ako je $C_i > M$, da onda postoji i bolja ocjena s $C' < C_i$, odakle će slijediti tvrdnja.

Zaista, iz pretpostavke leme imamo da je

$$\begin{aligned} w(t) &\leqslant M + \int_0^t p(s)Ce^{\int_0^s p(\sigma)\,d\sigma}\,ds \\ &= M + C_ie^{\int_0^t p(s)\,ds} - C_i \leqslant C'e^{\int_0^t p(s)\,ds}\ , \end{aligned}$$

pri čemu je $C' < C_i$ izračunat iz sljedeće jednadžbe:

$$C_i - C' = (C_i - M)e^{-\int_0^T p(s)\,ds}\ .$$

**Q.E.D.**

**Teorem 2.** **(jedinstvenost)** *Neka su ispunjene pretpostavke prethodnog teorema. U slučaju kad je dimenzija prostora $d = 3$ ili $d = 2$, rješenje Cauchyjeve zadaće (2) je jedinstveno.*

Dem. Koristeći Soboljevljeva ulaganja, prostor $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ je neprekidno uložen u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$, pri čemu je $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$. Posebno za $d = 3$, $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ je uložen u $\mathrm{L}^6(\mathbf{R}^3)$, što će biti ključno za dokaz jedinstvenosti. U slučaju $d = 2$, $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ je uložen u $\mathrm{L}^p(\Omega)$ za svaki $p \in [1, \infty]$.

Neka su $u$ i $v$ dva rješenja. Označimo njihovu razliku s $w$. Tada je

$$\tag{6} \begin{cases} \rho w'' + Bw + aw = 0 \\ w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \end{cases}$$

pri čemu je $a = \frac{u^3 - v^3}{u - v} = u^2 + uv + v^2$. Budući da su $u, v \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; V)$, te $V \subseteq \mathrm{L}^6$, to slijedi da je $a \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^3(\Omega))$. Nadalje, $w \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; V)$ povlači da je $aw = -\rho w'' - Bw \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; H)$. Stoga, množeći (6) s $w' \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; H)$, dobijemo

$$\tag{7} \langle\, \rho w'' + Bw \mid w' \,\rangle_H = -\langle\, aw \mid w' \,\rangle_H .$$

Nadalje za $w \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}; V)$ vrijedi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\langle\, \rho w' \mid w' \,\rangle_H + \langle\, Bw \mid w \,\rangle_H\big) = {}_{V'}\langle\, \rho w'', w' \,\rangle_V + {}_{V'}\langle\, Bw, w' \,\rangle_V = \langle\, \rho w'' + Bw \mid w' \,\rangle_H .$$

U gornjoj relaciji članovi ${}_{V'}\langle\, \rho w'', w' \,\rangle_V$ i ${}_{V'}\langle\, Bw, w' \,\rangle_V$ nemaju smisla ukoliko $w'$ nije iz $V$. Međutim, budući da je $\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}; V)$ gusto u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}; H)$, (zbog gustoće ulaganja $V \hookrightarrow H$), slijedi da je

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\langle\, \rho w' \mid w' \,\rangle_H + \langle\, Bw \mid w \,\rangle_H\big) = \langle\, \rho w'' + Bw \mid w' \,\rangle_H$$

za svaki $w \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}; V)$. Na osnovu zadnje jednakost i relacije (7), zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\langle\, \rho w' \mid w' \,\rangle_H + \langle\, Bw \mid w \,\rangle_H\big) &\leqslant \|aw\|_{\mathrm{L}^2}\|w'\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant \|a\|_{\mathrm{L}^3}\|w\|_{\mathrm{L}^6}\|w'\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant C\|a\|_{\mathrm{L}^3}\left(\|w\|^2_{\mathrm{H}^1_0} + \|w'\|^2_{\mathrm{L}^2}\right) \\ &\leqslant \frac{C}{c\alpha}\|a\|_{\mathrm{L}^3}\left(\langle\, \rho w' \mid w' \,\rangle_H^2 + \langle\, Bw \mid w \,\rangle_H^2\right). \end{aligned}$$

Korišteći Gronwallovu lemu i činjenicu da je $\Big(\langle\, \rho w' \mid w' \,\rangle_H + \langle\, Bw \mid w \,\rangle_H\Big)\Big|_{t=0} = 0$, slijedi da je

$$\|w\|_{\mathrm{H}^1_0} + \|w'\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \big(\langle\, \rho w' \mid w' \,\rangle_H + \langle\, Bw \mid w \,\rangle_H\big) = 0,$$

čime je pokazana jedinstvenost.

**Q.E.D.**

## 3. Formulacija problema

Promatrat ćemo niz početnih zadaća

$$\tag{8} \begin{cases} \rho u_n'' - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla_x u_n) - u_n^3 = 0 \\ \qquad u_n(0) = \gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)\,, \\ \qquad u_n'(0) = \beta_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,, \end{cases}$$

pri čemu koeficijenti $\rho(x)$ i $\mathbf{A}(x) \in \mathrm{Sym}$ zadovoljavaju svojstva koercitivnosti i omeđenosti (i.e. $d \geqslant \rho \geqslant c > 0$ i $\alpha\mathbf{I} \leqslant \mathbf{A} \leqslant \beta\mathbf{I}$, za $\alpha > 0$), te početni uvjeti $\gamma_n$ i $\beta_n$ imaju nosače sadržane u fiksnom kompaktnom skupu.

**Teorem 3.** *Gornja konvergencija početnih uvjeta povlači konvergenciju rješenja*

$$u_n \xrightharpoonup{*} 0 \tag{9}$$

*u prostoru* $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)) \cap \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$ *za* $T \in \mathbf{R}^+$.

Dem. Iz dokaza teorema postojanja rješenja i omeđenosti nizova $(\beta_n)$ i $(\gamma_n)$ slijedi da su nizovi $(u_n)$ i $(u_n')$ omeđeni u $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$, odnosno $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d))$. Zbog toga vrijede konvergencije $u_n \xrightharpoonup{*} u$ i $u_n' \xrightharpoonup{*} u'$ u odgovarajućim prostorima. Nadalje, isti dokaz nam također daje da

$$u_n^3 \to u^3$$

u $\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d)$. Zbog toga vrijedi jednakost

$$\rho u'' + Bu - u^3 = 0$$

u smislu distribucija, pri čemu je operator $B = -\mathsf{div}\,\mathbf{A}\nabla$.

Preostaje nam izračunati početne uvjete za $u$ i $u'$. Koristeći parcijalnu integraciju imamo da je za svaki $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{d+1})$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty {}_{V'}\langle\, \rho u_n'' + Bu_n + u_n^3, \phi\,\rangle_V &= \int_0^\infty {}_{V'}\langle\, \rho u_n, \phi''\,\rangle_V - {}_{V'}\langle\, \rho u_n(0), \phi'(0)\,\rangle_V \\ &\quad + \langle\, \rho u_n'(0) \mid \phi(0)\,\rangle_H + \int_0^\infty {}_{V'}\langle\, Bu_n + u_n^3, \phi\,\rangle_V \\ &\to \int_0^\infty {}_{V'}\langle\, \rho u, \phi''\,\rangle_V + \int_0^\infty {}_{V'}\langle\, Bu + u^3, \phi\,\rangle_V .\end{aligned} \tag{10}$$

S druge strane

$$\begin{aligned}\int_0^\infty {}_{V'}\langle\, \rho u_n'' + Bu_n + u_n^3, \phi\,\rangle_V &\to \int_0^\infty {}_{V'}\langle\, \rho u'' + Bu + u^3, \phi\,\rangle_V \\ &= \int_0^\infty {}_{V'}\langle\, \rho u, \phi''\,\rangle_V - {}_{V'}\langle\, \rho u(0), \phi'(0)\,\rangle_V \\ &\quad + \langle\, \rho u'(0) \mid \phi(0)\,\rangle_H + \int_0^\infty {}_{V'}\langle\, Bu + u^3, \phi\,\rangle_V .\end{aligned} \tag{11}$$

Uspoređivanjem relacija (11) i (10) slijedi

$${}_{V'}\langle\, \rho u(0), \phi'(0)\,\rangle_V - \langle\, \rho u'(0) \mid \phi(0)\,\rangle_H = 0, \quad \phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{d+1}),$$

iz čega zaključujemo da je $u(0) = u'(0) = 0$. Tvrdnja teorema vrijedi zbog jedinstvenosti rješenja.

**Q.E.D.**

Svakoj gornjoj zadaći pridružit ćemo funkciju gustoće energije

$$d_n := q(\nabla_{\mathbf{x}} u_n) + \frac{1}{4} u_n^4 ,$$

pri čemu smo s $q(\mathsf{v})$ označili kvadratnu formu

$$q(x;\mathsf{v}) := \frac{1}{2}[\rho(x) v_0^2 + \mathbf{A}(x) v \cdot v] .$$

Zanima nas ponašanje energije pri prijelazu na distribucijski limes. Osnovni alat koji ćemo pri tom koristiti su $H$-mjere. U tu svrhu, najprije ćemo uvesti sljedeće $L^2$ funkcije

$$\begin{aligned} \mathsf{V}_n &:= \theta \nabla_{\mathbf{x}} u_n, \\ W_n &:= \theta u_n^2, \end{aligned}$$

pri čemu rezanje s $\theta \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ koja je jednaka 1 na $[0, T]$ rezultira funkcijom s kompaktnim nosačem u $t$. Na taj način smo definirali funkcije iz $L^2(\mathbf{R}^{d+1})$, što nam je osnovni preduvjet za korištenje H-mjera. Zbog uniformne kompaktnosti nosača početnih uvjeta $\gamma_n$ i $\beta_n$ i konačne brzine širenja za valnu jednadžbu, nosač po varijabli $x$ će također u svakom trenutku $t \in \mathbf{R}^+$ biti sadržan u kompaktnom skupu. Važno je uočiti da, budući da radimo s funkcijama iz $L^2$ prostora, a ne $L^2_{\mathrm{loc}}$, pripadna H-mjera će biti konačna.

Za svaki $\phi \in C_c^\infty(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^d)$ želimo izračunati limes

$$D_n = \int_{\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^d} d_n \phi \, dt dx = \int_{\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^d} \Big[ q(\mathsf{V}_n) + \frac{1}{4} W_n^2 \Big] \phi \, d\mathbf{x} \, ,$$

odnosno distribucijski limes gustoća energije $d_n$.

U slučaju trodimenzionalnog prostora imamo kompaktno Soboljevljevo ulaganje $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ za $p \in [1, 6\rangle$, i omeđen skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$, na osnovu čega ćemo moći zanemariti nelinearni član u energiji. Zbog toga, kao i činjenice da jedinstvenost rješenja zadaće (8) imamo samo za dimenziju $d \leqslant 3$, daljnji račun ćemo ograničiti na slučaj trodimenzionalnog prostora.

Teorem 3. povlači jaku konvergenciju

$$\phi u_n \to 0 \quad \text{u} \quad L^4(\mathbf{R}^{3+1}) \, ,$$

pa na taj način član $W_n^2$ može biti zanemaren u računanju limesa $D_n$. Efektivno, možemo pisati

$$D_n = \int_{\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^3} \mathbf{P} \mathsf{V}_n \cdot \mathsf{V}_n \, d\mathbf{x} \, ,$$

gdje pseudodiferencijalni operator $\mathbf{P}$ ima simbol

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho(x)\phi(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(x)\phi(\mathbf{x}) \end{bmatrix} .$$

Uz pomoć H-mjere $\boldsymbol{\mu}$ pridružene nizu $(\mathsf{V}_n)$, traženi limes se može zapisati na sljedeći način

$$\lim D_n = \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{p} \rangle = \int \mathsf{tr} \left( \mathbf{p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right) .$$

Stoga se zadatak svodi na određivanje mjere $\boldsymbol{\mu}$, odnosno na to da se ona izrazi pomoću početnih uvjeta.

Koristeći rezultate 2. poglavlja, sažmimo svojstva H-mjere $\boldsymbol{\mu}$ pridružene nizu derivacija rješenja valne jednadžbe.

**Teorem 4.** *$H$-mjera $\boldsymbol{\mu}$ pridružena nizu derivacija rješenja zadaća (8) je oblika*

$$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) \nu,$$

*pri čemu je $\nu$ nenegativna skalarna Radonova mjera za koju vrijedi lokalizacijsko svojstvo*

$$Q(x, \boldsymbol{\xi}) \nu = \frac{1}{2} [\rho(x) \tau^2 - A(x) \xi \cdot \xi] \nu = 0. \tag{12}$$

*Označimo s $\boldsymbol{\mu}'$ H-mjeru pridruženu nizu $(V_n, f_n)$, pri čemu je $f_n$ nelinearni (nehomogeni) član u valnoj jednadžbi ($f_n = u_n^3$). Tada je ($\times$ označuje član koji nas ne zanima)*

$$\boldsymbol{\mu}' = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\nu & \boldsymbol{\xi}\nu^{12} \\ (\boldsymbol{\xi}\nu^{12})^* & \times \end{bmatrix},$$

*i vrijedi takozvano prijenosno svojstvo*

$$\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle = 2\langle \tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\rangle, \qquad \Phi \in \mathrm{C}_c^1(\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3), \tag{13}$$

*pri čemu je s $\{.,.\}$ označena Poissonova zagrada definirana na sljedeći način*

$$\{\phi, Q\} = \nabla_\xi \phi \cdot \nabla_y Q - \nabla_y \phi \cdot \nabla_\xi Q.$$

∎

**Korolar 1.** *Ekvator $\{\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{S}^d : \tau = 0\}$, te polovi $\{\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{S}^d : \tau = \pm 1\}$ nisu u nosaču mjere $\nu$.*

Dem. Uzimajući u obzir lokalizacijsko svojstvo (12) na nosaču mjere $\nu$ vrijedi

$$\begin{aligned} \rho(x)\tau^2 &= \mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi \geqslant \alpha|\xi|^2, \\ |\tau|^2 + |\xi|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Pozitivnost funkcije $\rho$ sad povlači tvrdnju korolara.

**Q.E.D.**

Imajući na umu primjenu računa na mehaniku kontinuuma (koja zahtijeva manje regularne simbole od onih uvedenih u prvom poglavlju), želimo uvesti nove, manje regularne klase simbola. Međutim, kako je dokaz prijenosnog svojstva zasnovan na drugoj komutacijskoj lemi, moramo zahtijevati da su koeficijenti $\mathbf{A}$ i $\rho$ barem iz klase $\mathrm{C}_0^1(\mathbf{R}^3)$. Pri izgradnji teorije za uvedenu klasu simbola, trebat će nam sljedeća inačica komutacijskih lema.

**Lema 3.** *Neka je $a \in S^m, m \geqslant 1, b \in X^{s+1}, s+1 \geqslant m$, te $A$ i $B$ njima pridruženi operatori na način objašnjen u II.4. Tada je komutator $[A,B]$ kompaktan operator s $\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{H}^{s-m+1}(\mathbf{R}^d)$.*

Dem. Koristeći nejednakost $|a(\boldsymbol{\xi}) - a(\boldsymbol{\eta})| \leqslant C\left(|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^m + |\boldsymbol{\eta}|^{m-1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|\right)$, dobijemo

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\xi}|^{s-m+1}|\mathcal{F}\,(AB-BA)\,u(\boldsymbol{\xi})| &= |\boldsymbol{\xi}|^{s-m+1}\int |(a(\boldsymbol{\xi}) - a(\boldsymbol{\eta}))\hat{b}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\hat{u}(\eta)|d\boldsymbol{\eta} \\ &\leqslant C\int |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\eta}|^{s-m+1}(|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^m + |\boldsymbol{\eta}|^{m-1}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|)|\hat{b}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})||\hat{u}(\boldsymbol{\eta})|d\boldsymbol{\eta} \\ &\leqslant C\Big(\int |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|^{s+1}|\hat{b}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})||\hat{u}(\boldsymbol{\eta})|d\boldsymbol{\eta} + \int |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}||\hat{b}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})||\boldsymbol{\eta}|^s|\hat{u}(\boldsymbol{\eta})|d\boldsymbol{\eta}\Big) \\ &\leqslant C\Big(\|b\|_{X^{s+1}}\|u\|_{\mathrm{L}^2} + \|b\|_{X^1}\|u\|_{\mathrm{H}^s}\Big). \end{aligned}$$

**Q.E.D.**

Kako ćemo uglavnom raditi s $\mathrm{L}^2$ funkcijama, definirat ćemo novu klasu (u oznaci $T^m$) na sljedeći način: $T^m$ se sastoji od funkcija oblika $t(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum a_n(\boldsymbol{\xi})b_n(\mathbf{x})$, pri čemu funkcije $a_n$ pripadaju Hörmanderovoj klasi $S^m$, a $b_n$ Tartarovoj klasi $X^1$, te pri tom vrijedi

$$\sum_n \sum_{j=1}^m \|\lambda(\boldsymbol{\xi})^{-m+j} a_n^{(j)}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathrm{L}^\infty}\|b_n(\mathbf{x})\|_{X^1} < \infty. \tag{14}$$

Redoslijed djelovanja operatora množenja i množitelja nije važan zbog posljednje leme. Definirajmo klasu operatora pridruženu simbolima s oslabljenom regularnošću. Operatori pridruženi simbolima iz klase $T^m$ tvore vektorski prostor kojeg označujemo sa $\Xi^m$. Njega definiramo na sljedeći način: neprekidni linearni operator $L$ s $\mathrm{H}^0$ u $\mathrm{H}^{-m}$ pripada klasi $\Xi^m, m \geqslant 1$,ukoliko je

$$L = \sum A_n B_n + C,$$

gdje je $C$ kompaktan operator, dok su $A_n, B_n$ operatori pridruženi simbolima $a_n \in \mathrm{S}^m, b_n \in \mathrm{X}^1$ koji zadovoljavaju (14).

U skladu s prijašnjom notacijom, sa $\Xi_c^m$ ćemo označiti potprostor od $\Xi^m$ koji sadrži operatore s kompaktno nošenim simbolima.

Naš je cilj dobiti prijenosnu jednadžbu za mjeru $\mu$ pomoću koje ćemo ju moći odrediti ukoliko znamo njezin *trag* u trenutku $t = 0$. U tu svrhu ćemo izvršiti parcijalnu integraciju jednakosti (13).

Jednadžbu (13) možemo zapisati kao

$$\langle \tau\nu, \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\Phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}}Q\rangle - \langle \tau\nu, \nabla_{\mathbf{x}}\Phi \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}Q\rangle = 2\langle \tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\rangle. \tag{15}$$

Budući da $\Phi$ ima kompaktan nosač, za drugi član na lijevoj strani gornje jednakosti imamo

$$\langle \tau\nu, \nabla_{\mathbf{x}}\Phi \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}Q\rangle = -\langle \nabla_{\mathbf{x}}(\tau\nu), \Phi\nabla_{\mathbf{x}}Q\rangle - \langle \tau\nu, \Phi \mathsf{div}_{\boldsymbol{\xi}}\,(\nabla_{\mathbf{x}}Q)\rangle.$$

Parcijalna integracija prvog člana u (15) je složenija, zbog toga što je područje integracije sfera $\mathrm{S}^3$. Radi pojednostavljenja zapisa uvedimo oznaku

$$\boldsymbol{\nu} = \tau\nu\nabla_{\mathbf{x}}Q.$$

Naš se zadatak sad svodi na parcijalnu integraciju izraza $\langle \boldsymbol{\nu}, \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\Phi\rangle$. Koristit ćemo sljedeću jednakost za distribucijski račun na sferi (v. [FM] ili [GT], Lema 16.1.)

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\Phi\rangle - \langle \boldsymbol{\nu} \cdot n, \nabla_{\mathbf{n}}\Phi\rangle + \langle \mathsf{div}_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\nu} - \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\nu}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \Phi\rangle = d\langle \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}, \Phi\rangle,$$

gdje $\mathbf{n}$ označava normalu na $\mathrm{S}^d$.

Budući da funkciju $\Phi$ možemo glatko proširiti po homogenosti stupnja nula sa $\mathrm{S}^3$ na $\mathbf{R}^3_*$, te stoga što je na sferi $\mathbf{n} = \boldsymbol{\xi}$,

$$\nabla_{\mathbf{n}}\Phi = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\Phi \cdot \boldsymbol{\xi} = 0.$$

Na taj način prvi član u (15) postaje

$$\begin{aligned}&\langle 3\tau\nu\nabla_{\mathbf{x}}Q \cdot \boldsymbol{\xi} - \mathsf{div}_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu\nabla_{\mathbf{x}}Q) + \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu\nabla_{\mathbf{x}}Q)\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}, \Phi\rangle \\ &\quad = \langle 3\tau\nu(\nabla_{\mathbf{x}}Q \cdot \boldsymbol{\xi} - \mathsf{div}_{\boldsymbol{\xi}}\nabla_{\mathbf{x}}Q + (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\boldsymbol{\xi}})Q\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}) - \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}}Q - (\nabla_{\mathbf{x}}Q \cdot \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}), \Phi\rangle.\end{aligned}$$

Primijenimo činjenicu da je funkcija $Q$ homogena stupnja 2, odnosno da je

$$\nabla_{\mathbf{x}}Q(\mathbf{x}, t\boldsymbol{\xi}) = t^2\nabla_{\mathbf{x}}Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Deriviranjem zadnje jednakosti po $t$ dobijemo

$$(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\boldsymbol{\xi}})Q(\mathbf{x}, t\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} = 2t\nabla_{\mathbf{x}}Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

odakle, uvrštavanjem $t = 1$ slijedi

$$(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\boldsymbol{\xi}})Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} = 2\nabla_{\mathbf{x}}Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Koristeći gore navedeno, relaciju (15) možemo zapisati u obliku

$$\langle \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q - \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} Q - (\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}) + \tau\nu(3+2)\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \boldsymbol{\xi}, \Phi\rangle = 2\langle \tau \mathsf{Re}\, \nu^{12}, \Phi\rangle$$

Zbog proizvoljnosti funkcije $\Phi \in \mathrm{C}^1_c(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$, slijedi da je

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q - \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} Q - (\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}) + \tau\nu(3+2)\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \boldsymbol{\xi} = 2\tau \mathsf{Re}\, \nu^{12}$$

u smislu distribucija.

Na kraju, deriviranjem lokalizacijskog svojstva (12) po $\mathbf{x}$, slijedi da član $(\tau\nu)\nabla_{\mathbf{x}} Q$ možemo zamijeniti s $-Q\nabla_{\mathbf{x}}(\tau\nu)$, pa zadnja jednakost prelazi u prijenosnu jednadžbu za mjeru $\nu$, odnosno točnije rečeno, za mjeru $\tau\nu$:

$$\nabla_{\xi}(\tau\nu) \cdot (\nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q - (3+2)Q\boldsymbol{\xi}) - \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} Q - (\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}) = 2\tau \mathsf{Re}\, \nu^{12}. \tag{16}$$

Naš je cilj izraziti mjeru $\nu$ pomoću početnih uvjeta za valnu jednadžbu, to jest uvesti u razmatranje *trag* mjere $\nu$. U tu svrhu definiramo preslikavanje

$$r \mapsto \langle\langle \nu, r\rangle\rangle := \langle \chi_{\langle 0,\infty\rangle}\nu, r\rangle,$$

pri čemu je $r \in \mathrm{C}_c([0, \infty\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$, dok je $\chi_{\langle 0,\infty\rangle}(t)$ karakteristična funkcija otvorenog intervala $\langle 0, \infty\rangle$. Gornje preslikavanje je dobro definirano i ono ne vidi djelovanje mjere $\nu$ u $t = 0$. Naravno, pritom za $r \in \mathrm{C}_c(\langle 0, \infty\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$ vrijedi

$$\langle\langle \nu, r\rangle\rangle = \langle \nu, r\rangle.$$

Za $\Phi \in \mathrm{C}^1_c([0, \infty\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$ funkcija $\tau\{\Phi, Q\}$ leži u prostoru $\mathrm{C}_c([0, \infty\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$, pa je izraz $\langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle$ dobro definiran. U sljedećem koraku željeli bismo dokazati da $\langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle - 2\langle\langle \tau \mathsf{Re}\, \nu^{12}, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle$ ovisi samo o vrijednosti funkcije $\Phi$ u trenutku $t = 0$, te da taj izraz definira trag mjere $\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau\nu)$ u istom trenutku.

U tu svrhu najprije pretpostavimo da je mjera $\nu$ apsolutno neprekidna obzirom na Lebesgueovu mjeru, odnosno da je

$$\langle \nu, \Phi\rangle = \int_{\mathbf{R}^{3+1}} \int_{\mathrm{S}^3} \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x},$$

pri čemu je $\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ glatka gustoća mjere $\nu$. Polazeći od jednakosti

$$\langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle = \int_0^T \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathrm{S}^3} \big(\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\Phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} Q - \nabla_{\mathbf{x}}\Phi \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q\big)\, \tau\, \nu\, d\boldsymbol{\xi}\, dx\, dt,$$

parcijalno integrirajući gornje jednakosti na isti način kojim smo izveli relaciju (16), te uzimajući u obzir rubni uvjet u $t = 0$, dobijemo

$$\begin{aligned}\langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle = \int_0^T \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathrm{S}^3} \Big(&\nabla_{\xi}(\tau\nu) \cdot (\nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q - (3+2)Q\boldsymbol{\xi}) \\ &- \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} Q - (\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi})\Big)\Phi\, d\boldsymbol{\xi} dx dt \\ &+ \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathrm{S}^3} \Big[\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau\nu)\Big]_{t=0} \Phi(0, x, \xi)\, d\boldsymbol{\xi} dx dt \\ = 2\langle\langle \tau \mathsf{Re}\, \nu^{12}, \Phi\rangle\rangle &+ \int_{\mathbf{R}^3} \int_{\mathrm{S}^3} \Big[\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau\nu)\Big]_{t=0} \Phi(0, x, \xi) d\boldsymbol{\xi} dx dt.\end{aligned}$$

Na taj način vidimo da izraz $\langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle - 2\langle\langle \tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\rangle\rangle$ definira trag mjere $\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau\nu)$ u $t=0$ u slučaju kad mjera $\nu$ ima glatku gustoću.

Gornja tvrdnja se može dokazati i kad $\nu$ nema prije pretpostavljenu regularnost. U tu svrhu definirajmo niz funkcija $\psi_\delta := \psi(\frac{t}{\delta})$, gdje je $\psi$ nenegativna neopadajuća glatka funkcija takva da je

$$\begin{cases} \psi(t) &= 0, \qquad t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \psi(t) &= 1, \qquad t \geqslant 1. \end{cases}$$

Za $\Phi \in \mathrm{C}^1_c([0,\infty\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$ funkcija $\Phi\psi_\delta$ je regularna test funkcija za (15). Izdvajajući član koji sadrži $\Phi\psi'_\delta$, dobijemo

$$\langle \tau\nu, \psi_\delta \nabla_{\boldsymbol\xi}\Phi \cdot \nabla_{\mathbf{x}} Q\rangle - \langle \tau\nu, \psi_\delta \nabla_{\mathbf{x}}\Phi \cdot \nabla_{\boldsymbol\xi} Q\rangle - 2\langle \tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\psi_\delta\rangle = \langle \tau\nu, \frac{\partial Q}{\partial \tau}\Phi\psi'_\delta\rangle.$$

Kad $\delta$ teži k nuli, lijeva strana gornje jednakosti teži k $\langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle - 2\langle\langle \tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\rangle\rangle$. Definirajući neprekidnu funkciju

$$\tilde\Phi(t, x, \boldsymbol\xi) = \Phi(t, x, \boldsymbol\xi) - \Phi(0, x, \boldsymbol\xi)$$

možemo desnu stranu u gornjoj jednakosti zapisati kao

$$\Big\langle \tau\nu, \frac{\partial Q}{\partial \tau}\Phi(0)\psi'_\delta\Big\rangle + \Big\langle \tau\nu, \frac{\partial Q}{\partial \tau}\tilde\Phi\psi'_\delta\Big\rangle.$$

Budući da $\psi'_\delta$ iščezava izvan intervala $\langle \frac{\delta}{2}, \delta\rangle$, te je reda $\mathcal{O}(\frac{1}{\delta})$ na njemu, dok je $\tau$ reda $\delta$ na $\langle \frac{\delta}{2}, \delta\rangle$, slijedi da je

$$\langle \tau\nu, \frac{\partial Q}{\partial \tau}\tilde\Phi\psi'_\delta\rangle \leqslant C\langle \nu, \chi_{\langle \frac{\delta}{2}, \delta\rangle}\rangle,$$

što zbog konačnosti mjere $\nu$ teži k nuli po $\delta$. Preostali član koji ovisi samo o vrijednosti funkcije $\Phi$ u $t=0$ teži k $\langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle - 2\langle\langle \tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\rangle\rangle$, čime je tvrdnja dokazana.

Budući da je $\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau\nu) = \rho(x)\tau^2\nu$, te $\tau \neq 0$ na nosaču od $\nu$ i $\rho(x) > 0$, slijedi da mjera $\nu$ ima trag u $t=0$.

Vratimo se sad na (16) i proanalizrajmo strukturu te prijenosne jednadžbe. Uvedimo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{ds} = \nabla_{\boldsymbol\xi} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol\xi) - (3+2)Q(\mathbf{x}, \boldsymbol\xi)\boldsymbol\xi \\ \dfrac{d\boldsymbol\xi}{ds} = -(\mathbf{I} - \boldsymbol\xi \otimes \boldsymbol\xi)\nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol\xi) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*, \qquad \boldsymbol\xi(0) = \boldsymbol\xi^* \end{cases}$$

Desna strana je Lipschitzova funkcija, pa po Picardovom teoremu postoji jedinstveno lokalno rješenje gornjeg sustava. Zanimaju nas samo one frekvencije $\boldsymbol\xi$ koje se nalaze na sferi $\mathrm{S}^3$, pa stoga zahtijevamo da je početni uvjet $\boldsymbol\xi^* \in \mathrm{S}^3$. Množeći drugu jednadžbu u (17) skalarno s $\boldsymbol\xi$, dobijemo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{1}{2}\frac{d|\boldsymbol\xi|^2}{ds} = -\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \boldsymbol\xi(|\boldsymbol\xi|^2 - 1)$$

s početnim uvjetom $|\boldsymbol\xi(0)|^2 = 1$, iz čega slijedi da je $|\boldsymbol\xi(s)|^2 = 1$ na intervalu postojanja. Uzevši to u obzir pri razmatranju prve jednadžbe u (17), kao i uniformnu omeđenost funkcija $Q$ i $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q$, slijedi da je $\mathbf{x}$ također omeđena, pa zbog toga postoji globalno rješenje zadaće (17) za svaki par početnih uvjeta $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\xi}^*) \in \mathbf{R}^{3+1} \times \mathrm{S}^3$.

Na osnovu prijenosne jednadžbe (16) slijedi da se mjera $\tau\nu$ propagira duž integralnih krivulja sustava (17). Pomoću Korolara 1., koji kaže da ekvator $\{\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{S}^3 : \xi_0 = 0\}$ nije u nosaču mjere $\nu$, zaključujemo isto i za mjeru $\nu$.

Želimo pokazati da kroz svaku točku nosača $\nu$ prolazi jedinstvena integralna krivulja sustava (17) i da ona siječe hiperravninu $t = 0$. U tu svrhu najprije dokažimo sljedeću lemu.

**Lema 4.** *Ako početni uvjeti $\mathbf{x}^*$ i $\boldsymbol{\xi}^*$ sustava (17) zadovoljavaju relaciju*

$$Q(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\xi}^*) = 0,$$

*onda za rješenje $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ istog sustava vrijedi*

$$Q(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\xi}(s)) = 0, \quad s \in \mathbf{R}^+.$$

Dem. Koristeći lančano pravilo i uvaživši (17) imamo

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{ds} &= \nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot (\nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - (3+2) Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}) - \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q \cdot (\mathbf{I} - \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) \nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= -\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot (3+2) Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} + \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q \cdot (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) \nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\end{aligned}$$

Uz pomoć homogenosti funkcije $Q$, točnije, relacije

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} = 2Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

dobijemo Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{ds} = -3\, Q\, (\nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \boldsymbol{\xi}) \\ Q(\mathbf{x}(0), \boldsymbol{\xi}(0)) = 0, \end{cases}$$

čije rješenje je konstantna funkcija $Q = 0$.

**Q.E.D.**

Neka je $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \in \operatorname{supp} \nu \subseteq \mathbf{R}^{3+1} \times \mathrm{S}^3$. Zbog lokalizacijskog svojstva (12) slijedi da je

$$Q(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = 0.$$

Očito će kroz svaku točku koja zadovoljava gornju jednakost prolaziti jedna integralna krivulja sustava (17), međutim, pokažimo da će ta integralna krivulja sijeći hiperravninu $t = 0$. U tu svrhu razmotrimo jedinstvenu integralnu krivlju $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ sustava (17) s početnim uvjetima

$$\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}\,, \qquad \boldsymbol{\xi}(0) = \hat{\boldsymbol{\xi}}.$$

Na osnovu Leme 4. zaključujemo da vrijedi

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{\partial Q}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \rho(x)\tau, \\ \dfrac{d\tau}{ds} = -\dfrac{\partial Q}{\partial t}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \Big(\nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi}\Big)\tau \\ \qquad = \Big(\nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi}\Big)\tau. \end{cases} \tag{18}$$

Zadnja jednadžba implicira da $\tau(s)$ ne mijenja predznak, na osnovu čega iz prve jednadžbe slijedi da je $t(s)$ monotona funkcija. Želimo pokazati da je

$$\tau(s) \geqslant \alpha > 0, \tag{19}$$

što povlači da je

$$\frac{dt}{ds} \geqslant \rho\alpha > 0,$$

odnosno

$$\lim_{s\to\pm\infty} |t(s)| = +\infty,$$

zbog čega možemo zaključiti da postoji $s \in \mathbf{R}$ takav da je $t(s) = 0$.

Preostaje nam dokazati (19). Razmotrimo niz $(s_n)$ za koji vrijedi

$$|\tau(s_n)| \to l := \liminf_{s\in\mathbf{R}} |\tau(s)|.$$

Koristeći omeđenost koeficijenata $\rho$ i $\mathbf{A}$ možemo prijelazom na podniz (kojeg označujemo jednako), dobiti sljedeće konvergencije

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}(s_n) \to \boldsymbol{\xi}^\infty, \\ \rho(x(s_n)) \to \rho^\infty, \\ \mathbf{A}(x(s_n)) \to \mathbf{A}^\infty. \end{cases}$$

Budući da je $Q(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\xi}(s)) = 0$, vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{cases} (\tau^\infty)^2 + \sum_{i=1}^N (\xi_i^\infty)^2 = 1 \\ \rho^\infty(\tau^\infty)^2 - \sum_{i,j=1}^N a_{ij^\infty}\xi_i^\infty\xi_j^\infty = 0. \end{cases}$$

Koristeći koercitivnost matrice $\mathbf{A}$ slijedi da je $l = |\tau^\infty| \neq 0$.

Time smo dokazali da karakteristike prijenosne jednadžbe (16) u potpunosti pokrivaju nosač mjere $\nu$, odnosno da je mjera $\nu$ potpuno određena svojom vrijednošću u $t = 0$. Budući da ona jednoznačno određuje makroskopsku gustoće energije valne jednadžbe, preostali problem se svodi na računanje njenog traga u $t = 0$, što je sadržaj sljedećeg odjeljka. Prije nego što počnemo rješavati taj problem, prokomentirajmo detajnije sustav (17).

Integralne krivulje sustava (17) čiji početni uvjeti zadovoljavaju

$$\begin{cases} |\boldsymbol{\xi}^*| = 1, \\ Q(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\xi}^*) = 0, \end{cases}$$

mogu se interpretirati kao projekcija na $\mathbf{R}^{3+1} \times \mathrm{S}^3$ integralnih krivulja Hamiltonovog sustava na $\mathbf{R}^{3+1} \times \mathbf{R}^{3+1}$ s istim početnim uvjetima, koje ćemo u daljnjem nazivati *bikarakteristikama*.

U tu svrhu razmotrimo sljedeći Hamiltonov sustav

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{ds} = \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}\Big(\dfrac{Q}{|\boldsymbol{\zeta}|}\Big)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}), \\ \dfrac{d\boldsymbol{\zeta}}{ds} = -\nabla_{\mathbf{x}}\Big(\dfrac{Q}{|\boldsymbol{\zeta}|}\Big)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^\sharp, \qquad \boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\zeta}^\sharp \end{cases} \tag{20}$$

Kako je gradijent $\frac{Q}{|\boldsymbol{\zeta}|}$ Lipschitzova funkcija na $\mathbf{R}^{3+1}\times\mathbf{R}^{3+1}$, slijedi postojanje i jedinstvenost globalnog rješenja sustava (20) za svaki par početnih uvjeta $(\mathbf{x}^\sharp, \boldsymbol{\zeta}^\sharp)$.

Nadalje, Hamiltonijan $\frac{Q}{|\boldsymbol{\zeta}|}$ je konstantan duž integralnih krivulja sustava (20). Posebno, ukoliko početni uvjeti zadovoljavaju

$$\begin{cases} |\boldsymbol{\xi}^\sharp| \neq 0, \\ Q(\mathbf{x}^\sharp, \boldsymbol{\xi}^\sharp) = 0, \end{cases}$$

tada je $\boldsymbol{\zeta}(s) \neq 0$ i $Q(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\zeta}(s)) = 0$ za svaki $s > 0$. Homogenost funkcije $Q$ po varijabli $\boldsymbol{\zeta}$ povlači da je također $Q\left(\mathbf{x}(s), \frac{\boldsymbol{\zeta}(s)}{|\boldsymbol{\zeta}(s)|}\right) = 0$ za svaki $s > 0$.

Uvedimo oznaku $\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{\zeta}}{|\boldsymbol{\zeta}|}$. Tada vrijedi

$$\nabla_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\xi} = \frac{(\mathbf{I} - \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\zeta}|}.$$

Zbog homogenosti funkcije $Q$ slijedi, pak, da je

$$\begin{aligned} \frac{Q}{|\boldsymbol{\zeta}|}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) &= |\boldsymbol{\zeta}| Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} &= 2Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Koristeći zadnje dvije jednakosti dobijemo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}\Big(|\boldsymbol{\zeta}| Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Big) \\ &= Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\zeta}}{|\boldsymbol{\zeta}|} + |\boldsymbol{\zeta}| \nabla_{\boldsymbol{\zeta}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} + |\boldsymbol{\zeta}| \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ &= Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{I} - \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{ds} &= \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\xi} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{ds} \\ &= -\frac{(\mathbf{I} - \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\zeta}|} \nabla_{\mathbf{x}}\Big(\frac{Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})}{|\boldsymbol{\zeta}|}\Big)(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) \\ &= -(\mathbf{I} - \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) \nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Na taj način smo dobili Cauchyjev problem

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{ds} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \\ \dfrac{d\boldsymbol{\xi}}{ds} = -(\mathbf{I} - \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) \nabla_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^\sharp, \qquad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}^\sharp, \end{cases} \tag{21}$$

čiji početni uvjeti zadovoljavaju

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}^\sharp \in \mathrm{S}^3, \\ Q(\mathbf{x}^\sharp, \boldsymbol{\xi}^\sharp) = 0. \end{cases}$$

Uspoređujući sustave (21) i (17) vidimo da se međusobno razlikuju u koeficijentu uz član $Q(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ u prvoj jednadžbi. Međutim taj član iščezava kad god početni uvjeti zadovoljavaju $Q(\mathbf{x}^\sharp,\boldsymbol{\xi}^\sharp)=0$.

Time smo dokazali da su projekcije bikarakteristika Hamiltonijana $\frac{Q}{|\boldsymbol{\zeta}|}$ na $\mathbf{R}^{3+1}\times \mathrm{S}^3$ upravo integralne krivulje sustava (17) duž kojih se propagira mjera $\nu$, kad god početni uvjeti sustava (20) zadovoljavaju $\boldsymbol{\zeta}^\sharp\neq 0, Q(\mathbf{x}^\sharp,\boldsymbol{\zeta}^\sharp)=0$.

## 4. Računanje traga H-mjere $\nu$

Neka je $P\in\Psi^0(\mathbf{R}^{3+1};\mathbf{R})$ pseudodiferencijalni operator s realnim glavnim simbolom $p(\boldsymbol{\xi})=p_0(\tau)p_1(\xi)$. Primjenjujući operator $P\circ\theta$ na valnu jednadžbu, gdje $\theta$ označuje operator množenja funkcijom $\theta$ definiranom u drugom odjeljku, dobijemo

$$(\rho PV_n^0)'-\mathsf{div}_x(\mathbf{A}PV_n^x)-P(\rho\theta' u_n')+\mathsf{K}\cdot\mathsf{V}_n-P(\theta u_n^3)=0\,,$$

pri čemu je $\mathsf{K}:=(K_0,-K_x)$ pseudodiferencijalni operator reda 0 definiran sljedećim izrazima

$$K_0:=\partial_0\circ[P,\rho],\qquad K_x:=\mathsf{div}_x\circ[P,\mathbf{A}].$$

Simbol operatora $\mathsf{K}$ ćemo označiti s $\mathsf{k}$.

Množeći gornju jednakost s $\overline{PV_n^0}$, za njezin realni dio se dobije

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(q(P\mathsf{V}_n)+\mathsf{Re}\,\Big(P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\Big)\Big)&-\mathsf{Re}\,\Big(\mathsf{div}_x(\mathbf{A}PV_n^x\overline{PV_n^0})\Big)\\ -\mathsf{Re}\,\Big(P(\theta' u_n^3+3\theta u_n^2u_n')\overline{P(\theta u_n)}&+\mathsf{Re}\,\Big(P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta' u_n)}\Big)\\ -\mathsf{Re}\,\Big(P(\rho\theta' u_n')\overline{PV_n^0}&+\mathbf{A}\,PV_n^x\cdot P(\theta'\nabla_x u_n)\Big)\\ +\mathsf{Re}\,\Big((\mathsf{K}\cdot\mathsf{V}_n\overline{PV_n^0}\Big)&-2\mathsf{Re}\,\Big(P(\theta u_n^3)\overline{PV_n^0}\Big)=0.\end{aligned}$$

Pažljivi čitatelj je zasigurno primijetio da smo u prethodnoj jednakosti dodali i oduzeli član $\frac{\partial}{\partial t}\mathsf{Re}\,\Big(P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\Big)$. To je posljedica *namještanja* u cilju dobivanja odgovarajućeg limesa gornje jednakosti, o čemu će više govora biti kasnije.

Pomnožimo gornju jednakost s $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3)$, integrirajmo je po $\mathbf{R}^3$ i izvršimo odgovarajuću parcijalnu integraciju. Definirajući

$$R_n:=\int_{\mathbf{R}^3}\Big(q(P\mathsf{V}_n)+\mathsf{Re}\,\Big(P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\Big)\Big)\varphi\,dx\,, \tag{22}$$

dobijemo

$$\begin{aligned}&\frac{dR_n}{dt}+\mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}\overline{PV_n^0}\mathbf{A}\,PV_n^x\cdot\nabla_x\varphi\,dx\\ &\quad-\mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}\Big(P(\theta' u_n^3+3\theta u_n^2u_n')\overline{P(\theta u_n)}+P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta' u_n)}\Big)\varphi\,dx\\ &\quad-\mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}\Big(P(\rho\theta' u_n')\overline{PV_n^0}+\mathbf{A}\,PV_n^x\cdot P(\theta'\nabla_x u_n)\Big)\varphi\,dx\\ &\quad+\mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}(\mathsf{K}\cdot\mathsf{V}_n)\overline{PV_n^0}\varphi\,dx-2\mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}P(\theta u_n^3)\overline{PV_n^0}\varphi\,dx=0\,.\end{aligned}\tag{23}$$

Funkcija $R_n$ je ista kao ona definirana u [FM] do na član $\mathsf{Re}\,\Big(P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\Big)$, koji je posljedica nelinearnosti naše jednadžbe.

**Lema 5.** *Do na prijelaz na podniz, $R_n \longrightarrow R$ lokalno uniformno.*

Dem. Dovoljno je pokazati da je $R_n$ omeđen u $\mathrm{H}^1(\mathbf{R})$, budući da tada željena konvergencija slijedi iz slabe kompaktnosti niza i Soboljevljevog ulaganja $\mathrm{H}^1([0,T]) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^\infty([0,T])$.

Iz same definicije $R_n$ i neprekidnosti koeficijenata $\rho$ i $\mathbf{A}$ slijedi da je niz omeđen u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$. Koristeći (23) želimo isto pokazati i za $\frac{dR_n}{dt}$.

Svi integrali u (23), izuzev jednog, su očito produkti $\mathrm{L}^2$ omeđenih faktora, pa su kao takvi omeđeni u $\mathrm{L}^1$. Ostaje pokazati da je $\varphi P(\theta u_n^2 u_n')\overline{P(\theta u_n)}$ također omeđen u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{3+1})$. Na osnovu Teorema 3., odnosno konvergencije (9), neposredno slijedi da je $(\theta' u_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$. Koristeći Soboljevljeva ulaganja za slučaj $d = 3$ imamo da su nizovi $(\theta u_n)$ i $(\theta u_n^2)$ omeđeni u $\mathrm{L}^6(\mathbf{R}^{3+1})$, odnosno $\mathrm{L}^3(\mathbf{R}^{3+1})$. Tražena $\mathrm{L}^2$ ocjena sad slijedi iz činjenice da su pseudodiferencijalni operatori omeđeni na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^3)$ za $p \in \langle 1, \infty\rangle$. Zbog toga je $(R_n)$ omeđen u $\mathrm{W}^{1,1}(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$.

U sljedećem koraku želimo pokazati da je također i $\frac{dR_n}{dt}$ omeđen u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. Za to zaključiti moramo dokazati da su funkcije $P\mathsf{V}_n, P(\theta u_n^3), P(\theta u_n)$ omeđene u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$, (a ne samo u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$).

U tu svrhu uvedimo funkciju $\tilde{R}_n(t)$:

$$\tilde{R}_n = \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbf{R}^3}\Big(q(P\mathsf{V}_n)\Big)\varphi\,dx\Big).$$

$\tilde{R}_n$ je omeđena u $\mathrm{W}^{1,1}(\mathbf{R})$ poput $R_n$, budući da zadovoljava relaciju sličnu relaciji (23) koju zadovoljava $R_n$:

$$\tag{24}\begin{aligned}\frac{d\tilde{R}_n}{dt} &+ \mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}\overline{PV_n^0}\mathbf{A}PV_n^x\cdot\nabla_x\varphi dx\\ &- \mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}\Big(P(\rho\theta' u_n')\overline{PV_n^0} + \mathbf{A}\,PV_n^x\cdot P(\theta'\nabla_x u_n)\Big)\varphi\,dx\\ &+ \mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}(\mathsf{K}\cdot\mathsf{V}_n)\overline{PV_n^0}\varphi\,dx - \mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}P(\theta u_n^3)\overline{PV_n^0}\varphi\,dx = 0.\end{aligned}$$

Razlika između izraza (23) i (24) je što se u potonjoj ne pojavljuju nelinearni članovi. Zbog koercitivnosti matrice $\mathbf{A}$ i omeđenosti funkcije $\rho$ strogo pozitivnim brojem odozdo, zaključujemo da je $P\mathsf{V}_n$ omeđen u $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$.

Omeđenost funkcija $P(\theta u_n^3)$ i $P(\theta u_n)$ u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ se dokazuje na sličan način. Definirajmo funkcije

$$\begin{aligned}R_n^1 &= \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbf{R}^3}\Big(q(P\mathsf{V}_n) + |P(\theta u_n)|^2\Big)\varphi\,dx\Big)\\ R_n^2 &= \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbf{R}^3}\Big(q(P\mathsf{V}_n) + |P(\theta u_n^3)|^2\Big)\varphi\,dx\Big)\end{aligned}$$

i raspišimo za njih analogone relacija (23) i (24)

$$\tag{25}\begin{aligned}\frac{dR_n^1}{dt} &+ \mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}\overline{PV_n^0}\mathbf{A}\,PV_n^x\cdot\nabla_x\varphi\,dx\\ &- \mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}P(\theta' u_n + \theta u_n)\overline{P(\theta u_n)}\varphi\,dx\\ &- \mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}\Big(P(\rho\theta' u_n')\overline{PV_n^0} + \mathbf{A}\,PV_n^x\cdot P(\theta'\nabla_x u_n)\Big)\varphi\,dx\\ &+ \mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}(\mathsf{K}\cdot\mathsf{V}_n)\overline{PV_n^0}\varphi\,dx - 2\mathsf{Re}\int_{\mathbf{R}^3}P(\theta u_n^3)\overline{PV_n^0}\varphi\,dx = 0\ ,\end{aligned}$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
&\frac{dR_n^2}{dt} + \mathsf{Re} \int_{\mathbf{R}^3} \overline{PV_n^0}\mathbf{A}\, PV_n^x \cdot \nabla_x\varphi\, dx \\
&\qquad - \mathsf{Re} \int_{\mathbf{R}^3} P(\theta' u_n^3 + 3\theta u_n^2 u_n')\overline{P(\theta u_n^3)}\varphi\, dx \\
&\qquad - \mathsf{Re} \int_{\mathbf{R}^3} \Big(P(\rho\theta' u_n')\overline{PV_n^0} + \mathbf{A}\, PV_n^x \cdot P(\theta'\nabla_x u_n)\Big)\varphi\, dx \\
&\qquad + \mathsf{Re} \int_{\mathbf{R}^3} (\mathsf{K}\cdot\mathsf{V}_n)\overline{PV_n^0}\varphi\, dx - \mathsf{Re} \int_{\mathbf{R}^3} P(\theta u_n^3)\overline{PV_n^0}\varphi\, dx = 0\,.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Analognim postupkom kao za $R_n$ i $\tilde{R}_n$ možemo zaključiti da su uvedene funkcije omeđene u $\mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. Izuzetak u analogiji zaključivanja predstavlja član $P(\theta u_n^2 u_n')\overline{P(\theta u_n^3)}$, za čiji dokaz omeđenosti u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ će nam poslužiti sljedeće razmatranje.

Na osnovu konvergencije (9) znamo da su nizovi $(\theta u_n^2)$ i $(\theta u_n')$ omeđeni u $\mathrm{L}^3(\mathbf{R}^{3+1}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$, odnosno $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$. Stoga je $\theta u_n^2 u_n'$ omeđen u $\mathrm{L}^{6/5}(\mathbf{R}^{3+1}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{3+1})$. Budući da je Fourierova pretvorba izometrija na $\mathrm{L}^2$ i $\Big(P(\theta u_n^2 u_n')\Big)^\wedge = p(\theta u_n^2 u_n')^\wedge$, dovoljno je pokazati da je $p(\theta u_n^2 u_n')^\wedge$ omeđeno u $\mathrm{L}^2$, odnosno $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$. Za to dokazati, poslužit ćemo se strogom Hausdorff-Youngovom nejednakošću (v. [LL], str. 121.), koja tvrdi da je za $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^3) \cap \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^3)$ i $p \in \langle 1, 2\rangle$, $\|\hat{f}\|_{p'} \leqslant C\|f\|_p$, pri čemu je $1/p + 1/p' = 1$, dok konsatntna $C$ ovisi samo o $p$ i dimneziji prostora $d$. Zbog toga je $p(\theta u_n^2 u_n')^\wedge$ omeđeno u $\mathrm{L}^{(6/5)'}(\mathbf{R}^{3+1}) \subseteq \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{3+1})$, čime je tvrdnja dokazana.

Relacija (23) nam sad daje traženu ocjenu za $\frac{dR_n}{dt}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, budući da svi integrali u njoj predstavljaju $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ produkt $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$ i $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ funkcija. Zbog kompaktnosti ulaganja $\mathrm{H}^1(I) \overset{c}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^\infty(I)$, na svakom kompaktnom intervalu $I \subseteq \mathbf{R}$, slijedi tvrdnja leme.

**Q.E.D.**

Pomnožimo (23) s $\psi \in \mathrm{C}^\infty_c([0,T\rangle)$ i izvršimo parcijalnu integraciju po $[0,T]$. Dobijemo (svi integrali su po $[0,T]\times\mathbf{R}^3$ obzirom na $d\mathbf{x} = dt\, dx$)

$$
\begin{aligned}
\psi(0)R_n(0) = &- \int \Big(q(P\mathsf{V}_n) + \mathsf{Re}\,(P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)})\Big)\varphi\psi' + \mathsf{Re} \int \overline{PV_n^0}\mathbf{A}PV_n^x \cdot \nabla_x\varphi\psi \\
&- \mathsf{Re} \int \Big(P(\theta' u_n^3 + 3\theta u_n^2 u_n')\overline{P(\theta u_n)} + P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta' u_n)}\Big)\varphi\psi \\
&- \mathsf{Re} \int \Big(P(\rho\theta' u_n')\overline{PV_n^0} + \mathbf{A}PV_n^x \cdot P(\theta'\nabla_x u_n)\Big)\varphi\psi \\
&+ \mathsf{Re} \int (\mathsf{K}\cdot\mathsf{V}_n)\overline{PV_n^0}\varphi\psi - 2\mathsf{Re} \int P(\theta u_n^3)\overline{PV_n^0}\varphi\psi\,.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Želimo prijeći na limes u zadnjoj jednakosti. Zbog Leme 5. član na lijevoj strani konvergira k $\psi(0)R(0)$. Razmotrimo četvrti integral na desnoj strani. Vrijedi

$$
\psi P\left(\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial u_n}{\partial t}\right) = \psi\frac{\partial\theta}{\partial t}P\left(\rho\frac{\partial u_n}{\partial t}\right) + \psi\left[P, \frac{\partial\theta}{\partial t}\right]\left(\rho\frac{\partial u_n}{\partial t}\right).
$$

Budući da je $\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$ na $[0,T] \supseteq \operatorname{supp}\psi$, prvi član u gornjoj jednakosti iščezava. Preostali se sastoji od komutatora $[P, \frac{\partial\theta}{\partial t}] \in \Psi^{-1}$, čije djelovanje na omeđeni niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ koji konvergira slabo k nuli, rezultira jako konvergetnim nizom koji na limesu također iščezava. Analognim postupkom se zaključi da i preostali član u četvrtom integralu $\mathbf{A}PV_n^x \cdot P(\theta'\nabla_x u_n)$ teži k nuli.

Zbog toga što $u_n \to 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$ slijedi da svi članovi koji u sebi sadržavaju faktor $u_n$ na limesu također iščezavaju. Izuzev zadnjeg člana u (27), to su upravo svi oni koji su posljedica uvođenja nelinearnosti u valnu jednadžbu.

Preostali članovi su kvadratični, oblika $\psi A V^n \cdot V^n$ ili $\psi' A V^n \cdot V^n$, pri čemu je $A$ pseudodiferencijalni operator reda 0. Stoga se prirodno nameće ideja računanja limesa pomoću H-mjera. Međutim, budući da se u izrazu pojavljuje i funkcija $\psi$, koja nema kompaktan nosač u $\langle 0, T\rangle$, te kao takva nije dobar pseudodiferencijalni operator, nećemo moći neposredno primijeniti H-mjere. Stoga ćemo se poslužiti trikom, uvodeći nenegativnu glatku funkciju $\psi_\delta(t)$ koja zadovoljava

$$\begin{cases} \psi_\delta(t) = 0 & t \leqslant \dfrac{\delta}{2} \\ \psi_\delta(t) = 1 & t \geqslant \delta. \end{cases}$$

Limesi svih preostalih članova se računaju na jednaki način, pa ću račun ilustrirati samo za član

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^3} \rho |P V_n^0|^2 \varphi \psi' dx dt.$$

Uz pomoć funkcije $\psi_\delta$ on se može zapisati kao

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^3} \rho |P V_n^0|^2 \varphi \psi' \psi_\delta dx dt + \int_0^T \int_{\mathbf{R}^3} \rho |P V_n^0|^2 \varphi \psi' (1 - \psi_\delta) dx dt.$$

Zbog toga što je $P V_n^0$ omeđen u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$, te što je $(1 - \psi_\delta) = 0$ izvan intervala $\langle 0, \delta\rangle$, slijedi da je drugi sumand u gornjem izrazu reda $O(\delta)$ i teži uniformno k nuli po $\delta$.

Za fiksni $\delta$, $\psi' \varphi \psi_\delta \in \mathrm{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$, pa možemo primijeniti teorem o egzistenciji H-mjera na niz $\mathsf{V}_n$ i pseudodiferencijalni operator $\tilde{P}$ s glavnim simbolom

$$\tilde{\mp}^0 = \begin{bmatrix} p_{00} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $p_{00} = \rho |p|^2 \varphi \psi' \psi_\delta$. Koristeći Teorem II.4. slijedi da je

$$\lim_n \int_0^T \int_{\mathbf{R}^3} \rho |P V_n^0|^2 \varphi \psi' \psi_\delta dx dt = \langle \boldsymbol{\mu}, \tilde{p}^0 \rangle = \langle \nu, \tau^2 \rho |p|^2 \varphi \psi' \psi_\delta \rangle.$$

Prelazeći sad na limes po $\delta$ dobijemo

$$\lim_\delta \langle \nu, \tau^2 \rho |p|^2 \varphi \psi' \psi_\delta \rangle = \langle\langle \nu, \tau^2 \rho |p|^2 \varphi \psi' \rangle\rangle.$$

Ponavljajući isti postupak u ostalim članovima izraza (27) dobijemo

$$\begin{aligned} \psi(0) R(0) = &-\frac{1}{2} \langle\langle \nu, (\rho \tau^2 + \mathbf{A}\eta \cdot \eta) |p|^2 \varphi \psi' \rangle\rangle + \langle\langle \nu, \tau (\mathbf{A}\eta \cdot \nabla_x \varphi) |p|^2 \psi \rangle \\ &+ \langle\langle \nu, \tau \mathsf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} p \varphi \psi \rangle - 2 \mathsf{Re} \, \langle\langle \nu^{12}, \tau |p|^2 \varphi \psi \rangle. \end{aligned}$$

Zbog lokalizacijskog svojstva je $\rho \tau^2 + \mathbf{A}\eta \cdot \eta = 2 \rho \tau^2$, pa je

$$-\frac{1}{2} \langle\langle \nu, (\rho \tau^2 + A\eta \cdot \eta) |p|^2 \varphi \psi' \rangle\rangle = -\langle\langle \tau \nu, \partial_0 \Phi \, \partial^0 Q \rangle$$

za $\Phi(t, x, \boldsymbol{\xi}) = |p(\boldsymbol{\xi})|^2 \varphi(x) \psi(t)$.

Uvrštavajući izraz za $\mathsf{k}$, imamo da je

$$\mathsf{k} \cdot \boldsymbol{\xi} p\varphi\psi = 2\left(\nabla_x Q \cdot \nabla_\xi p\right) p\varphi\psi = \nabla_{\mathbf{x}} Q \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \Phi,$$

dok je $(\mathbf{A}\eta \cdot \nabla_x \varphi)\,|p|^2\psi = -\nabla_x \Phi \cdot \nabla_\xi Q$. Zbog toga je

$$\psi(0)R(0) = \langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle - \langle\langle 2\tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\rangle\rangle.$$

Desna strana je upravo ona veličina koja definira trag mjere $[\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau\nu)]$ u trenutku $t = 0$. Uočimo da je pri tom $\langle\langle 2\tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\rangle\rangle$ dobiven upravo kao limes $P(\theta u_n^3)\overline{PV_n^0}\varphi\psi$, koji je posljedica *namještanja* s početka odjeljka.

Za dovršenje računa potrebno je izračunati $R(0)$. Pogledamo li izraz (22) kojim je definirana funkcija $R_n$, dolazimo na ideju da u izraz uvrstimo $t = 0$ i desnu stranu izrazimo pomoću H-mjera pridruženih nizu $\mathsf{V}_n(0) = (\theta\beta_n, \theta\nabla_x\gamma)$, odnosno pomoću početnih uvjeta. Međutim, odmah uočavamo problem, budući da je $(P\mathsf{V}_n)(0) \neq P(\mathsf{V}_n(0))$, pa zbog toga ne možemo uvrstiti početne uvjete u izraz za $R(0)$. Suština problema je u tome što $P$ ovisi o vremenskoj dualnoj varijabli $\tau$, te stoga $P(\mathsf{V}_n(0))$ nema smisla.

Ovaj problem ćemo riješiti tako da funkciju $R_n$ zapišemo na sljedeći način

$$R_n(t) = \tilde{Q}_n(t) + T_n(t),$$

pri čemu $T_n \rightharpoonup 0$ u smislu distribucija, dok $\tilde{Q}_n \longrightarrow \tilde{Q}$ lokalno uniformno. Na taj način ćemo $R(0)$ identificirati s $\tilde{Q}(0) = \lim_n \tilde{Q}_n(0)$, koji ćemo, pak, moći eksplicitno izraziti pomoću početnih uvjeta.

Zbog toga što početne funkcije imaju uniformno kompaktne nosače, te zbog konačne brzine širenja za valnu jednadžbu, funkcija $\theta u_n$ ima kompaktan nosač $K \in \mathbf{R}^{3+1}$, $K = [T_1, T_2] \times K'$, pri čemu je $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$ i $K'$ kompaktan skup u $\mathbf{R}^3$ koji sadrži nosače početnih funkcija $\gamma_n$ i $\beta_n$. Stoga možemo uvesti funkciju $\zeta \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ takvu da je $\zeta \geqslant 0, \zeta(x) = 1$ na $K'$. Definirajmo pseudodiferencijalni operator $\Lambda \in \Xi_c^1(\mathbf{R}^3; \mathbf{R})$ s pridruženim glavnim simbolom

$$\lambda(x,\xi) := 2\pi\zeta(x)\sqrt{\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi},$$

te pomoću njega funkcije

$$u_n^\pm := \zeta\sqrt{\rho}u_n' \mp i\Lambda u_n\,. \tag{28}$$

Budući da su operatori iz klase $\Xi^1$ pridruženi simbolima iz klase $T^m$ koji su tenzorski produkti funkcija u varijablama $x$ i $\xi$, moramo uvesti dodatnu, tehničku pretpostavku na matricu koeficijenata $\mathbf{A}$. Pretpostavit ćemo da postoji rastav $\sqrt{\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi} = \sum a_n(\xi)b_n(x)$, pri čemu funkcije $a_n$ i $b_n$ zadovoljavaju ocjenu (14). Na taj način smo separirali varijable simbola $\lambda$, odnosno pokazali da je operator $\Lambda \in \Xi_c^1(\mathbf{R}^3; \mathbf{R})$ dobro definiran. Na žalost, osim u slučaju dimenzije $d = 1$, ne znamo za koje sve matrice je takav rastav moguć. Međutim, pretpostavljamo da je traženi zahtjev na matricu $\mathbf{A}$ previše jak i da bi se mogao oslabiti, ali u tu svrhu bi trebalo izgraditi potpuniju teoriju pseudodiferencijalnih operatora pridruženih simbolima s oslabljenom regularnošću.

Zbog konvergencije (9), neprekidnosti pseudodiferencijalnih operatora i činjenice da $\Lambda$ djeluje samo na prostorne varijable slijedi da

$$u_n^\pm \overset{*}{\rightharpoonup} 0 \qquad \text{u} \quad \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))\,. \tag{29}$$

Želimo pokazati da je

$$\zeta\sqrt{\rho}\partial_0 u_n^{\pm} \pm i\Lambda u_n^{\pm} = r_n^{\pm}, \tag{30}$$

pri čemu su nizovi $r_n^{\pm}$ omeđeni u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$. U tu svrhu, koristeći (29), sprovedimo sljedeći račun

$$\begin{aligned}
\zeta\sqrt{\rho}\partial_0 u_n^+ + i\Lambda u_n^+ &= \Big(\zeta\sqrt{\rho}\partial_0 + i\Lambda\Big)\Big(\zeta\sqrt{\rho}\partial_0 - i\Lambda\Big)u_n \\
&= \zeta^2\rho u_n'' + \Lambda^2 u_n + [\zeta\sqrt{\rho}, -i\Lambda]u_n' \\
&= \zeta^2\Big(\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla_x u_n) - u_n^3\Big) + \Lambda^2 u_n + [\zeta\sqrt{\rho}, -i\Lambda]u_n'.
\end{aligned} \tag{31}$$

Uz pomoć simboličkog računa imamo da je

$$\begin{aligned}
\Lambda^2 u_n &= \Big((2\pi\zeta)^2\mathbf{A}\xi\cdot\xi\hat{u}_n\Big)^{\vee} + Tu_n \\
&= (2\pi\zeta)^2\mathbf{A}\cdot\Big(\xi\otimes\xi\hat{u}_n\Big)^{\vee} + Tu_n \\
&= -\zeta^2\mathbf{A}\cdot(\nabla_x\otimes\nabla_x)u_n + Tu_n,
\end{aligned} \tag{32}$$

pri čemu je $T$ operatora reda 1 koji djeluje samo na prostorne varijable, to jest, $T \in \Xi^1(\mathbf{R}^3)$.

Budući da je s druge strane $\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla_x u_n) = \mathsf{div}\,\mathbf{A}\cdot\nabla_x u_n + \mathbf{A}\cdot(\nabla_x\otimes\nabla_x u_n)$, jednakost (31) prelazi u

$$\zeta\sqrt{\rho}\partial_0 u_n^+ + i\Lambda u_n^+ = [\zeta\sqrt{\rho}, -i\Lambda]u_n' + \zeta^2\mathsf{div}\,\mathbf{A}\cdot\nabla_x u_n - \zeta^2 u_n^3 + Tu_n\ .$$

Analogni izraz se dobije i za funkciju $u_n^-$:

$$\zeta\sqrt{\rho}\partial_0 u_n^- - i\Lambda u_n^- = -[\zeta\sqrt{\rho}, -i\Lambda]u_n' + \zeta^2\mathsf{div}\,\mathbf{A}\cdot\nabla_x u_n - \zeta^2 u_n^3 + Tu_n\ .$$

Budući da operatori na desnim stranama zadnje dvije jednakosti djeluju samo na prostorne varijable, te zbog omeđenosti niza $(u_n^3)$ u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$, slijedi (30).

Za $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ i operator $P$ uveden na početku odjeljka, definirajmo sljedeće funkcije u varijabli $t$

$$Q_n^{\pm} := \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3} |P(\theta u_n^{\pm})|^2\varphi\,dx\ ,$$

te njihovu sumu $Q_n := Q_n^+ + Q_n^-$.

Za $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ imamo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} Q_n\psi dt &= \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\Big(\Big|P(\theta u_n^+)\Big|^2 + \Big|P(\theta u_n^-)\Big|^2\Big)\varphi\psi d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\bigg(\Big|P\Big((\zeta\sqrt{\rho}\partial_0 - i\Lambda)\theta u_n\Big) - P\Big((\zeta\sqrt{\rho})\theta' u_n\Big)\Big|^2\\
&\qquad + \Big|P\Big((\zeta\sqrt{\rho}\partial_0 + i\Lambda)\theta u_n\Big) - P\Big((\zeta\sqrt{\rho})\theta' u_n\Big)\Big|^2\bigg)\varphi\psi d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\bigg(\Big|\zeta\sqrt{\rho}P(\theta' u_n + \theta u_n') - i\Lambda P(\theta u_n) - P\Big((\zeta\sqrt{\rho})\theta' u_n\Big)\\
&\qquad + [P,\zeta\sqrt{\rho}]\partial_0(\theta u_n) + [P,-\Lambda](\theta u_n)\Big|^2\\
&\qquad + \Big|\zeta\sqrt{\rho}P(\theta' u_n + \theta u_n') + i\Lambda P(\theta u_n) - P\Big((\zeta\sqrt{\rho})\theta' u_n\Big)\\
&\qquad + [P,\zeta\sqrt{\rho}]\partial_0(\theta u_n) - [P,-\Lambda](\theta u_n)\Big|^2\bigg)\varphi\psi d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\bigg(\Big|\zeta\sqrt{\rho}P(\theta u_n') - i\Lambda P(\theta u_n) + [P,\zeta\sqrt{\rho}]\partial_0(\theta u_n)\\
&\qquad + [P,-\Lambda](\theta u_n) + [\zeta\sqrt{\rho},P](\theta' u_n)\Big|^2\\
&\qquad + \Big|\zeta\sqrt{\rho}P(\theta u_n') + i\Lambda P(\theta u_n) + [P,\zeta\sqrt{\rho}]\partial_0(\theta u_n)\\
&\qquad - [P,-\Lambda](\theta u_n) + [\zeta\sqrt{\rho},P](\theta' u_n)\Big|^2\bigg)\varphi\psi d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}\bigg(\rho\Big|PV_n^0\Big|^2 + \Big|i\Lambda P(\theta u_n)\Big|^2 + u_n\left(\overline{T'(\theta u_n)} + \overline{T''(\theta' u_n)}\right)\bigg)\varphi\psi d\mathbf{x},
\end{aligned}
$$

pri čemu su $T', T'' \in \Psi^1(\mathbf{R}^{3+1};\mathbf{R})$. U zadnjoj nejednakosti smo koristili činjenicu da je $\zeta = 1$ na projekciji nosača funkcije $\theta\partial_i u_n = V_n^i$ na $\mathbf{R}^3$. Iz toga pak možemo zaključiti da i $PV_n^i$ ( do na djelovanje operatora reda $-\infty$) ima kompaktan nosač i $\zeta = 1$ na projekciji nosača od $PV_n^i$ i upravo se ta činjenica koristi kako bi mogli izostaviti funkciju $\zeta$ u zadnjoj jednakosti.

Sada nam preostaje izračunati član s $|i\Lambda P(\theta u_n)|^2$;

$$
\begin{aligned}
\int |i\Lambda P(\theta u_n)|^2 d\mathbf{x} &= -\langle \zeta^2\mathbf{A}\cdot(\nabla_x\otimes\nabla_x P(\theta u_n)), P(\theta u_n)\rangle + \langle TP(\theta u_n), P(\theta u_n)\rangle\\
&= \langle \zeta^2 A\nabla_x P(\theta u_n), \nabla_x P(\theta u_n)\rangle + \langle \zeta^2 \mathsf{div}\, A\nabla_x P(\theta u_n), P(\theta u_n)\rangle\\
&\quad + \langle TP(\theta u_n), P(\theta u_n)\rangle.
\end{aligned}
$$

Pri tom je $T$ pseudodiferencijalni operator reda 1 uveden u (32). Stoga je

$$
\begin{aligned}
\int Q_n\psi dt &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^{3+1}}\bigg(\rho|PV_n^0|^2 + APV^n\overline{PV^n} + u_n\left(\overline{T'(\theta u_n)} + \overline{T''(\theta' u_n)}\right)\bigg)\varphi\psi d\mathbf{x}\\
&= \int_{\mathbf{R}^{3+1}}\bigg(q(P\mathsf{V}_n) + \mathsf{Re}\left(P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\right)\bigg)\varphi\psi\, d\mathbf{x}\\
&\quad + \int_{\mathbf{R}^{3+1}}\bigg(\frac{1}{2}u_n\left(\overline{T'(\theta u_n)} + \overline{T''(\theta' u_n)}\right) - \mathsf{Re}\left(P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\right)\bigg)\varphi\psi\, d\mathbf{x}\,.
\end{aligned}
$$

Prvi član u gornjem izrazu je upravo $\int R_n(t)\psi(t)$. Budući da su $(\theta u_n)$ i $(\theta' u_n)$ omeđeni nizovi u $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^{3+1})$, $T'(\theta u_n) + T''(\theta' u_n)$ je omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$. Nadalje, $\theta u_n \to 0$ jako u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$. Zbog toga zadnji integral u gornjem izrazu konvergira k nuli. Na taj način smo dokazali da je

$$\lim_n \int R_n(t)\psi(t)dt = \lim_n \int Q_n(t)\psi(t)dt. \tag{33}$$

U sljedećem koraku uvedimo operatore $\tilde{P}_\pm \in \Xi^0(\mathbf{R}^3;\mathbf{R})$ s glavnim simbolima

$$\tilde{p}_\pm(x,\xi) := p\Big(\mp\frac{\lambda(x,\xi)}{\zeta(x)\sqrt{\rho(x)}},\xi\Big) = p_0(\mp\sqrt{\frac{\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}{\rho(x)}})\,p_1(\xi)\ .$$

Osnovna razlika između operatora $P$ i $\tilde{P}_\pm$ je što potonji djeluju samo na prostorne varijable.

Nadalje, definirajmo preslikavanja $\mathsf{S}^\pm : \mathbf{R}^3 \times S^{3-1} \to S^3$,

$$\mathsf{S}^\pm(x,\xi) = (S^\pm_\tau, S^\pm_\xi) := \left(\pm\sqrt{\frac{\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}{\rho(x)+\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}}, \sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(x)+\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}}\,\xi\right)\ .$$

Zbog homogenosti simbola $p$ slijedi da je

$$\tilde{p}_\pm = p\circ\mathsf{S}^\mp\ . \tag{34}$$

Primijenjujući operatore $\tilde{P}_\pm$ na relaciju (30) dobijemo

$$[\tilde{P},\zeta\sqrt{\rho}]\partial_0 u_n^\pm \pm [\tilde{P}, i\Lambda](u_n^\pm) + \zeta\sqrt{\rho}\partial_0(\tilde{P}_\pm u_n^\pm) \pm i\Lambda(\tilde{P}_\pm u_n^\pm) = \tilde{P} r_n^\pm,$$

odnosno

$$\zeta\sqrt{\rho}\partial_0(\tilde{P}_\pm u_n^\pm) \pm i\Lambda(\tilde{P}_\pm u_n^\pm) = \tilde{r}_n^\pm, \tag{35}$$

pri čemu su $(\tilde{r}_n^\pm)$ omeđeni u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R};\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$.

Definirajmo sada (slično kao $Q^\pm$)

$$\tilde{Q}_n^\pm = \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3} |\tilde{P}_\pm(\theta u_n^\pm)|^2 \varphi\, dx\ ,$$

te njihovu sumu $\tilde{Q}_n = \tilde{Q}_n^+ + \tilde{Q}_n^-$, pri čemu je $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3)$.

Analogno kao i za $R_n$ dokazujemo sljedeći rezultat.

**Lema 6.** *Do na prijelaz na podniz, $\tilde{Q}_n \longrightarrow Q$ lokalno uniformno.*

Dem. Koristeći (29) možemo zaključiti da je niz $(\tilde{P}_\pm(\theta u_n^\pm))$ omeđen u $\mathrm{L}_c^\infty(\mathbf{R};\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$. Na osnovu toga, iz same definicije niza $(\tilde{Q}_n)$ slijedi njegova omeđenost u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$. Istu tvrdnju želimo dokazati i za niz $(\tilde{Q}')$, na osnovu čega će slijediti tvrdnja, budući da je $\mathrm{H}^1 \overset{c}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^\infty$ na kompaktnim vremenskim intervalima. Pomnožimo stoga jednakost (35) s $\varphi\theta^2\tilde{P}_\pm(u_n^\pm)$ i izvršimo integraciju po $\mathbf{R}^3$. Dobijemo

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^3}\Big(\zeta\sqrt{\rho}\theta^2\tilde{P}_\pm(u_n^\pm)\partial_0\Big(\tilde{P}_\pm(u_n^\pm)\Big) + \zeta\sqrt{\rho}\theta\theta'\Big(\tilde{P}_\pm(u_n^\pm)\Big)^2\Big)\varphi dx\\
&-\int_{\mathbf{R}^3}\Big(\zeta\sqrt{\rho}\theta\theta'\Big(\tilde{P}_\pm(u_n^\pm)\Big)^2 \mp i\theta^2\tilde{P}_\pm(u_n^\pm)\Lambda\Big(\tilde{P}_\pm(u_n^\pm)\Big)\Big)\varphi dx\\
&= \int_{\mathbf{R}^3}\varphi\theta^2\tilde{P}_\pm(u_n^\pm)\tilde{r}_n^\pm dx.
\end{aligned}$$

Prvi integral u gornjoj jednakosti je jednak $2\sqrt{\rho}\partial_0\tilde{Q}_n^\pm$. Budući da su ostali članovi omeđeni u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R})$, slijedi tvrdnja leme.

**Q.E.D.**

Dokažemo li da je

$$\lim_n \int \tilde{Q}_n^{\pm}(t)\psi(t)dt = \lim_n \int Q_n^{\pm}(t)\psi(t)dt \tag{36}$$

slijedit će da su $R$ i $\tilde{Q}$ jednaki u smislu distribucija, pa bi se cijeli preostali zadatak sveo na računaje $\tilde{Q}(0)$. Tu vrijednost bismo trebali lakše izračunati nego li $R(0)$, zbog toga što operatori $\tilde{P}_\pm$ djeluju samo na prostorne varijable, što omogućuje da se $\tilde{Q}(0)$ izrazi pomoću početnih uvjeta valne jednadžbe.

Relaciju (36) ćemo dokazati samo za $\tilde{Q}_n^+$, budući da je dokaz za $\tilde{Q}_n^-$ identičan. U tu svrhu pomnožimo najprije (28) s funkcijom $\theta$, čime dobijemo

$$\theta u_n^+ = \zeta\sqrt{\rho}V_n^0 - i\tilde{\theta}\Lambda(\theta u_n), \tag{37}$$

gdje smo s $\tilde{\theta}$ označili $\mathrm{C}_c^\infty$ funkciju u varijabli $t$ takvu da je $\tilde{\theta} = 1$ na $\operatorname{supp}\theta$. Budući da je $\theta u_n$ kompaktno sadržan u $\mathbf{R}^{3+1}$, ima smisla izraz

$$\theta u_n = \Delta_x^{-1}\Big(\mathsf{div}_x(\zeta \mathsf{V}_n)\Big),$$

pri čemu je $\Delta_x^{-1}$ inverz Laplaceovog operatora s Dirichletovim rubnim uvjetima na domeni koja sadrži $K'$. Zbog toga je

$$\theta u_n^+ = \zeta\sqrt{\rho}V_n^0 - i\tilde{\theta}\sum \Lambda_j V_j^n, \tag{38}$$

gdje je

$$\Lambda_j = \Lambda \circ \Delta_x^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x^j} \circ \zeta.$$

Uvedimo operator $\Omega \in \Psi^0(\mathbf{R}^{3+1};\mathbf{R})$ s glavnim simbolom neovisnim o $\mathbf{x}$

$$\omega^0(\boldsymbol{\xi}) = \left(1 - \chi\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{\tau^2 + |\xi|^2}}\right)\right), \tag{39}$$

pri čemu je $\chi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}), 0 \leqslant \chi(s) \leqslant 1$ i $\chi(s) = 1$ na nekoj okolini točke $s = 0$. Označimo s $C_\alpha$ konus u $\mathbf{R}^{3+1}$ s kutem $\alpha$ u smjeru $\tau$ osi. Za proizvoljni mali kut $\alpha$ možemo izabrati funkciju $\chi$ takvu da je

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & |s| \leqslant \sin\alpha \\ 0 & |s| \geqslant \sin 2\alpha. \end{cases}$$

U tom slučaju vrijedi da je

$$\omega^0(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 0 & (\xi,\tau) \in C_\alpha \\ 1 & (\xi,\tau) \notin C_{2\alpha}. \end{cases}$$

Zbog Korolara 1. možemo izabrati $\alpha$ takav da je $C_{2\alpha} \cap \operatorname{supp}\nu = \emptyset$. Uzimajući $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{3+1})$ i primjenom H-mjera dobijemo da

$$||\phi(1-\Omega)V_j^n||_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})} \to \langle \nu, \phi^2\chi^2(|\xi|)\rangle = 0,$$

zato što je $\chi = 0$ izvan $C_{2\alpha} \subseteq c(\operatorname{supp}\nu)$ i $\tau^2 + \xi^2 = 1$ na $\operatorname{supp}\nu$. Zbog proizvoljnosti funkcije $\phi$ i konačne dimenzije prostora, zaključujemo da

$$(1-\Omega)V_j^n \to 0 \tag{40}$$

u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{3+1})$. Relaciju (38) možemo napisati u sljedećem obliku

$$\theta u_n^+ = \Big(\zeta\sqrt{\rho}V_n^0 - i\tilde{\theta}\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j\Omega V_n^j\Big) - i\tilde{\theta}\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j(1-\Omega)V_n^j.$$

Primijetimo da je $\tilde{\theta}\Lambda_j\Omega$ pseudodiferencijalni operator reda 0 s glavnim simbolom

$$\tilde{\theta}(t)\lambda(x,\xi)\left(-\frac{i\xi}{2\pi|\xi|^2}\right)\zeta(x)\Big(1-\chi(\frac{|\xi|}{\sqrt{\tau^2+|\xi|^2}})\Big),$$

koji je dobro definiran zbog zahtjeva na nosač funkcije $\chi$, pomoću kojeg je isključena singularna točka $\eta = 0$.

S druge strane, $\Lambda_j(1-\Omega)$ nije pseudodiferencijalni operator, međutim, zbog toga što je $\Lambda_j$ neprekidni operator na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$, te kompaktnosti nosača funkcija $\tilde{\theta}$ i $\zeta$ i relacije (40), imamo da

$$\tilde{\theta}\Lambda_j(1-\Omega)V_j^n \to 0$$

u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$. Zato se H-mjera $\kappa_+$ pridružena nizu $\theta u_n^+$ podudara s H-mjerom pridruženoj nizu

$$\Big(\zeta\sqrt{\rho}V_n^0 - i\tilde{\theta}\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j\Omega V_j^n\Big).$$

Mjeru $\kappa_+$ želimo izraziti pomoću mjere $\nu$. Definirajmo pseudodiferencijalni operator $\mathsf{B} \in \Psi^0(\mathbf{R}^{3+1};\mathbf{R}^{3+1})$,

$$\mathsf{B} := (\zeta\sqrt{\rho},\ -i\tilde{\theta}\sum_{j=1}^{3}\Lambda_j\Omega)$$

s glavnim simbolom $\mathsf{b} = (\zeta\sqrt{\rho},\ -\tilde{\theta}\zeta^2(x)\sqrt{A(x)\xi\cdot\xi}\Big(1-\chi(|\xi|)\Big)\frac{\xi}{|\xi|^2})$. Koristeći da je $\mathsf{B}\cdot\mathsf{V}_n = \Big(\zeta\sqrt{\rho}V_n^0 - i\tilde{\theta}\sum\Lambda_j\Omega V_j^n\Big)$, imamo da je za proizvoljnu test funkciju $\phi$,

$$\begin{aligned}\lim_n\langle\, \phi\mathsf{B}\cdot\mathsf{V}_n \mid \mathsf{B}\cdot\mathsf{V}_n\,\rangle &= \lim_n\langle\, \phi(\mathsf{B}\otimes\mathsf{B})\mathsf{V}_n \mid \mathsf{V}_n\,\rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^{3+1}\times\mathrm{S}^3}\phi\,\mathsf{tr}\Big((\mathsf{b}\otimes\mathsf{b})(\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\Big)d\nu = \int_{\mathbf{R}^{3+1}\times\mathrm{S}^3}\phi(\mathsf{b}\cdot\boldsymbol{\xi})^2 d\nu\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\kappa_+ = \Big|\zeta(x)\sqrt{\rho(x)}\tau - \tilde{\theta}(t)\zeta^2(x)\sqrt{A(x)\xi\cdot\xi}\Big(1-\chi(|\xi|)\Big)\Big|^2\nu.$$

Budući da su funkcije $\zeta$ i $\tilde{\theta}$ jednake 1 na $K = \operatorname{supp} V_n^i$, te $\operatorname{supp}\nu\cap\operatorname{supp}\chi = \emptyset$, vrijedi

$$\kappa_+ = \Big|\sqrt{\rho(x)}\tau - \sqrt{A(x)\xi\cdot\xi}\Big|^2\nu.$$

Zbog lokalizacijskog svojstva, nadalje, vrijedi da je

$$\operatorname{supp}\kappa_+ \subseteq \{(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) : \sqrt{\rho(x)}\tau = -\sqrt{A(x)\xi\cdot\xi}\}. \tag{41}$$

Tvrdnja (36) je sad direktna posljedica sljedeće leme.

**Lema 7.** *Neka je* $P \in \Psi^0(\mathbf{R}^{3+1}; \mathbf{R})$ *s glavnim simblom* $p$ *neovisnim o* $\mathbf{x}$ *i* $\Pi \in \Psi^1(\mathbf{R}^3; \mathbf{R})$ *s glavnim simbolom* $\pi$. *Definirajmo* $\tilde{P} \in \Psi^0(\mathbf{R}^3; \mathbf{R})$ *s glavnim simbolom*

$$\tilde{p}(x,\xi) = p\Big(\frac{\pi(x,\xi)}{\sqrt{|\xi|^2 + \pi^2(x,\xi)}}, \frac{\xi}{\sqrt{|\xi|^2 + \pi^2(x,\xi)}}\Big).$$

*Pretpostavimo da je* $(\omega_n)$ *uniformno kompaktno nošen niz u* $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$, *takav da*

$$\begin{array}{lll} \omega_n \rightharpoonup 0 & \text{u} & \mathrm{L}^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3) \\ \omega_n \to 0 & \text{u} & \mathrm{L}^2(\mathbf{R}; \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3)). \end{array}$$

*Nadalje, neka za H-mjeru* $\omega$ *pridruženu nizu* $\omega_n$ *vrijedi*

$$\operatorname{supp} \omega \subseteq \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) : \tau = \pi(x,\xi), \xi \neq 0, \tau \neq \pm 1\}. \tag{42}$$

*Tada, do na prijelaz na podniz, vrijedi*

$$P\omega_n - \tilde{P}\omega_n \to 0$$

*u* $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_{d+1})$.

Dem. Zbog jake konvergencije niza $(\omega_n)$ u $\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^{3+1})$, dovoljno nam je simbole operatora $P$ i $\tilde{P}$ poistovjetiti s njihovim glavnim dijelovima, budući da razlika definira operatore nižeg reda koji na limesu daju 0. Neka je $\Omega \in \Psi^0(\mathbf{R}^{3+1}; \mathbf{R})$, pseudodiferencijalni operator s glavnim simbolom definiranim relacijom (39).

Neka su funkcije $\zeta \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^3)$ i $\theta \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R})$ jednake identiteti na projekciji zajedničkog nosača funkcija $\omega_n$ na $\mathbf{R}^3$, odnosno $\mathbf{R}$. Zbog Korolara II.1. vrijedi da je

$$\operatorname{supp} \omega \subseteq \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^{3+1} \times \mathrm{S}^3 : \zeta(x) = \theta(t) = 1\}.$$

Stoga

$$||\zeta\theta(1-\Omega)\omega_n||^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})} \to \langle \omega, \chi^2(|\xi|)\rangle. \tag{43}$$

Nadalje, primijetimo da je $\theta\tilde{P}\zeta\Omega$ pseudodiferencijalni operator reda 0 s glavnim simbolom

$$\theta(t)\tilde{p}(x,\xi)\zeta(x)\Big(1 - \chi(\frac{|\xi|}{\sqrt{\tau^2 + |\xi|^2}})\Big).$$

Napravimo procjenu člana $P\omega_n - \tilde{P}\omega_n$ koristeći sljedeću dekompoziciju

$$(P\omega_n)(t) - \tilde{P}(\omega_n(t)) = \Big((P - \theta\tilde{P}\zeta\Omega)\omega_n\Big)(t) - \tilde{P}\Big((\zeta\theta(1-\Omega)\omega_n)(t)\Big). \tag{44}$$

Budući da je $\tilde{P}$ neprekidan operator na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ slijedi da je

$$\limsup_n ||\tilde{P}(\zeta\theta(1-\Omega)\omega_n)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})} \leqslant C \limsup_n ||\zeta\theta(1-\Omega)\omega_n||^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})}$$

Uzimajući u obzir (43) dobijemo sljedeću ocjenu

$$\limsup_n ||\tilde{P}(\zeta\theta(1-\Omega)\omega_n)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})} \leqslant C\langle \omega, \chi^2(|\xi|)\rangle. \tag{45}$$

Ocijenimo prvi član u relaciji (44). Za $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{3+1})$ vrijedi

$$\begin{aligned}||\psi(P-\theta\tilde{P}\zeta\Omega)\omega_n||^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})} &\to \langle\omega, \psi^2|p(\boldsymbol{\xi}) - \tilde{p}(x,\xi)\,(1-\chi(|\xi|))\,|^2\rangle \\ &= \langle\omega, \psi^2|p(\tau,\xi) - p(\pi(x,\xi),\xi)(1-\chi(|\xi|))|^2\rangle.\end{aligned}$$

Koristeći pretpostavku (42), gornja konvergencija prelazi u

$$||\psi(P-\theta\tilde{P}\zeta\Omega)\omega_n||^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})} \to \langle\omega, \psi^2|p(\tau,\xi)|^2\chi^2(|\xi|)\rangle.$$

Koristeći nju i ocjenu (45) slijedi da je

$$\limsup_n ||\psi(P\omega_n - \tilde{P}\omega_n)||^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})} \leqslant C_\psi\langle\omega, \chi^2(|\xi|)\rangle, \tag{46}$$

pri čemu konstanta $C_\psi$ ovisi samo o funkciji $\psi$. Prisjetimo se da je funkcija $\chi$ odabrana tako da vrijedi

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & |s| \leqslant \sin\alpha \\ 0 & |s| \geqslant \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Varirajući parametar $\alpha$ i gledajući limes kad $\alpha \to 0$, dobijemo da

$$\chi_\alpha(s) \stackrel{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 0 & s \neq 0. \end{cases}$$

Na osnovu Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji zaključujemo da

$$\langle\omega, \chi^2(|\xi|)\rangle \to \langle\omega, \chi_{\{\xi=0\}}\rangle.$$

Međutim zbog (42) desna strana gornje jednakosti je jednaka nuli, što, uzimajući u obzir (46), dokazuje tvrdnju leme.

**Q.E.D.**

Ovu lemu želimo primijeniti na niz $\omega_n = \theta u_n^\pm$, pripadnu H-mjeru $\omega = \kappa_\pm$ i operator $\Pi = \mp\frac{1}{\zeta\sqrt{\rho}}\Lambda$, dok će nam $P$ i $\tilde{P}$ biti upravo pseudodiferencijalni operatori već uvedeni u razmatranju u ovom odjeljku pod istom oznakom. Trebamo provjeriti da te veličine zadovoljavaju uvjete leme.

Najprije, znamo da funkcije $\theta u_n^\pm$ imaju uniformno kompaktan nosač (tu se također ispostavlja važnost uvođenja funkcije $\zeta$), te da

$$\theta u_n^\pm \rightharpoonup 0$$

u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{3+1})$ (relacija (29)). Da bismo dokazali da

$$\theta u_n^\pm \to 0 \tag{47}$$

u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}; \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3))$, trebat će nam Aubinova lema o kompaktnosti, iskazana na početku poglavlja. Ovaj put ćemo je primijeniti na prostore $B_0 = \mathrm{L}^2(\Omega)$ i $B_1 = B_2 = \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ otvoren i omeđen skup koji sadrži projekciju zajedničkog nosača funkcija $\theta u_n^\pm$ na $\mathbf{R}^3$. Pri tom je, zbog omeđenosti skupa $\Omega$, $B_0 \stackrel{c}{\hookrightarrow} B_1$. Za primjenu Aubinove leme preostaje nam ispitati omeđenost niza $(\partial_0(\theta u_n))$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}; \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3))$. Na osnovu relacije (28) slijedi

$$\partial_0 u_n^\pm = \zeta\sqrt{\rho}\partial_0^2 u_n \mp i\Lambda\partial_0 u_n.$$

Budući da je $(\partial_0 u_n)$ omeđen u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R};\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$, te da je $\Lambda \in \Psi^1(\mathbf{R}^3;\mathbf{R})$, slijedi omeđenost niza $(\Lambda\partial_0 u_n)$ u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R};\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3))$. S druge strane je

$$\partial_0^2 u_n = \frac{1}{\rho}\left(\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla_x u_n) - u_n^3\right).$$

Zbog konvergencije (9), desna strana gornje jednakosti je također omeđen niz u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R};\mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3))$, što nam omogućuje korištenje Aubinove leme o kompaktnosti na osnovu čega slijedi konvergencija (47). Mjere $\kappa_\pm$ zadovoljavaju tražena svojstva zbog relacije (41).

Na ovaj način smo pokazali da vrijedi

$$R_n(t) = \tilde{Q}_n(t) + T_n(t),$$

pri čemu $T_n \rightharpoonup 0$ u $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Nadalje, zato što $R_n(t) \to R(t)$ i $\tilde{Q}_n(t) \to \tilde{Q}(t)$ uniformno na kompaktnim intervalima, slijedi da je

$$R(0) = \tilde{Q}(0).$$

S druge strane je

$$\tilde{Q}_n(0) = \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^3}\left(|\tilde{P}_+(u_{n0}^+)|^2 + |\tilde{P}_-(u_{n0}^-)|^2\right)\phi(x)dx,$$

pri čemu su

$$u_{n0}^\pm = \zeta\sqrt{\rho}\beta_n \mp i\Lambda\gamma_n = u_n^\pm(0).$$

Ako s $\tilde{\nu}_\pm$ označimo H-mjere pridružene nizovima $u_{n0}^\pm$, imamo da je

$$\tilde{Q}(0) = \frac{1}{4}\left(\langle\tilde{\nu}_+, |\tilde{p}_+|^2\phi\rangle + \langle\tilde{\nu}_-, |\tilde{p}_-|^2\phi\rangle\right).$$

Pomoću (34) to možemo zapisati na sljedeći način

$$\tilde{Q}(0) = \frac{1}{4}\left(\langle\tilde{\nu}_+, \phi|p(S^-)|^2\rangle + \langle\tilde{\nu}_-, \phi|p(S^+)|^2\rangle\right).$$

Time smo, napokon, dobili da je

$$\langle\langle\tau\nu, \{\phi, Q\}\rangle\rangle - \langle\langle 2\tau\mathsf{Re}\,\nu^{12}\phi, \rangle\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle\tilde{\nu}_+, \Phi_{(t=0,S^-)}\rangle + \langle\tilde{\nu}_-, \Phi_{(t=0,S^+)}\rangle\right)$$

za svaku funkciju $\Phi$ oblika

$$\Phi(t,x,\boldsymbol{\xi}) = |p(\boldsymbol{\xi})|^2\psi(t)\phi(x),$$

pri čemu je $p(\boldsymbol{\xi}) = p_0(\tau)p_1(\xi), p \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^3), \phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3)$ i $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty([0,T\rangle)$. Gornju formulu možemo po gustoći proširiti na proizvoljnu funkciju $\Phi \in \mathrm{C}_c^\infty([0,T\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$. Na taj način smo dokazali sljedeći teorem.

**Teorem 5.** *Trag mjere $\nu$ u trenutku $t = 0$ je definiran izrazom*

$$\langle\!\langle\tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle 2\tau\mathsf{Re}\,\nu^{12}, \Phi\rangle\!\rangle,$$

*za $\Phi \in \mathrm{C}_c^\infty([0,T\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3))$. Gornji izraz je jednak*

$$\frac{1}{4}\left(\left\langle\tilde{\nu}_+, \Phi_{(t=0,x,S^-(x,\xi))}\right\rangle + \left\langle\tilde{\nu}_-, \Phi_{(t=0,x,S^+(x,\xi))}\right\rangle\right),$$

*gdje je $\mathsf{S}^\pm$ preslikavanje s $\mathbf{R}^3 \times S^{3-1}$ u $S^3$,*

$$\mathsf{S}^\pm(x,\xi) := \left(\pm\sqrt{\frac{\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}{\rho(x) + \mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}}, \sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(x) + \mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}}\xi\right),$$

*a $\tilde{\nu}_\pm$ su H-mjere pridružene nizovima $u_n^\pm$ definiranim relacijama*

$$u_n^\pm = \zeta\sqrt{\rho}\beta_n \mp i\Lambda\gamma_n\,.$$

*U zadnjoj jednakosti $\zeta(x)$ je element prostora $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}_0^+)$, takav da je $\zeta(x) = 1$ na zajedničkom nosaču funkcija $\beta_n$ i $\gamma_n$, dok je $\Lambda$ element $\Xi_c^1(\mathbf{R}^3;\mathbf{R})$ s glavnim simbolom $\lambda(x,\xi) := \zeta(x)\sqrt{\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}$.*

∎

Budući da nizovi $(\beta_n)$ i $(\gamma_n)$ imaju zajednički kompaktan nosač na kojem je $\zeta(x) = 1$, izbor funkcije $\zeta$ neće utjecati na H-mjere $\tilde{\nu}_\pm$. Naime, neposredna primjena Korolara II.1. će ograničiti nosač H-mjera $\tilde{\nu}_\pm$ na skup na kojem je $\zeta(x) = 1$.

Kao korolar zadnjeg teorema, posebno proizlazi prijenosno svojstvo (13) iz Teorema 4. Naime, za $\Phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$ i Radonovu mjeru $\nu$ vrijedi da je $\langle\langle \nu, \Phi\rangle\rangle = \langle \nu, \Phi\rangle$, pa je stoga

$$\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle = 2\langle \tau \mathsf{Re}\, \nu^{12}, \Phi\rangle, \qquad \Phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3).$$

Posljednja relacija je upravo navedeno prijenosno svojstvo.

U sljedećem koraku definirajmo mjere $\tilde{\pi}_\pm$ na $\mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3$ relacijom

$$\langle \tilde{\pi}_\pm, \tilde{\Phi}\rangle = \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^{3-1}} \tilde{\Phi}(x, S^\mp(x,\xi)) d\tilde{\nu}_\pm(x,\xi) \tag{48}$$

za $\tilde{\Phi} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3)$. Time smo dobili da je

$$\langle\!\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle 2\tau \mathsf{Re}\, \nu^{12}, \Phi\rangle\!\rangle = \frac{1}{4}\Big\langle \tilde{\pi}_+ + \tilde{\pi}_-, \Phi(0,\cdot,\cdot)\Big\rangle\,,$$

za svaki $\Phi \in \mathrm{C}_c^\infty([0, T\rangle \times \mathbf{R}^3 \times \mathrm{S}^3))$.

Uspoređujući gornju jednakost s onom izvedenom prije

$$\langle\!\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\!\rangle - \langle\!\langle 2\tau \mathsf{Re}\, \nu^{12}, \Phi\rangle\!\rangle = \int_{\mathbf{R}^3}\int_{\mathrm{S}^3} \Big[\frac{\partial Q}{\partial \tau}(\tau\nu)\Big]_{t=0} \Phi(0,x,\xi) d\boldsymbol{\xi} dx dt,$$

te koristeći da je $\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \rho\tau^2$, zaključujemo da vrijedi sljedeći korolar.

**Korolar 2.** *Početna vrijednost mjere $\tau\nu$ dana je izrazom*

$$\tau\nu|_{t=0} = \frac{1}{4\rho\tau}(\tilde{\pi}_+ + \tilde{\pi}_-).$$

*Ona se propagira duž integralnih krivulja sustava (17) koje leže u presjeku $\mathbf{R}^{3+1} \times \mathrm{S}^3$ i skupa nul-točaka funkcije $Q$, i na taj način, jednoznačno određuje mjeru $\nu$.* ∎

## 5. Računanje makroskopske gustoće energije

Prisjetimo se našeg početnog zadatka: računanja makroskopske gustoće energije $d$ kao limesa mikroskopskih gustoća energija $d_n$ definiranih relacijom

$$d_n = \frac{1}{2}\left(\rho(u_n')^2 + \mathbf{A}\nabla_x u_n \cdot \nabla_x u_n\right) + \frac{1}{4}u_n^4\,.$$

Uz pomoć Teorema 4. zaključujemo da za proizvoljni $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^3)$ vrijedi

$$\langle d, \phi\rangle = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^{3+1}\times \mathrm{S}^3} \phi(t,x)\left(\rho(x)\xi_0^2 + \mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi\right) d\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Budući da je nosač mjere $\nu$ podskup skupa nul-točaka funkcije $Q$ na kojem je $\rho\xi_0^2 = \mathbf{A}\xi\cdot\xi$, slijedi da je

$$\langle d, \phi\rangle = \int_{\mathbf{R}^{3+1}\times \mathrm{S}^3} \phi(t,x)\rho(x)\xi_0^2 d\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Na taj način smo dokazali

**Teorem 6.** *Mjera $d$ kao limes energetskih gustoća $d_n$ zadanih izrazom*

$$d_n = \frac{1}{2}\left(\rho(x)(u_n')^2 + \mathbf{A}(x)\nabla_x u_n \cdot \nabla_x u_n\right) + \frac{1}{4}u_n^4\ ,$$

*pri čemu je $u_n$ rješenje nelinearne valne jednadžbe (8), je dana relacijom*

$$d(x) = \rho(x)\int_{\mathrm{S}^3} \xi_0^2 d\nu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

*gdje je mjera $\nu$ definirana Teoremom 5., odnosno Korolarom 2.* ∎

Prokomentirajmo sad dobivene rezultate. Pokazali smo da mjera $\nu$ zadovoljava prijenosnu jednadžbu (16), te u Teoremu 5. izrazili njene početne uvjete pomoću početnih uvjeta za sustav nelinearnih valnih jednadžbi (8). Međutim, ti početni uvjeti su jednaki onima koje su izračunali Francfort i Murat u svom članku ([FM]) u slučaju linearne valne jednadžbe. Naime, trag mjere $\nu$ smo izrazili pomoću veličine $R(0) = \lim_n R_n(0)$, koju smo dobili koristeći relaciju

$$\lim_n \int R_n(t)\psi(t)dt = \lim_n \int \tilde{Q}_n(t)\psi(t)dt,$$

pri čemu je $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty([0,T\rangle)$, dok je

$$R_n := \int_{\mathbf{R}^3}\Big(q(P\mathsf{V}_n) + \mathsf{Re}\ \Big[P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\Big]\Big)\varphi\, dx\ ,$$

te $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3)$. U linearnom slučaju, Francfort i Murat su trag iste mjere izrazili pomoću $\tilde{R}(0)$, koji je dobiven kao točkovni limes funkcija $\tilde{R}_n$ definiranih relacijom

$$\tilde{R}_n := \int_{\mathbf{R}^3} q(P\mathsf{V}_n)\varphi\, dx\ .$$

Vidimo da se funkcije $R_n$ i $\tilde{R}_n$ razlikuju za član $\mathsf{Re}\ \Big[P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\Big]$. Međutim, one imaju isti distribucijski limes, odnosno i dalje vrijedi

$$\lim_n \int \tilde{R}_n(t)\psi(t)dt = \lim_n \int \tilde{Q}_n(t)\psi(t)dt.$$

Presudno pri tome je što, u slučaju $d = 3$, $\mathrm{H}^1(\Omega)$ je kompaktno uložen u $\mathrm{L}^2(\Omega)$ na omeđenom skupu $\Omega$, te stoga $\mathsf{Re}\ \Big[P(\theta u_n^3)\overline{P(\theta u_n)}\Big] \to 0$.

S druge strane, vrijedi

$$\psi(0)\tilde{R}(0) = \langle\langle \tau\nu, \{\Phi, Q\}\rangle\rangle - \langle\langle \tau \mathsf{Re}\,\nu^{12}\Phi, \rangle\rangle.$$

Na osnovu toga zaključujemo da je $\mathsf{Re}\,\nu^{12} = 0$, pa prijenosna jednadžba (16) za mjeru $\nu$ prelazi u jednadžbu koju smo imali u linearnom slučaju

$$\nabla_\xi(\tau\nu)\cdot(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} Q - (3+2)Q\boldsymbol{\xi}) - \nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\tau\nu)\cdot(\nabla_{\mathbf{x}} Q - (\nabla_{\mathbf{x}} Q\cdot\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi}) = 0.$$

s istim početnim uvjetima. Time smo dokazali sljedeći

**Teorem 7.** *Dodavanje nelinearnog člana $u_n^3$ u valnu jednadžbu nije doprinjelo promjeni makroskopske gustoće energije.* ∎

# 6. Periodični početni uvjeti

U ovom odjeljku ćemo pretpostaviti da su početne funkcije $\beta_n$ i $\gamma_n$ oblika

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_n(x) &= \tfrac{1}{n}\alpha(x,nx) \\ \beta_n(x) &= \beta(x,nx), \end{aligned}\right. \tag{49}$$

pri čemu su $\alpha$ i $\beta$ glatke funkcije na $\mathbf{R}^3\times\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ je jedinični torus) s kompaktnim nosačem. Budući da $\beta_n \rightharpoonup \hat{\beta}(x,0)$ (vidi dokaz Teorema II.2.), uvjet $\beta_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ ekvivalentan je zahtjevu da je

$$\int_{\mathcal{T}}\beta(x,y)dy = 0.$$

S druge strane, zbog načina na koji je definiran u (49), za niz $(\gamma_n)$ nužno vrijedi $\gamma_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^3)$.

Naš prvi zadatak je izračunati H-mjere $\tilde{\nu}_\pm$ pridružene nizovima $u^n_{\pm0} = \zeta\sqrt{\rho}\beta_n \pm i\Lambda\gamma_n = u^\pm_n(0)$. U tu svrhu primijetimo da je, s obzirom da $\gamma_n$ ima kompaktan nosač neovisan o $n$,

$$\gamma_n = \Delta^{-1}\left(\mathsf{div}\left(\nabla\gamma_n\right)\right),$$

pri čemu je $\Delta^{-1}$ inverz Laplaceovog operatora s Dirichletovim rubnim uvjetima na domeni dovoljno velikoj da sadrži zajednički nosač $\gamma_n$. Jezikom pseudodiferencijalnih operatora gornja jednakost prelazi u

$$\gamma_n = \sum\Delta_i(\partial_i\gamma_n),$$

pri čemu je $\Delta_i$ element $\Psi^{-1}(\mathbf{R}^3;\mathbf{R})$ s glavnim simbolom $\frac{-i\xi_i}{2\pi|\xi|^2}$. Stoga je

$$u^n_{\pm0} = \zeta\sqrt{\rho}\beta_n \mp i\sum\Lambda\Delta_i(\partial_i\gamma_n). \tag{50}$$

Međutim, zbog (49),

$$\nabla_x\gamma_n = \left(\nabla_y\alpha\right)_n(x) + \frac{1}{n}\left(\nabla_x\alpha\right)_n(x),$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} \left(\nabla_y\alpha\right)_n(x) &:= \nabla_y\alpha(x,nx) \\ \left(\nabla_x\alpha\right)_n(x) &:= \nabla_x\alpha(x,nx)\,. \end{aligned}$$

Zadnji član u gornjoj jednakosti, zbog kompaktnosti nosača funkcije $\alpha$, teži jako k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$. Stoga jednakost (50) možemo pisati kao

$$u^n_{\pm0} = \zeta\sqrt{\rho}\beta_n \mp i\sum\Lambda\Delta_i\left(\partial_i\alpha\right)_n \pm r_n,$$

gdje niz $(r_n)$ konvergira jako k nuli u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$. Time je računanje mjera $\tilde{\nu}_\pm$ svedeno na računanje H-mjera pridruženih nizu

$$w^n_{\pm0} = \zeta\sqrt{\rho}\beta_n \mp i\sum\Lambda\Delta_i\left(\partial_i\alpha\right)_n.$$

Označimo s $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ $(3+1)\times(3+1)$ matričnu H-mjeru pridruženu nizovimu $(\beta_n, (\nabla_y\alpha)_n)$:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{00} & \tilde{\mu}_{01} \\ (\tilde{\mu}_{01})^* & \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{11} \end{bmatrix},$$

pri čemu je $\tilde{\mu}_{00}$ skalarna Radonova mjera, a $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{11}$ matrična $3\times3$ Radonova mjera.

Mjere $\tilde{\nu}_\pm$ se zatim neposredno izračunaju primjenom pseudodiferencijalnog računa. Na taj način dobijemo da je

$$\tilde{\nu}_\pm = \rho\tilde{\mu}_{00} + (\mathbf{A}\xi\cdot\xi)(\xi\otimes\xi\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{11}) \mp 2\sqrt{\rho\mathbf{A}\xi\cdot\xi}\ (\xi\cdot\mathsf{Re}\ (\tilde{\mu}_{01}))\,. \tag{51}$$

Preostaje nam naći eksplicitni izraz za mjeru $\tilde{\mu}$. U tome će nam pomoći Teorem II.2. pomoću kojeg dobivamo sljedeće relacije

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_{00} = \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}} |\hat{\beta}(x,k)|^2 dx\delta_\xi\left(\frac{k}{|k|}\right), \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{11} = 4\pi^2 \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}} k\otimes k|\hat{\alpha}(x,k)|^2 dx\delta_\xi\left(\frac{k}{|k|}\right), \\ \tilde{\mu}_{01} = -i2\pi \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}} k\hat{\beta}(x,k)\overline{\hat{\alpha}(x,k)} dx\delta_\xi\left(\frac{k}{|k|}\right). \end{cases} \tag{52}$$

Povezujući (52) i (51) dobijemo

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_\pm = \sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}} \Big(&\rho(x)|\hat{\beta}(x,k)|^2 + 4\pi^2(\mathbf{A}(x)k\cdot k)|\hat{\alpha}(x,k)|^2 \\ &\mp 4\pi\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}\,\mathsf{Im}\left(\hat{\beta}(x,k)\overline{\hat{\alpha}(x,k)}\right)\Big) dx\delta_\xi\left(\frac{k}{|k|}\right). \end{aligned}$$

U sljedećem koraku moramo izračunati mjere $\tilde{\pi}_\pm$ definirane pomoću mjera $\tilde{\nu}_\pm$ relacijom (48). Uz pomoć zadnje jednakosti, imamo da je

$$\begin{aligned} \langle\tilde{\pi}_\pm, \tilde{\Phi}\rangle &= \sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}} \int_{\mathbf{R}^3} \Big(\rho(x)|\hat{\beta}(x,k)|^2 + 4\pi^2(\mathbf{A}(x)k\cdot k)|\hat{\alpha}(x,k)|^2 \\ &\qquad \mp 4\pi\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}\,\mathsf{Im}\left(\hat{\beta}(x,k)\overline{\hat{\alpha}(x,k)}\right)\Big)\tilde{\Phi}(x, S^\mp(x,\frac{k}{|k|}))dx, \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}} \int_{\mathbf{R}^3} \Big(\rho(x)|\hat{\beta}(x,k)|^2 + 4\pi^2(\mathbf{A}(x)k\cdot k)|\hat{\alpha}(x,k)|^2 \\ &\qquad \mp 4\pi\sqrt{\rho\mathbf{A}(x)k\cdot k}\,\mathsf{Im}\left(\hat{\beta}(x,k)\overline{\hat{\alpha}(x,k)}\right)\Big)\tilde{\Phi}(x,\boldsymbol{\xi})dx\delta_\xi\left(S^\mp(x,\frac{k}{|k|})\right), \end{aligned}$$

za proizvoljni $\tilde{\Phi}\in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3\times \mathrm{S}^3)$.

Račun ovog odjeljka možemo sad sažeti u sljedećem korolaru.

**Korolar 3.** *Ako su početni uvjeti za sustav (8) oblika*

$$\begin{cases} \gamma_n(x) &= \frac{1}{n}\alpha(x,nx) \\ \beta_n(x) &= \beta(x,nx), \end{cases}$$

*pri čemu su* $\alpha,\beta\in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^3\times\mathcal{T})$ *koje zadovoljavaju*

$$\int_{\mathcal{T}} \beta(x,y)dy = 0,$$

*tada je trag mjere $\nu$ dan izrazom*

$$\xi_0\nu|_{t=0} = \frac{1}{4\rho(x)\xi_0}\sum_{\pm}\sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}}\Big(\rho(x)|\hat{\beta}(x,k)|^2 + 4\pi^2(\mathbf{A}(x)k\cdot k)|\hat{\alpha}(x,k)|^2$$
$$\mp 4\pi\sqrt{\rho\mathbf{A}(x)k\cdot k}\,\mathsf{Im}\left(\hat{\beta}(x,k)\overline{\hat{\alpha}(x,k)}\right)\Big)dx\delta_\xi\left(S^{\mp}(x,\frac{k}{|k|})\right).$$

*Pri tom su funkcije $S^{\pm}$ zadane relacijom*

$$\mathsf{S}^{\pm}(x,\xi) := \left(\pm\sqrt{\frac{\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}{\rho(x)+\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}}, \sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(x)+\mathbf{A}(x)\xi\cdot\xi}}\,\xi\right).$$

*Trag mjere $\nu$ se propagira duž intergralnih krivulja sustava (17) koje su sadržane u $\mathbf{R}^{3+1}\times$ $\mathrm{S}^3$ i u nul skupu funkcije $Q$.* ∎

U slučaju konstantnih koeficijenata, možemo dobiti eksplicitni izraz za samu mjeru $\nu$ (a ne samo za njezin trag). U tom slučaju se sustav (17) znatno pojednostavljuje i njegove integralne krivulje su

$$\begin{aligned} t(s) &= \rho\xi_0 s + t(0)\\ x(s) &= -\mathbf{A}\xi s + x(0)\\ \boldsymbol{\xi}(s) &= \boldsymbol{\xi}(0). \end{aligned}$$

Nas zanimaju krivulje koje presijecaju hiperravninu $t=0$, te zaključujemo

$$(\xi_0\nu)(t,x,\boldsymbol{\xi}) = (\xi_0\nu)(0,x+\frac{\mathbf{A}\xi}{\rho\xi_0}t,\boldsymbol{\xi}).$$

Budući da je

$$\frac{\mathbf{A}\xi}{\rho\xi_0}\delta_\xi\left(S^{\mp}(x,\frac{k}{|k|})\right) = \mp\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}$$

to vrijedi sljedeći korolar.

**Korolar 4.** *Ako, uz pretpostavke Korolara 3. vrijedi da su koeficijenti $\rho$ i $\mathbf{A}$ konstantni, tada je*

$$\nu(t,x,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\rho}\sum_{\pm}\sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(S_0^{\mp}(\frac{k}{|k|})\right)^2}\Big(\rho|\hat{\beta}(x\mp\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t,k)|^2$$
$$+ 4\pi^2(\mathbf{A}k\cdot k)|\hat{\alpha}(x\mp\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t,k)|^2$$
$$\mp 4\pi\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}\,\mathsf{Im}\Big(\hat{\beta}(x\mp\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t,k)$$
$$\overline{\hat{\alpha}(x\mp\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t,k)}\Big)\Big)dtdx\delta_\xi\left(S^{\mp}(x,\frac{k}{|k|})\right).$$

∎

Primijeniti ćemo sada Teorem 6. na mjeru $\nu$ izraženu u zadnjem korolaru i dobiti da je makroskopska gustoća energije u slučaju konstantnih koeficijenata dana izrazom

$$d = \frac{1}{4}\sum_{\pm}\sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}}\Big(\rho|\hat{\beta}(x\pm\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t,k)|^2 + 4\pi^2(\mathbf{A}k\cdot k)|\hat{\alpha}(x\pm\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t,k)|^2$$
$$\pm 4\pi\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}\,\mathsf{Im}\Big(\hat{\beta}(x\pm\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t,k)\overline{\hat{\alpha}(x\pm\frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t,k)}\Big)\Big)dtdx. \tag{53}$$

# IV. Gérardov pristup

# 1. Uvod

U ovom poglavlju ćemo isti problem kao i u prethodnom riješavati koristiteći drugačije tehnike. Točnije rečeno, poslužit ćemo se metodama koje je razvio Gérard u svom članku iz 1995. godine ([G2]). On je također proučavao nelinearnu valnu jednadžbu, ali bez koeficijenata, i.e.

$$\partial_0^2 u - \Delta_x u + f(u) = 0,$$

pri čemu je $f$ glatka funkcija koja zadovoljava uvjet

$$|f^{(j)}(u)| \leqslant C(1+|u|)^{p-j}, \quad j \geqslant 0 \quad p \leqslant 5.$$

Gérard je također pokazao da dodavanje nelinearnog člana, odnosno funkcije $f$ u jednadžbu, nije rezultiralo nikakvim promjenama u oscilaciji ili koncentraciji energije. Međutim, njegove metode ne mogu se direktno poopćiti na slučaj kad imamo koeficijente uz derivacije u valnoj jednadžbi.

Nadalje, izračunao je limes gustoće energije za linearni slučaj bez koeficijenata, koristeći drugačije metode od onih koje su koristili Francfort i Murat ([FM]), te je pomoću njih uspio znatno pojednostavniti račun. Osnovna ideja se sastoji u tome da se zamrzne vremenska varijabla $t$ i da se limes mikrolokalnih energija $d_n$ izrazi H-mjerama koje ne ovise o dualnoj varijabli $\tau$. Na taj način bi se trebale izbjeći mnoge komplikacije računa prikazanog u prethodnom poglavlju, gdje nam je upravo ovisnost mjere $\nu$ o vremenu priječila da pomoću nje izrazimo veličinu $R(0)$ koja je definirala trag mjere u trenutku $t=0$.

Gérardove metode sam poopćio na slučaj nelinearne valne jednadžbe (s članom $u^3$) s varijabilnim koeficijentima uz prostorne derivacije.

# 2. Računanje makroskopske gustoće energije

Gledam isti niz početnih zadaća kao u prethodnom poglavlju

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \rho u_n'' - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla_x u_n) - u_n^3 = 0 \\ \qquad\qquad u_n(0) = \gamma_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d)\,, \\ \qquad\qquad u_n'(0) = \beta_n \rightharpoonup 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)\,, \end{cases}$$

s tom razlikom što je, zbog tehničkih razloga, koeficijent $\rho$ konstantan.

U računu ćemo se služiti sljedećim funkcijama. S $d_n^t$ označujemo pridruženu funkciju gustoće energije u fiksiranom trenutku $t$, odnosno

$$d_n^t(x) := \frac{1}{2}\rho(\dot{u}_n^t)^2(x) + \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\nabla_x u_n^t(x)\cdot\nabla_x u_n^t(x) + \frac{1}{4}(u_n^t)^4(x),$$

pri čemu smo s $u_n^t$ označili funkciju dobivenu fiksiranjem vremena u rješenju valne jednadžbe, to jest,

$$u_n^t(x) := u_n(t,x).$$

Za proizvoljni pseudodiferencijalni operator $B \in \Psi_c^0(\mathbf{R}^3)$, gledam pridruženu energiju u trenutku $t$

$$d_n^t(B) := \frac{1}{2}\langle\, B\rho\dot{u}_n^t \mid \dot{u}_n^t\,\rangle_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{2}\langle\, B\mathbf{A}\nabla_x u_n^t \mid \nabla_x u_n^t\,\rangle_{\mathrm{L}^2} + \frac{1}{4}\langle\, B(u_n^t)^2 \mid (u_n^t)^2\,\rangle_{\mathrm{L}^2},$$

čiji limes mogu izraziti pomoću H-mjere pridružene nizu derivacija rješenja jednadžbe (1).

Zbog Teorema III.3. postoji konvergentan podniz niza $\left(u_n^t\right)$ (kojeg označujem jednako) takav da pripadni podniz niza $\left(d_n^t(B)\right)$ konvergira za svaki $B \in \Psi_c^0(\mathbf{R}^3)$ i na taj način definira H-mjeru $\mu^t$. Problem koji se pri tom uočava je jedinstvenost podniza u različitim trenucima $t$, o čemu će biti više riječi u daljnjem dijelu ovog odjeljka.

Naš cilj je izraziti mjeru $\mu^t$ pomoću početnih uvjeta $\beta_n$ i $\gamma_n$, odnosno pomoću njima pridruženih H-mjera.

Nelinearnoj valnoj jednadžbi (1) ćemo pridružiti (pseudo)diferrencijalni operator $A = -\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla)$. Očito je $A \in \Xi^2(\mathbf{R}^3; \mathbf{R})$ i njegov simbol je

$$\sigma(A) = 4\pi^2 \mathbf{A}\xi \cdot \xi - i2\pi \mathsf{div}\, \mathbf{A} \cdot \xi \,.$$

Glavni dio gornjeg simbola je $\sigma_2(A) = 4\pi^2 \mathbf{A}\xi \cdot \xi$.

$A$ je eliptični operator, te je to također operator $\sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}} \in \Xi^1$, definiran preko svog simbola $\sqrt{\sigma(A)}$. Zbog toga postoji operator $(\sqrt{A})^{-1} \in \Xi^{-1}$, takav da je $A^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} = I$ do na izglađujući operator negativnog reda (za detalje vidi Poglavlje I.).

Definirajmo sad funkciju

$$u_{n,\pm}^t = \dot{u}_n^t \pm i \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}} u_n^t \mp i \frac{(\sqrt{A})^{-1}}{\sqrt{\rho}} (u_n^t)^3.$$

Derivirajući $u_{n,\pm}^t$ po vremenu i koristeći da je $u_n^t$ rješenje valne jednadžbe, dobijemo

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{n,\pm}^t &= \ddot{u}_n^t \pm i \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}} \left( u_{n,\pm}^t \mp i \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}} u_n^t \pm i \frac{(\sqrt{A})^{-1}}{\sqrt{\rho}} (u_n^t)^3 \right) \mp i \frac{(\sqrt{A})^{-1}}{\sqrt{\rho}} 3 (u_n^t)^2 \dot{u}_n^t \\
&= \ddot{u}_n^t \pm i \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}} u_{n,\pm}^t + \frac{A}{\rho} u_n^t - \frac{(u_n^t)^3}{\rho} + i \frac{(\sqrt{A})^{-1}}{\sqrt{\rho}} 3 (u_n^t)^2 \dot{u}_n^t \\
&= \pm i \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}} u_{n,\pm}^t \mp i \frac{(\sqrt{A})^{-1}}{\sqrt{\rho}} 3 (u_n^t)^2 \dot{u}_n^t.
\end{aligned}$$

Zadnji član, koji je posljedica uvođenja nelinearnosti u jednadžbu, sadrži operator reda $-1$ koji djeluje na omeđen niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ (vidi dokaz Leme III.5.), te stoga na limesu daje 0.

Želimo, analogno kao u Poglavlju III., izvesti transportnu jednadžbu za pripadnu H-mjeru. U tu svrhu uzmimo operator $B \in \Psi^0(\mathbf{R}^3)$, te iskoristimo zadnju jednakost, pri tom zanemarujući član koji na limesu daje 0, da bismo dobili

$$\frac{d}{dt} \langle\, B u_{n,\pm}^t \mid u_{n,\pm}^t \,\rangle = \ \langle\, \pm i \left[ B, \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}} \right] u_{n,\pm}^t \mid u_{n,\pm}^t \,\rangle.$$

Gornja jednakost posebno povlači da je $t \mapsto \langle B u_{n,\pm}^t, u_{n,\pm}^t \rangle$ lokalno Lipschitzovo preslikavanje s Lipschitzovom konstantom neovisnom o $n$, pa zbog Soboljevljevog ulaganja $\mathrm{W}^{1,\infty} \overset{c}{\hookrightarrow} \mathrm{L}^\infty$ na kompaktnim skupovima, postoji podniz takav da za svaki $B \in \Psi^0$

$$\langle\, B u_{n,\pm}^t \mid u_{n,\pm}^t \,\rangle \to \int \sigma_0(B) d\mu_\pm^t$$

lokalno uniformno po $t$, pri čemu $\mu_\pm^t$ označuje H-mjeru pridruženu nizu $u_{n,\pm}^t$.

Prelazeći na limes, zadnja jednakost poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int \sigma_0(B) d\mu_\pm^t &= \pm \int i \sigma_0 [B, \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}] d\mu_\pm^t \\
&= \pm \int \left( \nabla_\xi \sigma_0(B) \cdot \nabla_x a - \nabla_x \sigma_0(B) \cdot \nabla_\xi a \right) d\mu_\pm^t,
\end{aligned} \tag{2}$$

gdje smo s $a$ označili $\sqrt{\frac{\mathbf{A}\xi\cdot\xi}{\rho}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma_2(A)}{\rho}}$. Izvršit ćemo parcijalnu integraciju gornje jednakosti, kako bismo se oslobodili derivacija uz $\sigma_0(B)$, pa zbog proizvoljnosti operatora $B$ mogli napisati jednadžbu za mjere $\mu^t_\pm$. Koristeći činjenicu da simbol operatora $B$ ima kompaktan nosač, slijedi da je

$$\text{(3)}\qquad -\int \nabla_x\sigma_0(B)\cdot\nabla_\xi a\, d\mu^t_\pm = \int \sigma_0(B)\nabla_\xi a\cdot d\nabla_x\mu^t_\pm + \int \sigma_0(B)\cdot \mathsf{div}_x\nabla_\xi a\, d\mu^t_\pm.$$

Za parcijalnu integraciju prvog člana na desnoj strani jednakosti (3) trebat će nam sljedeća jednakost za distribucijski račun na sferi (v. [FM] ili [GT], Lema 16.1.)

$$\langle \nu, \nabla_{\boldsymbol\xi}\Phi\rangle - \langle \nu\cdot\mathbf{n}, \nabla_{\mathbf{n}}\Phi\rangle + \langle \mathsf{div}_{\boldsymbol\xi}\nu - \nabla_{\boldsymbol\xi}\nu\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}, \Phi\rangle = 2\langle \mathbf{n}\cdot\nu, \Phi\rangle,$$

za $\Phi \in \mathrm{C}^1_c(\mathbf{R}^3\times \mathrm{S}^2)$ i Radonovu mjeru $\nu$ na sferi $\mathrm{S}^2$, pri čemu $\mathbf{n}$ označava normalu na $\mathrm{S}^2$.

Budući da je u našem slučaju funkcija $\Phi = \sigma_0(B)$ homogena stupnja nula na $\mathbf{R}^3_\xi\setminus\{0\}\supseteq \mathrm{S}^2$, te stoga što je na sferi $\mathbf{n} = \boldsymbol\xi$,

$$\nabla_{\mathbf{n}}\Phi = \nabla_{\boldsymbol\xi}\Phi\cdot\boldsymbol\xi = 0.$$

Na taj način dobijemo da je

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned}\int \nabla_\xi\sigma_0(B)\cdot\nabla_x a\, d\mu^t_\pm = &-\int \sigma_0(B)\left(\mathsf{div}_\xi\nabla_x a - \nabla_\xi\left(\nabla_x a\right)\xi\cdot\xi - (3-1)\nabla_x a\cdot\xi\right) d\mu^t_\pm\\ &-\int \sigma_0(B)\nabla_x a\cdot\xi\, d\nabla_\xi\mu^t_\pm + \int \sigma_0(B)\left(\nabla_x a\cdot\xi\right)\xi\cdot d\nabla_\xi\mu^t_\pm.\end{aligned}$$

Uvrštavajući relacije (4) i (3) u (2) dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \sigma_0(B)d\mu^t_\pm = &\pm\Bigg(\int \sigma_0(B)\cdot\nabla_\xi a\cdot d\nabla_x\mu^t_\pm - \int\sigma_0(B)\nabla_x a\cdot\xi\, d\nabla_\xi\mu^t_\pm\\ &+\int\sigma_0(B)\left(\nabla_\xi\left(\nabla_x a\right)\xi\cdot\xi + (3-1)\nabla_x a\cdot\xi\right) d\mu^t_\pm\\ &+\int \sigma_0(B)\left(\nabla_x a\cdot\xi\right)\xi\cdot d\nabla_\xi\mu^t_\pm\Bigg)\\ =&\pm\Bigg(\int\sigma_0(B)\{a, d\mu^t_\pm\} + \int\sigma_0(B)\left(\nabla_x a\cdot\xi\right)\xi\cdot d\nabla_\xi\mu^t_\pm\\ &+\int\sigma_0(B)\left(\nabla_\xi\left(\nabla_x a\right)\xi\cdot\xi + (3-1)\nabla_x a\cdot\xi\right) d\mu^t_\pm\Bigg).\end{aligned}$$

Koristeći proizvoljnost operatora $B$, odnosno simbola $\sigma_0(B)\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^3\times\mathrm{S}^2)$, možemo napisati transportnu jednadžbu za mjeru $\mu^t_\pm$

$$\frac{d}{dt}\mu^t_\pm = \pm\Bigg(\{a,\mu^t_\pm\} + \left(\nabla_x a\cdot\xi\right)\xi\cdot\nabla_\xi\mu^t_\pm + \Big((3-1)\nabla_x a\cdot\xi + \Big((\nabla_\xi\otimes\nabla_x)a\Big)\xi\cdot\xi\Big)\,\mu^t_\pm\Bigg).$$

Važno je pri tom napomenuti da je ova jednadžba ista kao i u linearnom slučaju.

U slučaju konstantnih koeficijenata gornja jednadžba se pojednostavljuje u

$$\frac{d}{dt}\mu^t_\pm = \pm\frac{\mathbf{A}\xi}{\sqrt{\rho\mathbf{A}\xi\cdot\xi}}\cdot\nabla_x\mu^t_\pm.$$

Ukoliko s $\mu^0_\pm$ označimo H-mjere pridružene nizovima $u^t_{n,\pm}(0) = \beta_n \pm i\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}\gamma_n \mp i\frac{(\sqrt{A})^{-1}}{\sqrt{\rho}}(\gamma_n)^3$ mjere $\mu^t_\pm$ možemo eksplicitno izraziti formulom

$$\mu^t_\pm(x,\xi) = \mu^0_\pm\left(x \pm t\frac{\mathbf{A}\xi}{\sqrt{\rho\mathbf{A}\xi\cdot\xi}}, \xi\right).$$

Preostali zadatak je izraziti limes mikroskopske gustoće energije $d^t_n$, odnosno mjeru $\mu^t$, pomoću mjera $\mu^t_\pm$. U tu svrhu želimo usporediti funkciju $d^t_n(B)$ sa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho\left(\langle\, Bu^t_{n,+} \mid u^t_{n,+}\,\rangle + \langle\, Bu^t_{n,-} \mid u^t_{n,-}\,\rangle\right)\\
&\quad= \frac{1}{2}\rho\Big\langle\, B\dot{u}^t_n \pm i\frac{B\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mp iB\frac{(\sqrt{A})^{-1}}{\sqrt{\rho}}(u^t_n)^3 \mid \dot{u}^t_n \pm i\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mp i\frac{(\sqrt{A})^{-1}}{\sqrt{\rho}}(u^t_n)^3\,\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Budući da je operator $(\sqrt{A})^{-1}$ reda $-1$ i djeluje na omeđeni niz u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$, on na limesu daje nulu, pa ga stoga možemo zanemariti. Na taj način se gornja jednakost svodi na

$$\begin{aligned}
\text{(5)}\quad \frac{1}{2}\rho\left(\langle\, Bu^t_{n,+} \mid u^t_{n,+}\,\rangle + \langle\, Bu^t_{n,-} \mid u^t_{n,-}\,\rangle\right) &= \rho\langle\, B\dot{u}^t_n \mid \dot{u}^t_n\,\rangle \pm \frac{1}{2}\rho\Big\langle\, B\dot{u}^t_n \mid i\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n\,\Big\rangle\\
&\pm \frac{1}{2}\rho\Big\langle\, Bi\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid \dot{u}^t_n\,\Big\rangle + \rho\Big\langle\, B\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid u^t_n\,\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Razmotrimo detaljnije drugi i treći član na desnoj strani gornje jednakosti.

$$\begin{aligned}
\langle\, B\dot{u}^t_n \mid i\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n\,\rangle + \langle\, Bi\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid \dot{u}^t_n\,\rangle &= -i\Big\langle\, \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid B\dot{u}^t_n\,\Big\rangle + i\Big\langle\, B\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid \dot{u}^t_n\,\Big\rangle\\
&= i\Big\langle\, [B, \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}]u^t_n \mid \dot{u}^t_n\,\Big\rangle + i\Big\langle\, R\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid \dot{u}^t_n\,\Big\rangle,
\end{aligned}$$

pri čemu je operator $R$ negativnog reda, odnosno $R\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}} \in \Psi^0$. Isti zaključak vrijedi i za operator $[B, \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}]$, pa zbog jake konvergencije niza $u_n$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ slijedi da cijeli gornji izraz teži k nuli.

Preostaje nam razmotriti još dva člana u (5): $\rho\langle\, B\dot{u}^t_n \mid \dot{u}^t_n\,\rangle$ i $\rho\langle\, B\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid u^t_n\,\rangle$. Prvi od njih je upravo onaj koji trebamo, budući da se pojavljuje i u funkciji $d^t_n(B)$. Raspišimo drugi

$$\begin{aligned}
\langle\, B\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid u^t_n\,\rangle &= -\langle\, [B, \mathbf{A}\nabla]u^t_n \mid \nabla u^t_n\,\rangle + \langle\, [B, \sqrt{A}]u^t_n \mid \sqrt{A}u^t_n\,\rangle\\
&+ \langle\, B\mathbf{A}\nabla u^t_n \mid \nabla u^t_n\,\rangle - \langle\, \mathbf{A}\nabla Bu^t_n \mid \nabla u^t_n\,\rangle + \langle\, \sqrt{A}Bu^t_n \mid \sqrt{A}u^t_n\,\rangle.
\end{aligned}$$

Zbog toga što je $\langle\, \sqrt{A}Bu^t_n \mid \sqrt{A}u^t_n\,\rangle = \langle\, \mathbf{A}\nabla Bu^t_n \mid \nabla u^t_n\,\rangle$ (do na djelovanje operatora reda nula), koristeći ista razmatranja kao gore, zaključujemo da je

$$\langle\, B\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}u^t_n \mid u^t_n\,\rangle = \langle\, B\mathbf{A}\nabla u^t_n \mid \nabla u^t_n\,\rangle$$

u smislu distribucija.

Na taj način smo pokazali da je

$$d_n^t(B) = \frac{1}{4}\rho\left(\langle\, Bu_{n,+}^t \mid u_{n,+}^t \,\rangle + \langle\, Bu_{n,-}^t \mid u_{n,-}^t \,\rangle + \langle\, B(u_n^t)^2 \mid (u_n^t)^2 \,\rangle\right).$$

Zbog jake konvergencije niza $(u_n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^3)$, zaključujemo da mjera $\mu_t$ pridružena nizu derivacija rješenja zadaće (1) u trenutku $t$ je oblika

$$\mu^t = \frac{1}{4}\rho(\mu_+^t + \mu_-^t),$$

što je ista relacija kao i u linearnom slučaju (vidi [G2]).

U slučaju konstantnih koeficijenata možemo za nju napisati eksplicitnu formulu

$$\mu^t = \frac{1}{4}\rho\left(\mu_+^0\left(x + \frac{\mathbf{A}\xi}{\sqrt{\rho\mathbf{A}\xi\cdot\xi}}t, \xi\right) + \mu_-^0\left(x - \frac{\mathbf{A}\xi}{\sqrt{\rho\mathbf{A}\xi\cdot\xi}}t, \xi\right)\right). \tag{6}$$

Kako bismo dokazali da se energija ne mijenja dodavanjem nelinearnog člana u jednadžbu, preostaje provjeriti početne uvjete za $\mu_\pm^t$, odnosno pokazati da su H-mjere pridružene nizovima $u_{n,\pm}^t(0) = \beta_n \pm i\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\rho}}\gamma_n \mp i\frac{\left(\sqrt{A}\right)^{-1}}{\sqrt{\rho}}(\gamma_n)^3$ iste kao i u linearnom slučaju. Ovi početni uvjeti se razlikuju od linearnog slučaja za član $(\sqrt{A})^{-1}(\gamma_n)^3$, koji sadrži operator negativnog reda koji djeluje na omeđeni niz u $\mathrm{L}^2$, te stoga ne utječe na pripadnu H-mjeru. Na taj način smo potvrdili zaključak Teorema 7. iz prethodnog poglavlja koji kaže da je energija u nelinearnom slučaju jednaka kao i u linearnom.

Želimo sad usporediti rezultate ovog i prethodnog poglavlja za slučaj jednadžbe s konstantnim koeficijentima, budući da tada imamo eksplicitne (pa i usporedive) formule za makroskopsku gustoću energije.

Uzmimo opet niz početnih uvjeta kao u prethodnom poglavlju

$$\begin{cases} \gamma_n(x) &= \frac{1}{n}\alpha(x, nx) \\ \beta_n(x) &= \beta(x, nx). \end{cases}$$

Ponavljajući postupak koji smo koristili za računanje H-mjera $\tilde{\nu}_\pm$ u Poglavlju III. dobijemo da je

$$\begin{aligned} \mu_\pm^0 = \sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}} &\Bigg(|\hat{\beta}(x,k)|^2 + \frac{4\pi^2}{\rho}\mathbf{A}k\cdot k|\hat{\alpha}(x,k)|^2 \\ &\pm \frac{4\pi}{\sqrt{\rho}}\sqrt{\mathbf{A}k\cdot k}\,\mathsf{Im}\left(\hat{\beta}(x,k)\overline{\hat{\alpha}(x,k)}\right)\Bigg)dx\delta_\xi\left(\frac{k}{|k|}\right). \end{aligned}$$

Uvrstimo li gornju formulu u (6) dobijemo

$$\begin{aligned} \mu^t(x,\xi) = \frac{1}{4}\sum_\pm\sum_{k\in\mathbf{Z}^3\setminus\{0\}} &\Bigg(\rho\left|\hat{\beta}\left(x \pm \frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t, k\right)\right|^2 + 4\pi^2(\mathbf{A}k\cdot k)\left|\hat{\alpha}\left(x \pm \frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t, k\right)\right|^2 \\ &\pm 4\pi\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}\,\mathsf{Im}\left(\hat{\beta}\left(x \pm \frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t, k\right)\overline{\hat{\alpha}\left(x \pm \frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho\mathbf{A}k\cdot k}}t, k\right)}\right)\Bigg)dx\delta_\xi\left(\frac{k}{|k|}\right). \end{aligned}$$

Nas zanima distribucijski limes niza $d_n(t,x)$. Stoga uzmimo test funkciju $\chi(t)\psi(x) \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{3+1})$ i izračunajmo

$$\begin{aligned} \lim_n \int_{\mathbf{R}^{3+1}} d_n(t,x)\chi(t)\psi(x)dtdx &= \lim_n \int_{\mathbf{R}} \chi(t)\int_{\mathbf{R}^3} d_n^t(x)\psi(x)dxdt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \langle \mu^t, \psi\rangle dt. \end{aligned}$$

Na osnovu gornje jednakosti vidimo da je makroskopska gustoća energije $d = \lim d_n$ dana relacijom

$$d = \frac{1}{4} \sum_{\pm} \sum_{k \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}} \Bigg( \rho \Big| \hat{\beta}\Big( x \pm \frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho \mathbf{A}k \cdot k}} t, k \Big) \Big|^2 + 4\pi^2 (\mathbf{A}k \cdot k) \Big| \hat{\alpha}\Big( (x \pm \frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho \mathbf{A}k \cdot k}} t, k \Big) ) \Big|^2$$

$$\pm 4\pi \sqrt{\rho \mathbf{A}k \cdot k}\, \mathsf{Im} \left( \hat{\beta}\Big( (x \pm \frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho \mathbf{A}k \cdot k}} t, k \Big) ) \overline{\hat{\alpha}\Big( (x \pm \frac{\mathbf{A}k}{\sqrt{\rho \mathbf{A}k \cdot k}} t, k \Big) )} \right) \Bigg) dt dx,$$

što je upravo formula (53) iz Poglavlja III.

# V. Primjena na hiperboličke sustave

# 1. Uvod

U ovom poglavlju ćemo razmatrati simetrični hiperbolički sustav

$$\mathbf{A}^0\partial_0\mathsf{v} + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v} + \mathbf{B}\mathsf{v} = \mathsf{f}.$$

Ukoliko nema straha od dvosmislenosti, Einsteinova konvencija za ponavljajuće indekse će se podrazumijevati, sa sumacijom od 1. Hiperboličnost gornjeg sustava znači da je matrica $\mathbf{A}(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) := y_k\mathbf{A}^k(t,\mathbf{x})$ dijagonalizabilna za svaki $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^d$ i $t \in \mathbf{R}^+$, te da je matrica $\mathbf{A}^0$ pozitivno definitna. Sustav je simetričan ukoliko su sve matrice $\mathbf{A}^k, k = 1,\dots,d$, simetrične.

Energija pridružena gornjem sustavu je

$$E := \frac{1}{2}\langle\, \mathbf{A}^0\mathsf{v} \mid \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2}.$$

Razmatrat ćemo niz problema

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{A}^0\partial_0\mathsf{v}_n + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v}_n + \mathbf{B}\mathsf{v}_n &= \mathsf{0} \\ \mathsf{v}_n(0) &= \mathsf{g}_n, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

pri čemu $\mathsf{g}_n \rightharpoonup \mathsf{0} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$.

U Teoremu 5. ćemo dokazati da konvergencija početnih uvjeta povlači konvergenciju rješenja

$$\mathsf{v}_n \longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{R}^r).$$

Uvest ćemo funkciju gustoće energije

$$d_n := \frac{1}{2}\mathbf{A}_0\mathsf{v}_n \cdot \mathsf{v}_n.$$

Naš cilj je izračunati distribucijski limes niza $d_n$. Pri tom će nam ponovno glavno sredstvo u računu biti H-mjere i pomoću njih ćemo izraziti traženi limes $d_n$. Izvest ćemo prijenosnu jednadžbu koju zadovoljava pripadna H-mjera i primijeniti taj rezultat na valnu jednadžbu. Zapisujući valnu jednadžbu kao hiperbolički sustav, izračunat ćemo pripadnu H-mjeru za titrajući niz početnih uvjeta. Dobiveni rezultat se slaže s onima iz prethodna dva poglavlja, te također s rezultatom kojeg ćemo dobiti direktnim računanjem H-mjere iz rješenja danog D'Alembertovom formulom za rješenje valne jednadžbe.

# 2. Egzistencija i jedinstvenost rješenja hiperboličkog sustava

U ovom odjeljku ćemo koristiti energetsku ocjenu i metodu iščezavajuće viskoznosti za nalaženje rješenja hiperboličke početne zadaće

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{A}^0\partial_0\mathsf{v} + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v} + \mathbf{B}\mathsf{v} &= \mathsf{f} \\ \mathsf{v}(0) &= \mathsf{g}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Pretpostavit ćemo da su matrice $\mathbf{A}^k, k = 1,\dots,d$, simetrične i matrica $\mathbf{A}_0$ pozitivno definitna. Radi pojednostavljenja računa, a bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$. Nadalje ćemo pretpostaviti da su $\mathbf{A}^k, \mathbf{B} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{M}^{r\times r})$, te $\mathsf{g} \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$, $\mathsf{f} \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{R}^r)$.

Radi pojednostavljenja oznaka uvedimo bilinearnu formu

$$\mathbf{A}[\mathsf{v},\mathsf{u};t] := \int_{\mathbf{R}^d} \sum_1^d (\mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{v}) \cdot \mathsf{u} d\mathbf{x}$$

za $0 \leqslant t \leqslant T, \mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)$.

**Definicija.** Kažemo da je

$$\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)) \cap \mathrm{W}^{1,2}(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r))$$

slabo rješenje početnog problema (2) za simetrični hiperbolički sustav ukoliko je

(i) $\langle \mathsf{v}' \mid \mathsf{u} \rangle + \mathbf{A}[\mathsf{v},\mathsf{u};t] + \langle B\mathsf{v} \mid \mathsf{u} \rangle = \langle \mathsf{f} \mid \mathsf{u} \rangle$

za svaki $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$ i (ss $t \in [0,T]$), te

(ii) $\mathsf{v}(0) = \mathsf{g}$.

Problem (2) ćemo aproksimirati nizom paraboličkih početnih zadaća

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \partial_0 \mathsf{v}_n - \dfrac{1}{n}\Delta \mathsf{v}_n + \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{v}_n + \mathbf{B}\mathsf{v}_n = \mathsf{f} \\ \mathsf{v}_n(0) = \mathsf{g}_n, \end{cases}$$

pri čemu je $\mathsf{g}_n := \rho_n * \mathsf{g}, \rho_n(\mathbf{x}) = n^d \rho(n\mathbf{x})$, dok je $\rho$ standardni izglađivač. Ideja je za svaki $n$ pronaći jedinstveno glatko rješenje $\mathsf{v}_n$ i pokazati da niz tih rješenja konvergira k limesu $\mathsf{v}$ koji je slabo rješenje sustava (2).

**Teorem 1. (egzistencija približnih rješenja)** *Za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji jedinstveno rješenje $\mathsf{v}_n$ zadaće (3) takvo da je*

$$\mathsf{v}_n \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)), \mathsf{v}_n' \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)).$$

Dem. Uvedimo oznaku $X = \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r))$ i za svaki $\mathsf{u} \in X$ razmotrimo linearni sustav

$$\begin{cases} \partial_0 \mathsf{v} - \dfrac{1}{n}\Delta \mathsf{v} = \mathsf{f} - \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u} - \mathbf{B}\mathsf{u} \\ \mathsf{v}_n(0) = \mathsf{g}_n. \end{cases}$$

Budući da je desna strana gornjeg sustava (koji se u stvari raspada na niz nezavisnih jednadžbi) omeđena u $\mathrm{L}^2$, postoji njegovo jedinstveno rješenje $\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)), \mathsf{v}' \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r))$ koje trne kad $|\mathbf{x}| \to \infty$ (vidi [E], 7.1.).

Slično, neka je za $\tilde{\mathsf{u}} \in X$ funkcija $\tilde{\mathsf{v}}$ rješenje sustava

$$\begin{cases} \partial_0 \tilde{\mathsf{v}} - \dfrac{1}{n}\Delta \tilde{\mathsf{v}} = \mathsf{f} - \mathbf{A}^k \partial_k \tilde{\mathsf{u}} - \mathbf{B}\tilde{\mathsf{u}} \\ \tilde{\mathsf{v}}_n(0) = \mathsf{g}_n. \end{cases}$$

Oduzimajući gornja dva sustava, vidimo da $\mathsf{v}^* := \mathsf{v} - \tilde{\mathsf{v}}$ i $\mathsf{u}^* := \mathsf{u} - \tilde{\mathsf{u}}$ zadovoljavaju

$$\begin{cases} \partial_0 \mathsf{v}^* - \dfrac{1}{n}\Delta \mathsf{v}^* = -\mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u}^* - \mathbf{B}\mathsf{u}^* \\ \mathsf{v}_n^*(0) = 0. \end{cases}$$

Iz energetske ocjene za rješenje paraboličke zadaće (vidi [E], 7.1.) slijedi

$$\begin{aligned}\|\mathsf{v}^*\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1)} &\leqslant C_n\Big(\|\mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{u}^*\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)} + \|\mathbf{B}\mathsf{u}^*\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)}\Big)\\ &\leqslant C_n\|\mathsf{u}^*\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1)}\\ &\leqslant C_nT^{1/2}\|\mathsf{u}^*\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1)}.\end{aligned}$$

Za dovoljno malen $T$, takav da je

$$C_nT^{1/2}\leqslant\frac{1}{2} \tag{4}$$

gornja nejednakost prelazi u

$$\|\mathsf{v}-\tilde{\mathsf{v}}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1)}\leqslant\frac{1}{2}\|\mathsf{u}-\tilde{\mathsf{u}}\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1)}.$$

Koristeći Banachov teorem o fiksnoj točki zaključujemo da preslikavanje $\mathsf{u}\to\mathsf{v}$ ima jedinstvenu fiksnu točku $\mathsf{v}_n$ koja je rješenje problema (3).

U slučaju da ocjena (4) ne vrijedi, izaberimo $T_1\in\langle 0,T\rangle$ takav da je $CT_1=\frac{1}{2}$ i ponovimo gornji postupak na intervalima $[0,T_1],[T_1,2T_1]$, itd.

**Q.E.D.**

Želimo naći limes rješenja $\mathsf{v}_n$ zadaće (3), a za to su nam potrebne sljedeće uniformne ocjene.

**Teorem 2.** **(energetske ocjene)** *Postoji konstanta $C$ koja ovisi samo o dimenziji prostora i koeficijentima $\mathbf{A}^k$ i $\mathbf{B}$ takva da je za svaki $n$*

$$\begin{aligned}&\|\mathsf{v}_n\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1)}+\|\mathsf{v}_n'\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)}\\ &\qquad\leqslant C\left(\|g\|_{\mathrm{H}^1}+\|f\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1)}+\|f'\|_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)}\right).\end{aligned}$$

Dem. Izračunajmo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^2}\right)=\langle\,\mathsf{v}_n\mid\mathsf{v}_n'\,\rangle=\langle\,\mathsf{v}_n\mid\mathsf{f}-\mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v}_n-\mathbf{B}\mathsf{v}_n+\frac{1}{n}\Delta\mathsf{v}_n\,\rangle.$$

Imamo sljedeće ocjene

$$|\langle\,\mathsf{v}_n\mid\mathsf{f}\,\rangle|\leqslant\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^2}+\|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2}$$

i

$$\langle\,\mathsf{v}_n\mid\frac{1}{n}\Delta\mathsf{v}_n\,\rangle=-\frac{1}{n}\|\nabla_x\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^2}\leqslant 0$$

Pretpostavimo da je $\mathsf{u}\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$. Tada je

$$\begin{aligned}\langle\,\mathsf{u}\mid\mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{u}\,\rangle&=\int_{\mathbf{R}^d}(\mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{u})\cdot\mathsf{u}d\mathbf{x}\\ &=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_k(\mathbf{A}^k\mathsf{u})\cdot\mathsf{u}d\mathbf{x}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\partial_k(\mathbf{A}^k)\mathsf{u}\Big)\cdot\mathsf{u}d\mathbf{x},\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj nejednakosti koristili prepostavku simetričnosti matrica $\mathbf{A}^k$. Budući da $\mathsf{u}$ ima kompaktan nosač zaključujemo da je

$$\Big|\langle\,\mathsf{u}\mid\mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{u}\,\rangle\Big|\leqslant\frac{1}{2}\Big|\int_{\mathbf{R}^d}\Big(\partial_k(\mathbf{A}^k)\mathsf{u}\Big)\cdot\mathsf{u}d\mathbf{x}\Big|\leqslant C\|\mathsf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Koristeći se aproksimacijom zaključujemo da je

$$\left|\langle\, \mathsf{v}_n \mid \mathbf{A}^k\partial_k \mathsf{v}_n\,\rangle\right| \leqslant C\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Zbog toga što je $\mathbf{B}\in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{M}^{r\times r})$ možemo zaključiti da je

$$\langle\, \mathsf{v}_n \mid \mathbf{B}\mathsf{v}_n\,\rangle \leqslant C\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Koristeći gornje ocjene dobijemo

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^2}\right) \leqslant C\left(\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2}\right).$$

U sljedećem koraku uz pomoć Gronwallove nejednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned}\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2)} &\leqslant C\left(\|\mathsf{g}_n\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)}\right)\\ &\leqslant C\left(\|\mathsf{g}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Fiksirajmo $j\in\{1,\dots,d\}$ i označimo $\mathsf{u}^j = \partial_j \mathsf{v}_n$. Derivirajući (3) po $x_j$ dobijemo

$$\begin{cases} \partial_0\mathsf{u}^j - \dfrac{1}{n}\Delta\mathsf{u}^j + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{u}^j + \mathbf{B}\mathsf{u}^j = \partial_j\mathsf{f} - \left(\partial_j\mathbf{A}^k\right)\partial_k\mathsf{v}_n - \left(\partial_j\mathbf{B}\right)\mathsf{v}_n\\ \mathsf{u}^j(0) = \partial_j\mathsf{g}_n \end{cases}$$

Ponavljajući postupak kojim smo došli do ocjene (5) dobijemo

$$\frac{d}{dt}\left(\|\mathsf{u}^j\|^2_{\mathrm{L}^2}\right) \leqslant C\left(\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{H}^1} + \|\nabla_x\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2}\right).$$

Zbrajajući zadnju nejednakost po $j$ slijedi

$$\frac{d}{dt}\left(\|\nabla_x\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^2}\right) \leqslant C\left(\|\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{H}^1} + \|\nabla_x\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2}\right).$$

Koristeći još jednom Gronwallovu lemu zaključujemo da je

$$\begin{aligned}\|\nabla_x\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2)} &\leqslant C\left(\|\mathsf{g}_n\|^2_{\mathrm{H}^1} + \|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1)}\right)\\ &\leqslant C\left(\|\mathsf{g}\|^2_{\mathrm{H}^1} + \|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1)}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Za dobiti posljednju traženu ocjenu derivirajmo jednadžbu (3) po $t$. Uz oznaku $\mathsf{u} := \partial_0\mathsf{v}_n$ vrijedi

$$\begin{cases} \partial_0\mathsf{u} - \dfrac{1}{n}\Delta\mathsf{u} + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{u} + \mathbf{B}\mathsf{u} = \partial_0\mathsf{f} - \left(\partial_0\mathbf{A}^k\right)\partial_k\mathsf{v}_n - \left(\partial_0\mathbf{B}\right)\mathsf{v}_n\\ \mathsf{u}(0) = \mathsf{f} - \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{g}_n - \mathbf{B}\mathsf{g} + \dfrac{1}{n}\Delta\mathsf{g}_n \end{cases}$$

Zaključujući analogno kao gore, dobijemo

$$\begin{aligned}\|\partial_0\mathsf{v}_n\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2)} \leqslant C\Bigg(&\|\mathsf{g}\|^2_{\mathrm{H}^1} + \frac{1}{n^2}\|\Delta\mathsf{g}_n\|_{\mathrm{L}^2}\\ &+ \|\mathsf{f}(0)\|_{\mathrm{L}^2} + \|\partial_0\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)} + \|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1)}\Bigg).\end{aligned}$$

Zbog toga što je $\mathsf{g}_n = \rho_n * \mathsf{g}$, vrijedi ocjena

$$\|\Delta\mathsf{g}_n\|^2_{\mathrm{L}^2} \leqslant Cn^2\|\nabla_x\mathsf{g}\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Nadalje je

$$\|\mathsf{f}(0)\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant C\left(\|\partial_0\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)} + \|\mathsf{f}\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2)}\right).$$

Zadnje tri ocjene, zajedno s (5) i (6), daju traženu energetsku ocjenu.

**Q.E.D.**

Koristeći posljednji teorem možemo prelaskom na limes niza rješenja približnih zadaća dokazati postojanje rješenja sustava (2).

**Teorem 3.** **(postojanje slabog rješenja)** *Postoji slabo rješenje početnog problema (2).*

Dem. Prema energetskoj ocjeni iz prethodnog teorema znamo da postoji podniz niza $(\mathsf{v}_n)$ (kojeg bez straha od zabune označujem jednako) takav da

$$\begin{cases} \mathsf{v}_n \rightharpoonup \mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)) \\ \partial_0 \mathsf{v}_n \rightharpoonup \partial_0 \mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)) \end{cases}$$

Izaberimo $\mathsf{u} \in \mathrm{C}^1(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r))$. Koristeći da je $\mathsf{v}_n$ slabo rješenje sustava (3) imamo

$$(7) \qquad \int_0^T \left( \langle\, \partial_0 \mathsf{v}_n \mid \mathsf{u}\,\rangle + \frac{1}{n}\langle\, \nabla_x \mathsf{v}_n \mid \nabla_x \mathsf{u}\,\rangle + \mathbf{A}[\mathsf{v}_n, \mathsf{u}; t] + \langle\, \mathbf{B}\mathsf{v}_n \mid \mathsf{u}\,\rangle \right) dt = \int_0^T \langle\, \mathsf{f} \mid \mathsf{u}\,\rangle dt.$$

Prijeđimo u gornjoj jednakosti na limes po $n$. Koristeći omeđenost niza $(\mathsf{v}_n)$ u $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1)$ dobijemo

$$(8) \qquad \int_0^T \left( \langle\, \partial_0 \mathsf{v} \mid \mathsf{u}\,\rangle + \mathbf{A}[\mathsf{v}, \mathsf{u}; t] + \langle\, \mathbf{B}\mathsf{v} \mid \mathsf{u}\,\rangle \right) dt = \int_0^T \langle\, \mathsf{f} \mid \mathsf{u}\,\rangle dt.$$

Gornja jednakost vrijedi za proizvoljni $\mathsf{u} \in \mathrm{C}(0,T;\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r))$ i stoga je

$$\langle\, \partial_0 \mathsf{v} \mid \mathsf{u}\,\rangle + \mathbf{A}[\mathsf{v}, \mathsf{u}; t] + \langle\, \mathbf{B}\mathsf{v} \mid \mathsf{u}\,\rangle = \langle\, \mathsf{f} \mid \mathsf{u}\,\rangle$$

za skoro svaki $t \in [0,T]$ i svaki $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$.

Prepostavimo sada da je $\mathsf{u}(T) = 0$. Tada (7) povlači

$$\int_0^T \left( -\langle\, \mathsf{v}_n \mid \partial_0 \mathsf{u}\,\rangle + \frac{1}{n}\langle\, \nabla_x \mathsf{v}_n \mid \nabla_x \mathsf{u}\,\rangle + \mathbf{A}[\mathsf{v}_n, \mathsf{u}; t] + \langle\, \mathbf{B}\mathsf{v}_n \mid \mathsf{u}\,\rangle \right) dt$$

$$= \int_0^T \langle\, \mathsf{f} \mid \mathsf{u}\,\rangle dt + \langle\, \mathsf{g}_n \mid \mathsf{u}(0)\,\rangle.$$

Prelaskom na limes dobijemo

$$\int_0^T \left( -\langle\, \mathsf{v} \mid \partial_0 \mathsf{u}\,\rangle + \mathbf{A}[\mathsf{v}, \mathsf{u}; t] + \langle\, \mathbf{B}\mathsf{v} \mid \mathsf{u}\,\rangle \right) dt = \int_0^T \langle\, \mathsf{f} \mid \mathsf{u}\,\rangle dt + \langle\, \mathsf{g} \mid \mathsf{u}(0)\,\rangle.$$

Parcijalno integrirajući jednakost (8) imamo

$$\int_0^T \left( -\langle\, \mathsf{v} \mid \partial_0 \mathsf{u}\,\rangle + \mathbf{A}[\mathsf{v}, \mathsf{u}; t] + \langle\, \mathbf{B}\mathsf{v} \mid \mathsf{u}\,\rangle \right) dt = \int_0^T \langle\, \mathsf{f} \mid \mathsf{u}\,\rangle dt + \langle\, \mathsf{v}(0) \mid \mathsf{u}(0)\,\rangle.$$

Zbog proizvoljnosti $\mathsf{u}(0)$ slijedi da je $\mathsf{v}(0) = \mathsf{g}$, odnosno $\mathsf{v}$ je slabo rješenje sustava (2).

**Q.E.D.**

**Teorem 4.** **(jedinstvenost rješenja)** *Slabo rješenje sustava (2) je jedinstevno.*

Dem. Dovoljno je pokazati da je uz $\mathsf{f} = \mathsf{g} = 0$ rješenje sustava (2) nužno trivijalno.

Primijetimo najprije da je

$$\langle\, \partial_0 \mathsf{v} \mid \mathsf{v}\,\rangle + \mathbf{A}[\mathsf{v}, \mathsf{v}; t] + \langle\, \mathbf{B}\mathsf{v} \mid \mathsf{v}\,\rangle = 0$$

za skoro svaki $t \in [0,T]$. Budući da je $|\mathbf{A}[\mathsf{v}, \mathsf{v}; t] + \langle\, \mathbf{B}\mathsf{v} \mid \mathsf{v}\,\rangle| \leqslant C\|\mathsf{v}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)}$, koristeći metode jednake onima u doakzu Teorema 2. dobijemo

$$\frac{d}{dt}\left( \|\mathsf{v}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} \right) \leqslant C\|\mathsf{v}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)}.$$

Zbog toga što je $\mathsf{v}(0) = 0$, uz pomoć Gronwallove nejednakosti slijedi da je $\|\mathsf{v}(t)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} = 0 \quad (\text{ss } t \in [0,T])$.

**Q.E.D.**

Još nam preostaje dokazati da konvergencija početnih uvjeta povlači konvergenciju rješenja u odgovarajućem prostoru.

**Teorem 5.** *Neka niz* $(\mathsf{g}_n)$ *početnih uvjeta homogenog hiperboličkog sustava (2) konvergira slabo k nuli, to jest,* $\mathsf{g}_n \rightharpoonup 0$ *u* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$. *Tada konvergira i pripadni niz rješenja* $\mathsf{v}_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ *u* $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r))$.

Dem. Na osnovu relacije (5) slijedi da niz $(\mathsf{v}_n)$ konvergira slabo k $\mathsf{v}$ u $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r))$. Prelaskom na limes u (2) vidimo da vrijedi jednakost

$$\partial_0\mathsf{v} + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v} + \mathbf{B}\mathsf{v} = 0$$

u smislu distribucija.

Preostaje nam pokazati da je početni uvjet za $\mathsf{v}$ trivijalan iz čega će, zbog jedinstvenosti rješenja, slijediti tvrdnja teorema.

Provodeći parcijalnu integraciju u (2), imamo da je za svaki $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{d+1})$

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \partial_0\mathsf{v}_n + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v}_n + \mathbf{B}\mathsf{v}_n, \phi\rangle dt &= \int_0^T \langle \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v}_n + \mathbf{B}\mathsf{v}_n, \phi\rangle dt \\ &\quad - \int_0^T \langle \mathsf{v}_n, \partial_0\phi\rangle dt - \langle \mathsf{v}_n(0), \phi(0)\rangle \\ &\to \int_0^T \langle \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v} + \mathbf{B}\mathsf{v}, \phi\rangle dt - \int_0^T \langle \mathsf{v}, \partial_0\phi\rangle dt.\end{aligned} \tag{9}$$

S druge strane

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \partial_0\mathsf{v}_n + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v}_n + \mathbf{B}\mathsf{v}_n, \phi\rangle dt &\to \int_0^T \langle \partial_0\mathsf{v} + \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v} + \mathbf{B}\mathsf{v}, \phi\rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \mathbf{A}^k\partial_k\mathsf{v} + \mathbf{B}\mathsf{v}, \phi\rangle dt \\ &\quad - \int_0^T \langle \mathsf{v}, \partial_0\phi\rangle dt - \langle \mathsf{v}(0), \phi(0)\rangle.\end{aligned} \tag{10}$$

Uspoređivanjem relacija (10) i (9), slijedi

$$\langle \mathsf{v}(0), \phi(0)\rangle = 0, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{d+1}),$$

pa tvrdnja slijedi zbog proizvoljnosti funkcije $\phi$.

**Q.E.D.**

## 3. Računanje makroskopske gustoće energije

Neka je $d_n^t$ funkcija gustoće energije u trenutku $t$, i.e.

$$d_n^t := d_n(t,\cdot) = \frac{1}{2}\mathbf{A}^0\mathsf{v}_n(t,\cdot)\cdot\mathsf{v}_n(t,\cdot).$$

Koristeći teoriju H-mjera distribucijski limes $d^t$ funkcija gustoće energije $d_n^t$ je zadan relacijom

$$\langle d^t, \phi\rangle := \lim\langle d_n^t, \phi\rangle = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\mu}^t, \phi\mathbf{A}^0\rangle\ , \tag{11}$$

gdje je $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ i $\boldsymbol{\mu}^t$ H-mjera pridružena nizu $(\mathsf{v}_n(t,\cdot))$ rješenja hiperboličkog sustava (3). Stoga je tražena energija u potpunosti opisana H-mjerom $\mu^t$ i nju ćemo odrediti koristeći sljedeći teorem.

**Teorem 6.** *H-mjera $\boldsymbol{\mu}^t$ pridružena nizu $(\mathsf{v}_n(t,\cdot))$ rješenja hiperboličkog sustava (1) zadovoljava prijenosnu jednadžbu*

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^0\partial_0\boldsymbol{\mu}^t =&\{\mathbf{S},\boldsymbol{\mu}^t\} - \nabla_x\mathbf{S}\otimes\nabla_\xi\boldsymbol{\mu}^t\,\xi\cdot\xi\\ &-((d-1)\nabla_x\mathbf{S}\cdot\xi + [(\nabla_\xi\otimes\nabla_x)\mathbf{S}]\xi\cdot\xi)\boldsymbol{\mu}^t\\ &-\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}^t - \boldsymbol{\mu}^t\mathbf{B}^t - (\partial_k\mathbf{A}^k)\boldsymbol{\mu}^t,\end{aligned}$$

*gdje* $\mathbf{S}$ *označuje* $\sum\mathbf{A}^k\xi_k$.

Dem. Neka je $P$ skalarni pseudodiferencijalni operator reda nula s glavnim simbolom $p(x,\xi)$ koji ovisi samo o prostornim i njima dualnim varijablama. Koristeći (1) imamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\, P\mathbf{A}^0\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle &= \langle\, P\mathbf{A}^0\partial_0\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle + \langle\, P\mathbf{A}^0\mathsf{v}_n \mid \partial_0\mathsf{v}_n\,\rangle + \langle\, P\partial_0(\mathbf{A}^0)\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle\\ &= -\langle\, P(\mathbf{A}^k\partial_k+\mathbf{B})\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle + \langle\, [P,\mathbf{A}^0]\mathsf{v}_n \mid \partial_0\mathsf{v}_n\,\rangle\\ &\quad + \langle\, P\mathsf{v}_n \mid -(\mathbf{A}^k\partial_k+\mathbf{B})\mathsf{v}_n\,\rangle + \langle\, P\partial_0(\mathbf{A}^0)\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle\\ &= \langle\, -[P,\mathbf{A}^k\partial_k]\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle + \langle\, (\partial_k\mathbf{A}^k)P\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle + \langle\, [P,\mathbf{A}^0]\mathsf{v}_n \mid \partial_0\mathsf{v}_n\,\rangle\\ &\quad + \langle\, P\partial_0(\mathbf{A}^0)\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle - \langle\, P\mathbf{B}\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle - \langle\, \mathbf{B}^*P\mathsf{v}_n \mid \mathsf{v}_n\,\rangle.\end{aligned}$$

U cilju prelaska na limes u gornjoj jednakosti, iskoristimo činjenicu da niz rješenja sustava (1) pripada prostoru $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^{d+1};\mathbf{R}^r)$ i da je omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^{d+1})$. Nadalje, uvedimo H-mjeru $\boldsymbol{\mu}^t$ pridruženu nizu $\mathsf{v}_n(t,\cdot)$. Budući da je komutator $[P,\mathbf{A}^0]$ operator negativnog reda, on ne utječe na vrijednost limesa. Stoga prelazeći na limes u gornjoj jednakosti dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int p\mathbf{A}^0 d\boldsymbol{\mu}^t &= -\int\sigma_0[P,\mathbf{A}^k\partial_k]d\boldsymbol{\mu}^t\\ &\quad -\int\Big(\mathbf{B}+\mathbf{B}^*-(\partial_k\mathbf{A}^k)-\partial_0(\mathbf{A}^0)\Big)\,pd\boldsymbol{\mu}^t.\end{aligned}\tag{12}$$

Simbol komutatora u gornjoj jednakosti je

$$\sigma_0[P,A^k\partial_k] = \nabla_\xi(p)\cdot\nabla_x(\mathbf{S}) - \nabla_x(p)\cdot(\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^d),$$

pri čemu smo koristili oznaku $\mathbf{S}=\sum A^k\xi_k$. Provodeći parcijalnu integraciju u (12), na način na koji je to rađeno u prethdodna dva poglavlja, dobijemo prijenosnu jednadžbu za mjeru $\boldsymbol{\mu}^t$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^0\partial_0\boldsymbol{\mu}^t =&\{\mathbf{S},\boldsymbol{\mu}^t\} - \nabla_x\mathbf{S}\otimes\nabla_\xi\boldsymbol{\mu}^t\,\xi\cdot\xi\\ &-((d-1)\nabla_x\mathbf{S}\cdot\xi + [(\nabla_\xi\otimes\nabla_x)\mathbf{S}]\xi\cdot\xi)\boldsymbol{\mu}^t\\ &-(\mathbf{B}+\mathbf{B}^*)\boldsymbol{\mu}^t + (\partial_0\mathbf{A}^0)\boldsymbol{\mu}^t + (\partial_k\mathbf{A}^k)\boldsymbol{\mu}^t.\end{aligned}\tag{13}$$

**Q.E.D.**

U slučaju konstantnih koeficijenta gornja jednadžba se svodi na sustav sličan početnom

$$\mathbf{A}^0\partial_0\boldsymbol{\mu}^t + \mathbf{A}^k\partial_k\boldsymbol{\mu}^t + (\mathbf{B}+\mathbf{B}^*)\boldsymbol{\mu}^t = 0.\tag{14}$$

Jednadžba (13) je slična onoj dobivenoj u [A]. Osnovna razlika, pri tom, je što sam ovdje koristio pseudodiferencijalni operator neovisan o vremenskoj i njome dualnoj varijabli. To nam omogućuje određivanje H-mjere pomoću početnih uvjeta sustava (1).

Gornji rezultat želimo primijeniti na valnu jednadžbu

$$(\rho u')' - \mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u) = 0,$$

koju možemo zapisati kao hiperbolički sustav

$$\begin{aligned} \partial_0 u - v_0 &= 0 \\ \rho\partial_0 v_0 - a^{ij}\partial_i v_j + b^0 v_0 + b^j v_j &= 0 \\ a^{ij}\partial_0 v_i - a^{ij}\partial_i v_0 &= 0 \ , \end{aligned}$$

pri čemu koristimo oznake $b^0 := \partial_0\rho$, $\quad b^j := -\partial_i a^{ij} = [-\mathsf{div}\,\mathbf{A}^\top]^j$, $\quad j = 1,\ldots,d$. Funkcija $u$ se pojavljuje eksplicitno samo u prvoj jednadžbi. Stoga, možemo najprije riješiti sustav za $v_i$, i zatim koristiti rješenje radi određivnja $u$. To svodi sustav na $d+1$ nepoznanica $\mathsf{v} = (v_0,\ldots,v_d)$ i $d+1$ jednadžbi:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \partial_0\mathsf{v} + \sum_{i=1}^d \begin{bmatrix} 0 & -a^{i1} & \cdots & -a^{id} \\ -a^{i1} & & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & \\ -a^{id} & & & \end{bmatrix} \partial_i\mathsf{v} \\ &\qquad + \begin{bmatrix} b^0 & b^1 & \cdots & b^d \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \mathsf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

U posebnom slučaju $\rho = 1$ i $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, prijenosna jednadžba (14) za H-mjere $\boldsymbol{\mu}^t$ prelazi u

$$\partial_0\boldsymbol{\mu}^t = -(\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^d)\cdot\nabla_x\boldsymbol{\mu}^t,$$

ili po komponentama

$$\begin{aligned} \partial_0\mu^t_{0j} &= \sum_{m=1}^d \partial_m\mu^t_{mj}, \qquad j = 0,\ldots,d \\ \partial_0\mu^t_{ij} &= \partial_i\mu^t_{0j}, \qquad i = 1,\ldots,d, \qquad j = 0,\ldots,d. \end{aligned} \tag{15}$$

Derivirajući gornje jednakosti po vremenu dobijemo

$$\begin{aligned} \partial_0^2\mu^t_{0j} &= \sum_{m=1}^d \partial_m^2\mu^t_{0j} \\ \partial_0^2\mu^t_{ij} &= \partial_i\partial_m\mu^t_{mj}. \end{aligned} \tag{16}$$

Daljnje pojednostavljenje računa može se postići uzimajući $d = 1$. Na taj način (16) postaje

$$\partial_0^2\mu^t_{ij} = \partial_1^2\mu^t_{ij} \qquad i,j\in\{0,1\}. \tag{17}$$

Time smo dobili valnu jednadžbu za svaku komponentu H-mjere $\mu^t$.

S druge strane, koristeći (11) imamo da za test funkciju $\phi\in\mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ vrijedi

$$\lim\langle d^t_n,\phi\rangle = \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{\mu}^t,\phi\mathbf{I}\rangle \ = \frac{1}{2}\langle\mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}^t,\phi\rangle \ .$$

Stoga se račun svodi na određivanje skalarne Radonove mjere $\nu^t = \mathsf{tr}\mu^t$. Preciznije, želimo izraziti $\nu^t$ pomoću titrajućih početnih uvjeta za valnu jednadžbu

$$\begin{aligned} u_n(0) &= \gamma_n(x) = \frac{1}{n}\alpha(x, nx) \\ \partial_0 u_n(0) &= \beta_n(x) = \beta(x, nx), \end{aligned}$$

pri čemu funkcije $\alpha$ i $\beta$ zadovoljavaju ista svojstva kao i u prethodna dva poglavlja. Na taj način, početni uvjeti hiperboličkog sustava postaju

$$\mathsf{v}_n(0) = (\beta_n, \nabla\gamma_n).$$

Budući da je

$$\nabla_x\gamma_n = \nabla_y\alpha(x, nx) + \frac{1}{n}\nabla_x\alpha(x, nx) = \left(\nabla_y\alpha\right)_n(x) + \frac{1}{n}\left(\nabla_x\alpha\right)_n(x),$$

te da zbog kompaktnosti nosača funkcije $\alpha$ zadnji član u gornjoj jednakosti teži jako k nuli u $\mathrm{L}^2$, problem se svodi na određivanje H-mjere $\boldsymbol{\mu}^0$ pridružene čistom nizu $(\beta_n, \nabla_y\alpha)$.

Ta mjera se lako odredi koristeći Teorem II.2. i dana je sljedećim relacijama

$$\begin{aligned} \mu^0_{00} &= \sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} |\hat\beta_k(x,k)|^2\lambda(x)\otimes\delta_{\frac{k}{|k|}}(\xi) \\ \mu^0_{01} &= -2\pi i\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} k\hat\beta_k(x,k)\overline{\hat\alpha_k(x,k)}\lambda(x)\otimes\delta_{\frac{k}{|k|}}(\xi) \\ \mu^0_{11} &= 4\pi^2\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} k^2|\hat\alpha_k(x,k)|^2\lambda(x)\otimes\delta_{\frac{k}{|k|}}(\xi). \end{aligned}$$

Koristeći (17) i (15) dobijemo sljedeći izraz za $\mu^t_{00}$

$$\begin{aligned} \mu^t_{00} &= \frac{1}{2}[\mu^0_{00}(x+t) + \mu^0_{00}(x-t) + \int_{x-t}^{x+t}(\partial_0\mu^t_{00})_0(y)dy] \\ &= \frac{1}{2}[\mu^0_{00}(x+t) + \mu^0_{00}(x-t) + \int_{x-t}^{x+t}(\partial_1\mu^t_{10})_0(y)dy] \\ &= \frac{1}{2}[\mu^0_{00}(x+t) + \mu^0_{00}(x-t) + \mu^0_{10}(x+t) + \mu^0_{10}(x-t)]. \end{aligned}$$

Analogno

$$\mu^t_{11} = \frac{1}{2}[\mu^0_{11}(x+t) + \mu^0_{11}(x-t) + \mu^0_{01}(x+t) + \mu^0_{01}(x-t)].$$

Time smo dobili da je

$$\begin{aligned} \nu^t &= \mu^t_{00} + \mu^t_{11} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\pm}[\mu^0_{00}(x\pm t) + \mu^0_{10}(x\pm t) + \mu^0_{01}(x\pm t) + \mu^0_{11}(x\pm t)] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{k}\Big(|\beta_k(x\pm t)|^2 \pm 4\pi k\mathsf{Im}\left[\beta_k(x\pm t)\overline{\alpha_k(x\pm t)}\right] \\ &\quad + 4\pi^2k^2|\alpha_k(x\pm t)|^2\Big)\lambda(x)\otimes\delta_{\frac{k}{|k|}}(\xi). \end{aligned} \tag{18}$$

Definirajući $d = \int d^t dt$ i koristeći da je

$$\langle d^t, \phi\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}^t, \phi\rangle,$$

slijedi da je

$$d = \frac{1}{4}\sum_{\pm}\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \Big(|\beta_k(x\pm t)|^2 \pm 4\pi k \mathsf{Im}\left[\beta_k(x\pm t)\overline{\alpha_k(x\pm t)}\right] \\ +4\pi^2k^2|\alpha_k(x\pm t)|^2\Big)\,\lambda(t)\lambda(x),$$

što je, još jednom, poseban slučaj formule (53) iz Poglavlja II.

## 4. Računanje H-mjere korištenjem D'Alembertove formule

U ovom odjeljku izračunat ćemo H-mjeru pridruženu nizu derivacija rješenja valne jednadžbe u jednoj dimenziji koristeći D'Alembertovu formulu za eksplicitno rješenje.

Točnije, razmotrimo niz problema

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u_n - \partial_x^2 u_n &= 0\\ u_n(0) = \gamma_n(x) &= \frac{1}{n}\alpha(x, nx)\\ \partial_t u^n(0) = \beta_n(x) &= \beta(x, nx),\end{aligned}$$

pri čemu su $\alpha$ i $\beta$ glatke funkcije s kompaktnim nosačem na $\mathbf{R}\times\mathcal{T}$, te $\int_{\mathcal{T}}\beta(x,y)dy = 0$. Rješenje gornjeg problema je

$$u_n(t,x) = \frac{1}{2}\left(\gamma_n(x+t) + \gamma_n(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\beta_n(y)dy. \tag{19}$$

Budući da je funkcija gustoće energije dana izrazom

$$d_n = \frac{1}{2}\Big((\partial_t u_n)^2 + (\partial_x u_n)^2\Big),$$

nas zanima H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ pridružena nizu gradijenata $(\partial_t u_n, \partial_x u_n)$, Iz (19) imamo

$$\begin{aligned}\partial_t u_n = \frac{1}{2}\Big(&\frac{1}{n}\partial_u\alpha(x+t, n(x+t)) - \frac{1}{n}\partial_u\alpha(x-t, n(x-t))\\ &+ \partial_y\alpha(x+t, n(x+t)) - \partial_y\alpha(x-t, n(x-t))\\ &+ \beta(x+t, n(x+t)) + \beta(x-y, n(x-t))\Big)\\ \partial_x u_n = \frac{1}{2}\Big(&\frac{1}{n}\partial_u\alpha(x+t, n(x+t)) - \frac{1}{n}\partial_u\alpha(x-t, n(x-t))\\ &+ \partial_y\alpha(x+t, n(x+t)) + \partial_y\alpha(x-t, n(x-t))\\ &+ \beta(x+t, n(x+t)) - \beta(x-y, n(x-t))\Big),\end{aligned}$$

pri čemu su s $\partial_u\alpha$ i $\partial_y\alpha$ označene derivacije funkcije $\alpha$ po prvoj, odnosno, drugoj varijabli. Budući da $\alpha$ ima kompaktan nosač članovi koji sadrže faktor $\frac{1}{n}$ konvergiraju jako k nuli i ne utječu na limes, pa ih, stoga, u daljnjem računu izostavljam. Zato što je H-mjera $\boldsymbol{\mu}$ oblika

$$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi})\nu$$

pri čemu je $\nu = \mathsf{tr}\boldsymbol{\mu}$ skalarna Radonova mjera, dovoljno je izračunati komponente $\mu_{00}$ i $\mu_{11}$.

U tu svrhu najprije izračunajmo H-mjere $\mu_{00}^{+}$ i $\mu_{11}^{-}$ pridružene nizovima $c_n := \partial_y\alpha(x+t, n(x+t)) + \beta(x+t, n(x+t))$ i $d_n = \partial_y\alpha(x-t, n(x-t)) - \beta(x-y, n(x-t))$. Pri tom ćemo se koristiti Teoremom II.2. Međutim, za njegovu što efikasniju primjenu, potreban nam je sljedeći račun. Za funkciju $a$ definiranu relacijom

$$a(t,x,u,y) = \partial_y\alpha(x+t, u+y)$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
\hat{a}(t,x,k_0,k_1) &= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-2\pi i(k_0u+k_1y)} a(t,x,u,y)dudy \\
&= \int_{\mathbf{R}^2} e^{-2\pi i(k_0u+k_1y)} \partial_y\alpha(x+t,u+y)dudy \\
&= \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i(k_0-k_1)u} \Big(\int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i k_1 z}\partial_y\alpha(x+t,z)dz\Big)du \\
&= \widehat{\partial_y\alpha}(x+t,k_1)\int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i(k_0-k_1)u}du = \begin{cases} 0 & k_0 \neq k_1 \\ \widehat{\partial_y\alpha}(x+t,k_1) & k_0 = k_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Slično za funkciju

$$b(t,x,u,y) = \beta(x+t, u+y)$$

imamo da je

$$\hat{b}(t,x,k_0,k_1) = \begin{cases} 0 & k_0 \neq k_1 \\ \hat{\beta}(x+t,k_1) & k_0 = k_1 \end{cases}.$$

Koristeći gornji račun i Teorem II.2. dobijemo

$$\begin{aligned}
\mu_{00}^{+}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \Big(\hat{a}(t,x,k_0,k_1)^2 + 2\mathsf{Re}\left(\overline{\hat{a}(t,x,k_0,k_1)}\hat{b}(t,x,k_0,k_1)\right) \\
&\quad + \hat{b}(t,x,k_0,k_1)^2\Big)\lambda(\mathbf{x})\otimes\delta_{\{\frac{\mathrm{sign}\,(k)}{\sqrt{2}},\frac{\mathrm{sign}\,(k)}{\sqrt{2}}\}}(\boldsymbol{\xi}) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \Big(4\pi^2k^2|\hat{\alpha}(x+t,k)|^2 + 2\mathsf{Re}\left(-2\pi i k\hat{\beta}(x+t,k)\overline{\hat{\alpha}(x+t,k)}\right) \\
&\quad + |\hat{\beta}(x+t,k)|^2\Big)\lambda(\mathbf{x})\otimes\delta_{\{\frac{\mathrm{sign}\,(k)}{\sqrt{2}},\frac{\mathrm{sign}\,(k)}{\sqrt{2}}\}}(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}$$

Analogno za drugu mjeru dobijemo

$$\begin{aligned}
\mu_{00}^{-}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \Big(4\pi^2k^2|\hat{\alpha}(x-t,k)|^2 + 2\mathsf{Re}\left(-2\pi i k\hat{\beta}(x-,kt)\overline{\hat{\alpha}(x-t,k)}\right) \\
&\quad + |\hat{\beta}(x-t,k)|^2\Big)\lambda(\mathbf{x})\otimes\delta_{\{-\frac{\mathrm{sign}\,(k)}{\sqrt{2}},\frac{\mathrm{sign}\,(k)}{\sqrt{2}}\}}(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}$$

Za proizvoljni pseudodiferencijalni operator $A \in \Psi^1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_0(A),\nu\rangle &= \lim_n\Big(\langle A\partial_t u_n \mid \partial_t u_n\rangle + \langle A\partial_x u_n \mid \partial_x u_n\rangle\Big) \\
&= \lim_n \frac{1}{4}\Big(\langle A(c_n-d_n) \mid c_n-d_n\rangle + \langle A(c_n+d_n) \mid c_n+d_n\rangle\Big) \\
&= \lim_n \frac{1}{4}\Big(2\langle Ac_n \mid c_n\rangle + 2\langle Ad_n \mid d_n\rangle\Big) = 2\langle A, \mu_{00}^{+} + \mu_{11}^{+}\rangle.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
\nu(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(\mu_{00}^{+}+\mu_{11}^{+}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\pm}\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}\Big(4\pi^2k^2|\alpha_k(x\pm t)|^2 \pm 4\pi k\mathsf{Im}\Big(\beta_k(x\pm t)\alpha_k(x\pm t)\Big) \\
&\quad + |\beta_k(x\pm t)|^2\Big)\lambda(\mathbf{x})\otimes\delta_{\{\pm\frac{\operatorname{sign}(k)}{\sqrt{2}},\frac{\operatorname{sign}(k)}{\sqrt{2}}\}}(\boldsymbol{\xi}).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Ovo je upravo poseban slučaj Korolara III.4.

Želimo jos usporediti ovaj rezultat s onim dobivenim u prethodnom odjeljku. Tu uočavamo značajnu razliku izmedu mjera datih formulama (18) i (20). Naime, potonja ovisi također o dualnoj varijabli $\tau$, dok prva ne. Međutim, to nije problem, budući da nas zanima distribucijski limes funkcija gustoće energije, to jest

$$
\lim_n \langle d_n, \Phi\rangle \ ,
$$

gdje je $\Phi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^{d+1})$. Uzmimo $\Phi$ posebnog oblika $\Phi(\mathbf{x}) = \psi(t)\otimes\phi(x)$. Pomoću (20) dobijemo

$$
\lim_n \int d_n(t,x)\psi(t)\phi(x)dtdx = \langle \psi(t)\phi(x), \nu(t,x,\tau,\xi)\rangle, \tag{21}
$$

dok (18) daje

$$
\begin{aligned}
\lim_n \int d_n(t,x)\psi(t)\phi(x)dtdx &= \lim_n \int_{\mathbf{R}}\psi(t)\int_{\mathbf{R}^d} d_n(t,x)\phi(x)dxdt \\
&= \int \psi(t)\langle\phi(x),\nu^t(x,\xi)\rangle dt.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Unoseći formule za mjere $\nu$ i $\nu^t$ u desne strane gornjih jednakosti, vidimo da su one jednake Na taj način smo isti rezultat dobili i četvrtom metodom.

# Oznake

**Multiindeksi i geometrija na $\mathbf{R}^d$**

Pri proučavanju kompleksnih funkcija definiranih na $\mathbf{R}^d$, $u : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}$, koristio sam oznake koje je uveo Laurent Schwartz. *Multiindeks* je $d$-torka nenegativnih cijelih brojeva, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbf{N}_0^d$, za koju definiramo *duljinu*

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$$

i *faktorijel*

$$\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \cdots \alpha_d! \, .$$

Na skupu $\mathbf{N}_0^d$ multiindeksa imamo parcijalan uređaj: $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ ako je $\alpha_1 \leq \beta_1$, …, $\alpha_d \leq \beta_d$. Za vektor $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbf{R}^d$ i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ definiramo potenciranje $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := (x^1)^{\alpha_1} \cdots (x^d)^{\alpha_d}$. Binomne koeficijente definiramo formulom:

$$\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} := \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})!} & \text{za } \boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & \text{inače} \end{cases} .$$

Derivaciju reda $\boldsymbol{\alpha}$ definiramo s

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial(x^1)^{\alpha_1} \cdots \partial(x^d)^{\alpha_d}} \, .$$

Često ćemo, umjesto gornje, koristiti sljedeću derivaciju:

$$D_j := \frac{1}{2\pi i}\partial_j \, , \; D^{\boldsymbol{\alpha}} := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \, .$$

Ovako definirana derivacija bit će osobito pogodna pri izučavanju Fourierove pretvorbe, odnosno pseudodiferencijalnih operatora.

$\mathbf{R}_*^d$ označava skup $\mathbf{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Prilikom razmatranja valne jednadžbe, odnosno, pri radu s varijablama iz prostora $\mathbf{R}^{d+1} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^d{}_x$, koristit ćemo sljedeću notaciju. Varijable u $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ ćemo označavati s $\mathbf{x} = (x^0, x^1, \dots, x^d) = (x^0, x) = (t, x^1, \dots, x^d)$, ovisno o tome što je prikladnije. Slično za *dualnu* varijablu pišemo $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d) = (\tau, \xi)$. Za derivaciju koristimo simbole $\nabla_{\mathbf{x}} = (\partial_0, \nabla_x)$, te također crticu ili točkicu za $\partial_0$. Derivacije po dualnoj varijabli $\xi_i$ označujemo s podignutim indeksom uz znak derivacije: $\partial^i$.

$(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\boldsymbol{\xi}})$ - predstavlja matrični diferencijalni operator $[\partial_i \partial^j]$.

### Operacije na funkcijama

U ovom radu koristimo sljedeću definiciju Fourierove pretvorbe

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx,$$

dok će njezin inverz biti zadan relacijom

$$\check{f}(x) = \int e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi)d\xi.$$

S $\tilde{f}$ označujemo promjenu predznaka argumenta, to jest,

$$\tilde{f}(x) := f(-x).$$

Poissonova zagrada diferencijabilnih funkcija $a$ i $b$ je funkcija definirana izrazom

$$\{a, b\} := \left(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} a \cdot \nabla_{\mathbf{x}} b - \nabla_{\mathbf{x}} a \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} b\right),$$

### Prostori funkcija i distribucija

$\mathrm{L}^p$: Lebesgueov prostor, to jest, klasa ekvivalencije skoro svuda jednakih izmjerivih funkcija takva da je norma

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p} = \left(\int |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

za $1 \leqslant p < \infty$, odnosno,

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} = \inf\{C \in \mathbf{R} : |u(x)| \leqslant C \text{ (ss)}\}$$

konačna.
Ukoliko nema straha od zabune, norme u $\mathrm{L}^p$ prostorima ćemo kraće označavati s $\|\cdot\|_p$. Skalarni produkt na $\mathrm{L}^2$ će nam biti zadan relacijom

$$\langle\, u \mid v \,\rangle = \int u(x)\overline{v(x)}dx.$$

$\mathcal{S}$: Schwartzov prostor, i.e., prostor $\mathrm{C}^\infty$ funkcija $\phi$ takvih da za svaki $k \in \mathbf{N}_0$, polunorma

$$|\phi|_k = \sup\{|\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\partial_{\boldsymbol{\beta}}\phi(\mathbf{x})|; \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d, |\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leqslant k\}$$

je konačna. $\mathcal{S}$ je Fréchetov prostor s toplogijom generiranom familijom gore navedenih polunormi.

$\mathrm{H}^s$: Soboljevljev prostor kojeg sačinjavaju sve distribucije takve da je $\lambda^s\hat{u} \in \mathrm{L}$, pri čemu je $\lambda^s(\boldsymbol{\xi}) = (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2}$. $\mathrm{H}^s$ su Hilbertovi prostori opskrbljeni normom

$$\|u\|^2_{\mathrm{H}^s} = \|\lambda^s\hat{u}\|^2_{\mathrm{L}^2} = \int (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^2)^s |\hat{u}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi}.$$

Također koristimo oznake $\mathrm{H}^{-\infty} = \bigcup \mathrm{H}^s$ i $\mathrm{H}^\infty = \bigcap \mathrm{H}^s$.

$\mathcal{O}$: Skup funkcija *najviše polinomijalnog rasta u beskonačnosti*. Točnije $\varphi \in \mathcal{O} \subseteq \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ ako je

$$(\forall\,\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d)(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\exists\, n \in \mathbf{N})(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d) \quad |\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(\mathbf{x})| \leqslant C(1+|\mathbf{x}|^2)^n\ .$$

$\mathcal{S}'$: Dual prostora $\mathcal{S}$, sastoji se od takozvanih *temperiranih distibucija*. To su linearni funkcionali na $\mathcal{S}$ neprekinuti u sljedećem smislu

$$(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\exists\, N \in \mathbf{N})(\forall\, \varphi \in \mathcal{S}) \quad |\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_N\ .$$

$S^m$: Prostor simbola reda $m$, i.e., skup funkcija $a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ takvih da je za svaki par multiindeksa $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{N}_0^d$ funkcija $\lambda^{|\boldsymbol{\beta}|-m}\partial_{\boldsymbol{\alpha}}\partial^{\boldsymbol{\beta}} a$ omeđena.
Također koristimo oznake $S^{-\infty} = \bigcup S^m$ i $S^\infty = \bigcap S^m$.

$\Psi^m$: Prostor pseudodiferencijalnih operatora reda $m$ (vidi definiciju na str. 6.). Skup svih pseudodiferencijalnih operatora je $\Psi^\infty = \bigcup \Psi^m$, dok se elementi skupa $\Psi^{-\infty} = \bigcap \Psi^m$ zovu izglađujući operatori

$X^m$: Banachov prostor koji se sastoji od svih funkcija sa svojstvom da sve njihove derivacije do reda $m$ pripadaju prostoru $\mathcal{F}\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$, to jest, njihova Fourierova pretvorba je $\mathrm{L}^1$ funkcija. Norma na $X^m(\mathbf{R}^d)$ dana je s

$$\|w\|_{X^m} := \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |2\pi\boldsymbol{\xi}|^m)|\mathcal{F}w(\boldsymbol{\xi})|\, d\boldsymbol{\xi}\ .$$

$T^m$: Prostor *neregularnih* simbola reda $m$. Sastoji se od funkcija oblika $\sum a_n(\boldsymbol{\xi}) b_n(\mathbf{x})$, pri čemu funkcije $a_n$ pripadaju Hörmanderovoj klasi $S^m$, a $b_n$ klasi $X^1$, te pri tom vrijedi

$$\sum_n \sum_{j=1}^m \|\lambda(\boldsymbol{\xi})^{-m+j} a_n^{(j)}(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathrm{L}^\infty} \|b_n(\mathbf{x})\|_{X^1} < \infty. \tag{1}$$

$\Xi^m$: Prostor pseudodiferencijalnih operatora reda $m$ pridruženih simbolima iz klase $T^m$. Točnije, neprekidni linearni operator $L$ s $\mathrm{H}^0$ u $\mathrm{H}^{-m}$ pripada klasi $\Xi^m, m \geqslant 1$,ukoliko je

$$L = \sum A_n B_n + C,$$

gdje je $C$ kompaktan operator, dok su $A_n, B_n$ operatori pridruženi simbolima $a_n \in \mathrm{S}^m, b_n \in \mathrm{X}^1$ koji zadovoljavaju (1).

# Literatura


[Ad] Robert A. Adams: *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[AG] Serge Alinhac, Patrick Gérard: *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, InterEditions, 1991.

[A] Nenad Antonić: *H-measures applied to symmetric systems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **126A** (1996) 1133–1155

[AL1] Nenad Antonić, Martin Lazar *Microlocal energy density for hyperbolic systems* u *Applied Mathematics and Scientific computing*, u tiskanju

[AL2] Nenad Antonić, Martin Lazar *Limit energy density of the nonlinear wave equation*, u pripremi

[Br] Haïm Brezis: *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[CD] Yvonne Choquet-Bruhat, Cécile DeWitt-Morette: *Analysis, manifolds and physics I: Basics*, North-Holland, 1982.

[DS] Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz: *Linear operators I–III*, Wiley, 1988.

[DL] Robert Dautray, Jacques-Louis Lions: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology 1-6*, Springer, 1992.

[Ed] Robert E. Edwards: *Functional analysis: Theory and Applications*, Dover Publications, INC., New York, 1995.

[ES] Encyclopaedia of Mathematical sciences (vol 30–31): *Partial differential equations I - III*, Yu. V. Egorov, M. A. Shubin ur., Springer, 1994.

[E] Lawrence C. Evans: *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.

[F1] Gerald B. Folland: *Real Analysis*, Willey, New York, 1984.

[F2] Gerald B. Folland: *Introduction to Partial differential equations*, Princeton University Press, 1995.

[FM] Gilles A. Francfort, François Murat: *Oscillations and energy densities in the wave equation, Communications in Partial Differential Equations* **17** (1992) 1785–1865

[G1] Patrick Gérard: *Microlocal defect measures, Communications in Partial Differential Equations* **16** (1991) 1761–1794

[G2] Patrick Gérard: *Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, Journal of Functional Analysis* **141** (1996) 60–98

[GT] David Gilbarg, Neil S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1983.

[GV1] J. Ginibre, G. Velo: *The Global Cauchy Problem for the Non Linear Klein-Gordon Equation*, *Matematische Zeitschrift* **189** (1985) 487–505

[GV2] J. Ginibre, G. Velo: *Conformal invariance and time decay for non linear wave equations. II, Annales de l'Institute Henri Poincaré* **47** (1987) 263–276

[HL] Francis Hirsch, Gilles Lacombe: *Elements of functional Analysis*, Springer, 1999.

[H] Lars Hörmander: *The analysis of linear partial differential Operators I–IV*, Springer, 1983–1985.

[J] John David Jackson: *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1975.

[KN] J. J. Kohn, Louis Nirenberg: *An Algebra of Pseudo-Differential Operators*, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **18** (1965) 269-305

[K] Svetozar Kurepa: *Funkcionalna Analiza*, Školska knjiga, 1981.

[LL] Elliot H. Lieb, Michael Loss: *Analysis*, American Mathematical Society, 1996

[MV] Reinhold Meise, Dietmar Vogt: *Introduction to Functional Analysis*, Oxford University Press, 1997.

[SR] Xavier Saint-Raymond: *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*, CRC Press, 1991.

[S] Robert Schatten: *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Springer, 1970.

[Sw] Laurent Schwartz: *Théorie des distributions*, Hermann, Paris 1966.

[SS] Jalal Shatah, Michael Struwe: *Geometric wave equations*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1998.

[St] Elias M. Stein: *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

[T1] Luc Tartar: *Nonlinear partial differential equations using compactness method*, Mathematical research center, Technical summary report 1584, University of Wisconsch, Medison, 1976

[T2] Luc Tartar: *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **115A** (1990) 193–230

[T3] Luc Tartar: *H-measures and applications*, *Proceedings of the International congress of mathematicians*, Kyoto, Japan, 1990, Vol II, 1215–1223, Mathematical society of Japan, 1991.

[T4] Luc Tartar: *Mathematical tools for studying oscillations and concentrations: from Young measures to H-measures and their variants*, u *Multiscale Problems in Science and Technology*, N. Antonić et al. , ur., Springer, (2002) 1–84

[Tr1] François Trèves: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, 1967.

[Tr2] François Trèves: *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators I–II*, Plenum Press, New York, 1980.

[Ta] Michael E. Taylor: *Tools for PDE: Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators and Layer Potentials*, American Mathematical Society, 2000.

[Z] Eberhard Zeidler: *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1994.

# Sažetak

H-mjere, ili kako se još nazivaju, mikrolokalne defektne mjere su početkom devedesetih godina dvadesetog stoljeća nezavisno uveli Luc Tartar i Patrick Gérard. Kako su se najprije pojavile u vezi s nekim problemima iz homogenizacije, Tartar ih je nazvao H-mjerama. One su vrsta Radonovih mjera koje opisuju limes kvadratičnih izraza $L^2$ funkcija. Preciznije, neka je $(u_n)$ omeđen niz u $L^2$ koji konvergira slabo k $u$. Tada je $(u_n - u)^2$ omeđen u $L^1$, stoga konvergira slabo k pozitivnoj Radonovoj mjeri $\nu$. U slučaju jake konvergencije mjera $\nu$ je nul mjera. Na taj način, ona mjeri odstupanje slabe od jake konvergencije, te ju je stoga Gérard prozvao mikrolokalnom defektnom mjerom.

Ovaj rad se sastoji iz dva dijela. U prvom dijelu prikazana je osnovna teorija H-mjera, dok se drugi dio sastoji od primjena H-mjera na hiperboličke jednadžbe, odnosno, sustave.

U prvom poglavlju dat je prikaz klasične teorije pseudodiferencijalnih operatora. Ti operatori predstavljaju poopćenje diferencijalnih operatora, pri cemu je ključna ideja da se račun operatora zamijeni računom pridruženih simbola. Uzimajući dovoljno široku klasu simbola moći ćemo za neke od tih operatora (na primjer za eliptičke) odrediti njihove inverze.

Teorem postojanja H-mjera u njegovom najopćenitijem obliku kakvom ga je dokazao Gérard dat je u drugom poglavlju. Pri tom su H-mjere pridružene nizovima $L^2_{\mathrm{loc}}$ funkcija s vrijednostima u proizvoljnom separabilnom Hilbertovom prostoru $H$. Prikazani su i primjeri H-mjera povezani uz dvije osnovne vrste slabe konvergencije: oscilacija i koncetracija, te njihova osnovna svojstva: transportno i lokalizacijsko. Također je citiran Tartarov teorem postojanja H-mjera.

Drugi dio ovog rada, između ostalog, sadrži prikaz autorovih originalnih rezultata. Započinje trećim poglavljem u kojem se nalazi poopćenje Francfortovog i Muratovog rezultata iz 1992. godine na nelinearnu valnu jednadžbu. Pri tom se gleda niz valnih jednadžbi s različitim početnim uvjetima. Energija pridružena svakoj pojedinoj valnoj jednadžbi se može izračunati, nas, međutim, zanima limes gustoća energije, takozvana makroskopska gustoća energije. Budući da je energija izražena kvadratičnim članovima, limes se izražava pomo"ut H-mjera. Koristeći prijenosna svojstva H-mjera, izvodi se prijenosna jednadžba za H-mjeru, te se ona izražava pomoću H-mjera pridruženih nizu početnih uvjeta. Pokaže se da dodavanje nelinearnog člana nije rezultiralo promjenom te energije.

U četvrtom poglavlju analizira se isti problem kao i u trećem, sada, međutim, koristeći tehnike koje je razvio Gérard u svom članku iz 1995. godine. Osnovna ideja se sastoji u tome da se zamrzne vremenska varijabla $t$ i da se limes mikrolokalnih energija $d_n$ izrazi H-mjerama koje ne ovise o dualnoj varijabli $\tau$, što znatno pojednostavljuje račun. Gérardove metode su poopćene na slučaj nelinearne valne jednadžbe (s članom $u^3$) s varijabilnim koeficijentima uz prostorne derivacije. Pri tom se dobije isti rezultat kao i u trećem poglavlju, to jest, dokaže se da dodavanje nelinearnog člana nije rezultiralo promjenom

makroskopske energije.

U posljednjem poglavlju primjenjuju se tehnike iz četvrtog poglavlja na simetrični hiperbolički sustav. Glavno sredstvo u računu su pri tom opet H-mjere. Izvede se prijenosna jednadžba koju zadovoljava pripadna H-mjera i taj se rezultat primijeni na valnu jednadžbu. Zapisujući valnu jednadžbu kao hiperbolički sustav, izračuna se pripadna H-mjera za titrajući niz početnih uvjeta. Dobiveni rezultat se slaže s onima iz prethodna dva poglavlja, te također s rezultatom koji se dobije direktnim računanjem H-mjera pomoću D'Alembertove formule za rješenje valne jednadžbe.

# Summary

H-measures, also known as microlocal defect measures, were independently introduced by Luc Tartar and Patrick Gérard in the beginning of nineties in the last century. As they first appeared connected with some homogenisation problems, Tartar named them H-measures. They are Radon measures describing limits of quadratic expressions of $\mathrm{L}^2$ functions. More precisely, let $(u_n)$ be a bounded sequence in $\mathrm{L}^2$ weakly converging to $u$. Then $(u_n - u)^2$ is bounded in $\mathrm{L}^1$, thus (on a subsequence) weakly converges to a positive Radon measure $\nu$. In the case of strong convergence the measure $\nu$ is zero. In such a way, it measure deviation of weak from strong convergence, and therefore Gérard named it microlocal defect measure.

This work consists of two parts. In the first one the basic theory of H-measures is presented, while the second part consists of applications of H-measures to hyperbolic equations and systems.

The review of classical theory of pseudodifferential operators is given in the first chapter. These operators present a generalisation of differential operators, and the key idea is to replace the operator calculus with a calculus of associated symbols. Taking large enough class of symbols we can find their inverses for some classes of them (so called elliptic).

The existence theorem for H-measures in its most generalised form proved by Gérard is presented in the second chapter. The H-measures are associated to sequences of $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}$ functions taking values in an arbitrary separable Hilbert space $H$. The examples of H-measures are given, related to two prototypes of weak convergence: oscillation and concentration, and their basic properties as well: transport and localisation. Tartar's existence theorem for H-measures is cited as well.

The second part of the work contains author's original results as well. It starts with the third chapter containing the generalisation of Francfort and Murat's result from 1992 to the nonlinear wave equation. For that, a sequence of wave equations with various initial conditions is considered. The energy associated to each wave equation could be calculated, but we are interested in the energy density limit, the so called macroscopic energy density. As the energy is expressed by quadratic terms, its limit is expressed by an H-measure. It turns out that addition of a nonlinear term does not result in any change of macroscopic energy.

In the fourth chapter the problem from the third one is revisited, this time, however, using techniques developed by Gérard in his article from 1995. The basic idea is to freeze the time variable $t$ and to express the limit of microlocal energy densities $d_n$ by an H-measure independent of the dual time variable $\tau$. In such a way the calculus is rather simplified. Gérard's method is generalised to the nonlinear wave equation (with $u^3$ nonlinear term) with variable coefficients multiplying space derivatives. The same result as in the third

chapter is obtained. In fact, it is proved that adding of the nonlinear term does not result with the change of macroscopic energy.

In the last chapter the methods from the preceding one are applied to symmetric hyperbolic system. The main tool in the calculus are again H-measures. A transport equation for the associated H-measure is derived and this is applied to the wave equation. Writing down the equation as the hyperbolic system, the H-measure is obtained for oscillating sequence of initial conditions. The derived result is in accordance with those from the preceding two chapters, and with the result obtained by direct calculation of H-measure using D'Alembert's formula for the solution of wave equation.

# Životopis

Rođen sam 4. travnja 1975. godine u Dubrovniku, gdje sam završio osnovnu i srednju školu. Tijekom čitavog školovanja bio sam odličan učenik. Sudjelovao sam u više matematičkih i fizičkih natjecanja u kojima sam ostvario zapažene rezultate (između ostalog treće mjesto na državnom nivou). Maturirao sam 1993. godine s odličnim uspjehom. Iste godine upisao sam se na Prirodoslovno matematički fakultet Sveučilista u Zagrebu, Matematički odjel, profil diplomirani inženjer matematike. Na trećoj godini studija odabrao sam smjer primijenjene matematike.

Tokom studija moj prosjek ocjena je bio 4,9. Diplomirao sam u jesen 1998. godine pod mentorstvom dr. Nenada Antonića. Naslov diplomskog rada je *Globalna rjesenja Boltzmanove jednadžbe*. Rad počinje heurističkim izvodom jednadžbe koji proizlazi iz kinetičke teorije plinova. Rad se temelji na članku Ronalda J. DiPerne i Pierre-Louis Lionsa objavljenom u *Annals of Mathematics* 1989. godine. Postojanje klasičnog globalnog rješenja Boltzmannove jednadzbe nije dokazano. Stoga je bilo potrebno uvesti renormalizirana r-ješenja problema koja se dobiju rješavanjem niza aproksimativnih zadaća i zatim gledati njihov limes.

Želeći produbiti moje znanje fizike, 1995. godine paralelno sam upisao studij fizike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu , profil diplomirani inženjer fizike. Na taj način sam se upoznao s fizikalnom pozadinom jednadžbi koje matematički obrađujem. Na trećoj godini studija fizike odabrao sam smjer geofizika, da bih na četvrtoj godini izabrao profil metereologija i fizička oceanografija. Moj prosjek ocjena na studiju fizike iznosi 4,65.

U siječnju 1997. dobio sam stipendiju Zagrebačkog sveučilišta (izabrano je 70 stipendista izmedu 40 000 studenata).

U ljetu 1998. sam iskoristio talijansku stipendiju za petotjedno pohađanje poslijediplomske ljetne škole u Perugia-i od 26. srpnja do 29. kolovoza (predmeti: Jednadžbe matematičke fizike i Funkcionalna analiza).

Još kao dodiplomski student sam pohadao određene postdiplomske kolegije:

(1) Homogenizacija, kompenzirana kompaktnost i H-mjere,

(2) Soboljevljevi prostori.

Takoder sam održao znatan broj seminara na temu postojanja slabih i klasičnih rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Nakon diplomiranja zaposlio sam se kao znanstveni novak na Matematickom odjelu Prirodoslovnog matematickog fakulteta u Zagrebu. Član sam projekta *Titrajuca rjesenja parcijalnih diferencijalnih jednadzbi* sponzoriranog od Ministarstva znanosti i tehnologije.

U akademskoj godini 98./99. započeo sam postdiplomski studij matematike tijekom kojeg sam odslušao sljedeće kolegije:

(1)Preslagivanja i primjene,

(2)Primjene Lievih grupa i algebri,

(3)Titrajuća rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

(4)Primijenjena realna i funkcionalna analiza.

(5)Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Također sam aktivni član Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu.

Akademsku godinu 99./00. sam proveo na Max Planck Institutu za primjenjenu matematiku u Leipzigu, Njemačka, gdje sam bio pozvan sudjelovati u projektima vezanim uz H-mjere i njihove primjene.

Održao sam sljedeća konferencijska predavanja

i) Computation of power-series expansions in homogenisation of nonlinear equations, *Applied Mathematics and computation*, Dubrovnik, rujan 1999.

ii) Microlocal energy density for hyperbolic systems, *Applied Mathematics and Scientific computing*, Dubrovnik, rujan 2001.

iii) Microlocal energy density for semilinear wave equations, *Bosnian-Croatian Analysis Meeting*, Bihać, svibanj 2001.

Prva dva gore navedena predavanja objavljena su u pripadnim *proceedingsima*.

Moj osnovni interes je u matematičkom pristupu fizičkim problemima. Trenutno, posebno sam zainteresiran za parcijalne diferencijalne jednadzbe i njihove primjene. Moj dosadašnji rad je uglavnom sadržavao probleme prijelaza iz mikroskale na makroskalu, odnosno probleme homogenizacije. Jedan od alata korištenih u homogenizaciji su i H-mjere, vrsta Radonovih mjera pomoću koje se izražavaju limesi kvadratičnih izraza. Svojstva H-mjera i njihovu primjenu na polulinearne hiperboličke sustave, posebno na valnu jednadžbu, sam obradio u svom magistarskom radu pod naslovom *H-mjere i primjene*.