Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Andrija Raguž

Varijacijski modeli mikrostruktura

Magistarski rad

Zagreb, srpnja 1999.

Predgovor

U ovom radu mikrostrukturom smatramo bilo koju strukturu na skali između makroskopske skale (na kojoj vršimo opažanja i na kojoj vrijede zakoni mehanike kontinuuma) i atomske skale. Takve strukture se često pojavljuju u prirodi, a i kao umjetno proizvedeni materijali. Mikrostrukture bitno utječu na makroskopska svojstva materijala ili mehaničkog sustava na način da optimiziraju izvjesno svojstvo, primjerice miminiziraju energiju, maksimiziraju entropiju, daju maksimalnu čvrstoću za zadanu masu i tome slično.

Matematička analiza mikrostruktura obično zanemaruje atomsku skalu razmatrajući skale na kojima još uvijek vrijede zakoni mehanike kontinuuma. Prijelaz s takvih skala na makroskopsku skalu u literaturi se provodi raznim postupcima usrednjavanja ili renormalizacije. Nešto općenitiji problem je opisati skale koje su u izvjesnom smislu malene ili konvergiraju k nuli i odrediti u kakvoj su vezi svojstva na malenoj i makroskopskoj skali. Znanstvena istraživanja ovakvih pitanja uglavnom su fokusirana na tri područja: homogenizaciju, varijacijske modele mikrostruktura i optimalni dizajn. Glavni problem u homogenizaciji je odrediti makroskopsko ponašanje (ili barem neke ocjene na nj) koje je uzrokovano određenom mikrostrukturom (na primjer, periodičkom smjesom dvaju vodiča topline s isčezavajućim periodom). Dok varijacijski modeli mikrostruktura modeliraju sustave koji spontano formiraju mikrostrukturu pretpostavljajući da je takva struktura formirana kako bi se optimiziralo određeno svojstvo, optimalni dizajn je područje u kome se pojavljuje problematika prethodnih dvaju područja, jer optimalna struktura često korespondira odgovarajućem homogenizacijskom limesu. Tipični razlog za pojavu mikrostrukture je nepostojanje optimuma, pa optimizirajući nizovi moraju sve finije i finije oscilirati. Proučavanje optimizirajućih nizova i njihovih svojstava omogućeno je najprije uvođenjem parametriziranih mjera (Youngovih mjera) koje igraju važnu ulogu u našim razmatranjima, a zatim drugih objekata, poput H–mjera ili dvoskalnih Youngovih mjera, koje ćemo samo ukratko spomenuti u posljednjem poglavlju ovog rada.

Bavit ćemo se uglavnom mikrostrukturama koje su nastale kao posljedica faznih prijelaza u elastičnim kristalima, obično slitinama kao što su In–Th, Cu–Al–Ni, Ni–Ti. Spomenuti materijali imaju tehnološki zanimljiva svojstva koja dovode do pojava kao što su pseudoelastičnost ili pamćenje.

Zahvala

Srdačno se zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc. Nenadu Antoniću, ponajprije na odabiru teme i profesionalnom odnosu, na gorljivom zalaganju i neprestanom inzistiranju na poboljšanju kvalitete ovog rada, zatim na ogromnoj količini znanja koju sam usvojio slušajući njegove seminare i predavanja, te na ukazanoj pomoći i bezrezrvnoj podršci.

Nadalje, zahvaljujem prof. dr. sc. I. Aganoviću, prof. dr. sc. Z. Tuteku, doc. dr. sc. E. Marušiću i doc. dr. sc. M. Juraku na korisnim sugestijama tijekom rada Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu, i na svemu što sam od njih naučio na seminarima, predavanjima i konzultacijama.

Također, moram izraziti svoju zahvalnost dipl. inž. Nevenu Balenoviću, mr. Josipu Tambači i dipl. inž. Marku Vrdoljaku za pruženu znanstvenu suradnju, stalnu pomoć tijekom svih faza nastanka ovog rada, te za ugodnu atmosferu na seminarima Radne grupe za parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Dužan sam izraziti zahvalnost i dipl. inž. Frani Peki čija je dragocjena pomoć prilikom instaliranja programske podrške učinila udobnijim posao tipkanja matematičkog materijala.

Na kraju, posebno moram zahvaliti roditeljima na nesebičnoj i bezuvjetnoj podršci koju sam imao za cijelo vrijeme dodiplomskog i poslijediplomskog studija. Ovaj rad je velikim dijelom plod njihovog razumijevanja.

Sadržaj

V. Kvazikonveksifikacija i homogenizacija u $\mathrm{W}^{1,p}$

VI. Alternativni opis mikrostruktura

I. Formulacija zadaća

1. Iskaz osnovnih zadaća

Elastični kristal modelirat ćemo kao nelinearan elastični kontinuum. Referentnu konfiguraciju kristala identificiramo s ograničenom domenom $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$. Elastična energija kristala dana je funkcionalom

$$I(\mathsf{u}) := \int_\Omega W(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \ ,$$

gdje je $\mathsf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3$ deformacija kristala a funkcija $W : \mathrm{M}_{3\times 3} \longrightarrow \mathbf{R}$ opisuje svojstva materijala. Zbog zahtjeva invarijantnosti s obzirom na promjenu promatrača, pretpostavljamo da je W invarijantna na rotacije (isp. [Gu]), odnosno da vrijedi

$$(\forall\, \mathbf{Q} \in SO(3))(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{3\times 3}) \quad W(\mathbf{QF}) = W(\mathbf{F}) \ .$$

Nadalje, pretpostavljat ćemo da je temperatura u kristalu konstantna, pa W ne ovisi o temperaturi. Osnovna pretpostavka varijacijskog modela za mikrostrukture je sljedeća: *Formiranje mikrostruktura korespondira minimizaciji elastične energije I.*

Renormalizacijom funkcije W možemo postići da je $\min W = 0$. Tada je

$$K := W^{\leftarrow}\{0\}$$

skup slika deformacija kristala koje po točkama minimiziraju W, i stoga I. Sada ćemo precizno formulirati ovu zadaću u većoj općenitosti (namjesto deformacija trodimenzionalnog prostora promatrat ćemo funkcije $\mathsf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ograničena domena). Primijetimo da se prostor $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ podudara se s Lipschitzovim preslikavanjima. Za kompaktan skup $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ proučavat ćemo sljedeće zadaće:

Zadaća 1. (egzaktna rješenja) Karakterizirati sva Lipschitzova preslikavanja u koja zadovoljavaju

$$\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) \in K \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \ .$$

Zadaća 2. (aproksimativna rješenja) Karakterizirati sve nizove (u_n) Lipschitzovih preslikavanja s jednoliko ograničenim Lipschitzovim konstantama takve da vrijedi

$$d(\nabla \mathsf{u}_n(\mathbf{x}), K) \longrightarrow 0 \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \ .$$

Zadaća 3. (relaksacija skupa K) Odrediti sve skupove $K^{ex}, K^{app} \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ matrica $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ takvih da Zadaća 1 ima rješenje koje zadovoljava

$$\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{Fx} \ \text{ na } \ \partial\Omega \ ,$$

odnosno za Zadaću 2:

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{Fx} \ \text{ na } \ \partial\Omega \ .$$

Zadaće 1–3 javljaju se i u drugim područjima matematike, na primjer u teoriji izometričkih imerzija (isp. [Gr 86]). Bitna tehnička razlika između gometrijskog i našeg konteksta je u činjenici da se u geometriji proučava slučaj povezanog skupa K rješenja klase C^1, dok se problemi koje mi proučavamo u ovom radu odnose na slučaj skupa K s barem dvije komponente povezanosti.

Na ovom mjestu ukratko ćemo opisati međusobni odnos različitih aproksimirajućih nizova vezanih uz Zadaću 3, što je pitanje koje se prirodno postavlja u kontekstu osnovnog teorema o Youngovim mjerama (vidi poglavlje 3).

2. Konvergencija u mjeri i inačice

Neka su $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ i $K \subseteq \mathbf{R}^r$ izmjerivi skupovi, a $\mathsf{u}, \mathsf{u}_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ izmjerive funkcije.

(1) Kažemo da niz (u_n) konvergira *u mjeri* μ k funkciji u, što pišemo $\mathsf{u}_n \stackrel{\mu}{\longrightarrow} \mathsf{u}$, ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathsf{u}(\mathbf{x})| \geq \varepsilon\} = 0 \ .$$

(2) Kažemo da niz (u_n) konvegira *u mjeri* μ ka skupu K, što pišemo $\mathsf{u}_n \stackrel{\mu}{\longrightarrow} K$ ako vrijedi

$$(\forall U \in \tau(\mathbf{R}^r)) \quad K \subseteq U \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r \backslash U\} = 0 \ .$$

Nadalje, za zatvoren $K \subseteq \mathbf{R}^r$ definiramo

$$\mathrm{C}^K(\mathbf{R}^r) := \{f \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^r; \mathbf{R}) : (\forall \mathsf{x} \in K) \quad f(\mathsf{x}) = 0\}.$$

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv, $K \subseteq \mathbf{R}^r$ zatvoren, te $\mathsf{u}_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz izmjerivih funkcija. Promotrimo sljedeće tvrdnje:

(a) $\mathsf{u}_n \stackrel{\mu}{\longrightarrow} K$,

(b) $(\forall f \in C^K(\mathbf{R}^r) f(\mathsf{u}_n) \stackrel{\mu}{\longrightarrow} 0$,

(c) $d(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}), K) \longrightarrow 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

Postavlja se pitanje jesu li ove tvrdnje ekvivalentne. Primijetimo odmah da iz tvrdnje (b) slijedi tvrdnja (c). Definirajmo funkciju $f(y) := d(y, K)$. Tada je uvjet $f \in \mathrm{C}^K(\mathbf{R}^r)$ ispunjen i, budući da iz konvergencije u mjeri μ slijedi da postoji podniz koji konvergira μ-skoro svuda k istom limesu, to vrijedi i tvrdnja (c). Doduše, (c) vrijedi samo za podniz, no to nama neće biti bitno ograničenje jer nas zanima samo egzistencija aproksimirajućih nizova.

Osnovni rezultat je sljedeći teorem:

Teorem 1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv, $K \subseteq \mathbf{R}^r$ zatvoren, te $\mathsf{u}_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz izmjerivih funkcija. Tada vrijedi:*

(1) tvrdnje (a) i (b) su ekvivalentne

(2) Ako je Ω konačne mjere, tvrdnje (a), (b) i (c) su ekvivalentne.

Dem. Dokažimo najprije tvrdnju (1). Neka vrijedi uvjet (a) i neka je $f \in \mathrm{C}^K(\mathbf{R}^r)$ proizvoljna. Zbog neprekidnosti od $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \mathsf{y} \in \mathbf{R}^r)(\exists \delta > 0)(\forall \mathsf{z} \in \mathbf{R}^r) \quad |\mathsf{y} - \mathsf{z}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\mathsf{y}) - f(\mathsf{z})| < \varepsilon.$$

Posebno, za proizvoljan $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \mathbf{x} \in \Omega)(\exists \delta > 0)(\forall \mathsf{k} \in K) \quad |\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{k}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}))| < \varepsilon.$$

Stoga iz $|f(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}))| \geq \varepsilon$ imamo

$$(\forall \mathsf{k} \in K) \ d(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}), \mathsf{k}) \geq \delta$$

što je ekvivalentno s $d(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}), K) \geq \delta$, odnosno $\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \notin K_\delta$, gdje je $K_\delta := \{\mathsf{y} \in \mathbf{R}^r : d(\mathsf{y}, K) < \delta\}$, te slijedi

$$\mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |f(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}))| \geq \varepsilon\} \leq \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \notin K_\delta\} \longrightarrow 0$$

zbog pretpostavke (a), a to smo i trebali pokazati. Dokažimo sada drugu implikaciju. Neka je U proizvoljna okolina skupa K i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Po pretpostavci slijedi

$$(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall\, n \geq n_0) \quad \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |f(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})| \geq \varepsilon\} < \varepsilon$$

Prema Uryshonovoj lemi, primijenjenoj na disjunktne skupove K i $\mathbf{R}^r \backslash U$, postoji neprekinuta funkcija $f : \mathbf{R}^d \longrightarrow [0,1]$ takva da vrijedi

$$f|_K = 0 \qquad \text{i} \qquad f|_{\mathbf{R}^r \backslash U} = 1.$$

Tada za funkciju $f_\varepsilon := \varepsilon f$ vrijedi da $\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \notin U$ povlači $f_\varepsilon(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) = \varepsilon$, odnosno da je

$$\mu\{\mathbf{x} \in \Omega : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \notin U\} \leq \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : f_\varepsilon(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) = \varepsilon\} = \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : f_\varepsilon(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) \geq \varepsilon\} < \varepsilon$$

i zaista $\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mu} K$.

Prijeđimo sada na dokaz tvrdnje (2). Zbog prethodnih rezultata, dovoljno je pokazati da uz pretpostavku $\mu(\Omega) < \infty$ tvrdnja (c) povlači tvrdnju (a). Da bismo ovo pokazali, trebat će nam najprije neke pripremne tvrdnje. Primijetimo najprije da euklidski prostor $\mathbf{R}^r$ zadovoljava separacijski aksiom T_3, te neposredno slijedi ova karakterizacija:

Neka su (u_n) *i* K *kao u iskazu teorema. Tada* $\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mu} K$ *ako i samo ako za svaku zatvorenu okolinu* V *skupa* K *vrijedi* $\mu\{\mathbf{x} \in \Omega : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r \backslash V\} \longrightarrow 0$.

Nadalje, želimo pokazati da tvrdnja (a) slijedi ukoliko je konvergencija u (c) uniformna. Napomenimo da ova činjenica vrijedi i ako je $\mu(\Omega) = \infty$, no to nam za dokaz ovog teorema neće trebati. Pretpostavimo, dakle, da je konvergencija u (c) uniformna. Neka je $V \subseteq \mathbf{R}^r$ proizvoljna ograničena zatvorena okolina skupa K. Stavimo $\varepsilon := d(\mathbf{R}^r \backslash V, K)$. Tada je $\varepsilon > 0$. S druge strane, po našoj pretpostavci postoji zanemariv skup $E \subseteq \Omega$ takav da vrijedi

$$(\forall\, \eta > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall\, n \geqslant n_0)(\forall\, \mathbf{x} \in \Omega \setminus E) \quad d(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}), K) < \eta\,.$$

Specijalno, za $\varepsilon := d(\mathbf{R}^r \backslash V, K)$ i za dovoljno velik $n \in \mathbf{N}$ imamo

$$\mu\{\mathbf{x} \in \Omega : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r \backslash V\} \leq \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}), K) \geq \varepsilon\} \leq \mu(E) = 0,$$

i stoga vrijedi (a), štoviše $\mu(\Omega \cap \mathbf{R}^d \backslash \mathsf{u}_n^{\leftarrow}(V)) = 0$, osim za konačno $n \in \mathbf{N}$. Sada imamo sve pripremljeno za dokaz tvrdnje (2). Za $\mathbf{x} \in \Omega$ definirajmo $f_n(\mathbf{x}) := d(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}), K)$, $f(\mathbf{x}) := 0$. Neka je $U \subseteq \mathbf{R}^r$ proizvoljna otvorena okolina skupa K i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Iz Egorovljevog teorema slijedi da postoji $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$ takav da $f_n|_{\Omega_\varepsilon} \longrightarrow f|_{\Omega_\varepsilon}$ uniformno i $\mu(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nadalje, po već pokazanoj tvrdnji, postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\mu\{\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r \backslash U\} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Stoga slijedi

$$\begin{aligned}\mu\{\mathbf{x} \in \Omega : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r \backslash U\} &= \mu\{\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r \backslash U\} + \mu\{\mathbf{x} \in \Omega \backslash \Omega_\varepsilon \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^r \backslash U\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(\Omega \backslash \Omega_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

i tvrdnja (2) je dokazana.

Q.E.D.

Pokažimo primjerom da tvrdnja (2) općenito ne vrijedi ukoliko je $\mu(\Omega) = \infty$. Neka je $r = d = 1$, $\Omega := \langle 0, +\infty\rangle$ i $K := \{0\}$. Definirajmo izmjerive funkcije $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$u_n(x) := \frac{1}{n}\chi_{(0,n)} + \frac{1}{2}\chi_{(n,n+1)}.$$

Tvrdimo da je ispunjen uvjet (c), ali da nije ispunjen uvjet (a). U tu svrhu, neka je $x > 0$ proizvoljan. Tada postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da $m \geq n$ povlači $x \in \langle 0, m\rangle$. Za takve $m \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$d(u_m(x), K) = |u_m(x)| = \frac{1}{m} \longrightarrow 0 ,$$

pa je ispunjen uvjet (c). Neka je sada $U := \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ otvorena okolina skupa K u $\mathbf{R}$ i neka je $n \geq 3$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\mu\{x \in \Omega : u_n(x) \in \mathbf{R}\backslash U\} &= \mu\{x > 0 : u_n(x) \leq -\frac{1}{2} \quad\vee\quad u_n(x) \geq \frac{1}{2}\} \\
&= \mu\{x > 0 : u_n(x) \geq \frac{1}{2}\} \\
&= \mu\{x \in \langle 0, n\rangle : u_n(x) \geq \frac{1}{2}\} + \mu\{x \in \langle n, +\infty\rangle : u_n(x) \geq \frac{1}{2}\} \\
&= \mu\{x \in (0, n) : \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}\} + \mu\{x \in \langle n, +\infty\rangle : \frac{1}{2}\chi_{(n,n+1)} \geq \frac{1}{2}\} \\
&= 0 + (n+1) - n = 1 ,
\end{aligned}$$

što očito ne ide u nulu kad $n \longrightarrow \infty$; dakle, tvrdnja (a) ne stoji. Na ovom mjestu primijetimo da smo zapravo pokazali i više: naime, iz gornjeg primjera slijedi da tvrdnja (a) ne slijedi ni ukoliko pretpostavimo da je konvergencija u (c) lokalno uniformna.

Na kraju, uočimo da se prijelaz na podniz može izbjeći ukoliko tvrdnju (c) zamijenimo tvrdnjom (c*): $d(\mathsf{u}_n, K)\xrightarrow{\ \mu\ }0$. No, uvjet (c) je prirodniji i intuitivno prihvatljiviji. Zbog potpunosti dokazujemo rezultat koji pokazuje da se pojam konvergencije niza funkcija (u_n) k skupu K podudara s već poznatim načinima konvergencije u praktički svim slučajevima od interesa.

Korolar 1. *Neka je (Y, d) metrički prostor, $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor mjere i $u_n : X \longrightarrow Y$ niz izmjerivih funkcija.*

(i) Ako je $K \subseteq Y$ izmjeriv skup, tada $u_n\xrightarrow{\ \mu\ }K$ ima za posljedicu $d(u_n, K)\xrightarrow{\ \mu\ }0$.
(ii) Štoviše, ako je $K \in \mathcal{K}(Y)$, vrijedi i obrat.

Dem.

(i) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Odaberemi li $U_\varepsilon \in \tau(Y)$ takav da je $d(\partial U_\varepsilon, K) = \varepsilon$, pa specijalno imamo

$$\mu\{x \in X : d(u_n(x), K) \geqslant \varepsilon\} = \mu\{x \in X : u_n(x) \in Y\backslash U_\varepsilon\} \longrightarrow 0 .$$

(ii) Kako za proizvoljnu okolinu U kompakta K vrijedi $d(\partial U, K) > 0$, to slijedi obrat.

Q.E.D.

Na kraju napomenimo da, općenito, konvergencija niza funkcija u mjeri k skupu K ne dolazi niti od jedne topologije, dok gornji korolar pokazuje da za kompaktne skupove K takva konvergencija dolazi od metrizabilne topologije, budući da prema klasičnom rezultatu za prostor konačne mjere vrijedi

$$f_n\xrightarrow{\ \mu\ }f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho_\mu(f_n - f) \longrightarrow 0 ,$$

gdje je ρ_μ metrika definirana s

$$\rho_\mu(f_n, f) := \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \; .$$

3. Druge zadaće vezane uz mikrostrukture

U kontekstu varijacijske teorije mikrostruktura o kojoj je bilo govora u prvom odjeljku, skupovi K^{ex} i K^{app} imaju važnu interpretaciju. Naime, oni se sastoje od svih afinih *makroskopskih* deformacija kristala s energijom (skoro) jednakom nuli. Takvi skupovi trivijalno sadrže skup K, ali mogu biti daleko veći. Primjerice, za $K := SO(2)\mathbf{A} \cup SO(2)\mathbf{B}$ (uz odgovarajuće uvjete na matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$) može se pokazati da skupovi K^{ex} i K^{app} sadrže otvoren skup. Iz dosadašnjeg razmatranja zaključujemo da razni tipovi minimizirajućih nizova mogu biti od interesa pri zasnivanju pojma aproksimativnog rješenja, te se prirodno nameće proučavanje sljedeće zadaće.

Zadaća 4. Pronaći matematičke objekte koji efektivno opisuju svojstva aproksimirajućih nizova u smislu da sadrže samo relevantne informacije o nizovima, odnosno one koje imaju utjecaj na makroskopska svojstva materijala.

Iako postoje i drugi problemi vezani uz teoriju mikrostruktura (koje je moguće matematički rigorozno formulirati), u ovom radu proučavat ćemo samo zadaće 1–4. O spomenutim problemima postoji relativno opsežna (iako ponekad teško dostupna) literatura, dok za druge probleme (vidi zadaću 5 niže) još nisu poznata cjelovita i zadovoljavajuća rješenja, te su još uvijek predmet intenzivnog istraživanja, kako matematičara, tako i drugih znanstvenika.

Kao i u drugim slučajevima, matematički model za fizikalne pojave u kojima dolazi do formiranja mikrostruktura treba, između ostalog, biti konzistentan s rezultatima eksperimenata. To dovodi do traganja za sve *boljim* matematičkim objektima koji opisuju različite pojave koje možemo mjeriti. U našem slučaju, kao što ćemo vidjeti u trećem poglavlju, pojava nepostizanja ekstrema u varijacijskom računu u matematičkom modelu vodi do formiranja *beskonačno fine* mikrostrukture. Kako se u praksi kristalne mikrostrukture uvijek javljaju na nekoj konačnoj skali, to ima smisla formulirati i sljedeći problem:

Zadaća 5. Opisati skalu i geometriju mikrostruktura, uzimajući u obzir doprinos energije, na primjer dodirnu (kontaktnu) energiju.

Jedno moguće objašnjenje gornje pojave je da beskonačno fine mikrostrukture ne mogu nastati prirodnim dinamičkim promjenama u sustavu koji promatramo. Ovo je vrlo važan problem, i o njemu ćemo nešto više reći u posljednjem poglavlju ovog rada.

II. Primjeri

1. Motivacija

Prije nego li razmotrimo općenitu teoriju za zadaće 1–3, obratit ćemo pažnju na nekoliko najjednostavnijih primjera. Niže opisani primjeri dobro ilustriraju problematiku kojom se bavimo i pripadaju malom broju problema za koje su poznata cjelovita rješenja zadaća 1 i 2.

Na narednim stranicama K će redovito označavati podskup u $\mathrm{M}_{r\times d}$ uz $r, d \geqslant 2$, s $r(\mathbf{C})$ bit će označen rang matrice $\mathbf{C} \in \mathrm{M}_{r\times d}$, dok će s Ω biti označena domena (otvoren i povezan skup) u $\mathbf{R}^d$.

2. Zadaća dvaju gradijenata

Neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{M}_{r\times d}$. Kažemo da su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ *povezane ranga 1* ako vrijedi $r(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = 1$. Kažemo da potpostor $L \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ ne sadrži pravac ranga 1 ako ne sadrži niti jednu matricu ranga 1.

Lako se pokazuje da je matrica $\mathbf{C} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ ranga 1 ako i samo ako postoje vektori $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^d$ takve da je $\mathbf{C} = \mathsf{a} \otimes \mathbf{b}$. Naime, linearni operator $\mathsf{C} : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^r$ generiran matricom $\mathbf{C}$ ima jednodimenzionalnu sliku, te je za $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ $\mathsf{C}\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{x})\mathsf{a}$. Kako je $\mathbf{x} \mapsto \lambda(\mathbf{x})$ linearan funkcional, to vrijedi $\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{b}$, i imamo $\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})\mathsf{a} = (\mathsf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{x}$. Također, birajući $\mathsf{a}_0 := \frac{\mathsf{a}}{|\mathsf{a}|}$ i $\mathbf{b}_0 := |\mathsf{a}|\mathbf{b}$ te pogodnim odabirom baze u $\mathbf{R}^r$ možemo postići da je $\mathsf{a}_0 = \mathsf{e}_1$. Dakle je bez smanjenja općenitosti $\mathbf{C} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{b}$. Ovu činjenicu ćemo u daljnjem više puta koristiti. Nadalje, povoljnim odabirom baze u $\mathbf{R}^d$ možemo postići da vrijedi $|\mathbf{b}_0| = 1$.

Zbog jednostavnosti zapisa, u daljnem izlaganju oznaka $\nabla\mathsf{u}$ bit će korištena za gradijent funkcije u bez obzira na to iz koje baze biramo koordinatne vektore. U skladu s tom konvencijom, $\partial_j\mathsf{u}$ označava derivaciju u smjeru j–tog vektora *neke* izabrane baze u $\mathbf{R}^d$.

1. Egzaktna rješenja:

Neka je $K = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$. Najjednostavnije rješenje za zadaće $\nabla\mathsf{u} \in K$ su *jednostavne lamine* (vidi tvrdnju (ii) Leme 1), pojam o kome će biti riječi u poglavlju 6, a za koji se pokazalo da ga je, poput nekih drugih pojmova, moguće po izvjesnoj dualnosti poopćiti i na apstraknije zadaće koje korespondiraju zadaćama 1, 2 ili 3. Ovdje samo napominjemo da je takvo poopćenje imalo istaknutu ulogu u klasificiranju mikrostruktura, te da su neka pitanja vezana uza nj riješena tek nedavno (isp. [Sv 92]).

Lema 1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ domena i $\mathsf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ Lipschitzovo preslikavanje koje zadovoljava $\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ za skoro svaki $\mathbf{x}$ iz Ω.*

(i) Ako je $r(\mathbf{B}-\mathbf{A}) \geqslant 2$, tada je $\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) ili $\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

(ii) Ako je $r(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = 1$, tada za proizvoljan konveksan skup $E \subseteq \Omega$ postoji Lipschitzova funkcija $h_E : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ takva da se u može zapisati u obliku

$$\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathsf{a}h_E(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}) + \mathsf{C}\,.$$

pri čemu je $\mathsf{C} \in \mathbf{R}^r$ konstanta, $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^d$, $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ Lipschitzovo preslikavanje takvo da vrijedi $h'_E \in \{0, 1\}$ skoro svuda. Ukoliko je Ω konveksan, ova reprezentacije vrijedi globalno (neovisno o E).

Dem. Dokaz iznosimo prema [BJ 87]. Najprije uočimo da je dosta pokazati da uz $r(\mathbf{C}) \geqslant 2$ iz $\nabla \mathsf{u}_0(\mathbf{x}) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{C}\}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) slijedi zaključak $\nabla \mathsf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) ili $\nabla \mathsf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{C}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$). Zaista, ako to vrijedi, tvrdnja je dokazana definiramo li

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} - \mathbf{B} \;, \quad \mathsf{u}_0(\mathbf{x}) := \mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x} \;,$$

i uočimo da je po pretpostavci $\nabla \mathsf{u}_0(\mathbf{x}) \in \{\mathbf{0}, \mathbf{C}\}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

Neka je, dakle, $\nabla \mathsf{u}_0 \in \{\mathbf{0}, \mathbf{C}\}$, odnosno $\nabla \mathsf{u}_0 = \mathbf{C}\chi_E$ za izmjeriv skup $E \subseteq \Omega$. Kako je sada $r(\mathbf{C}) \geqslant 2$, to daljnjom afinom zamjenom varijabli možemo postići da su prva dva stupca matrice $\nabla \mathsf{u}_0$ oblika $\mathbf{e}_1\chi_E$ i $\mathbf{e}_2\chi_E$, gdje su $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ prva dva vektora kanonske baze u $\mathbf{R}^d$.

Uz oznaku $\mathsf{u}_0 = (u^1, \ldots, u^r)$ tada vrijedi

$$\partial_1 u^1 = \chi_E \;, \quad \partial_j u^1 = 0 \;, \quad j \in \{2, \ldots, n\} \;,$$

$$\partial_2 u^2 = \chi_E \;, \quad \partial_j u^2 = 0 \;, \quad j \in \{1\} \cup \{3, \ldots, n\} \;.$$

Zbog simetričnosti distrubicijskih derivacija (direktna posljedica klasičnog Schwarzovog teorema), slijedi $\nabla \chi_E = 0$ skoro svuda na Ω, te je $\chi_E = 0$ ili $\chi_E = 1$, odnosno $\nabla \mathsf{u}_0 \in \{\mathbf{0}, \mathbf{C}\}$ i tvrdnja (i) je dokazana. Da pokažemo tvrdnju (ii), primijetimo da zbog invarijantnosti možemo pretpostaviti da je $\mathsf{a} = \mathsf{e}_1$i $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, te je stoga $\nabla u^1 = \mathbf{e}_1\chi_E$, $\nabla u^j = 0$ za $j \geqslant 2$. Dakle je $\partial_k u^1 = 0$ za $k = 2, \ldots r$, u $u^2, \ldots u^r$ su konstantne funkcije. Zaključujemo da je u^1 lokalno funkcija koja ovisi samo o x_1. Štoviše, ako je Ω konveksan, presjek proizvoljnog pravca s Ω je otvoren interval, te je u^1 konstantna na hiperravninama $x_1 =$ const. koje presjecaju Ω. Vidimo da je u odabranom paru baza u_0 oblika

$$\mathsf{u}_0(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} \cdot \mathsf{e}_1) + \mathsf{C} \;,$$

što nakon inverzne zamjene varijabli i $\mathsf{u}(\mathbf{x}) := \mathsf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{A}\mathbf{x}$ daje oblik iz (ii).

Q.E.D.

2. Aproksimativna rješenja:

Lema 2. *Neka je $K = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ i neka za $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^r$, $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^d$ i $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi*

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathsf{a} \otimes \mathbf{n} \;, \qquad i \qquad \mathbf{F} = \lambda\mathbf{A} + (1 - \lambda)\mathbf{B} \;.$$

Tada postoji niz (u_k) koji je ograničen u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ i takav da na skupu Ω vrijedi

$$d(\nabla \mathsf{u}_k, \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}) \xrightarrow{\mu} 0 \text{ na } \Omega \;,$$

$$\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{x} \text{ na } \partial\Omega \;.$$

Dem. Uočimo da, nakon translacije koordinatnog sustava, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{F} = 0$. Tada je

$$\mathbf{A} = -(1 - \lambda)\mathsf{a} \otimes \mathbf{n} \;, \quad \mathbf{B} = -\lambda\mathsf{a} \otimes \mathbf{n} \;.$$

Efektivno ćemo konstruirati niz (u_k). Definirajmo funkciju $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$h(t) := \begin{cases} -(1 - \lambda)t, & t \in [0, \lambda] \\ \lambda(t - 1), & t \in \langle \lambda, 1] \end{cases} \;,$$

i proširimo je po periodičnosti na $\mathbf{R}$. Kako je $h(0) = h(1) = 0$, proširenje je neprekinuto. Neka je sada $\mathsf{v}_k : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ definirana s

$$\mathsf{v}_k(\mathbf{x}) := \frac{1}{k}\mathsf{a}h(k\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}) \ .$$

Kako je po konstrukciji ispunjeno $\|h\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \lambda(1-\lambda)$, to niz (v_k) uniformno konvergira k nuli. S druge strane, lako se (računom) pokaže da za proizvoljne $i \in \{1,\ldots,r\}$ i $j \in \{1,\ldots,d\}$ vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathsf{v}_k)_i = h'(k\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})a_i n_j \ ,$$

gdje je $\mathsf{a} = (a_1,\ldots,a_r)$ i $\mathbf{n} = (n_1,\ldots,n_d)$. Stoga je

$$\nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}) = h'(k\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathsf{a}\otimes\mathbf{n} \ ,$$

odnosno

$$\nabla\mathsf{v}_k \in \{\lambda\mathsf{a}\otimes\mathbf{n}, -(1-\lambda)\mathsf{a}\otimes\mathbf{n}\} = \{\mathbf{A},\mathbf{B}\} \ .$$

Preostaje zadovoljiti rubne uvjete. U tu svrhu odaberimo $\varphi \in \mathrm{C}^\infty([0,\infty\rangle)$ takvu da je $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi|_{[0,\frac{1}{2}]} = 0$, $\varphi|_{[1,\infty]} = 1$ i definirajmo niz (u_k) s

$$\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) := \varphi(k\cdot d(\mathbf{x},\partial\Omega))\mathsf{v}_k(\mathbf{x}) \ .$$

Svaka funkcija u_k očito zadovoljava rubni uvjet; provjerimo da vrijedi i zahtjev konvergencije u mjeri:

$$(\forall\varepsilon>0)\quad \lim_k \mu\{\mathbf{x}\in\Omega : d(\nabla\mathsf{u}_k,\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}) \geqslant \varepsilon\} \leqslant \lim_k \mu\{\mathbf{x}\in\Omega : d(\mathbf{x},\partial\Omega) \leqslant \frac{1}{k}\} = 0 \ .$$

Konačno, iz definicije funkcije h i distribucijske derivacije slijedi da je niz (u_k) ograničen u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)$

Q.E.D.

Neka je $p \in [1,\infty]$ i $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ izmjeriva funkcija. Kažemo da je f *nul-Lagranžijan* ako za proizvoljnu $\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ integral $\int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$ ovisi samo o vrijednostima koje u poprima na $\partial\Omega$.

Uočimo da su za takve funkcije f trivijalno zadovoljene Euler-Lagrangeove jednadžbe (odakle i potječe termin *nul-Lagranžijan*.

Teorem 1. *Neka je $s \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant s \leqslant \min\{r,d\}$ i neka je M minora tipa $s\times s$.*

(i) Ako je $p \in [s,\infty\rangle$, $\mathsf{u},\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ i $\mathsf{u}-\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r)$, tada vrijedi

$$\int_\Omega M(\nabla\mathsf{u}) = \int_\Omega M(\nabla\mathsf{v}) \ .$$

Specijalno, ako je $\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{x}$ na $\partial\Omega$, vrijedi

$$\int_\Omega M(\nabla\mathsf{u}) = \int_\Omega M(\mathbf{F}) \ .$$

(ii) Ako je $p \in \langle s,\infty\rangle$ i ako niz (u_k) zadovoljava

$$\mathsf{u}_k \rightharpoonup \mathsf{u} \quad u \quad \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r) \ ,$$

tada

$$M(\nabla\mathsf{u}_k) \xrightharpoonup{\mathrm{L}^{\frac{p}{s}}(\Omega)} M(\nabla\mathsf{u}) \ .$$

Dem.
(i) Dokaz provodimo za $r = d = 2$ i $p = \infty$, uz pretpostavku da je $\mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathsf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ za neku $\mathbf{A} \in M_{2\times 2}$, uz napomenu da se detaljan dokaz može naći u [Da 89]. Ovdje samo ukazujemo na to da zahtjev $p \geqslant s$ osigurava integrabilnost minora.
Neka je $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^2)$ i $A \in M_{2\times 2}$. Tada za $M = \det$ imamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \det(\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \\ &= \int_\Omega \det\mathbf{A}d\mathbf{x} + \int_\Omega \det\nabla\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega (A_{11}\partial_2\varphi_2 + A_{22}\partial_1\varphi_1 - A_{12}\partial_1\varphi_2 - A_{21}\partial_2\varphi_1)d\mathbf{x} \ ,\end{aligned}$$

gdje smo s A_{ij} označili komponente matrice $\mathbf{A}$.
Po Gaussovom teoremu je

$$\int_\Omega \partial_j\varphi_i d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \varphi_i \cdot \nu_j dS$$

te je posljednji integral jednak nuli.
Nadalje, računom se lako provjeri da je

$$\int_\Omega \det\nabla\varphi = \int_\Omega \mathsf{div}\,(\varphi_1\partial_2\varphi_2, -\varphi_1\partial_1\varphi_2) \ ,$$

te je po teoremu o divergenciji

$$\int_\Omega \det\nabla\varphi = \int_{\partial\Omega} (\varphi_1\partial_2\varphi_2, -\varphi_1\partial_1\varphi_2) \cdot \nu dS = 0 \ .$$

Zaključujemo da vrijedi

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^2)) \qquad \int_\Omega \det(\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_\Omega \det\mathbf{A}d\mathbf{x}$$

Q.E.D.

Dakle, minore su nul-Lagranžijani. Štoviše, vrijedi puno jača tvrdnja: afine kombinacije minora su jedini nul-Lagranžijani i jedine funkcije koje imaju svojstvo neprekinutosti iz tvrdnje (ii) gornjeg teorema.

Lema 3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup, (v_k) niz izmjerivih funkcija koje poprimaju vrijednosti u $\mathbf{R}^r$ takav da za svaku izmjerivu funkciju $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ vrijede konvergencije*
(i) $f \circ \mathsf{v}_k \xrightarrow{\mu} \alpha$
(ii) $f \circ \mathsf{v}_k \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \beta$
Tada je $\alpha(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

Dem. Najprije primijetimo iz pretpostavke (i) slijedi da postoji podniz (koji i dalje označavamo s (v_k)) takav da

$$f \circ \mathsf{v}_k \longrightarrow \alpha \ (\mathrm{ss}\ \mathbf{x} \in \Omega) \ .$$

Kako Ω možemo prikazati kao $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n$, pri čemu je (ω_n) rastući niz skupova konačne mjere, dovoljno je pokazati

$$\beta\chi_{\omega_n}(\mathbf{x}) = \alpha\chi_{\omega_n}(\mathbf{x}) \ (\mathrm{ss}\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^r) \ ,$$

pa će tvrdnja slijediti zbog proizvoljnosti $j \in \mathbf{N}$. Sada (koristeći pretpostavku (ii)) teorem o dominiranoj konvergenciji daje

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|f \circ \mathsf{v}_k - \alpha\|_{\mathrm{L}^1(\omega_n)} = 0 \ ,$$

te, uvažavajući pretpostavku (ii), slijedi

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{L}^\infty(\omega_n)) \qquad \int_{\omega_n} (\alpha - \beta)\varphi = 0 \ .$$

Konačno, birajući proizvoljan izmjeriv skup $E \subseteq \omega_n$ i uzimajući $\chi_E \chi_{\{\alpha-\beta>0\}}$ za test funkcije, slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Lema 4. *Pretpostavimo da je $r(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \geqslant 2$ i neka je $\mathsf{u}_k : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz Lipschitzovih funkcija s uniformno ograničenim Lipschitzovim konstantama, takvih da vrijedi*

$$d(\nabla \mathsf{u}_k, \{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}) \xrightarrow{\ \mu\ } 0 \ .$$

Tada ili $\nabla \mathsf{u}_k \xrightarrow{\ \mu\ } \mathbf{A}$ ili $\nabla \mathsf{u}_k \xrightarrow{\ \mu\ } \mathbf{B}$.

Dem. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ i da postoji minora M tipa 2×2 takva da je $M(\mathbf{B}) = 1$ (kako je sada $r(\mathbf{B}) \geqslant 2$, u suprotnom dijelimo $\mathbf{B}$ s $\frac{1}{M(\mathbf{B})}$). Kako po pretpostavci imamo

$$\min\{|\nabla \mathsf{u}_k|, |\nabla \mathsf{u}_k - \mathbf{B}|\} \xrightarrow{\ \mu\ } 0 \ ,$$

to slijedi

$$|\nabla \mathsf{u}_k - \mathbf{B}|\chi_{E_k} \xrightarrow{\ \mu\ } 0 \qquad \text{i} \qquad |\nabla \mathsf{u}_k|\chi_{\Omega \setminus E_k} \xrightarrow{\ \mu\ } 0 \ ,$$

gdje je $E_k := \{\mathbf{x} \in \Omega : \min\{|\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x})|, |\nabla \mathsf{u}_k - \mathbf{B}|\} = |\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{B}|\}$. Time je pokazano i da

$$\nabla \mathsf{u}_k - \mathbf{B}\chi_{E_k} \xrightarrow{\ \mu\ } 0 \ . \tag{1}$$

Nadalje, prijelazom na podniz možemo dobiti konvergencije

$$\chi_{E_k} \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \theta \qquad \text{i} \qquad \mathsf{u}_k \xrightharpoonup{\mathrm{W}^{1,p}} \mathsf{u} \ ,$$

te na osnovu Leme 3, relacije (1) i tvrdnje (ii) Teorema 1 redom zaključujemo da je $\nabla \mathsf{u} = \mathbf{B}\theta$, te

$$M(\mathbf{B})\chi_{E_k} \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty *} M(\nabla \mathsf{u}) = M(\mathbf{B})\theta^2 \ .$$

Zbog $M(\mathbf{B}) = 1$ sada je $\theta = \theta^2$, odnosno $\theta = \chi_E$ za neki izmjeriv $E \subseteq \Omega$. Neka je sada $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$, gdje je (ω_n) rastući niz skupova konačne mjere. Pokažemo li da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\ (\text{ss } \mathbf{x} \in \omega_n) \qquad \text{ili} \qquad \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\ (\text{ss } \mathbf{x} \in \omega_n)$$

tvrdnja će slijediti. Zaista, slaba-$*$ konvergencija karakterističnih funkcija na ω_n povlači najprije slabu konvergenciju u L^2, a zatim i konvergenciju L^2–normi karakterističnih funkcija, te slijedi jaka konvergencija u L^2, odnosno, kako je riječ baš o karakterističnim funkcijama, jaka konvergencija u L^1, što, konačno daje konvergenciju u mjeri. Dakle, vrijedi

$$\nabla \mathsf{u}_k - \mathbf{B}\chi_E \xrightarrow{\ \mu\ } \mathbf{0} \ \text{ na } \ \omega_n \ ,$$

što, uz pomoć Leme 3, daje

$$\nabla \mathsf{u}_k \xrightarrow{\ \mu\ } \nabla \mathsf{u} \ \text{ na } \ \omega_n \ .$$

Preostaje primijeniti argument iz Leme 1 na skup ω_n.

Q.E.D.

3. Zadaća s jednom potencijalnom jamom

U ovom odjeljku pratimo [Ki 88].

Lema 5. *Neka je* $f : \mathrm{M}_{d\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ *definirana s*

$$f(\mathbf{F}) := |\mathbf{F}|^d - c_d \det\mathbf{F} ,$$

pri čemu je $c_d := d^{\frac{d}{2}}$. *Tada vrijedi*

(i) $(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{d\times d}) \quad f(\mathbf{F}) \geqslant 0$

(ii) $f(\mathbf{F}) = 0$ *ako i samo ako postoji* $\lambda \geqslant 0$ *i* $\mathbf{Q} \in SO(d)$ *tako da vrijedi* $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{Q}$.

Dem. Najprije uočimo da vrijedi $|\mathbf{F}|^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{F}^\tau\mathbf{F})$, pa je $|\mathbf{F}|$ invarijatna za pripadni linearni operator. Stoga je po Binet-Cauchyjevom teoremu

$$f(\mathbf{F}) = \mathrm{tr}(\mathbf{F}^\tau\mathbf{F}) - d^{\frac{d}{2}}(\det(\mathbf{F}^\tau\mathbf{F}))^{\frac{1}{2}} ,$$

te je za simetričnu matricu $\mathbf{A} := \mathbf{F}^\tau\mathbf{F}$ dovoljno pokazati nejednakost

$$(\mathrm{tr}\mathbf{A})^{\frac{d}{2}} - d^{\frac{d}{2}}(\det\mathbf{A})^{\frac{1}{2}} \geqslant 0 ,$$

ili, ekvivalentno,

$$\frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{d} \geqslant (\det\mathbf{A})^{\frac{1}{d}} . \tag{2}$$

Kako je $\mathbf{A}$ simetrična, a $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ i $\det\mathbf{A}$ invarijantni za pripadni hermitski operator (pa su mu svojstvene vrijednosti realne), to bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) .$$

Nadalje, kako za proizvoljni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ imamo

$$\mathbf{Ax}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{F}^\tau\mathbf{Fx}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{Fx}\cdot\mathbf{Fx} \geqslant 0 ,$$

to je $\mathbf{A}$ pozitivno definitna, te je pripadni operator pozitivan, odnosno vrijedi $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \geqslant 0$. Sada (2) postaje nejendakost za aritmetičke i geometrijske sredine (isp. [HLP 34])

$$\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_d}{d} \geqslant (\lambda_1 \cdots \lambda_d)^{\frac{1}{d}} ,$$

i tvrdnja (i) slijedi.

Neka je sada $f(\mathbf{F}) = 0$. Uz oznake kao i ranije tada vriijedi

$$\frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_d}{d} = (\lambda_1 \cdots \lambda_d)^{\frac{1}{d}} ,$$

te slijedi (isp. [HLP 34]) $\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = \sigma \geqslant 0$. Dakle je $\mathbf{A} = \sigma\mathbf{I}$, odnosno $\mathbf{F}^\tau\mathbf{F} = \sigma\mathbf{I}$. Ako je $\sigma = 0$, za proizvoljni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ imamo

$$|\mathbf{Fx}|^2 = \mathbf{F}^\tau\mathbf{Fx}\cdot\mathbf{x} = 0 ,$$

pa je $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, što u ovom specijalnom slučaju daje tvrdnju (ii). Ako je pak $\sigma > 0$, tada iz $\mathbf{Q} := \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\mathbf{F}$ imamo $\mathbf{QQ}^\tau = \mathbf{I}$, te je $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{Q}$ uz $\lambda := \sqrt{\sigma} \geqslant 0$ i $\mathbf{Q} \in O(d)$. Štoviše, kako iz definicije funkcije f slijedi da svaka njena nultočka ima nenegativnu determinantu, to vrijedi $\det\mathbf{F} \geqslant 0$ i stoga renormalizacijom imamo $\mathbf{Q} \in SO(d)$.

Q.E.D.

Teorem 2. *Pretpostavimo da vrijedi*

$$\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) \in SO(d) \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; .$$

Tada je $\nabla \mathsf{u}$ *konstanta i vrijedi reprezentacija*

$$\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{b} \; ,$$

gdje su $\mathsf{b} \in \mathbf{R}^d$ *i* $\mathbf{Q} \in SO(d)$ *konstante.*

Nadalje, ako je (u_k) *niz koji je ograničen u* $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ *i koji zadovoljava*

$$d(\nabla \mathsf{u}_k, SO(d)) \xrightarrow{\mu} 0 \; ,$$

tada za neku matricu $\mathbf{C} \in \mathrm{M}_{d\times d}$ *vrijedi*

$$\nabla \mathsf{u}_k \xrightarrow{\mu} \mathbf{C} \; .$$

Dem. Da pokažemo prvu tvrdnju, primijetimo da za proizvoljnu Lipschitzovu funkciju $\mathsf{u} : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ vrijedi

$$\operatorname{div} \operatorname{cof} \nabla \mathsf{u} = 0 \; ,$$

gdje je s $\operatorname{cof}\mathbf{F}$ označen kofaktor matrice $\mathbf{F}$. Točnije

$$(\operatorname{cof}\mathbf{F})_{i,k} := (-1)^{i+k} \Delta_{i,k} \; ,$$

gdje je $\Delta_{i,k}$ determinanta kvadratne matrice $(d-1)$–og reda dobivena iz $\mathbf{F}$ ispuštanjem k–tog stupca i i–tog retka. Prisjetimo se da za proizvoljnu $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{d\times d}$ vrijedi relacija

$$\mathbf{A}(\operatorname{cof}\mathbf{A})^\tau = (\operatorname{cof}\mathbf{A})^\tau \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I} \; .$$

Na taj način za $\mathbf{A} \in SO(d)$ vrijedi $\operatorname{cof}\mathbf{A}^\tau = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^\tau$. Kako je, dakle, $\operatorname{cof}\mathbf{F} = \mathbf{F}$ za $\mathbf{F} \in SO(d)$, to je u harmonijska, te stoga klase C^∞ na pripadnoj domeni $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$. Štoviše vrijedi $|\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x})|^2 = d$, gdje je

$$|\mathbf{F}|^2 = \operatorname{tr}(\mathbf{F}^\tau \mathbf{F}) = \sum_{i,j=1}^{d} F_{i,j}^2 \; .$$

Zaista, zbog invarijantnosti traga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{diag}(\lambda_1(\mathbf{x}), \ldots, \lambda_d(\mathbf{x})) \; ,$$

gdje je $\lambda(\mathbf{x}) \geqslant 0$ i $|\lambda_j(\mathbf{x})| = 1$, te je $|\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x})|^2 = d$. Vidimo da je sada

$$2|\nabla\nabla \mathsf{u}|^2 = \Delta |\nabla \mathsf{u}|^2 - 2\nabla \mathsf{u} \cdot \nabla \Delta \mathsf{u} = 0 \; ,$$

te je $\nabla \mathsf{u}$ konstanta. Time je pokazano da postoji $\mathbf{Q} \in SO(d)$ takav da vrijedi

$$\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q} \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; ,$$

odnosno

$$\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathsf{b} \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; ,$$

za neki konstantni vektor $\mathsf{b} \in \mathbf{R}^d$.

Prijeđimo sada na dokaz druge tvrdnje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi

$$\mathsf{u}_k \xrightarrow{\mathrm{W}^{1,\infty}*} \mathsf{u} \; .$$

Iz prethodne leme slijedi da je finkcija $f : \mathrm{M}_{d\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s

$$f(\mathbf{F}) := |\mathbf{F}|^d - d^{\frac{d}{2}}\det\mathbf{F}$$

nenegativna, te da uz $K := SO(d)$ vrijedi

$$f \in \mathrm{C}^K(\mathrm{M}_{r\times d}; \mathbf{R}) \; .$$

Stoga prema Teoremu I.1 i Lemi 3 zaključujemo da

$$f(\nabla\mathsf{u}_k) \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty*} 0 \; ,$$

a prema Teoremu 1

$$\int_\Omega \det\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})d\mathbf{x} \longrightarrow \int_\Omega \det\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \; ,$$

te vrijede nejednakosti

$$\begin{aligned} 0 = \liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \\ &= \liminf_{k\longrightarrow\infty}\Big\{\int_\Omega |\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}))^d d\mathbf{x} - d^{\frac{d}{2}}\int_\Omega \det\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big\} \\ &\geqslant \int_\Omega |\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}))^d d\mathbf{x} - d^{\frac{d}{2}}\int_\Omega \det\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant 0 \; . \end{aligned}$$

Stoga je $f(\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x})) = 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$), i posebno

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega |\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})|^d d\mathbf{x} = \int_\Omega |\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})|^d d\mathbf{x} \; .$$

Iz $\nabla\mathsf{u}_k \xrightarrow{\mathrm{L}^d(\Omega)} \nabla\mathsf{u}$ zaključujemo da vrijedi $\nabla\mathsf{u}_k \xrightarrow{\mathrm{L}^d(\Omega)} \nabla\mathsf{u}$, i zato

$$\nabla\mathsf{u}_k \xrightarrow{\mu} \nabla\mathsf{u} \; .$$

S druge strane, kako je $\nabla\mathsf{u}$ nultočka za f, (za alternativni argument vidi Teoreme IV.10 i IV.11) to prema prethodnoj lemi slijedi da je

$$\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; ,$$

gdje je $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \in SO(d)$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

Nadalje, nejednakost trokuta daje

$$d(\lambda(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}), SO(d)) \leqslant d(\lambda(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}), \nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})) + d(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}), SO(d)) \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; ,$$

te zbog kompaktnosti skupa $SO(d)$ i činjenice da iz konvergencije u mjeri slijedi egzistencija skoro svuda konvergentnog podniza koji konvergira k istom limesu, imamo zaključak

$$\lambda(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \in SO(d) \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; .$$

Stoga je $\nabla\mathsf{u} \in SO(d)$, te je prema prvoj tvrdnji teorema $\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$). Time je pokazano da vrijedi

$$\nabla\mathsf{u}_k \xrightarrow{\mu} \mathbf{C} \; .$$

Q.E.D.

4. Zadaća triju i četiriju gradijenata

U ovom odjeljku donosimo kratak osvrt na slučaj tročlanog i četveročlanog skupa K. Ovi rezultati su još uvijek teško dostupni u literaturi (isp. [Zh], [Sv 91b]).

Teorem 3. *Neka je* $K = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\}$ *i pretpostavimo da vrijedi* $r(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j) \neq 1$.

(i) Ako je $\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in K$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$), *tada je* $\nabla\mathsf{u}$ *konstanta skoro svuda.*

(ii) Nadalje, ako je (u_k) *niz ograničen u* $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ *koji zadovoljava*

$$d(\nabla\mathsf{u}_k, K) \xrightarrow{\mu} 0 ,$$

tada za neku konstantnu matricu $\mathbf{C}$ *vrijedi*

$$\nabla\mathsf{u}_k \xrightarrow{\mu} \mathbf{C} ,$$

∎

Sljedeći primjer pronađen je nezavisno od strane više autora (isp. [AH 86], [CT 93], [Ta 93]) i on pokazuje da se mikrostrukture formiraju i u slučaju kada matrice skupa K nisu povezane ranga 1. Za sada nije poznato postoji li drugi takav kontraprimjer.

Lema 6. *Neka su* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ *i* $\mathbf{A}_4$ 2×2 *dijagonalne matrice takve da vrijedi* $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_3 = \mathrm{diag}(-1, -3)$, $\mathbf{A}_2 = -\mathbf{A}_4 = \mathrm{diag}(-3, 1)$. *i neka je* $K := \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4\}$. *Tada je* $r(\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j) \neq 1$, *ali postoji niz* (u_k) *koji je ograničen u* $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ *i koji zadovoljava*

$$d(\nabla\mathsf{u}_k, K) \xrightarrow{\mu} 0 ,$$

a da $(\nabla\mathsf{u}_k)$ *ne konvergira u mjeri.*

∎

III. Neka svojstva Youngovih mjera

1. Osnovni teorem o Youngovim mjerama i primjene u varijacijskom računu

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da obično postoji više različitih minimizirajućih nizova za odgovarajući varijacijski problem. U skladu s komentarima u prethodnom odjeljku, zanimat će nas pitanje možemo li opisati makroskopska svojstva *svih* minimizirajućih nizova ne vodeći računa o njihovom konkretnom obliku i njihovim svojstvima koja su nevažna za naša razmatranja. Pokazuje se da je ovo pitanje usko povezano s pojmom poopćenog rješenja varijacijske zadaće koja ne dopušta klasično rješenje. U ovom odjeljku stoga navodimo osnovni teorem o Youngovim mjerama, koji je u posljednje vrijeme postao važan alat u varijacijskom računu općenito, a osobito za probleme koje mi ovdje proučavamo. Radovi o Youngovim mjerama su brojni, ali još uvijek uglavnom teško dostupni i nesistematizirani. Na ovom mjestu dajemo samo neke komentare na glavni teorem koje ćemo efektivno koristiti. Za potpuniji prikaz vidi [NB] .

Teorem 1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup i $\mathsf{u}_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz izmjerivih funkcija takvih da vrijedi*

$$(\exists\, C > 0)(\forall\, n \in \mathbf{N}) \qquad \int_\Omega g(|\mathsf{u}_n(\mathbf{x})|)d\mathbf{x} \leqslant C \ ,$$

pri čemu je $g : [0,\infty\rangle \longrightarrow [0,\infty]$ neprekinuta i neopadajuća funkcija koja zadovoljava

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} g(t) = \infty \ .$$

Tada postoji podniz niza (u_n) (koji isto označimo) i familija vjerojatnosnih mjera $(\nu_\mathbf{x})_{\mathbf{x}\in\Omega}$ sa svojstvom:

Ako je $\psi : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ Carathéodoryjeva funkcija takva da je niz $(\psi(\mathbf{x}, \mathsf{u}_n(\mathbf{x})))$ slabo predkompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, tada je pripadni limes funkcija $\overline{\psi} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ zadana formulom

$$\psi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^r} \psi(\mathbf{x}, \lambda) d\nu_\mathbf{x}(\lambda) \ .$$

∎

Za dokaz vidi [Pe 97].

Za familiju vjerojatnosnih mjera $(\nu_\mathbf{x})_{\mathbf{x}\in\Omega}$ u gornjem teoremu kažemo da je Youngova mjera generirana (pod)nizom (u_n).

Primijetimo da je familija $(\nu_\mathbf{x})_{\mathbf{x}\in\Omega}$ jednoznačno određena ako provjerimo da za takvu familiju umjesto uvjeta iz teorema vrijedi sljedeći slabiji uvjet:

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)) \qquad \varphi \circ \mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \overline{\varphi} \ ,$$

gdje je $\overline{\varphi}$ definirana s

$$\overline{\varphi}(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(\lambda) d\nu_\mathbf{x}(\lambda) \ .$$

Ovo je posljedica činjenice da je skup

$$\mathcal{G} := \{\varphi \otimes f : \varphi \in \mathrm{L}^1(\Omega) \ , f \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)\}$$

gust u $\mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))$, gdje je s $\mathbf{x} \mapsto (\varphi \otimes f)(\mathbf{x})$ označeno preslikavanje $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x})f$.

Uočimo da je gornji teorem iskazan u puno većoj općenitosti nego što to zahtijevaju primjene koje nas ovdje zanimaju. Nama će od posebnog interesa biti slučaj $g(t) := t^p$ za $p \in [1,\infty\rangle$. Štoviše, mi ćemo se redovito baviti primjenama gornjeg teorema na situacije u kojima iz prirode problema znamo da niz (u_n) zadovoljava i neka dodatna svojstva.

Stoga dokazujemo samo sljedeću verziju gornjeg teorema (isp. [Mü 98]):

Teorem 2. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ *izmjeriv skup konačne mjere i neka su* $\mathsf{u}_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *izmjerive funkcije. Tada postoji podniz niza* (u_n) *(koji i dalje isto označujemo) i slabo* izmjerivo preslikavanje* $\nu : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r)$ *tako da vrijedi*

(1) $\nu_{\mathbf{x}} \geqslant 0$, $\|\nu_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r)} = \int_{\mathbf{R}^r} d\nu_{\mathbf{x}} \leqslant 1$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

(2) $(\forall f \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))\quad f \circ \mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \overline{f}$, *gdje je* $\overline{f}(\mathbf{x}) = {}_{\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r)}\langle \nu_{\mathbf{x}}, f \rangle_{\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)}$

(3) $\|\nu_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r)} = 1$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) $\iff$ $\lim_{R\longrightarrow\infty} \sup_{n\in\mathbf{N}} \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x})| \geqslant R\} = 0$.

(3a) ako je $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^r)$, *tada*

$$d(\mathsf{u}_n, K) \xrightarrow{\mu} 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{supp}\nu_{\mathbf{x}} \subset K$$

Štoviše, uz pretpostavku (3) vrijedi i obrat.

(3b) Uz pretpostavku (3) vrijedi: ako je

(i) $A \subseteq \Omega$ *izmjeriv podskup,*

(ii) $f \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^r)$,

(iii) $f \circ \mathsf{u}_n$ *slabo predkompaktan u* $\mathrm{L}^1(A)$,

tada

$$f \circ \mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1(A)} \overline{f} ,$$

gdje je, kao ranije, $\overline{f}(\mathbf{x}) = \int_\Omega f(\lambda) d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) d\lambda$

Dem. Dokazat ćemo tvrdnje (1), (2) i (3) redom. Detaljan dokaz ostalih tvrdnji može se naći u [Me66] i [Ba89].

Definirajmo preslikavanja $U_n(\mathbf{x}) := \delta_{\mathsf{u}_n(\mathbf{x})}$.

Tada je $U_n \in \mathrm{L}^\infty_{w*}(\Omega; \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r))$, odnosno U_n je slabo-$*$ izmjerivo i ograničeno preslikavanje iz Ω u $\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r)$. Klasični teorem dualnosti (vidi, naprimjer, [Ed 65], str .588, [IT 69], str. 93, [Me 66], str. 224) daje

$$\mathrm{L}^\infty_{w*}(\Omega; \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r)) = \mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))'$$

(uz dualno sparivanje $\langle \mu, g\rangle := \int_\Omega {}_{\mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r)}\langle \mu(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle_{\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)} d\mathbf{x}$), te primjenom Banach-Alaouglu-Bourbakijevog teorema dobivamo egzistenciju podniza niza U_n (uz istu oznaku) takvog da vrijedi

$$U_n \xrightarrow{*} \nu$$

u prostoru $\mathrm{L}^\infty_{w*}(\Omega; \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r))$. Kako je $\|U_n(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} = 1$, to zbog poluneprekinutosti odozdo norme s obzirom na slabu-$*$ konvergenciju imamo $\|\nu_{\mathbf{x}}\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \leqslant 1$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) . Time je pokazana tvrdnja (1).

Nadalje, ako kao test funkcije koristimo elemente prostora $\mathrm{L}^1(\Omega; \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r))$ oblika $\varphi \otimes f : \mathbf{x} \longrightarrow \varphi(\mathbf{x}) f$, zaključujemo

$$\int_\Omega \varphi(\mathbf{x}) f(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \longrightarrow \int_\Omega \varphi(\mathbf{x}) \langle \nu_{\mathbf{x}}, f\rangle d\mathbf{x} ,$$

te zbog proizvoljnosti $\varphi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ slijedi

$$(\forall f \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)) \quad f \circ \mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \overline{f} ,$$

i tvrdnja (2) slijedi uz $\overline{f}(\mathbf{x}) := \langle \nu_{\mathbf{x}}, f\rangle$.

Odabirom nenegativnih funkcija f i φ slijedi $\nu_{\mathbf{x}} \geqslant 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

Za dokaz tvrdnje (3) dovoljno je pokazati da vrijedi

$$(\forall f \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r \backslash K)) \quad \langle \nu_{\mathbf{x}}, f\rangle = 0 .$$

U tu svrhu, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Kako je za proizvoljni otvoren skup $U \subseteq \mathbf{R}^r$

$$\mathrm{C}_0(U) = \{\varphi \in \mathrm{C}(U) : (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, K_\varepsilon \in \mathcal{K}(U)) \quad |\varphi\chi_{U\setminus K_\varepsilon}| \leqslant \varepsilon\}\ ,$$

to postoji kompakt $K_\varepsilon \subseteq \mathbf{R}^r\setminus K$ takav da je $|f|\chi_{(\mathbf{R}^r\setminus K)\setminus K_\varepsilon} \leqslant \varepsilon$. Preslikavanje $H : K_\varepsilon \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$ definirano s

$$H(\mathsf{y}) := \frac{f(\mathsf{y})}{d(\mathsf{y}, K)}$$

je (uniformno) neprekinuto, te postoji pozitivna konstanta C_ε takva da je

$$(\forall\, \mathsf{y} \in K_\varepsilon) \quad |f(\mathsf{y})| \leqslant C_\varepsilon d(\mathsf{y}, K)\ .$$

S druge strane je $|f|\chi_{\mathbf{R}^r\setminus(K_\varepsilon\cup K)} \leqslant \varepsilon$, $f\chi_K = 0$, odnosno

$$|f(\mathsf{y})| \leqslant \varepsilon + C_\varepsilon d(\mathsf{y}, K)\ .$$

Sada je

$$(|f| - \varepsilon)^+(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) \leqslant C_\varepsilon d(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}), K)$$

i po pretpostavci zaključujemo da postoji podniz niza (u_n) (koji isto označimo) takav da je

$$(g \circ \mathsf{u}_n)(\mathbf{x}) := (|f| - \varepsilon)^+(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) \longrightarrow 0 \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega)\ .$$

Zbog pretpostavke $\mu(\Omega) < \infty$ možemo primjeniti teorem o dominiranoj konvergenciji , te, uzimajući u obzir (1), vrijede konvergencije

$$g \circ \mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1(\Omega)} 0\ ,$$

$$g \circ \mathsf{u}_n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \overline{g}\ .$$

Jedinstvenost gomilišta daje

$$(\forall\, \varepsilon > 0) \qquad \int_\Omega (|f| - \varepsilon)^+(\lambda) d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) = 0 \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega)\ .$$

Iz proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ još jednom uz pomoć teorema o dominiranoj konvergenciji zaključujemo $\langle \nu_{\mathbf{x}}, |f| \rangle = 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$), i, konačno $\langle \nu_{\mathbf{x}}, f \rangle = 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

Q.E.D.

Napomenimo da vrijedi i obrat Teorema 2:

Svako slabo-$*$ izmjerivo preslikavanje $\nu : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_b(\mathbf{R}^r)$ generirano je nekim nizom izmjerivih funkcija u gore navedenom smislu.

Trebat će nam i sljedeća posljedica Dunford-Pettisovog teorema kompaktnosti (isp. [Pe 97])):

Lema 1. (Kriterij slabe kompaktnosti u L^1) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup i (u_n) ograničen niz u L^1. (u_n) je slabo predkompaktan u L^1 ako i samo ako vrijedi*

$$(0) \lim_{R \longrightarrow 0} \sup_{n \in \mathbf{N}} \int_{\{|u_n| \geqslant R\}} |g_j(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 0\ .$$

Dem. Primijetimo da vrijedi

$$\mu\{\mathbf{x}\in\Omega : |u_n(\mathbf{x})| \geq k\} \leq \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} 1 \leq \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} \frac{|u_n(\mathbf{x})|}{k}\,d\mathbf{x}$$
$$\leq \int_\Omega \frac{|u_n(\mathbf{x})|}{k}\,d\mathbf{x} \leq \frac{C}{k}\,.$$

Stoga, za dovoljno veliki k, gornje postaje po volji maleno, uniformno po $n \in \mathbf{N}$. Zbog ekviintegrabilnosti vrijedi

$$\int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} |u_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leq \varepsilon\,,$$

uniformno po n, pa slijedi (0).

Obrnuto, neka vrijedi (0), te neka je zadan $\varepsilon > 0$. Tada postoji $k_0 \in \mathbf{N}$, takav da vrijedi

$$\int_{\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\geq k\}} |u_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

za sve $n \in \mathbf{N}$ i sve $k \geq k_0$. Uzmimo $\delta := \frac{\varepsilon}{2k_0}$, te neka je $E \subseteq \Omega$ takav da je $\mu(E) < \delta$. Tada vrijedi

$$\int_E |u_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = \int_{E\cap\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|\leq k_0\}} |u_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} + \int_{E\cap\{\mathbf{x}\in\Omega:|u_n(\mathbf{x})|> k_0\}} |u_n(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}$$
$$\leq k_0\mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

stoga je niz (u_n) ekviintegrabilan, i tvrdnja slijedi iz Dunford-Pettisovog teorema.

Q.E.D.

Korolar 1. *Uz pretpostavke Teorema 2 vrijedi*

$$\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mu} \mathsf{u} \qquad \Longleftrightarrow \quad \nu_{\mathbf{x}} = \delta_{\mathsf{u}(\mathbf{x})}\ (\text{ss } \mathbf{x}\in\Omega)\,.$$

Dem. Da pokažemo nužnost, najprije uočimo da uz pretpostavku $\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mu} z$ slijedi

$$(\forall\, f \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)) \quad f\circ\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mu} f\circ\mathsf{u}\,.$$

Zaista, kako vrijedi $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r) = \mathsf{Cl}_{\|\,\|_{\mathrm{L}^\infty}} \mathrm{C}_c(\Omega)$, to odabirom funkcije $f_n \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}^r)$ takve da vrijedi $\|f - f_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^r)} < \frac{\varepsilon}{4}$ zaključujemo:

$$\begin{aligned}\mu\{\mathbf{x}\in\Omega : |f(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}))-f(z(\mathbf{x}))| > \varepsilon\} &\leqslant \mu\{\mathbf{x}\in\Omega : |f(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) - f_n(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}))| \\ &\quad + |f_n(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}))-f_n(\mathsf{u}(\mathbf{x}))| + |f_n(\mathsf{u}(\mathbf{x}))-f(\mathsf{u}(\mathbf{x}))| > \varepsilon\} \\ &\leqslant \mu\{\mathbf{x}\in\Omega : |f_n(\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) - f_n(\mathsf{u}(\mathbf{x}))| > \frac{\varepsilon}{2}) \\ &\leqslant \mu(\mathbf{x}\in\Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x})) - \mathsf{u}(\mathbf{x}))| > \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}\}\,,\end{aligned}$$

gdje posljednja nejednakost (uz ε i δ kao u definiciji neprekinutosti za f_n) slijedi iz uniformne neprekinutosti f_n. Kako također vrijedi $\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\delta_\varepsilon = 0$, to je nužnost pokazana.

Neka je sada $\nu_{\mathbf{x}} = \delta_{\mathsf{u}(\mathbf{x})}$ (ss $\mathbf{x}\in\Omega$). Tada je ispunjen uvjet (3) iz Teorema 2, te je niz (u_n) uniformno intergabilan, odnosno vrijedi

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\sup_{n\in\mathbf{N}} \mu\{\mathbf{x}\in\Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x})| \geqslant R\} = 0\,.$$

S druge strane Teorem 2 povlači konvergenciju

$$(\forall f \in \mathrm{C}_0(\Omega)) \quad f \circ \mathsf{u}_n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} f \circ \mathsf{u} \ ,$$

te je, specijalno, niz $f \circ \mathsf{u}_n$ ograničen u $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Nakon ovih opservacija, u mogućnosti smo na temelju Leme 1 zaključiti da je niz $(f \circ \mathsf{u}_n)$ slabo predkompaktan u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, te Teorem 2 daje

$$(\forall f \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)) \quad f \circ \mathsf{u}_n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^1(\Omega)} f \circ \mathsf{u} \ .$$

Tvrdimo da za svaku jednostavnu funkcije $\mathsf{w} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \limsup_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathsf{w}(\mathbf{x})| > \varepsilon\} \leqslant \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathsf{w}(\mathbf{x})| > \frac{\varepsilon}{2}\} \ .$$

U tu svrhu, neka je $\mathsf{w} := \sum_{k=1}^M \mathsf{a}_k \chi_{A_k}$. Fiksirajmo $k \in \{1, \ldots, M\}$ i funkciju $f_k \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ definiranu s $f_k(\mathbf{y}) := \varphi(|\mathbf{y} - \mathsf{a}_k|)$, gdje je $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbf{R}_0^+)$ takva da vrijedi $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi\chi_{[\varepsilon,\infty\rangle} = 1$, $\varphi\chi_{[0,\frac{\varepsilon}{2}]} = 0$. Koristeći $\psi := 1$ kao test funkciju imamo zaključak

$$\begin{aligned}
\limsup_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathsf{a}| > \varepsilon\} &\leqslant \limsup_n \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x})-\mathsf{a}|>\varepsilon\}} d\mathbf{t} \\
&\quad + \int_{\{\mathbf{x}\in\Omega :\, \varepsilon>|\mathsf{u}_n(\mathbf{x})-\mathsf{a}|>\frac{\varepsilon}{2}\}} \varphi(|\mathsf{u}_n(\mathbf{t}) - \mathsf{a}_k|) d\mathbf{t} \\
&= \limsup_n \int_\Omega \varphi(|\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathsf{a}_k|) d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \varphi(|\mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathsf{a}_k|) d\mathbf{x} \\
&\leqslant \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathsf{a}_k| > \varepsilon\} \\
&\quad + \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : \frac{\varepsilon}{2} < |\mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathsf{a}_k| < \varepsilon\} \\
&= \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathsf{a}_k| > \frac{\varepsilon}{2}\} \ .
\end{aligned}$$

Sada se lako provjeri da vrijedi željena tvrdnja. Stoga je za proizvoljnu jednostavnu funkciju w

$$\begin{aligned}
\limsup_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathsf{u}(\mathbf{x})| > \varepsilon\} &\leqslant \limsup_n \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}_n(\mathbf{x}) - \mathsf{w}(\mathbf{x})| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&\quad + \mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{w}(\mathbf{x}) - \mathsf{u}(\mathbf{x})| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\
&\leqslant 2\mu\{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathsf{w}(\mathbf{x})| > \frac{\varepsilon}{4}\} \ .
\end{aligned}$$

Na kraju, biranjem niza (w_n) takvog da vrijedi $\mathsf{w}_n(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathsf{u}(\mathbf{x})$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) (što, zbog pretpostavke $\mu(\Omega) < \infty$ i Egorovljevog teorema daje i konvergenciju u mjeri), slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Nepostizanje ekstrema u varijacijskom računu

U ovom odjeljku pratimo [Ra 96]. Na primjerima uočavamo vezu između Youngovih mjera i pojma aproksimativnog rješenja, odnosno miminizacijskog niza.

Lema 2. *Ako je $I(u) = \int_0^1 ((u_x^2 - 1)^2 + u^2) dx$, tada vrijedi: $\inf I(u) = 0$, gdje je $u \in \mathrm{W}_0^{1,4}(\langle 0, 1\rangle)$, ali ne postoji $u \in \mathrm{W}_0^{1,4}(\langle 0, 1\rangle)$ takva da je $I(u) = 0$.* ∎

Neka je $u \in \mathrm{W}_0^{1,4}(\langle 0,1\rangle)$ takva da je $I(u)=0$. Tada imamo $(u_x^2-1)^2+u^2=0$, odakle slijedi $u_x^2=1$ i $u=0$, što je nemoguće. Pokažimo da je $\inf I(u)=0$. Definirajmo funkciju $u_0:[0,1]\longrightarrow \mathbf{R}$ kao

$$u_0(x):=\begin{cases} x, & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-x, & x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases} ,$$

i proširimo je po periodičnosti na cijeli $\mathbf{R}$ s osnovnim periodom $T=1$. Za $n\in\mathbf{N}$ stavimo $u^n(x)=\frac{1}{4^n}u_0(4^nx)$. Tada funkcija u^n ima period $\frac{1}{4^n}$ i vrijedi

(1) $$I(u^n)\le 2\frac{1}{4^n}\longrightarrow 0\,,\quad \text{kad } n\longrightarrow\infty\,.$$

Očito postoji $K>0$ sa svojstvom $\|u^n\|_{L^4(0,1)}\le K$. Stoga je neki njegov podniz slabo konvergentan u $\mathrm{L}^4\langle 0,1\rangle$, pa ako na njega primijenimo osnovni teorem o Youngovim mjerama postoji njegov podniz, koji zbog jednostavnosti opet označimo sa u^n, i postoji familija vjerojatnosnih mjera ν_x takva da $I(u^n)\longrightarrow\langle\nu_x,v\rangle$.

Lako se vidi da funkcije u^n imaju derivaciju 1 ili -1 svuda osim u točkama skupa $\{\frac{m}{2^n}:m\in\mathbf{N}\}$. Stoga $(u_x^n)^2\longrightarrow\pm1\quad$ (ss $x\in[0,1]$), odakle slijedi

$$\int_0^1((u_x^n)^2-1)^2\longrightarrow 0\Rightarrow \mathrm{supp}\nu_x\in\{1,-1\}\,,$$

a jedine takve mjere su oblika $\lambda(x)\delta_{-1}+(1-\lambda(x))\delta_1$, gdje je λ proizvoljna funkcija. Znamo da vrijedi

$$v(x)=\langle\nu_x,id\rangle=\int_{\mathbf{R}}\tau d\nu_x(\tau)=\lambda(x)(-1)+(1-\lambda(x))(1)=1-2\lambda(x)\quad.$$

S druge strane, teorem o Youngovim mjerama daje

$$u^n(x)=\int_0^x u_\tau^n(\tau)d\tau\longrightarrow\int_0^x v(\tau)d\tau=0$$

ako uvažimo relaciju (1), što dalje povlači

$$0=1-\lambda(x)\Rightarrow\lambda=\lambda(x)=\frac{1}{2}\,.$$

Budući da svaki minimizirajući niz generira Youngovu mjeru, to je $\nu_x=\frac{1}{2}\delta_{-1}+\frac{1}{2}\delta_1$, i tvrdnja je dokazana.

Ovaj rezultat ima sljedeću vjerojatnosnu interpretaciju: Optimalna funkcija koja rješava prethodni problem je Radonova mjera $\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{-1})$ koja poprima vrijednost $+1$ s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, -1 s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, dok su joj derivacije ±1.

Zanimljivo je napomenuti da su funkcije u^n sumandi reda funkcija $\sum_{n=0}^{\infty}u^n(x)$, koji na $\mathbf{R}$ konvergira ka Van der Waerdenovoj funkciji, koja je primjer funkcije neprekinute u svakoj točki, ali koja nema derivaciju nigdje na $\mathbf{R}$. Slično se pokazuje i sljedeći klasični rezultat:

Teorem 3. *Neka je $\Omega:=[0,L]\times[0,1]$ i $J:\mathrm{W}_0^{1,4}(\Omega)\longrightarrow\mathbf{R}$ funkcional definiran s*

$$J(u):=\int_\Omega(u_x^2+(u_y^2-1)^2)dxdy\,.$$

Tada je $inf\,J(u)=0$, ali ne postoji $u_0\in\mathrm{W}_0^{1,4}(\Omega)$ takav da je $J(u_0)=0$. ∎

Dakle vidimo da minimizirajući nizovi općenito mogu imati *loša* analitička svojstva. Kao što je već rečeno, jedna od prednosti Youngovih mjera sastoji se u činjenici da među svojstvima svih minimizirajućih nizova klasificiramo samo ona koja su nam važna.

Sljedeća dva korolara ilustriraju prednosti Youngovih mjera. Na primjer, mogućnost dobivanja rezultata poluneprekinutosti odozdo ne samo za integrande oblika $\int f(\nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$ već i za integrande oblika $\int f(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$.

Korolar 2. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ *izmjeriv skup konačne mjere i neka niz* $\mathsf{z}_k : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *generira Youngovu mjeru* $(\nu_\mathbf{x})_{\mathbf{x}\in\Omega}$, *i neka vrijedi pretpostavka (3) iz Teorema 2. Neka je* $f : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *Carathéodoryjeva funkcija i neka je* $(f^-(\cdot, \mathsf{z}_k(\cdot))$ *slabo predkompaktan u* $\mathrm{L}^1(\Omega)$. *Tada vrijedi*

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \lambda)d\nu_\mathbf{x}(\lambda)d\mathbf{x} \; .$$

Ako je, štoviše, niz funkcija $\mathbf{x} \mapsto |f|(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x}))$ *slabo predkompaktan u* $\mathrm{L}^1(\Omega)$, *tada vrijedi*

$$f(\cdot, \mathsf{z}_k(\cdot)) \xrightarrow{\mathrm{L}^1(\Omega)} \overline{f} \; , \quad \overline{f}(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \lambda)d\nu_\mathbf{x}(\lambda) \; .$$

Dem. Neka je najprije $f \geqslant 0$. Pretpostavimo da također vrijedi

$$(\exists\, R > 0) \quad f(\mathbf{x}, \lambda) = 0 \;(\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; .$$

Po Scorza-Dragonijevom teoremu(varijanta Luzinovog teorema) postoji rastući niz kompaktnih skupova Ω_j takvih da vrijedi $\Omega_j \subseteq \Omega$, $\mu(\Omega\backslash\Omega_j) \longrightarrow 0$ i $f\chi_{\Omega_j\times\mathbf{R}^r} \longrightarrow \mathbf{R}$ je neprekinuta. Definirajmo funkcije $F : \Omega \longrightarrow \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ s $F_j(\mathbf{x}) := \chi_{\Omega_j}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}, \cdot)$. Iz dokaza Teorema 2 znamo da vrijedi

$$\delta_{\mathsf{z}_k(\cdot)} \xrightarrow{\;*\;} \nu \; ,$$

te je stoga, zbog nenegativnosti funkcije f,

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega \chi_{\Omega_j}(\mathbf{x})f(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} =$$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega \langle\delta_{\mathsf{z}_k(\mathbf{x})}, F_j(\mathbf{x})\rangle d\mathbf{x} = \int_\Omega \langle\nu_\mathbf{x}, F_j(\mathbf{x})\rangle d\mathbf{x} = \int_{\Omega_j} \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \lambda)d\nu_\mathbf{x}(\lambda)d\mathbf{x} \; ,$$

odnosno, primjenom teorema o monotonoj konvergenciji,

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} f(\mathbf{x}, \lambda)d\nu_\mathbf{x}(\lambda)d\mathbf{x} \; .$$

Neka je (η_l) monoton niz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^r)$ koji točkovno konvergira k 1. Za proizvoljnu $f \geqslant 0$ definiramo niz $f_l := f\eta_l$. Tada po pokazanom, zbog pretpostavke (3) primjenom teorema o monotonoj konvergenciji i na niz f_l vrijedi tvrdnja teorema. Isti argumenti daju tvrdnju i za f ograničenu odozdo. Za općenitu f i $M > 0$ definirajmo

$$h_k(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x})) = h_k^+(\mathbf{x}) - h_k^-(\mathbf{x}) \; , \quad f_M(\mathbf{x}) := \max(f(\mathbf{x}, \lambda), -M) \; .$$

Sada zbog Leme 1 slijedi

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, M > 0) \quad \sup_{k\in\mathbf{N}} \int_{h_k^-\geqslant M} h_k^-(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \varepsilon \; .$$

S druge strane, lako se uvrštavanjem provjeri da vrijedi

$$\max(h_k^+(\mathbf{x}) - h_k^-(\mathbf{x}), -M) \leqslant h_k^+(\mathbf{x}) - h_k^-(\mathbf{x})\chi_{h_k^- \leqslant M}(\mathbf{x}) \ ,$$

odnosno

$$f_M(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x})) - h_k^-(\mathbf{x})\chi_{h_k^- \leqslant M}(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x})) \ .$$

Sada je

$$\liminf_{k \longrightarrow \infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \geqslant \liminf_{k \longrightarrow \infty} \int_\Omega f_M(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \sup_{k \in \mathbf{N}} \int_{h_k^- \geqslant M} h_k^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\geqslant \liminf_{k \longrightarrow \infty} \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{z}_k(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \varepsilon \geqslant \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} f_M(\mathbf{x}, \lambda) d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) d\mathbf{x} - \varepsilon,$$

i tvrdnja slijedi zbog proizvoljnosti od $\varepsilon > 0$.

Q.E.D.

Korolar 3. *Neka su* $\mathsf{u}_j : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$, $\mathsf{v}_j : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *nizovi izmjerivih funkcija, neka* (v_j) *generira Youngovu mjeru* $(\nu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \Omega}$ *i neka* $\mathsf{u}_j(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathsf{u}(\mathbf{x})$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

Tada niz $(\mathsf{u}_j, \mathsf{v}_j)$ *generira Youngovu mjeru* $\mathbf{x} \mapsto \delta_{\mathsf{u}(\mathbf{x})} \otimes \nu_{\mathbf{x}}$.

Dem. Za početak uočimo da je skup

$$\mathcal{G} := \{\varphi \otimes \psi, \varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r), \psi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)\}$$

gust u $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r)$. Stoga je dovoljno pokazati da vrijedi konvergencija

$$(\varphi \otimes \psi)(\mathsf{u}_j, \mathsf{v}_j) \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \langle \delta_{\mathsf{u}(\cdot)} \otimes \nu, \varphi \otimes \psi \rangle \ .$$

Neka su stoga $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ i $\psi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ proizvoljne. Teorem o dominiranoj konvergenciji i aproksimacija funkcijama iz $\mathrm{C}_c(\Omega)$ daju

$$(\forall \eta \in \mathrm{L}^1(\Omega)) \quad \eta\varphi(\mathsf{u}_j) \xrightarrow{\mathrm{L}^1(\Omega)} \eta\varphi(\mathsf{u}) \ .$$

S druge strane po pretpostavci imamo

$$\psi(v_j) \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} \overline{\psi} \ , \quad \overline{\psi}(\mathbf{x}) := \langle \nu_{\mathbf{x}}, \psi \rangle \ .$$

Konačno, možemo zaključiti

$$\lim_n \int_\Omega \eta(\varphi \otimes \psi)(\mathsf{u}_j, \mathsf{v}_j) = \lim_n \int_\Omega \eta\varphi(\mathsf{u}_j)\psi(\mathsf{v}_j)$$

$$= \int_\Omega \eta\varphi(\mathsf{u})\overline{\psi} = \int_\Omega \eta\langle \delta_{\mathsf{u}(\mathbf{x})}, \varphi(\mathbf{x})\rangle \langle \nu_{\mathbf{x}}, \psi \rangle d\mathbf{x} \ ,$$

te tvrdnja slijedi iz definicije tenzorskog produkta mjera.

Q.E.D.

Neka je sada $f : \Omega \times \mathbf{R}^r \times \mathrm{M}_{r \times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ negativna Carathéodoryjeva funkcija. Upravo pokazan rezultat možemo primijeniti na problem karakterizacije takvih funkcija f za koje je preslikavanje $I : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ definirano s

$$I(\mathsf{u}) := \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

slabo nizovno poluneprekinuto. Zaista, ako definiramo $\mathsf{v}_j := \nabla \mathsf{u}_j$, pri čemu $\mathsf{u}_j \xrightarrow{W^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)} \mathsf{u}$, imamo (prijelazom na podniz) $\mathsf{u}_j \longrightarrow \mathsf{u}$ skoro svuda na Ω. Stoga vrijedi

$$\liminf_n \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{u}_j(\mathbf{x}), \nabla \mathsf{u}_j(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^d \times M^{m\times n}} f(\mathbf{x}, \mathsf{u}, \lambda) d\delta_{\mathsf{u}(\mathbf{x})}(\mu) \otimes d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) d\mathbf{x}$$

$$= \int_\Omega f(\mathbf{x}, \mathsf{u}(\mathbf{x}), \lambda) d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) d\mathbf{x} \; .$$

Dakle se dokaz slabe poluneprekinutosti svodi na verificiranje nejednakosti

$$\int_{\mathrm{M}_{r\times d}} g(\lambda) d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) \geqslant g(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x})) = g(\langle \nu_{\mathbf{x}}, id\rangle) \; ,$$

uz $g(\lambda) := f(\mathbf{x}, \mathsf{u}(\mathbf{x}), \lambda)$, pri čemu su prva i druga varijabla fiksirane.

Ovaj problem upućuje na važnost proučavanja Youngovih mjera generiranih nizovima gradijenata $\mathrm{W}^{1,p}$–funkcija. Tome problemu vratit ćemo se u slijedećem poglavlju.

Prije nego li nastavimo naša razmatranja, primijetimo da smo u dokazu Teorema 2 bitno koristili pretpostavku da je Ω konačne mjere. Međutim, ta pretpostavka nije nužna, kao što slijedi iz Teorema 1. Također su moguće generalizacije u drugom smislu. Primjerice, prostor mjere $(\mathbf{R}^r, \mathcal{B}(\mathbf{R}^r), \mu)$ može u iskazu teorema biti zamijenjen proizvoljnim lokalno kompaktnim topološkim prostorom opskrbljenim Radonovom mjerom $\tilde{\mu}$. Tvrdnja napomene zahtijeva da $\tilde{\mu}$ nema atoma.

2. Homogenizacija i lokalizacija Youngovih mjera

Na sljedećim stranicama bavit ćemo se nekim netrivijalnim svojstvima Youngovih mjera. Glavna referenca za narednih nekoliko teorema je [Pe 93].

Kažemo da se niz skupova (E_i) prikladno sužava k točki $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^d$ ako vrijedi

$$(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, i \in \mathbf{N})(\exists\, r_i > 0)(E_i \subseteq K(\mathbf{a}, r_i)) \quad \mu(E_i) \geqslant \alpha \mu(K(\mathbf{a}, r_i)) \quad \& \quad \lim_{i\longrightarrow\infty} r_i = 0 \; .$$

Kažemo da je familija otvorenih skupova $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Vitalijev pokrivač skupa $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ako za svaki $\mathbf{a} \in \Omega$ postoji niz skupova A_i u familiji $\mathcal{A}$ koji se prikladno sužava k točki $\mathbf{a}$.

Teorem 4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i ograničen skup. Tada postoji prebrojiva familija $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ koja je Vitalijev pokrivač za Ω.*

Dem. Neka je $B \subset \mathbf{R}^d$ proizvoljna kugla takva da je $\Omega \subset B$. Za fiksirani $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$, konstruirajmo familiju skupova $\mathcal{A}_k$ s

$$\mathcal{A}_k := \{\mathbf{a} + \varepsilon\Omega\}_{\mathbf{a}\in\Omega, \varepsilon\in D(\mathbf{a},k)} \; ,$$

gdje je

$$D(\mathbf{a}, k) := \{\varepsilon(\mathbf{a}, k) \in \langle 0, \frac{1}{k}\rangle : \mathbf{a} + \varepsilon\overline{\Omega} \subset \Omega\} \; .$$

Tvrdimo da je familija $\mathcal{A}_k$ Vitalijev pokrivač za skup Ω. Neka je $\mathbf{a} \in \Omega$ proizvoljan, i $\varepsilon \in D(\mathbf{a}, k)$. Tada uz $\alpha := \frac{\mu(\Omega)}{\mu(B)}$ iz translatorne invarijantnosti Lebesgueve mjere slijedi relacija

$$(\forall\, \mathbf{a} \in \mathbf{R}^d)(\forall\, \varepsilon > 0) \quad \mu(\mathbf{a} + \varepsilon\Omega) = \alpha\mu(\mathbf{a} + \varepsilon B) \ ,$$

odakle zaključujemo da se za proizvoljan niz (ε_i) u $D(\mathbf{a}, k)$ sa svojstvom

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$$

niz $E_i^k(\mathbf{a}) := \mathbf{a} + \varepsilon_i\Omega$ prikladno sužava k točki $\mathbf{a} \in \Omega$.

Konačno, odabirući prebrojiv gust podskup $\mathcal{G} \subset \Omega$ te definirajući

$$\mathcal{A}_k := \{\mathbf{a} + \varepsilon_i\Omega\}_{\mathbf{a} \in \mathcal{G}, \varepsilon_i \in D(\mathbf{a}, k)} \ ,$$

dolazimo do prebrojivog Vitalijevog pokrivača za skup Ω.

Uočimo da iz gornje konstrukcije slijedi da elemente Vitalijevog pokrivača možemo odabrati tako da budu po volji malenog dijametra, odnosno po volji malene mjere.

Q.E.D.

Korolar 4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i ograničen skup i $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ proizvoljan Vitalijev pokrivač za Ω. Tada za svaki $\delta > 0$ postoji prebrojiva podfamilija u parovima disjunktnih skupova (A_{λ_i}) takva da vrijedi*

$$\mu(\Omega \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\lambda_i}) = 0 \quad \& \quad (\forall\, i \in \mathbf{N}) \quad \mu(A_{\lambda_i}) \leqslant \delta \ .$$

∎

Za dokaz vidi [EG 92].

Sljedeća lema je posljedica gornjih klasičnih verzija Vitalijevog teorema o pokrivanju:

Lema 3. *Neka je $p \in [1, \infty\rangle$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i ograničen skup takav da je $\mu(\partial\Omega) = 0$, te neka je $N \subseteq \Omega$ takav da je $\mu(N) = 0$. Neka je $r_k : \Omega \backslash N \longrightarrow \mathbf{R}^+$ proizvoljan niz preslikavanja, te neka je $f_j \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ proizvoljan niz.*

Tada postoji prebrojivo točaka $\mathbf{a}_{k,i} \in \Omega \backslash N$ i prebrojivo strogo pozitivnih brojeva $\varepsilon_{k,i}$ tako da je ispunjeno:

(1) $(\forall\, k, i \in \mathbf{N}) \quad \varepsilon_{k,i} \leqslant r_k(\mathbf{a}_{k,i})$

(2) $(\forall\, k \in \mathbf{N}) \quad i_1 \neq i_2 \Rightarrow \{\mathbf{a}_{k,i_1} + \varepsilon_{k,i_1}\overline{\Omega}\} \cap \{\mathbf{a}_{k,i_2} + \varepsilon_{k,i_2}\overline{\Omega}\} = \emptyset$

(3) $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\mathbf{a}_{k_1,i} + \varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}\} \cup N_k \ , \quad \mu(N_k) = 0$

(4) $(\forall\, j \in \mathbf{N})(\forall\, \xi \in \mathrm{L}^q(\Omega)) \quad \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_j(\mathbf{a}_{k,i}) \int_{\mathbf{a}_{k,i} + \varepsilon_{k,i}\Omega} \xi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

Dem. Definirajmo

$$D_j := \{\mathbf{a} \in \Omega : \lim_{\rho \longrightarrow 0} \frac{1}{\mu(\mathbf{a} + \rho\Omega)} \int_{\mathbf{a} + \rho\Omega} |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a})|^p d\mathbf{x} = 0\} \quad D := \bigcap_{j=1}^{\infty} D_j \ .$$

Po Lebesgue-Besicovitchevom teoremu o deriviranju slijedi $\mu(\Omega \backslash D_j) = 0$ i $\mu(\Omega \backslash D) = 0$. Stoga uz $A := \Omega \backslash N$ zaključujemo da je familija

$$\mathcal{F}_k := \{\mathbf{a} + \varepsilon\overline{\Omega} : \mathbf{a} \in A, \varepsilon \leqslant r_k(\mathbf{a}), \frac{1}{\mu(\mathbf{a} + \varepsilon\Omega)} \int_{\mathbf{a} + \varepsilon\Omega} |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{a})|^p d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{k}, 1 \leqslant j \leqslant k\}$$

(uz $\mathbf{a}+\varepsilon\overline{\Omega}\subset\Omega$) Vitalijev pokrivač za A.

Naime, lako se vidi da se za proizvoljnu točku $\mathbf{x}\in A$ niz (koji zadovoljava sve uvjete iz definicije $\mathcal{F}_k$) $(\mathbf{x}+\frac{1}{m}\overline{\Omega})$ uz $\alpha:=\frac{\mu(\Omega)}{\mu(B(\mathbf{x},1))}$ prikladno sužava k točki $\mathbf{x}$.

Stoga po Teoremu 4 postoji prebrojiva potfamilija u parovima disjunktnih skupova koja je također Vitalijev pokrivač. Preciznije, možemo pisati

$$A:=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}\}\bigcup N_k' \ , \quad \mu(N_k')=0 \ ,$$

odnosno

$$\overline{\Omega}:=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}\}\bigcup N_k \ , \quad \mu(N_k)=0 \ ,$$

Odaberimo proizvoljnu $\boldsymbol{\xi}\in \mathrm{L}^q(\Omega)$ i $k\geqslant j$. Tada, koristeći Holderovu nejednakost za integrale i nizove respektivno, zaključujemo

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Omega \xi(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{\infty}f_j(\mathbf{a}_{k,i})\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}| \\
&=|\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}\xi(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{\infty}f_j(\mathbf{a}_{k,i})\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}| \\
&=|\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}(f_j(\mathbf{x})-f_j(\mathbf{a}_{k,i}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}| \\
&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\Big\{\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}|f_j(\mathbf{x})-f_j(\mathbf{a}_{k,i}|^p d\mathbf{x}\Big\}^{\frac{1}{p}}\Big\{\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}|\xi(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x}\Big\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}|f_j(\mathbf{x})-f_j(\mathbf{a}_{k,i}|^p d\mathbf{x}\Big\}^{\frac{1}{p}}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}|\xi(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x}\Big\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant\Big\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega})\Big\}^{\frac{1}{p}}\|\xi\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}=\frac{(1}{k)}^{\frac{1}{p}}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{k,i}^d\Big\}^{\frac{1}{p}}\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}\|\xi\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)} \ .
\end{aligned}
$$

Nadalje, uočimo da vrijedi

$$\varepsilon_{k,i}^d=\frac{\mu(\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\Omega)}{\mu(\Omega)} \ ,$$

te je

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{k,i}^d=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\Omega)}{\mu(\Omega)}=1 \ ,$$

budući da je

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\Omega)=\mu(\Omega) \ .$$

Time je pokazano da vrijedi

$$|\int_\Omega \xi(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\sum_{i=1}^{\infty}f_j(\mathbf{a}_{k,i})\int_{\mathbf{a}_{k,i}+\varepsilon_{k,i}\overline{\Omega}}\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}|\leqslant(\frac{1}{k})^{\frac{1}{p}}\mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}\|\xi\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)} \ .$$

Q.E.D.

Među najvažnije Youngovih mjera ubrajamo homogene Youngove mjere tj. koje možemo zapisati u obliku $\nu = \nu_{\mathbf{x}}$ za skoro svaki $\mathbf{x} \in \Omega$. Važno svojstvo Youngovih mjera je da proizvoljnom Youngovom mjerom možemo generirati homogenu Youngovu mjeru postupkom usrednjavanja (homogenizacije).

Teorem 5. (**homogenizacija Youngovih mjera**) *Neka su Ω i D regularne domene u $\mathbf{R}^d$ takve da vrijedi $\mu(\partial\Omega) = \mu(\partial D) = 0$. Neka je $\mathsf{u}_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz izmjerivih funkcija takvih da vrijedi*

$$(\exists\, C > 0)(\forall\, j \in \mathbf{N}) \quad \int_\Omega g(|\mathsf{u}_n(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \leqslant C \ ,$$

pri čemu je $g : [0,\infty\rangle \longrightarrow [0,\infty\rangle$ neopadajuća, nenegativna neprekinuta funkcija koja zadovoljava uvjet

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} g(t) = \infty \ .$$

Neka je $\nu = \{\nu_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x}\in\Omega}$ Youngova mjera pridružena (pod)nizu u_n.

Tada postoji niz izmjerivih funkcija $w_j : D \longrightarrow R$ takvih da vrijedi

$$\sup_{j\in\mathbf{N}} \int_D g(|w_j(\mathbf{x})|d\mathbf{x} < \infty \ ,$$

i čija je pripadna Youngova mjera (u oznaci $\overline{\nu}$) homogena i definirana s

$$\langle \overline{\nu}, \varphi \rangle = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} \varphi_\lambda d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda) d\mathbf{x} \ .$$

Dem. Familija

$$\mathcal{A}_j := \{\mathbf{a} + \varepsilon\overline{\Omega}\}_{\mathbf{a}\in D, \varepsilon\in D(\mathbf{a},j)}$$

čini Vitalijev pokrivač za skup D. Po Korolaru 1 postoji prebrojiva potfamilija u parovima disjunktnih skupova $\mathbf{a}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}\overline{\Omega}$ koja je također Vitalijev pokrivač, odnosno vrijedi

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbf{a}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}\overline{\Omega}) \cup N_j \ , \quad \mu(N_j) = 0 \ .$$

Slično kao u prethodnom teoremu račun daje

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{i,j}^d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(\mathbf{a}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}\overline{\Omega})}{\mu(\overline{\Omega})} = \frac{1}{\mu(\overline{\Omega})} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{a}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}\overline{\Omega}) = \frac{\mu(D)}{\mu(\overline{\Omega})} \ .$$

Definirajmo funkcije $w_j : D \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$w_j|_{\mathbf{a}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}\overline{\Omega}}(\mathbf{x}) := \mathsf{u}_n(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}}) \ .$$

Sada zbog disjunktnosti skupova $\mathbf{a}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}\overline{\Omega}$ zamjenom varijabli

$$\mathbf{y} := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}} \ , \quad d\mathbf{x} = \varepsilon_{i,j}^d d\mathbf{y}$$

slijedi

$$(\forall\, j \in \mathbf{N}) \quad \int_D g(|w_j(\mathbf{x})|)d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{a}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}\overline{\Omega}} g(|\mathsf{u}_n(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}})|d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_{i,j}^d \int_\Omega g(|\mathsf{u}_n(\mathbf{y})|d\mathbf{y}$$

$$= \frac{\mu(D)}{\mu(\overline{\Omega})} \int_\Omega g(|\mathsf{u}_n(\mathbf{y})|d\mathbf{y} \leqslant C\frac{\mu(D)}{\mu(\overline{\Omega})} \; .$$

S druge strane, za proizvoljne $\xi \in \mathrm{C}(\overline{D})$ i $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^r)$ vrijedi

$$\begin{aligned}\int_D \varphi(w_j(\mathbf{x}))xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathbf{a}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}\overline{\Omega}} \varphi(w_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega \varepsilon_{i,j}^d \varphi(\mathsf{u}_n(\mathbf{y}))\xi(\mathbf{a}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}\mathbf{y})d\mathbf{y} \; .\end{aligned}$$

Koristeći klasični teorem srednje vrijednosti za integrale neprekinutih funkcija zaključujemo da postoje $\overline{\mathbf{y}}_{i,j} \in \Omega$ takvi da vrijedi

$$\int_\Omega \varphi(\mathsf{u}_n(\mathbf{y}))\xi(\mathbf{a}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}\mathbf{y})d\mathbf{y} = \xi(\mathbf{a}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}\overline{\mathbf{y}}_{i,j}) \int_\Omega \varphi(\mathsf{u}_n(\mathbf{y})) \; .$$

Kako je $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_{i,j}^d \mu(\Omega) = \mu(D)$, to je izraz

$$\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_{i,j}^d \mu(\Omega)\xi(\mathbf{a}_{i,j}+\varepsilon_{i,j}\overline{\mathbf{y}}_{i,j})$$

integralna suma za Riemannov integral $\int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. Stoga je

$$\begin{aligned}\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_D \varphi(w_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \lim_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega \varphi(\mathsf{u}_n(\mathbf{y})) \\ &= \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} \varphi_\lambda d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda)d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Posljednja jednakost slijedi iz osnovnog teorema o Youngovim mjerama i činjenice da je $\chi_\Omega \in \mathrm{L}^1(\Omega)$.

Dakle, definiramo li $\overline{\nu} \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ s

$$\langle \overline{\nu}, \varphi \rangle = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(\lambda)d\nu_{\mathbf{x}}(\lambda)d\mathbf{x} \; ,$$

tada vrijedi

$$(\forall\, \xi \in \mathrm{C}(\overline{D}))(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_0(\Omega)) \qquad \lim_{j\longrightarrow\infty} \int_D \varphi(w_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \langle \overline{\nu}, \varphi \rangle \int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

i tvrdnja slijedi zbog homogenosti $\overline{\nu}$ i gustoće $\mathrm{C}(\overline{D})$ u $\mathrm{L}^1(D)$.

Q.E.D.

Teorem 6. (Lokalizacija Youngovih mjera) *Neka su Ω i D regularne domene u $\mathbf{R}^d$ takve da vrijedi $\mu(\partial\Omega) = \mu(\partial D) = 0$. Neka je $\mathsf{u}_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ niz izmjerivih funkcija takvih da vrijedi*

$$(\exists\, C > 0)(\forall\, j \in \mathbf{N}) \qquad \int_\Omega g(|\mathsf{u}_n(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \leqslant C \; ,$$

pri čemu je $g : [0,\infty\rangle \longrightarrow [0,\infty\rangle$ neopadajuća, nenegativna neprekinuta funkcija koja zadovoljava uvjet

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} g(t) = \infty \; .$$

Neka je $\nu = \{\nu_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x}\in\Omega}$ *Youngova mjera pridružena (pod)nizu* u_n.

Tada za skoro svaki $\mathbf{a} \in \Omega$ *postoji niz* $\mathsf{u}_n^{\mathbf{a}} : D \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *izmjerivih funkcija takvih da je*

$$\sup_{j\in\mathbf{N}} \int_\Omega g(|\mathsf{u}_n(\mathbf{x})|d\mathbf{x} < \infty \ ,$$

i da je Youngova mjera pridružena nizu $(\mathsf{u}_n^{\mathbf{a}})$ *upravo homogena (dakle neovisna o* $\mathbf{x}$*) Youngova mjera* $\nu_{\mathbf{a}}$.

Dem.

Zbog neprekinutosti ulaganja $\mathrm{L}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{M}_b(\Omega)$, pretpostavke teorema i Banach-Alaogluovog teorema postoji podniz niza (u_n) (koji isto označimo) takav da vrijedi

$$g \circ |\mathsf{u}_n| \xrightarrow{\mathcal{M}_b(\Omega)*} \tilde{\mu} \ ,$$

gdje je $\tilde{\mu}$ nenegativna ograničena Radonova mjera na Ω. Stoga vrijedi

$$(\forall\, \xi \in \mathrm{C}_0(\Omega)) \qquad \lim_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) g(|\mathsf{u}_n(\mathbf{x})|d\mathbf{x} = \int_\Omega \xi(\mathbf{x}) d\tilde{\mu}(\mathbf{x}) \ .$$

Uočimo da iz definicije $\mathrm{C}_0(\Omega)$ slijedi da za fiksirane $\mathbf{a} \in \Omega$ i $\rho > 0$ možemo naći $\xi_{\mathbf{a},\rho} \in \mathrm{C}_0(\Omega)$ takvu da je

$$0 \leqslant \chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{x}) \leqslant \xi_{\mathbf{a},\rho}(\mathbf{x}) \leqslant \chi_{\mathbf{a}+2\rho D}(\mathbf{x}) \ .$$

Nakon množenja s $g(|\mathsf{u}_n|)$, integriranja po Ω imamo

$$\limsup_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leqslant \int_\Omega \xi_{\mathbf{a}.\rho}(\mathbf{x})d\tilde{\mu}(\mathbf{x}) \leqslant \limsup_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{a}+2\rho D}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \ .$$

Označimo li s μ d-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru, lako se provjeri da vrijedi

$$\limsup_{\rho\longrightarrow 0} \frac{1}{\rho^d} \int_\Omega \chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{x})d\tilde{\mu}(\mathbf{x}) = \mu(D) \limsup_{\rho\longrightarrow 0} \frac{\tilde{\mu}(\mathbf{a}+\rho D)}{\mu(\mathbf{a}+\rho D)} = \mu(D) D_\mu \tilde{\mu} \ ,$$

te je stoga (isp [E-G])

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0} \limsup_{j\longrightarrow\infty} \frac{1}{\rho^d} \int_\Omega \xi(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leqslant \mu(D)D_\mu\tilde{\mu} < \infty \ (\text{ss } \mathbf{a} \in \Omega) \ .$$

Definirajmo funkcije $z_{j,\rho}^{\mathbf{a}} : D \longrightarrow \mathbf{R}$ s $z_{j,\rho}^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \mathsf{u}_n(\mathbf{a}+\rho\mathbf{x})$. Uz standardnu zamjenu varijabli za proizvoljne $\xi \in \mathrm{L}^\infty(D)$, $\varphi \in \mathrm{C}_0(\Omega)$ imamo

$$\int_D \varphi(z_{j,\rho}^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{1}{\rho^d} \int_\Omega \varphi(\mathsf{u}_n(\mathbf{x}))\chi_{\mathbf{a}+\rho D}\xi(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{a}}{\rho})d\mathbf{y} \ .$$

Uz standardnu notaciju, osnovni teorem o Youngovim mjerama daje

$$(\forall\, \psi \in \mathrm{L}^1(\Omega)) \qquad \int_\Omega \varphi(\mathsf{u}_n(\mathbf{y}))\psi(\mathbf{y})d\mathbf{y} \longrightarrow \int_\Omega \overline{\varphi}(\mathbf{y})\psi(\mathbf{y})d\mathbf{y} \ ,$$

te odabirom $\psi(\mathbf{y}) := \chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{y})\xi(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{a}}{\rho})$ slijedi

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{1}{\rho^d} \int_\Omega \varphi(\mathsf{u}_n(\mathbf{y}))\chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{y})\xi(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{a}}{\rho})d\mathbf{y} = \frac{1}{\rho^d} \int_\Omega \overline{\varphi}(\mathbf{y})\chi_{\mathbf{a}+\rho D}(\mathbf{y})\xi(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{a}}{\rho})d\mathbf{y} \ ,$$

što nakon ponovne zamjene varijabli daje

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\lim_{j\longrightarrow\infty}\int_D \varphi(z^{\mathbf{a}}_{j,\rho}(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{\rho\longrightarrow 0}\int_D \overline{\varphi}(\mathbf{a}+\rho\mathbf{x})\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ .$$

Direktna posljedica Lebesgue-Besicovitchevog teorema o deriviranju (račun) je sljedeća konvergencija za lokalno integrabilne funkcije f

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\int_D |f(\mathbf{a}+\rho\mathbf{y})-f(\mathbf{a})|d\mathbf{y} = 0\ .$$

Odmah slijedi

$$(\forall\,\eta\in \mathrm{L}^\infty(D))\qquad \lim_{\rho\longrightarrow 0}\int_D \overline{\varphi}(\mathbf{a}+\rho\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \overline{\varphi}(\mathbf{a})\int_D \eta(\mathbf{x})d\mathbf{x}\,,$$

a potom, koristeći da je $f := \overline{\varphi}\in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ također slabi -$*$ limes pripadnog niza i gustoću $\mathrm{L}^\infty(D)$ u $\mathrm{L}^1(D)$, i

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\lim_{j\longrightarrow\infty}\int_D \varphi(z^{\mathbf{a}}_{j,\rho}(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \overline{\varphi}(\mathbf{a})\int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ .$$

Na ovom mjestu primijetimo da je $\mathrm{C}_0(\Omega)$ zapravo zatvarač $\mathrm{C}_c(\Omega)$ u L^∞-normi, te je kao takav separabilan. Kako je i $\mathrm{L}^1(\Omega)$ separabilan, to uzastponim provođenjem Cantorovog dijagonalnog postupka redom zaključujemo: uz $\mathsf{u}^{\mathbf{a}}_n := z^{\mathbf{a}}_{j,\frac{1}{j}}$ najprije je

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\int_D \varphi(z^{\mathbf{a}}_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \overline{\varphi}(\mathbf{a})\int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ ,$$

a onda i

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\int_D \varphi(z^{\mathbf{a}}_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ \overline{\varphi}(\mathbf{a})\int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

uniformno po ξ iz prebrojivog gustog skupa u $\mathrm{L}^1(\Omega)$ i φ iz prebrojivog gustog skupa u $\mathrm{C}_0(\Omega)$. Nadalje, primjenom uobičajenog argumenta gustoće vidimo da vrijedi

$$(\forall\,\varphi\in \mathrm{C}(\Omega))(\forall\,\xi\in \mathrm{L}^1(\Omega))\qquad \lim_{j\longrightarrow\infty}\int_D \varphi(z^{\mathbf{a}}_j(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ \overline{\varphi}(\mathbf{a})\int_D \xi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ ,$$

u smislu uniformnog limesa po ξ i φ. Na kraju, uočimo li da po konstrukciji vrijedi

$$\overline{\varphi}(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{R}^r}\varphi(\lambda)d\nu_{\mathbf{a}}(\lambda)\ ,$$

tvrdnja slijedi iz napomene 1.

Q.E.D.

Dokaz sljedeće korisne leme može se naći u [Da 82b].

Lema 4. (Karakterizacija slabe konvergencije u L^p)
Neka je $\Omega\subseteq\mathbf{R}^d$ otvoren skup i $p\in\langle 1,\infty]$.

(i) Ako je $p\in\langle 1,\infty\rangle$, $f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p(\Omega)} f$ ako i samo ako su ispunjeni ovi uvjeti:
(a) $(\exists\, K>0)(\forall\, n\in\mathbf{N})\quad \|f_n\|_{L^p}\le K$
(b) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_D (f_n(x)-f(x))dx = 0$ *za svaki hiperkub $D\subseteq\Omega$;*

(ii) $f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} f$ *ako i samo ako su ispunjeni ovi uvjeti:*
(a) $(\exists\, K>0)(\forall\, n\in\mathbf{N})\quad \|f_n\|_{\mathrm{L}^\infty}\le K$ *;*
(b) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_D (f_n(x)-f(x))dx = 0$ *za svaki hiperkub $D\subseteq\Omega$.* ∎

Teorem 7. **(McShane)** *Neka je* $\Omega = \prod_{i=1}^{d}(a_i, b_i)$, $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. *Proširimo* f *po periodičnosti na cijeli* $\mathbf{R}^d$. *Neka je* $f_n(\mathbf{x}) = f(n\mathbf{x})$.

(i) Ako je $p \in [1, \infty\rangle$, *tada* $f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p(\Omega)} \overline{f} = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ *u* $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *za* $n \longrightarrow \infty$.

(ii) Ako je $p = \infty$, *tada* $f_n \xrightarrow{*} \overline{f}$ *u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *za* $n \longrightarrow \infty$.

Dem. Pokazat ćemo da vrijede uvjeti prethodne leme, iz čega odmah slijedi tvrdnja teorema. U daljnjem sa $\lfloor\ \rfloor$ označavamo funkciju najveće cijelo.

Korak 1. $\int_\Omega |f_n(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_\Omega |f(n\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \frac{1}{n^d} \int_{n\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}$. Posljednja jednakost vrijedi zbog periodičnosti funkcije f. Odavde slijedi $\|f_n\|_{\mathrm{L}^p} = \|f\|_{\mathrm{L}^p}$. Za $p = \infty$ tvrdnja je trivijalna.

Korak 2. Neka je $D \subseteq \Omega$ hiperkub. Tada uz unaprijed danu točnost $\varepsilon > 0$ postoje $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^d$, $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^d$, $\beta = (\beta_i)_{i=1}^d$, takvi da uz oznaku $\alpha + \beta\Omega := \prod_{i=1}^d (\alpha_i + \beta_i a_i, \alpha_i + \beta_i b_i)$, vrijedi $|\mu(D) - \mu(\alpha + \beta\Omega)| < \varepsilon$. Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pisati:

$$\begin{aligned}
\int_D (f_n(\mathbf{x}) - \overline{f}) d\mathbf{x} &= \int_{\alpha + \beta\Omega} (f(n\mathbf{x}) - \overline{f}) d\mathbf{x} = \frac{1}{n^d} \int_{n\alpha + n\beta\Omega} (f(\mathbf{y}) - \overline{f}) d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{n^d} \int_{n\alpha + \lfloor n\beta \rfloor \Omega} (f(\mathbf{y}) - \overline{f}) d\mathbf{y} + \frac{1}{n^d} \int_{n\alpha + (n\beta - \lfloor n\beta \rfloor)\Omega} (f(\mathbf{y}) - \overline{f}) d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{n^d} \int_{n\alpha + (n\beta - \lfloor n\beta \rfloor \Omega} (f(\mathbf{y}) - \overline{f}) d\mathbf{y} + \frac{\lfloor n\beta \rfloor^d}{n^d} \int_\Omega (f(\mathbf{y}) - \overline{f}) d\mathbf{y} \\
&= \frac{1}{n^d} \int_{n\alpha + (n\beta - \lfloor n\beta \rfloor)\Omega} (f(\mathbf{y}) - \overline{f}) d\mathbf{y} ,
\end{aligned}$$

pa slijedi

$$| \int_D (f_n(\mathbf{x}) - \overline{f}) d\mathbf{x}| \le \frac{1}{n^d} \int_{n\alpha + (n\beta - \lfloor n\beta \rfloor)\Omega} |f(\mathbf{y}) - \overline{f}| d\mathbf{y} \le \frac{1}{n^d} \int_\Omega |f(\mathbf{y}) - \overline{f}| d\mathbf{y} ,$$

što teži u nulu za $n \longrightarrow \infty$.

Korak 3. Neka je zadan $\delta > 0$. Definiramo:

$$g_\delta(\mathbf{x}) := \begin{cases} \min\{\delta, f(\mathbf{x})\}, & f(\mathbf{x}) \geqslant 0 \\ -\min\{\delta, -f(\mathbf{x})\}, & f(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} ,$$

i $h_\delta(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) - g_\delta(\mathbf{x})$. Zbog osnovnog teorema o aproksimaciji izmjerive funkcije jednostavnim funkcijama odozdo vrijedi:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \quad \int_\Omega |h_\delta(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Proširujući g_δ i h_δ po periodičnosti sa Ω na $\mathbf{R}^d$ kao u koraku 1. imamo:

$$\int_\Omega |h_\delta(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_\Omega |h_\delta(n\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Zato slijedi

$$\int_E |f(n\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \le \int_E |h_\delta(n\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} + \int_E |g_\delta(n\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \mu(E)\delta^p + \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Stoga, ako odaberemo $\lambda(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{2\delta^p}$, slijedi $\int_E |f_n(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \varepsilon$.

Q.E.D.

Zanimljivo je da se ovaj klasični rezultat može dobiti kao korolar sljedeće leme, koja je direktna posljedica teorema o homogenizaciji Youngovih mjera.

Lema 5. *Neka su Ω i D regularne domene u $\mathbf{R}^d$ takve da vrijedi $\mu(\partial\Omega) = \mu(\partial D) = 0$ i neka je $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$. Tada postoji niz (f_j) čije je pripadna Youngova mjera homogena i (za neprekinutu i ograničenu φ) definirana s*

$$\langle \overline{\nu}, \varphi \rangle := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \varphi(f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \, .$$

Dem. Uz oznake kao u Teoremu 4 definiramo $f_j : D \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$f_j(\mathbf{x}) := f\Big(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}}\Big) \, , \quad \mathbf{x} \in \mathbf{a}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}\Omega \, .$$

te tvrdnja slijedi iz Teorema 4.

Q.E.D.

Specijalno, uzimajući $u_j(\mathbf{x}) := f(j(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i)$ za $\mathbf{x} \in \mathbf{a}_i + \frac{1}{j}\Omega$, gdje je

$$\Omega = \bigcup_i \Big(\mathbf{a}_i + \frac{1}{j}\Omega\Big)$$

Vitalijev pokrivač za Ω, imamo točno McShaneovu lemu.

Sada imamo sve pripremljeno za primjenu Youngovih mjera na problem nalaženja aproksimativnih rješenja za zadaću 3, kao i za neke najpopularnije primjere Youngovih mjera.

IV. Konveksnost i aproksimativna rješenja

1. Uvod

Za proučavanje Youngovih mjera u kontekstu kristalnih mikrostrukura treba klasificirati Youngove mjere koje su generirane nizovima gradijenata $(\nabla \mathsf{u}_n)$. Zbog prirode problema koje proučavamo u ovom poglavlju pretpostavljat ćemo da je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ograničena domena s Lipschitzovim rubom.

Neka je $p \in [1, \infty]$. Slabo-$*$ izmjerivo preslikavanje $\nu : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d})$ je $\mathrm{W}^{1,p}$–gradijentna Youngova mjera ako postoji niz (u_n) u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ koji zadovoljava

$$\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{W}^{1,p}} u \ ,$$

za $p \in [1, \infty\rangle$, odnosno

$$\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{W}^{1,\infty}*} u$$

za $p = \infty$, te vrijedi

$$\delta_{\nabla \mathsf{u}_n(\cdot)} \xrightarrow{*} \nu$$

gdje je, kao i ranije, s $\xrightarrow{*}$ označena slaba-$*$ konvergencija u prostoru $\mathrm{L}^\infty_{w*}(\Omega; \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d}))$.

Uzimajući u obzir gornju definiciju, zadaću 2 možemo reformulirati na slijedeći način:

Zadaća 2'. Za dani skup $K \subset \mathrm{M}_{r\times d}$, karakterizirati sve $\mathrm{W}^{1,\infty}$–gradijentne Youngove mjere koje zadovoljavaju

$$\mathrm{supp}\nu_{\mathbf{x}} \subseteq K \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \ .$$

Kao što će pokazati naredni rezultati, za sada jedina poznata karakterizacija gradijentnih Youngovih mjera (rezultat Pedregala i Kinderlehrera) uključuje pojam kvazikonveksnosti. Pojam kvazikonveksnosti uveo je Morrey 1952. kao prirodni nadomjestak za konveksnost u slučaju vektorskih funkcija. Kako je često teško provjeriti da li je funkcija kvazikonveksna, to je i rezultat Pedragala i Kinderlehrera zapravo samo apstraktna karakterizacija i struktura Youngovih mjera koje zadovoljavaju zadaću 2' još uvijek je slabo poznata. Stoga ćemo ukratko razmotriti razne generalizacije pojma konveksnosti i izložiti neke (relativno nove) rezultate koji se tiču njihovog međusobnog odnosa.

2. Pojmovi konveksnosti

U daljnjem za $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ s $\mathbf{M}(\mathbf{F})$ označavamo vektor koji se sastoji od svih minora matrice $\mathbf{F}$ i s $\mathbf{d}(r, d)$ označavamo njegovu duljinu.

Funkcija $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ je

(i) konveksna ako

$$(\forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{M}_{r\times d})(\forall\, \lambda \in \langle 0, 1\rangle) \quad f(\lambda \mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}) \leqslant \lambda f(\mathbf{A}) + (1-\lambda) f(\mathbf{B}) \ ;$$

(ii) polikonveksna ako postoji konveksna finkcija $g : \mathrm{R}^{\mathbf{d}(r,d)} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ takva da vrijedi

$$(\forall\, \mathbf{F} \in M^{m,n}) \quad f(\mathbf{F}) = g(\mathbf{F}, \mathbf{M}(\mathbf{F})) \ ;$$

(iii) kvazikonveksna u točki $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ ako je $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}_{r\times d})$ i ako za svaki otvoren i ograničen skup $U \subseteq \mathbf{R}^d$ takav da je $\mu(\partial U) = 0$ vrijedi

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(U; \mathbf{R}^d)) \quad \int_U f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_U f(\mathbf{F})d\mathbf{x} \ ;$$

(iv) kvazikonveksna ako je kvazikonveksna u svakoj točki.

(v) uniformno kvazikonveksna na $\mathrm{M}_{r\times d}$ ako je $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}_{r\times d})$ i ako za svaki otvoren i ograničen skup $U \subseteq \mathbf{R}^d$ takav da je $\mu(\partial U) = 0$ vrijedi da postoji $\gamma > 0$ sa svojstvom:

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d})(\forall\, \varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(\Omega;\mathbf{R}^d)) \quad \int_U (f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}) - f(\mathbf{F}))d\mathbf{x} \geqslant \gamma \int_U |\nabla\varphi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

(v) konveksna ranga 1 ako za proizvoljni $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi

$$(\forall\, A, \mathbf{B} \in \mathrm{M}_{r\times d})(r(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 1) \quad f(\lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}) \leqslant \lambda f(\mathbf{A}) + (1-\lambda) f(\mathbf{B})\ .$$

(vi) separatno konveksna ako su za proizvoljnu $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ preslikavanja $f_{i,j} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ za $i = 1,\ldots,r$ i $j = 1,\ldots,d$ definirana s

$$f_{i,j}(t) := f(\mathbf{A} + tE_{i,j})$$

konveksna, pri čemu je $\{E_{i,j} : i = 1,\ldots,r; j = 1,\ldots,d\}$ kanonska baza u $\mathrm{M}_{r\times d}$.

(vii) poliafina (kvaziafina, afina ranga 1, separatno afina) ako su funkcije $\pm f$ polikonveksne (kvazikonveksne, konveksne ranga 1, separatno konveksne).

(viii) lokalno konveksna (polikonveksna, kvazikonveksna, konveksna ranga 1, separatno konveksna) na $\mathrm{M}_{r\times d}$ ako

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d})(\exists\, \delta > 0) \quad f|_{K(\mathbf{F},\delta)} = g^\delta_F|_{K(\mathbf{F},\delta)}\ ,$$

pri čemu je $g^\delta_{\mathbf{F}} : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ konveksna (polikonveksna, kvazikonveksna, konveksna ranga 1, separatno konveksna).

Započnimo naša razmatranja citiranjem klasičnog razultata (isp. [Da 89]):

Teorem 1. *Neka je $f : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$ separatno konveksna. Tada je f lokalno Lipschitzova.*

∎

Kao što će biti pokazano u narednim teoremima, ova činjenica ima za posljedicu da je svaka realna kvazikonveksna funkcija lokalno Lipschitzova, te stoga integral u točki (iii) gornje definicije ima smisla. Druga važna svojstva kvazikonveksnih funkcija koja ćemo više puta koristiti u ovom radu bit će dokazana u slijedećoj točki. Računom se neposredno provjeri da vrijedi sljedeće karakterizacija:

Lema 1. *Neka je $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{r\times d}$, $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^d$, $\mathsf{b} \in \mathbf{R}^d$. Definirajmo $\psi_{\mathbf{A},\mathsf{a},\mathsf{b}} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ s*

$$\psi_{\mathbf{A},\mathsf{a},\mathsf{b}}(t) := f(\mathbf{A} + t\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\ .$$

Tada vrijedi: f je konveksna ranga 1 ako i samo ako je $\psi_{\mathbf{A},\mathsf{a},\mathsf{b}}$ konveksna za sve $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{r\times d}$, $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^r$, $\mathsf{b} \in \mathbf{R}^d$.

∎

Uočimo da je, imajući u vidu rezultat iz prethodne leme, za C^2–funkcije f dovoljno provjeriti uvjet $\psi''_{\mathbf{A},\mathsf{a},\mathsf{b}}(0) \geqslant 0$.

Lema 2. *Neka je $d \geqslant 2$, $r \geqslant 2$, $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Tada vrijede slijedeće implikacije.*

(i) f konveksna $\Rightarrow$ f polikonveksna $\Rightarrow$ f kvazikonveksna

(ii) f kvazikonveksna i $f < \infty$ $\Rightarrow$ f konveksna ranga 1 $\Rightarrow$ f separatno konveksna

Dem.

(i) Definiramo li $g(\mathbf{F}, \mathbf{M}(\mathbf{F})) := f(\mathbf{F})$, vidimo da je svaka konveksna funkcija također i polikonveksna.

Neka je sada f polikonveksna i g kao ranije. Jednostavnosti zapisa radi pretpostavit ćemo da je $r = d = 2$. Koristeći rezultat da su determinante nul-Lagranžijani (vidi Teorem 1), Gaussov teorem i Jensenovu nejednakost imamo

$$\frac{1}{\mu(U)} \int_U f(\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \frac{1}{\mu(U)} \int_U g(\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{x}), \det(A + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant$$

$$g(\frac{1}{\mu(U)} \int_U (\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}, \frac{1}{\mu(U)} \int_U \det(A + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}) =$$

$$g(\frac{1}{\mu(U)} \int_U (\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}, \det A) = g(\mathbf{A}, \det A) = f(\mathbf{A}) ,$$

gdje je $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(U; \mathbf{R}^r)$ bila proizvoljna. Time je pokazana da je svaka polikonveksna funkcija i kvazikonveksna.

(ii) Tvrdimo da je svaka kvazikonveksna funkcija ujedno i konveksna ranga 1. U tu svrhu, neka su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ proizvoljne matrice takve da je $r(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = 1$, i neka ja za fiksirani $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ $\mathbf{F} := \lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}$. Odgovarućim odabirom koordinatnog sustava možemo postići da je $\mathbf{F} = 0$ odnosno $\mathbf{A} = (1-\lambda)\mathsf{a}\otimes\mathsf{e}_1$ i $\mathbf{B} = -\lambda\mathsf{a}\otimes\mathsf{e}_1$ za neki $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^r$. Da pokažemo tvrdnju konstruirat ćemo odgovarajuće test funkcije $\mathsf{v}_k \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(Q; \mathbf{R}^r)$, a uz pomoć funkcije h definirane u Lemi 2. Preciznije, za $Q = \langle 0, 1\rangle^d$ definirajmo nizove $\mathsf{u}_k, \mathsf{v}_k : Q \longrightarrow \mathbf{R}^r$ s

$$\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) := \mathsf{a}\frac{h(kx_1)}{k} , \quad \mathsf{v}_k(\mathbf{x}) := \mathsf{a}\min\{\frac{h(kx_1)}{k}, dist_\infty(\mathbf{x}, \partial Q)\} ,$$

gdje je

$$dist_\infty(\mathbf{x}, \partial Q)\} := \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty; \mathbf{y} \in Q\} , \|\mathbf{x}\|_\infty := \sup\{|x_i|; i = 1, \dots d\} .$$

Kao u dokazu Leme 2 pokazuje se da vrijedi $\nabla\mathsf{u}_k \in \{A, B\}$. Zbog kompaktnosti skupa ∂Q i definicije $dist_\infty$ vidimo da je za proivoljni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ $dist_\infty(\mathbf{x}, \partial Q)$ oblika $|\mathbf{x}_i - q_i|$ za neki $i \in \{1, \dots, d\}$, te je $\nabla\mathsf{v}_k \in \{A, \mathbf{B}\} \cup \{\pm\mathsf{a}\otimes\mathsf{e}_i\}$. Uočimo da je po pretpostavci zbog $\mathsf{v}_k \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(Q; \mathbf{R}^r)$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_Q f(\nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant f(0) ,$$

dok je, s druge strane,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_Q f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_Q f(\nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x})d\mathbf{x} .$$

Zaista, definiramo li $A_k := \{\mathbf{x} \in Q : \nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) \neq \nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x})\}$, klasični rezultat (vidi [LL 93],Teorem 6.17 str. 144) daje

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \mu\{\mathbf{x} \in Q : \nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) \neq \nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x})\} =$$

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \mu\{\mathbf{x} \in Q : dist_\infty(\mathbf{x}, \partial Q) < |\lambda(1-\lambda)|\frac{1}{k}\} = 0 ,$$

odakle slijedi

$$\int_Q |f(\nabla \mathsf{u}_k) - f(\nabla \mathsf{u}_k)| = \int_{A_k} |f(\nabla \mathsf{u}_k) - f(\nabla \mathsf{u}_k)| \longrightarrow 0 \ ,$$

budući da podintegralna funkcija ne ovisi o $k \in \mathbf{N}$ i poprima samo konačno mnogo vrijednosti.
Konačno, primijenimo li McShaneovu lemu na niz $f \circ \nabla \mathsf{u}_k$, dobit ćemo

$$\lambda f(\mathbf{A}) + (1-\lambda) f(\mathbf{B}) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_Q f(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geqslant f(0) \ .$$

Neka je sada f konveksna ranga 1. Birajući $s, t \in \mathbf{R}$, $s \neq t$, uz $\mathbf{A} := sE_{i,j}$, $\mathbf{B} := tE_{i,j}$ imamo $r(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 1$, i stoga

$$f_{i,j}(\lambda t + (1-\lambda)s) = f(\lambda \mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}) \leqslant \lambda f(\mathbf{A}) + (1-\lambda) f(\mathbf{B}) = \lambda f_{i,j}(t) + (1-\lambda) f_{i,j}(s) \ ,$$

te je f separatno konveksna.

Q.E.D.

Koristeći očiglednu činjenicu da je za $r = 1$ ili $d = 1$ svaka funkcija konveksna ako i samo ako je konveksna ranga 1, iz dokaza prethodne leme slijedi da su tada svojstva konveksnosti, polikonveksnosti i, konveksnosti ranga 1 te separatne konveksnosti ekvivalentni. Štoviše, ta su svojstva ekvivalentna svojstvu kvazikonveksnosti ako je funkcija realna.

Ponekad primjene zahtjevaju proučavanje kvazikonveksnih funkcija koje poprimaju vrijednosti u $\mathbf{R} \bigcup \{-\infty\}$. Gornji argument pokazuje da su takve funkcije konveksne ranga 1 i stoga poprimaju vrijednosti u $\mathbf{R}$ ili su identički jednake $-\infty$. Jedno od najvažnijih pitanja je da li su neka od svojstava u gornjem teoremu ekvivalentna. Tome pitanju ćemo se vratiti u sljedećem odjeljku. Ovdje uočimo da je svaka minora reda strogo većeg od 1 trivijalno polikonveksna ali ne i konveksna.

Sljedeći teorem (za detalje vidi [DM 88]) daje primjer funkcije koja je polikonveksna ali nije kvazikonveksna.

Teorem 2. *Neka je $r = d = 2$, $\gamma \in \mathbf{R}$ i $f : \mathrm{M}_{r \times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s*

$$f(\mathbf{F}) := |\mathbf{F}|^4 - \gamma |\mathbf{F}|^2 \mathrm{det}\mathbf{F} \ .$$

Tada vrijedi
(i) f konveksna ako i samo ako $|\gamma| \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{2}$
(ii) f polikonveksna ako i samo ako $|\gamma| \leqslant 2$
(iii) f kvazikonveksna ako i samo ako $|\gamma| \leqslant 2 + \varepsilon$
(iv) f konveksna ranga 1 ako i samo ako $|\gamma| \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}$

∎

Poznato je da je $\varepsilon > 0$. Da li je $2 + \varepsilon = \frac{4}{\sqrt{3}}$ je otvoren problem.

Drugo zanimljivo pitanje postavio je Alberti, a koje ilustrira koliko malo poznajemo svojstvo kvazikonveksnosti:

Neka je $2 \leqslant d \leqslant r$, $g : \mathrm{M}_{r \times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ i $\tilde{g} : \mathrm{M}_{d \times r} \longrightarrow \mathbf{R}$ tako da je za svaku $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r \times d}$ $\tilde{g}(\mathbf{F}) = g(\mathbf{F}^\tau)$.

Pitanje (Alberti): g kvazikonveksna $\iff$ $\tilde{g}$ kvazikonveksna ?

Zanimljivo je uočiti da za ostala tri svojstva konveksnosti očito vrijedi ekvivalencija. U radu koji je trenutno u pripremi, Kružik je pokazao da je odgovor na Albertijevo pitanje negativan ukoliko je $r \geqslant 3$ i ukoliko g može poprimati vrijednost $+\infty$. Njegov argument (zasnovan na Šverakovom rezultatu) detaljno dokazujemo u odjeljku 6 ovog poglavlja

Nadalje, kao važan primjer koji korespondira linearnoj Euler-Lagrangeovoj jednadžbi, citirat ćemo rezultat Van Hovea iz 1947. koji klasificira svojstva konveksnosti eliptičke kvadratne forme na $\mathrm{M}_{r\times d}$.

Teorem 3. (Van Hove) *Neka je $r, d \geqslant 1$, $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s $f(\mathbf{A}) := \mathbf{MA}\cdot\mathbf{A}$, pri čemu je $\mathbf{M} \in \mathrm{M}_{r\times d} \times \mathrm{M}_{r\times d}$ uniformno eliptički tenzor.*

Tada vrijedi

(i) f konveksna ranga 1 ako i samo ako je f kvazikonveksna

(ii) Ako je $r = d = 2$, f je kvazikonveksna ako i samo ako je polikonveksna. Štoviše, ovaj zaključak nije istinit ukoliko je $r, d \geqslant 3$.

∎

Vrijedi i slijedeći jednostavni rezultat, koji može poslužiti kao ilustracija tvrdnje da su skupovi polikonveksnih, kvazikonveksnih i funkcija konveksnih ranga 1 dovoljno 'bogati':

Teorem 4. *Neka je $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ konveksna i monotona. Ako je $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ konveksna (polikonveksna, kvazikonveksna, konveksna ranga 1, separatno konveksna), tada je $g \circ f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ konveksna (polikonveksna, kvazikonveksna, konveksna ranga 1, separatno konveksna).*

∎

Prije nego detaljnije promotrimo svojstva kvazikonveksnosti i njihove primjene u varijacijskom računu, dokazat ćemo klasični rezultat poluneprekinutosti odozdo za slučaj integranda funkcionala I kada je $r = 1$.

Teorem 5. (Tonelli) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ograničen i otvoren, i neka su $u_n, \overline{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^m$ takve da vrijedi $u_n \rightharpoonup \overline{u}$ u $L^\infty(\Omega; \mathbf{R}^m)$, te neka je za $f \in C(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ definirana funkcija $F(u) = \int_\Omega f(u(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$. Tada vrijedi:*

F je neprekinuta s obzirom na slabu–$*$ nizovnu konvergenciju ako i samo ako je f afina.

F je nizovno odozdo poluneprekinuta s obzirom na slabu–$*$ nizovnu konvergenciju ako i samo ako je f konveksna.

Dem. Prvi dio teorema je direktna posljedica drugog dijela, ako drugu tvrdnju primijenimo na funkcije f i $-f$ i uvažimo činjenicu da je funkcija f afina ako i samo ako vrijedi $f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)y) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(y)$. Najprije pokažimo nužnost druge tvrdnje. Pretpostavimo, dakle, da za svaki niz u_n takav da $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}$ vrijedi

1
$$\liminf \int_\Omega f(u_n(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geq \int_\Omega f(\overline{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \,.$$

S D označimo jedinični hiperkub u $\mathbf{R}^d$,i neka je za $\lambda \in (0,1)$ fiksiran otvoren skup $D_1 \subset D$ i takav da je $\mu(D_1) = \lambda$. Nadalje, neka je χ_1 karakteristična funkcija skupa D_1, tj.

$$\chi_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in D_1 \\ 0, & \mathbf{x} \in D \setminus D_1 \end{cases} ,$$

Proširimo χ_1 po periodičnosti u svakoj varijabli sa D na cijeli $\mathbf{R}^d$, i to s osnovnim periodom 1. Primjenjujući McShaneovu lemu uz oznaku $(\chi_1)^n(\mathbf{x}) = \chi_1(n\mathbf{x})$ imamo

$$(\chi_1)^n \overset{*}{\rightharpoonup} \int_D \chi_1(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mu(D_1) = \lambda \,.$$

Definirajmo funkcije

$$u_n(\mathbf{x}) = (\chi_1)^n(\mathbf{x})v + (1 - (\chi_1)^n)(\mathbf{x})w \quad ,$$

za neke fiksirane $v, w \in \mathbf{R}^m$. Tada $u_n \xrightarrow{\ *\ } \lambda v + (1-\lambda)w$. Tada $u_n \xrightarrow{\ *\ } \lambda v + (1-\lambda)w$. Sada imamo sljedeći zaključak:

$$(f \circ u_n)(\mathbf{x}) = f(\chi_1(n\mathbf{x})v + (1 - \chi_1(n\mathbf{x}))w) = \begin{cases} f(v), & n\mathbf{x} \in D_1 \\ f(w), & n\mathbf{x} \in D \setminus D_1 \end{cases}$$

pa vrijedi

$$f \circ u_n = (\chi_1)^n f(v) + (1 - (\chi_1)^n) f(w) \xrightarrow{\ *\ } \lambda f(v) + (1-\lambda) f(w).$$

Stoga, korištenjem relacije (1) dobijamo

$$\liminf \int_D f(u_n(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = (\lambda f(v) + (1-\lambda) f(w)\mu(D) \geq \int_D f(\overline{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = f(\lambda v + (1-\lambda)w)\mu(D),$$

čime je nužnost dokazana.

Dokažimo dovoljnost. Neka je $L = \liminf_n \int_\Omega f(u_n(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$. Tvrdimo: Ako je f neprekidna i konveksna, onda vrijedi $\int_\Omega f(\overline{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leq L$. Uzmimo podniz niza $(u_n)_n$ (koji isto označimo), tako da je $L = \lim_n \int_\Omega f(u_n(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$. Primjenom Mazurove leme na niz $(u_n)_n$ imamo:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbf{N})(\exists N \in \mathbf{N})(\exists \alpha_k > 0, k = n, \dots, N)$$

$$\sum_{k=n}^{N} \alpha_k = 1 \Rightarrow \|\overline{u} - \sum_{k=n}^{N} \alpha_k \mathsf{u}_k\| < \varepsilon \quad ,$$

odnosno $(\sum_{k=n}^N \alpha_k u_k)_N$ konvergira jako ka $\overline{u}$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Stoga možemo ekstrahirati skoro svuda konvergentan podniz (koji isto označimo), takav da vrijedi:

$$\sum_{k=n}^{N} \alpha_k u_k(\mathbf{x}) \longrightarrow \overline{u}(\mathbf{x}) \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; , \quad \text{kad } N \longrightarrow \infty \; .$$

Kako je f neprekidna, slijedi:

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0)(\forall N \in \mathbf{N})(N \geq N_0$$

$$\Rightarrow |f(\overline{u}(\mathbf{x})) - f(\sum_{k=n}^{N} \alpha_k u_k(\mathbf{x}))| < \varepsilon \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \; .$$

Zbog omeđenosti skupa Ω je i

$$\int_\Omega \left| f(\overline{u}(\mathbf{x})) - f(\sum_{k=n}^{N} \alpha_k u_k(\mathbf{x})) \right| d\mathbf{x} < \varepsilon \mu(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(\overline{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} < \int_\Omega f(\sum_{k=n}^{N} \alpha_k u_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \varepsilon \mu(\Omega) \; .$$

Zbog konveksnosti funkcije f imamo

$$f(\sum_{k=n}^{N}\alpha_k u_k(\mathbf{x})) \le \sum_{k=n}^{N}\alpha_k f(u_k(\mathbf{x})) ,$$

što zajedno s prethodnom nejednakošću daje

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\overline{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} &\leqslant \sum_{k=n}^{N}\alpha_k(\int_\Omega f(u_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x}) + \varepsilon\mu(\Omega)\\ &\leqslant \sum_{k=n}^{N}\alpha_k(\int_\Omega f(u_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - L) + L + \varepsilon\mu(\Omega) .\end{aligned}$$

Zbog definicije od L slijedi:

$$(\forall\varepsilon_1 > 0)\ (\exists N_0 \in \mathbf{N})\ (\forall N \in \mathbf{N}) \quad N \ge N_0 \Rightarrow |\int_\Omega f(u_n(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - L| < \varepsilon_1 .$$

Dakle, za dovoljno velik $n \in \mathbf{N}$, imamo

$$\int_\Omega f(\overline{u}(\mathbf{x})) \le \sum_{k=n}^{N}\alpha_k\varepsilon_1 + L + \varepsilon\mu(\Omega) = \varepsilon_1 + L + \varepsilon\mu(\Omega) .$$

Posljednja nejednakost je neovisna o $N_0 = N_0(\varepsilon, N) \in \mathbf{N}$, pa ε možemo pustiti u nulu, a očito i ε_1, dakle vrijedi

$$\int_\Omega (f \circ \overline{u})(\mathbf{x})d\mathbf{x} \le L .$$

Q.E.D.

Kako je Ω u teoremu proizvoljan, vrijedi ova tvrdnja: Ako $f(u_n)\xrightarrow{*} l$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ za svaki niz u_n sa svojstvom $u_n \xrightarrow{*} \overline{u}$, onda je $l = f(\overline{u})$ ako i samo ako je f afina, odnosno $l \ge f(\overline{u})$ ako i samo ako je f konveksna.

Teorem i dalje vrijedi ako slabu $*$ konvergenciju zamijenimo slabom konvergencijom u $\mathrm{L}^p(\Omega)$, za $p \in [1, \infty\rangle$.

3. Svojstva kvazikonveksnosti

Kvazikonveksnost je fundamentalno svojstvo konveksnosti za proučavanje vektorskog slučaja u varijacijskom računu, te je usko vezan uz nizovnu poluneprekinutost odozdo funkcionala u integralnom obliku te uz egzistenciju i regularnost minimizacijskih nizova. Nadalje, kvazikonveksne funkcije su, u izvjesnom smislu, prirodno dualni objekti gradijentnim Youngovim mjerama.

Kako po definiciji nije lako provjeriti je li neka funkcija kvazikonveksna ili ne, postavlja se pitanje mogu li se kvazikonveksne funkcije karakterizirati nekim uvjetom koji ne bi uključivao nikakve 'vanjske' objekte, poput test funkcija $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(U; \mathbf{R}^r)$ i ograničenih i otvorenih skupova $U \subseteq \mathbf{R}^d$. Na ovo pitanje još nije dan zadovoljavajući odgovor. Jedna algebarska karakterizacija iznesena u članku [CT 93].

Mi se ograničavamo na neke dobro poznate rezultate o kvazikonveksnim funkcijama koje će nam olakšati daljnja razmatranja.

Teorem 6. *Pretpostavimo da funkcija izmjeriva funkcija* $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ *zadovoljava svojstvo iz definicije kvazikonveksnosti za otvoren i ograničen skup* $D \subseteq \mathbf{R}^d$*. Tada je to svojstvo zadovoljeno za proizvoljni otvoren i ograničen skup* $E \subseteq \mathbf{R}^d$*.*

Dem. U dokazu koristimo sličnu tehniku kao u dokazu teorema o homogenizaciji Youngovih mjera. Neka je $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ i $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,p}(E; \mathbf{R}^r)$. Prema Teoremu 5 vrijedi

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbf{x}_{i,j} + \varepsilon_{i,j} E) \cup N_j \ , \quad \mu(N_j) = 0 \ .$$

pri čemu je unija po skupovima koji čine parovima disjunktne koji čine Vitalijev pokrivač za D. Odaberimo član pokrivača $\mathbf{x}_0 + \varepsilon E$. Definirajmo $\psi \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(D; \mathbf{R}^r)$ s

$$\psi(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varepsilon\varphi(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\varepsilon}) \ , & \mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \varepsilon E \\ 0 \ , & \mathbf{x} \in D \backslash \{\mathbf{x}_0 + \varepsilon E\} \end{cases}$$

Tada nakon prirodne zamjene varijabli slijedi

$$\int_E f(\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{y}))d\mathbf{y} = \varepsilon^{-d} \int_{\mathbf{x}_0 + \varepsilon E} f(\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} =$$

$$= \varepsilon^{-d} \Big\{ \int_D f(\mathbf{A} + \nabla\psi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - f(\mathbf{A})\mu(D \backslash \{\mathbf{x}_0 + \varepsilon E\}) \Big\} \ .$$

Stoga je po pretpostavci

$$\int_E f(\mathbf{A} + \nabla\varphi(\mathbf{y}))d\mathbf{y} \geqslant \varepsilon^{-d} f(\mathbf{A})\mu(\mathbf{x}_0 + \varepsilon E) = f(\mathbf{A})\mu(E) \ .$$

Q.E.D.

Teorem 7. *Neprekinuta funkcija* $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ *je kvazikonveksna ako i samo ako za svaku Lipschitzovu funkciju* u *peridočnu na* $Q := \langle 0, 1\rangle^d$ *i svaku* $F \in \mathrm{M}_{r\times d}$ *vrijedi*

$$\int_Q f(\mathbf{F} + \nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant f(\mathbf{F}) \ .$$

Dem. Dovoljnost slijedi iz prethodnog teorema uz odabir proizvoljnu $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(Q; \mathbf{R}^r)$.

Neka je sada $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ proizvoljna matrica u Lipschitzova i peridočna na Q. Fiksirajmo $\varphi_k \in \mathrm{C}_c^\infty(T_k)$, $0 \leqslant \varphi_k \leqslant 1$, $\varphi_k|_{T_{k-1}} = 1$, $|\nabla\varphi_k| \leqslant C$, pri čemu je $T_k := \langle -k, k\rangle^d$. Definirajmo funkcije v_k i w_k s

$$\mathsf{v}_k(\mathbf{x}) := \varphi_k(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \ , \quad \mathsf{w}_k(\mathbf{x}) := \frac{1}{k}\mathsf{v}_k(k\mathbf{x}) \ , \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \ .$$

Kako je $\mu(T_k) = (2k)^d\mu(Q)$, to zbog periodičnosti od u i neprekinutosti od f imamo

$$\int_{T_k} f(\mathbf{F} + \nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_{T_k\backslash T_{k-1}} f(\mathbf{F} + \nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \int_{T_{k-1}} f(\mathbf{F} + \nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\mu(T_{k-1}) \int_Q f(\mathbf{F} + \nabla u_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \int_{T_k\backslash T_{k-1}} C_1 d\mathbf{x}$$

$$\leqslant \mu(T_{k-1}) \int_Q f(\mathbf{F} + \nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \mu(T_k \backslash T_{k-1})C_1$$

$$= \mu(T_{k-1}) \int_Q f(\mathbf{F} + \nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + |(2k)^d - (2(k-1))^d|C_1 \ .$$

Dakle je (uz zamjenu varijabli $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}}{k}$ i uvažavanje $\mathsf{w}_k \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(Q)$)

$$\mu(T_{k-1}) \int_Q f(\mathbf{F} + \nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_{T_k} f(\mathbf{F} + \nabla \mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - C_1\mu(T_k \backslash T_{k-1})$$

$$= k^d \int_{T_1} f(\mathbf{F} + \nabla \mathsf{w}_k(\mathbf{z}))d\mathbf{z} - C_1\mu(T_k \backslash T_{k-1}) \geqslant k^d \int_{T_1} f(\mathbf{F}) - C_1\mu(T_k \backslash T_{k-1}) \ ,$$

odnosno

$$\int_Q f(\mathbf{F} + \nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \frac{k^d}{\mu(T_{k-1})} f(\mathbf{F}) - C_1 \frac{|(2k)^d - (2(k-1))^d|}{\mu(T_{k-1})} \ ,$$

pa tvrdnja slijedi uzimanjem limesa kad $k \longrightarrow \infty$.

Q.E.D.

Teorem 8. *Neka je $Q := \langle 0, 1 \rangle^d$. Neprekinuta funkcija $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ je kvazikonveksna ako i samo ako za neki gust podskup $\mathcal{G}$ u $\mathrm{W}_0^{1,\infty}(Q; \mathbf{R}^r)$ vrijedi*

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d})(\forall\, \mathsf{u} \in \mathcal{G}) \qquad \int_Q f(\mathbf{F} + \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant f(\mathbf{F}) \ .$$

Dem. Neka je $\mathsf{u} \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(Q; \mathbf{R}^r)$ proizvoljna i $\mathsf{u}_k \in \mathcal{G}$ tako da

$$\mathsf{u}_k \xrightarrow{\mathrm{W}^{1,\infty}} \mathsf{u} \ .$$

Tada za proizvoljnu $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ imamo $\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{F} \longrightarrow \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}$ za skoro svaki $\mathbf{x} \in Q$, te zbog neprekinutosti od f i Fatouove leme slijedi

$$\int_Q f(\mathbf{F} + \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \int_Q \limsup_k f(\mathbf{F} + \nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant$$

$$\limsup_k \int_Q f(\mathbf{F} + \nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant f(\mathbf{F}) \ .$$

Q.E.D.

Bez dokaza navodimo još dva netrivijalna rezultata od kojih ćemo prvi trebati u poglavlju 5 (isp. Teorem 4 iz 4.2.) Detaljni dokazi mogu se naći u [Da 85] i [BM 84] respektivno.

Teorem 9. *Neka je $g : [0, \infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ i $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ tako da vrijedi*

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}) \quad f(\mathbf{F}) = g(|\mathbf{F}|) \ .$$

Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne
(i) g je konveksna
(ii) f je konveksna
(iii) f je polikonveksna
(iv) f je kvazikonveksna
(v) f je konveksna ranga 1 ∎

Teorem 10. *Neka je* $d \geqslant 1$, $1 \leqslant \alpha < 2d$, $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *i* $f : \mathrm{M}_{d\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ *tako da vrijedi*

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{d\times d}) \quad f(\mathbf{F}) = |\mathbf{F}|^{\alpha} + h(\det\mathbf{F}) \ .$$

Tada je ekvivalentno
(i) h *je konveksna*
(ii) f *je polikonveksna*
(iii) f *je kvazikonveksna*
(iv) f *je konveksna ranga 1*

∎

U daljnjem s Ω označavamo ograničenu domenu u $\mathbf{R}^d$ s Lipschitzovim rubom i promatramo preslikavanja $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$, te funkcional

$$I(u) := \int_\Omega f(\nabla u(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \ .$$

Teorem 11. *Pretpostavimo da je* $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ *neprekinuta.*
(i) *Funkcional* I *je slabo-*$*$ *nizovno poluneprekinut odozdo ako i samo ako je* f *kvazikonveksna.*
(ii) *Ako je* f *kvazikonveksna i ako za neki* $p \in [1, \infty\rangle$ *vrijedi ocjena*

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}) \quad 0 \leqslant f(\mathbf{F}) \leqslant C(|F|^p + 1) \ ,$$

onda je I *slabo nizovno poluneprekinut na* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$.

Dem.
(i) Najprije pokazujemo nužnost. Neka je $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}$, $Q := \langle 0, 1\rangle^d$ i $\varphi \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(Q; \mathbf{R}^r)$ proširena po periodičnosti na $\mathbf{R}^d$. Definirajmo niz $\mathsf{u}_k : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ s

$$\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) := \mathbf{F}\mathbf{x} + \frac{1}{k}\varphi(k\mathbf{x}) \ .$$

Kako je $\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F} + \nabla\varphi(k\mathbf{x})$, primijenimo li McShaneovu lemu na funkcije $H(\mathbf{z}) := \mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{z})$, $H_k(\mathbf{z}) := H(k\mathbf{z})$ (a jer je $H \in \mathrm{L}^\infty(Q)$) zaključujemo da vrijedi

$$f \circ \nabla \mathsf{u}_k \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \int_Q f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{z}))d\mathbf{z} \ ,$$

odnosno, zbog ograničenosti od Ω,

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}_k) = \mu(\Omega) \int_Q f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{z}))d\mathbf{z} \ .$$

S druge strane primjenom McShaneove leme na funkcije $\mathbf{x} \mapsto \nabla\varphi(k\mathbf{x})$, uz uvažavanje da je $\int_Q \nabla\varphi = 0$, vrijedi

$$\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}) \xrightharpoonup{*} \mathbf{F}$$

te zbog pretpostavke da je I poluneprekinut odozdo prvo slijedi

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{z}))d\mathbf{z} \geqslant \int_\Omega f(\mathbf{F})d\mathbf{z} \ ,$$

a zatim i

$$\int_Q f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{z}))d\mathbf{z} \geqslant f(\mathbf{F}) \ ,$$

te je f kvazikonveksna po Teoremu 6.

Neka je sada f kvazikonveksna i neka $\mathsf{u}_k \xrightarrow{\quad * \quad} \mathsf{u}$ u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)$.

Korak 1.

Pretpostavimo da također za neku $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ vrijedi

(a) $\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$,

(b) $\mathsf{u} - \mathsf{u}_k \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)$.

Očito slijedi

$$\int_\Omega f(\mathbf{F} + \nabla(\mathsf{u}(\mathbf{x}) - \mathsf{u}_k(\mathbf{x})))d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega f(\mathbf{F})d\mathbf{x}\ ,$$

ili, ekvivalentno,

$$\int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\ ,$$

pa u ovom posebnom slučaju tvrdnja slijedi.

Korak 2.

Neka je sada

(a) $\mathsf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$,

(b) $\mathsf{u}_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ općenit niz.

Odaberimo domenu $\Omega^{'}$ takvu da vrijedi $\Omega^{'} \subset\subset \Omega$, te $\eta \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ tako da je $\eta|_{\Omega'} = 1$. Definirajmo niz (v_k) s

$$\mathsf{v}_k(\mathbf{x}) := \mathsf{u}(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x})(\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) - \mathsf{u}(\mathbf{x}))\ , \quad \mathbf{x} \in \Omega\ .$$

Kako iz slabe-$*$ konvergencije niza (u_k) slijedi slaba konvergencija u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, birajući $p > d$ zbog Rellichovog teorema kompaktnosti slijedi lokalno uniformna konvergencija niza (u_k), te, kako je $\|\nabla\mathsf{u}_k\|_{\mathbf{R}^r L^\infty},\ \|\nabla\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant C$, za $k \geqslant k_0(\eta)$ slijede ocjene

$$\begin{aligned}|\nabla\mathsf{v}_k| &\leqslant |\nabla\mathsf{u}| + |\nabla\eta||\mathsf{u} - \mathsf{u}_k| + |\eta|(|\nabla\mathsf{u}| + |\nabla\mathsf{u}_k|) \leqslant (2 + |\eta|)C + |\nabla\eta||\mathsf{u} - \mathsf{u}_k|\ . \\ &\leqslant (2 + |\eta|)C + |\nabla\eta|\varepsilon \leqslant C^{'}\ .\end{aligned}$$

Stavimo li $M := \sup\{|f(\mathbf{F})| : F \in \mathrm{M}_{r\times d}, |\mathbf{F}| \leqslant C + C^{'}\}$.

Tada je, po koraku 1,

$$\begin{aligned}\liminf_{k\longrightarrow\infty} I(\mathsf{u}_k) &= \liminf_{k\longrightarrow\infty}\Big(\int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \int_{\Omega'} f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})) - f(\nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \\ &\qquad \int_{\Omega\backslash\Omega'} f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})) - f(\nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\Big) \\ &= \liminf_{k\longrightarrow\infty}\Big\{\int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \int_{\Omega\backslash\Omega'} f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})) - f(\nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\Big\} \\ &\geqslant \mu(\Omega)f(\mathbf{F}) + \liminf_{k\longrightarrow\infty}\int_{\Omega\backslash\Omega'} f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x})) - f(\nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \\ &\geqslant \mu(\Omega)f(\mathbf{F}) - \limsup_{k\longrightarrow\infty}\int_{\Omega\backslash\Omega'} |f(\nabla\mathsf{u}_k(\mathbf{x}))| + |f(\nabla\mathsf{v}_k(\mathbf{x}))|d\mathbf{x} \\ &\geqslant \mu(\Omega)f(\mathbf{F}) - 2M\mu(\Omega\backslash\Omega^{'}) = \int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - 2M\mu(\Omega\backslash\Omega^{'})\ ,\end{aligned}$$

odnosno,

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} I(\mathsf{u}_k) \geqslant I(\mathsf{u}) - 2M\mu(\Omega\backslash\Omega^{'})\ .$$

Zbog proizvoljnosti od $\Omega^{'} \subset\subset \Omega$ zaključujemo da je I i uz ove pretpostavke poluneprekinut odozdo.

Korak 3.

Pretpostavimo sada da je u po dijelovima afina. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je neke domene $U_1, U_2 \subset \Omega$ takve da je $\mu(U_1 \cap U_2) = 0$ i $U_1 \cup U_2 = \Omega$

$$\mathsf{u}(\mathbf{x}) = (\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_1^0)\chi_{U_1}(\mathbf{x}) + (\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2^0)\chi_{U_2}(\mathbf{x}) \ ,$$

jer inače tvrdnja slijedi indukcijom. Slično kao gore, za fiksirane $\eta_j \in \mathrm{C}_c^\infty(U_j)$, $U_j^{'} \subset\subset U_j$, $\eta_j|_{U_j'} = 1$, definiramo nizove

$$\mathsf{v}_k^j(\mathbf{x}) := \mathsf{u}(\mathbf{x}) + \eta_j(\mathbf{x})(\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) - \mathsf{u}(\mathbf{x})) \ , \quad \mathbf{x} \in U_j \ .$$

$j = 1, 2$. Kao i ranije, uz pomoć činjenice da je $\mathsf{v}_k^j - \mathsf{u} \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(U_j; \mathbf{R}^r)$ vrijedi zapis

$$\int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \left\{\int_{U_1} f(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \int_{U_1\backslash U_1'} f(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x})) - f(\nabla \mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\right\} +$$

$$\left\{\int_{U_2} f(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \int_{U_2\backslash U_2'} f(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x})) - f(\nabla \mathsf{v}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x}\right\} \ ,$$

te možemo zaključivati na osnovu koraka 2.

Korak 4.

Ako je $\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ proizvoljna, fiksiramo domene $\Omega^{'}, \Omega^{''}$ tako da vrijedi $\Omega^{'} \subset\subset \Omega^{''} \subset\subset \Omega$.

Primijetimo da možemo konstruirati niz (v_k) koji zadovoljava uvjete

(i) $\mathsf{v}_k|_{\Omega'}$ je po dijelovima afina
(ii) $\mathsf{u}|_{\Omega\backslash\Omega''} = \mathsf{v}_k|_{\Omega\backslash\Omega''}$
(iii) $\nabla \mathsf{v}_k \xrightarrow{\mu} \nabla \mathsf{u}$ za Ω
(iv) $|\nabla \mathsf{v}_k(\mathbf{x})| \leqslant C$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

Za takav niz (v_k) dalje definiramo

$$\mathsf{u}_{j,k} := \mathsf{u}_j + \mathsf{v}_k - \mathsf{u} \ .$$

Tada očito imamo $\mathsf{u}_{j,k} \longrightarrow \mathsf{v}_k$ u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, dok po koraku 2 slijedi

$$\liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_{j,k}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_{\Omega'} f(\nabla v_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \ .$$

Iz (iii) prijelazom na podniz zbog neprekinutosti od f imamo $f \circ \nabla \mathsf{v}_k \longrightarrow f \circ \nabla \mathsf{u}$ skoro svuda na Ω, a onda jer je f i lokalno Lipschitzova iz (iv) imamo

$$|f \circ \nabla \mathsf{v}_k - f \circ \nabla \mathsf{u}| \leqslant K(|\nabla \mathsf{u}| + C) \ ,$$

te teorem o dominiranoj konvergenciji daje

$$f \circ \nabla \mathsf{v}_k \xrightarrow{\mathrm{L}^1(\Omega^{'})} f \circ \nabla \mathsf{u} \ .$$

Također imamo

$$\int_{\Omega\backslash\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leqslant C_1 \mu(\Omega\backslash\Omega^{'}) \ ,$$

gdje je $C_1 := K\|\nabla \mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} + |f(0)|$.

Time je pokazana nejednakost

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_{j,k}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - C_1\mu(\Omega\backslash\Omega') \ .$$

S druge strane je

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \sup_{j\in\mathbf{N}} \int_{\Omega'} |f(\nabla \mathsf{u}_{j,k}(\mathbf{x})) - f(\nabla \mathsf{u}_j(\mathbf{x}))|d\mathbf{x}$$

$$\leqslant \lim_{k\longrightarrow\infty} \sup_{j\in\mathbf{N}} K \int_{\Omega'} |\nabla v_k(\mathbf{x}) - \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x})|d\mathbf{x} = 0 \ ,$$

gdje je posljednja jednakost dobivena uz pomoć teorema o dominiranoj konvergenciji. Na taj je način

$$\liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}_{j,}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_j(\mathbf{x})) - f(\nabla \mathsf{u}_{j,k}(\mathbf{x})d\mathbf{x} +$$

$$\liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_{j,k}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant$$

$$\liminf_{k\longrightarrow\infty} \liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_j(\mathbf{x})) - f(\nabla \mathsf{u}_{j,k}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \liminf_{k\longrightarrow\infty} \liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_{j,k}(\mathbf{x})d\mathbf{x} +$$

$$\liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_j(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$\geqslant \int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x})\underset{\cdot}{\mathbf{x}} - C_3\mu(\Omega\backslash\Omega') + \liminf_{j\longrightarrow\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla \mathsf{u}_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geqslant$$

$$\int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x})\underset{\cdot}{\mathbf{x}} - C_4\mu(\Omega\backslash\Omega') \ ,$$

pa tvrdnja slijedi zbog proizvoljnosti $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Q.E.D.

Ako je $f \geqslant 0$ može se pokazati da je I konačan i slabo nizovno poluneprekinut na $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ ako i samo ako je f kvazikonveksna i zadovoljava ocjenu iz tvrdnja (ii) gornjeg teorema (vidi [Kr 94]). Tvrdnja (i) je ključna za klasifikaciju Youngovih mjera. Napominjemo da se uz pomoć nekih osnovnih rezultata o Youngovim mjerama (vidi poglavlje 3) rezultati poluneprekinutosti odozdo prenose na integrande $f(\mathbf{x}, \mathsf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))$.

Teorem 12. (egzistencija i relaksacija) *Neka je $p \in \langle 0,\infty\rangle$, $C, c > 0$, i neka f zadovoljava*

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}) \quad c|\mathbf{F}|^p \leqslant f(\mathbf{F}) \leqslant C(|\mathbf{F}|^p + 1) \ .$$

(i) Ako je f kvazikonveksna i $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, onda I poprima minimum u klasi

$$\mathrm{W}^{1,p}_{\mathsf{v}}(\Omega;\mathbf{R}^r) := \{\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{R}^r) : \mathsf{u} - \mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega;\mathbf{R}^r) \ .$$

(ii) Ako sa f^{qc} označimo kvazikonveksnu ovojnicu funkcije f, tada vrijedi

$$\inf_{\mathrm{W}^{1,p}_{\mathsf{v}}} I = \min_{\mathrm{W}^{1,p}_{\mathsf{v}}} \overline{I} \ ,$$

gdje je

$$\overline{I}(\mathsf{u}) := \int_\Omega f^{qc}(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \,.$$

(iii) *Za proizvoljnu* $f \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}_{r\times d})$, *i ograničenu domenu* $U \subseteq \mathbf{R}^d$ *takvu da je* $\mu(\partial U) = 0$ *vrijedi*

$$f^{qc}(\mathbf{F}) = \inf_{\varphi\in \mathrm{W}^{1,\infty}_0} \frac{1}{\mu(U)} \int_U f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \,.$$

Dem. Dokazat ćemo samo tvrdnju o reprezentaciji kvazikonveksne ovojnice.

Definirajmo

$$Qf(\mathbf{F}, U) := \inf_{\varphi\in \mathrm{W}^{1,\infty}_0} \frac{1}{\mu(U)} \int_U f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \,.$$

Slično kao u dokazu Teorema 10 pokazuje se da $Qf(\mathbf{F}, U)$ ne ovisi o skupu U. Tvrdimo da vrijedi

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}) \quad Qf(\mathbf{F}) = f^{qc}(\mathbf{F}) \,.$$

Primijetimo da je $Qf^{qc} = f^{qc}$. Zaista,

$$Qf^{qc}(\mathbf{F}) = \inf_{\varphi\in \mathrm{W}^{1,\infty}_0} \frac{1}{\mu(U)} \int_U f^{qc}(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$$

$$\leqslant \inf_{\varphi\in \mathrm{W}^{1,\infty}_0} \frac{1}{\mu(U)} \int_U f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = Qf(\mathbf{F}) \,.$$

S druge strane je

$$\int_U f^{qc}(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_U f^{qc}(\mathbf{F})d\mathbf{x} \,,$$

odnosno $Qf^{qc} \geqslant f^{qc}$. Štoviše, ako je $\varphi_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)$ niz takav da $\nabla\varphi_k(\mathbf{x}) \longrightarrow 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$), Teorem 8 garantira da je f^{qc} lokalno Lipschitzova, te primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{\mu(U)} \int_U f(\mathbf{F} + \nabla\varphi_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = f^{qc}(\mathbf{F}) \,,$$

i po definiciji infimuma $Qf^{qc} = f^{qc}$. Dakle je $f^{qc} \leqslant Qf$.

Za dokaz obratne inkluzije dovoljno je pokazati da je Qf kvazikonveksna i da je $Qf \leqslant f$. Da pokažemo da je Qf kvazikonveksna, najprije pokažimo da ima svojstvo: za proizvoljnu po dijelovima afinu funkciju $\psi \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(\Omega; \mathbf{R}^r)$ vrijedi

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}) \quad \frac{1}{\mu(U)} \int_U Qf(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant Qf(\mathbf{F}) \,.$$

U tu svrhu, za fiksiranu ψ kao gore neka su U_j konačan niz otvorenih podskupova od U takvi da je $\psi|_{U_j}$ afina. Primijenimo li definiciju od Qf na U_j, vidimo da za proizvoljni $\varepsilon > 0$ postoji $\varphi^\varepsilon_j \in \mathrm{W}^{1,\infty}_0(U_j; \mathbf{R}^r)$ takva da vrijedi

$$Qf(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x})) \geqslant \frac{1}{\mu(U_j)} \int_{U_j} f(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x}) + \nabla\varphi^\varepsilon_j(\mathbf{x})) - \varepsilon \text{ (ss } \mathbf{x} \in U_j) \,.$$

Definiramo li $\varphi^\varepsilon := \psi + \sum_{j=1}^M \varphi_j^\varepsilon$ po konstrukciji je $\varphi^\varepsilon \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(U;\mathbf{R}^r)$ i vrijedi

$$\int_U f(\mathbf{F} + \nabla\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^M \int_{U_j} f(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x}) + \nabla\varphi_j^\varepsilon(\mathbf{x}))$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^M \int_{U_j} (\varepsilon + Qf(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x}))\chi_{U_j}(\mathbf{x})\mu(U_j) = \varepsilon\mu(U) + \sum_{j=1}^M \int_{U_j} Qf(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x}))\chi_{U_j}(\mathbf{x})\mu(U_j)$$

$$\leqslant \varepsilon\mu(U) + Qf(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x}))\mu(U) \text{ (ss } \mathbf{x} \in U) \ .$$

Dakle je

$$Qf(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x})) \geqslant \frac{1}{\mu(U)} \int_U f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - \varepsilon \ ,$$

odnosno

$$\frac{1}{\mu(U)} \int_U Qf(\mathbf{F} + \nabla\psi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \frac{1}{\mu(U)} \int_U f(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} - \varepsilon \geqslant Qf(\mathbf{F}) - \varepsilon \ ,$$

pa tvrdnja slijedi zbog proizvoljnosti od ε. Uočimo da iz dokaza Leme 9 slijedi da je Qf konveksna ranga 1, i stoga lokalno Lipschitzova.

Neka je sada $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(U;\mathbf{R}^r)$ proizvoljna. Zbog ograničenosti od U i gustoće po dijelovima afinih funkcija u $\mathrm{W}_0^{1,p}(U;\mathbf{R}^r)$ možemo odabrati niz po dijelovima afinih funkcija (φ_k) za koje vrijedi

(a) $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ u $\mathrm{W}_0^{1,p}(U;\mathbf{R}^r)$,

(b) $\varphi_k \xrightarrow{\ *\ } \varphi$ u $\mathrm{W}_0^{1,\infty}(U;\mathbf{R}^r)$. Kako je slika niza $(\nabla\varphi_k)$ sadržana u kompaktu koji ne ovisi o $k \in \mathbf{N}$, to zbog lokalne Lipschitzovosti i jake konvergencije slijedi

$$\limsup_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{\mu(U)} \int_U Qf(\mathbf{F} + \nabla\varphi_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{\mu(U)} \int_U \limsup_{k\longrightarrow\infty} Qf(\mathbf{F} + \nabla\varphi_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} =$$

$$\frac{1}{\mu(U)} \int_U Qf(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \ ,$$

te, imajući u vidu već pokazano svojstvo,

$$Qf(\mathbf{F}) \leqslant \limsup_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{\mu(U)} \int_U Qf(\mathbf{F} + \nabla\varphi_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{\mu(U)} \int_U Qf(\mathbf{F} + \nabla\varphi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \ ,$$

što pokazuje da je Qf kvazikonveksna.

Na kraju, pokažimo da je $Qf \leqslant f$. Kako bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mu(\Omega) = 1$ i $F = 0$ očito je dovoljno pokazati da postoji niz (φ_ε) u $\mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ takav da vrijedi

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \int_\Omega f(\nabla\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leqslant f(0) \ .$$

Zaista, ako uz oznaku $\Omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \Omega : d(\mathbf{x}, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon\}$ odaberemo funkcije $\varphi_\varepsilon \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ takve da za svaki $i \in \{1,\dots,r\}$ vrijedi

$$\varphi_\varepsilon^i(\mathbf{x})\chi_{\Omega_\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \ ,$$

te, kako je po pretpostavci $f \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathrm{M}_{r\times d})$, uz $\varepsilon\mathbf{X} = [\varepsilon\mathbf{x}, \dots, \varepsilon\mathbf{x}] \in \mathrm{M}_{r\times d}$ slijedi zaključak

$$\int_\Omega f(\nabla\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\chi_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} + \int_\Omega f(\varepsilon\mathbf{X})d\mathbf{x} ,$$

odnosno, uz $(\mathbf{W})_i := (\varepsilon\mathbf{X})_i$

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \int_\Omega f(\nabla\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \leqslant \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^d}\int_{\varepsilon\Omega} f(\mathbf{W})d\mathbf{w} = f(0) ,$$

pri čemu je posljednja jednakost dobivena primjenom Lebesgue-Besicovitchevog teorema o deriviranju.

Q.E.D.

Prijelaz s I na $\overline{I}$ nazivamo *relaksacijom*. Osnovna ideja je zamijeniti varijacijski problem koji možda nema rješenja novim varijacijskim problemom koji ga ima. Naravno, minimizatori za $\overline{I}$ su općenito samo slabi limesi minimizirajućih nizova za I, i važna svojstva tih nizova na limesu mogu biti izgubljena. Na primjer, ako je neki minimizator za $\overline{I}$ *homogen*, nije jasno da li su minimizirajući nizovi za I (približno) *homogeni* ili ne. Ističemo da je drugi pristup, koji uspijeva sačuvati više informacija o minimizirajućem nizu, skiciran u sljedećem odjeljku.

Relaksaciju fizikalno možemo interpretirati kao prijelaz s mikroskopske energije I na maroskopsku energiju $\overline{I}$, koja je dobivena postupkom 'usrednjavanja' (usporedi s formulom koja točkovno reprezentira f^{qc}).

Teorem 13. (regularnost) *Pretpostavimo da je f glatka, uniformno kvazikonveksna, te da je ispunjen uvjet rasta*

$$(\forall\, \mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}) \quad 0 \leqslant f(\mathbf{F}) \leqslant C(|F|^2 + 1) .$$

Ako je $\overline{u} \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ lokalni minimizator za I, odnosno vrijedi

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{R}^r)) \quad I(\overline{u} + \varphi) \geqslant I(\overline{u}) ,$$

tada postoji otvoren skup Ω_0 takav da je $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $\mu(\Omega\setminus\Omega_0) = 0$ i $\overline{u} \in \mathrm{C}^\infty(\Omega_0; \mathbf{R}^r)$. ∎

Na kraju, navodimo nedavni rezultat Kristensena (isp. [Kr 97a]) koji je nakon dugo vremena potvrdio Morreyevu slutnju (isp. [Mo 52]) da nema lokalnog uvjeta iz kojega bi slijedilo svojstvo kvazikonveksnosti. Napomenimo da lokalan operator

$$\mathsf{P}_{rc}(f) := \inf\{\mathsf{D}^2 f(\mathbf{F})(\mathsf{a}\otimes\mathsf{b}, (\mathsf{a}\otimes\mathsf{b}) : \mathsf{a} \in \mathbf{R}^r, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d\}$$

karakterizira konveksnost ranga 1.

Neka je s $\mathcal{F}$ označen prostor funkcija $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$. Za operator $\mathsf{P} : \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}_{r\times d}) \longrightarrow \mathcal{F}$ kažemo da je lokalan ako za proizvoljnu $\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d}$ i otvorenu okolinu $\omega \subset \mathrm{M}_{r\times d}$ od $\mathbf{F}$ vrijedi

$$f|_\omega = g|_\omega \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(f)|_\omega = \mathsf{P}(g)|_\omega .$$

Teorem 14. (Kristensen, 1997) *Pretpostavimo da je $r \geqslant 3$ i $d \geqslant 2$. Tada ne postoji niti jedan lokalan operator $\mathsf{P} : \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}_{r\times d}) \longrightarrow \mathcal{F}$ za koji vrijedi*

$$\mathsf{P}(f) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \ \textit{kvazikonveksna} .$$

∎

4. Klasifikacija gradijentnih Youngovih mjera

U ovom odjeljku uglavnom se oslanjamo na rezultate Kinderlehrera i Pedregala (isp. [KP 91], [KP 94], [NB]).

Teorem 15. *Slabo-$*$ izmjerivo preslikavanje $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d})$ je $\mathrm{W}^{1,\infty}$-gradijentna Youngova mjera ako i samo ako je $\nu_{\mathbf{x}} \geqslant 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) i postoje kompaktan skup $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ i preslikavanje $\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(i) $\mathrm{supp}\nu_{\mathbf{x}} \subseteq K$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)
(ii) $\langle \nu_{\mathbf{x}}, id\rangle = \nabla \mathsf{u}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)
(iii) Za svaku kvazikonveksnu $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ vrijedi
$\langle \nu_{\mathbf{x}}, f\rangle \geqslant f(\langle \nu_{\mathbf{x}}, id\rangle)$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

∎

Ključni dio teorema je (iii) koji opisuje svojstvo dualno kvazikonveksnosti. Grubo govoreći, kvazikonveksne funkcije zadovoljavaju Jensenovu nejednakost za sve gradijente, dok gradijentne Youngove mjere zadovoljavaju Jensenovu nejednakost za sve kvazikonveksne funkcije.

Gornji teorem dakle pokazuje da za kompakt $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ skup

$$\mathcal{M}^{qc}(K) := \{\nu \in \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d}) : \nu \geqslant 0, \mathrm{supp}\nu \subseteq K$$

$$\langle \nu, f\rangle \geqslant f(\langle \nu, id\rangle), f \text{ kvazikonveksna } \}$$

točno sadrži homogene gradijentne Youngove mjere nošene na K. Slično se definiraju skupovi $\mathcal{M}^{rc}$ i $\mathcal{M}^{pc}$ koji , respektivno, korespondiraju konveksnim funkcijama ranga 1 i polikonveksnim funkcijama.

Na ovom mjestu napomenimo da oznaku $\langle \nu, id\rangle$ treba shvatiti kako slijedi. Naime, radi se o matrici oblika

$$\langle \nu, id\rangle := \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} \mathbf{F} d\nu(\mathbf{F}) \;,$$

a koja je dobivena uzastopnom primjenom osnovnog teorema o Youngovim mjerama na neprekinuta preslikavanja $f_{i,j} : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ definirane s $f_{i,j}(\mathbf{F}) := F_{i,j}$, uz $\mathbf{F} = (F_{i,j})$.

Kako je svaka minora M kvaziafina funkcija, to primjena uvjeta (iii) na $\pm M$ daje nužni uvjet

$$\langle \nu_{\mathbf{x}}, M\rangle = M(\langle \nu, id\rangle)$$

za gradijentne Youngove mjere.

Ovaj uvjet zapravo direktno slijedi iz razmatranja u poglavlju 1 (vidi Teorem I.1, tvrdnja (i)) i ne zahtjeva rezultat Teorema 15. Relacije dobivene korištenjem minora kao test funkcija vrlo su korisne u rješavanju problema koji pokazuju visok stupanj simetrije, primjerice kod kristalnih mikrostruktura (isp. [Bh 92]), ali ovaj postupak općenito ne daje dovoljno informacija o strukturi materijala.

Bez dokaza navodimo i analogon Teorema 15 za slučaj $p \in [1, \infty\rangle$ i njegovu primjenu na relaksaciju dovoljno široke klase funkcionala.

Teorem 16. *Neka je $p \in [1, \infty\rangle$. Slabo-$*$ izmjerivo preslikavanje $\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d})$ je $\mathrm{W}^{1,p}$-gradijentna Youngova mjera ako i samo ako je $\nu_{\mathbf{x}} \geqslant 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) i i postoje kompaktan skup $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ i preslikavanje $\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(i) $\int_\Omega \int_{\mathrm{M}_{r\times d}} |\mathbf{F}|^p d\nu_{\mathbf{x}}(\mathbf{F}) dx < \infty$

(ii) $\langle \nu_{\mathbf{x}}, id\rangle = \nabla \mathsf{u}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

(iii) *Za svaku kvazikonveksnu* $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ *za koju je ispunjeno* $|f|(\mathbf{F}) \leqslant C(|\mathbf{F}|^p + 1)$ *vrijedi*
$\langle \nu_{\mathbf{x}}, id\rangle \geqslant f(\langle \nu_{\mathbf{x}}, id\rangle)$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

∎

Nadalje, ako funkcional

$$I(u) := \int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$$

proširimo do funkcionala

$$J(\boldsymbol{\nu}) := \int_\Omega \langle \nu_{\mathbf{x}}, f\rangle d\mathbf{x} \ ,$$

i za fiksiranu $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ definiramo prirodne klase

$$\mathcal{A} := \{\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r); \mathsf{u} - \mathsf{v} \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^r) \ ,$$

$$\mathcal{G} := \{\boldsymbol{\nu} : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d}) : \boldsymbol{\nu} \text{ je gradijentna Youngova mjera } .$$
$$\langle \nu_{\mathbf{x}}, id\rangle = \nabla \mathsf{u} \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega), u \in \mathcal{A}\} \ ,$$

vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 17. *Pretpostavimo da je* f *neprekinuta i takva da za neke* $C, c > 0$ *i* $p > 1$ *vrijedi*

$$c|\mathbf{F}|^p \leqslant f(\mathbf{F}) \leqslant C(|\mathbf{F}|^p + 1) \ .$$

Tada je

$$\inf_{\mathsf{u}\in\mathcal{A}} I(\mathsf{u}) = \min_{\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{G}} J(\boldsymbol{\nu}) \ .$$

Štoviše, minimizatori za J *su Youngove mjere generirane gradijentima minimizirajućih nizova za* I*. Specijalno,* I *ima minimizator u klasi* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako postoji minimizator* $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{G}$ *za* J *za koji vrijedi da je* $\nu_{\mathbf{x}}$ *Diracova masa za skoro svaki* $\mathbf{x} \in \Omega$*.*

∎

5. Konveksne ovojnice i rješenje relaksacijske zadaće

U ovom odjeljku vraćamo se na zadaću 3 formuliranu u poglavlju 2. Trebat će nam slijedeći pojmovi

Definicija.

(i) Konveksna (polikonveksna, kvazikonveksna, konveksna ranga 1, separatno konveksna) ovojnica funkcije $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ je najveća konveksna (polikonveksna, kvazikonveksna, konveksna ranga 1, separatno konveksna) funkcija koja je po točkama manja ili jednaka funkciji f, a koju označavamo s f^c (f^{pc}, f^{qc}, f^{rc}, f^{sc}).

(ii) Kvazikonveksna ovojnica kompaktnog skupa $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ (u oznaci K^{qc}) po definiciji je

$$K^{qc} := \{\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d} : f(\mathbf{F}) \leqslant \sup_K f \quad \text{za svaku kvazikonveksnu } f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}\} \ .$$

Analogno se definiraju i konveksna, polikonveksna, konveksna ranga 1 i separatno konveksna ovojnica kompaktnog skupa $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ koje redom označavamo s K^c, K^{pc}, K^{rc}, K^{sc}.

(iii) Skup $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ kvazikonveksan ako vrijedi $K = K^{qc}$, uz analogne definicije u drugim slučajevima.
Primijetimo da je K^c zatvorena konveksna ovojnica skupa K.

(iv) Skup $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ je laminacijski konveksan ako je ispunjen uvjet

$$(\forall\, \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathrm{M}_{r\times d})(r(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = 1)(\forall\, \lambda \in \langle 0,1\rangle) \quad \lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B} \in K \;.$$

S K^{lc} označavamo najmanji laminacijski konveksan skup takav da je $K \subseteq K^{lc}$.

Iz Leme 1 i primjera navedenih u odjeljku 2 ovog poglavlja za $r, d \geqslant 2$ slijedi

$$f^c \leqslant f^{pc} \leqslant f^{qc} \leqslant f^{rc} \leqslant f^{sc} \leqslant f \;,$$

te vrijede inkluzije

$$K^{sc} \subset K^{rc} \subseteq K^{qc} \subset K^{pc} \subset K^c \;.$$

Štoviše, ako je $d \geqslant 2$ i $r \geqslant 3$ tada $K^{rc} \subset K^{qc}$. Nadalje, prisjetimo li se elemetarne činjenice da je zatvorena konveksna ovojnica kompaktnog skupa u $\mathrm{M}_{r\times d}$ kompaktan skup, (konveksna ovojnica je sigurno ograničen skup jer je, recimo, proizvoljna kugla koja sadrži polazni skup konveksna) kao posljedicu imamo zaključak da su za $K \in \mathcal{K}(\mathrm{M}_{r\times d})$ i

$$K^{pc}, K^{qc}, K^{rc}, K^{sc} \in \mathcal{K}(\mathrm{M}_{r\times d}) \;.$$

Lema 3. *Neka je $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$. Tada vrijedi*

(i) $K^{lc} \subseteq K^{rc}$

(ii) $K^{lc} = \bigcup_{i=1}^{\infty} K^{(i)}$, *gdje je*

$K^{(1)} := K$, $K^{(i+1)} := K^{(i)} \cup \{\lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}; \mathbf{A},\mathbf{B} \in K^{(i)}, r(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = 1, \lambda \in \langle 0,1\rangle\}$, $i \geqslant 2$.

Dem.

(i) Dosta je pokazati da je skup K^{rc} laminacijski konveksan. Za $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathrm{M}_{r\times d}$, $r(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 1$, $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ i proizvoljnu funkciju f koja je konveksna ranga 1 preostaje uočiti da vrijedi

$$f(\lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}) \leqslant \lambda f(\mathbf{A}) + (1-\lambda) f(\mathbf{B}) \leqslant \lambda \sup_K f + (1-\lambda)\sup_K f = \sup_K f \;.$$

(ii) Tvrdimo da je za svaki $i \in \mathbf{N}$ $K^{(i)} \subseteq K^{lc}$. Dokaz trivijalno slijedi indukcijom po $i \in \mathbf{N}$. Za $i = 1$ tvrdnja slijedi iz definicije. Pretpostavimo li da za $i \in \mathbf{N}$ vrijedi $K^{(i)} \subseteq K^{lc}$, za proizvoljnu $\mathbf{F} \in K^{(i+1)}$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je oblika $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}; \mathbf{A},\mathbf{B} \in K^{(i)}, r(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = 1$, uz $\lambda \in \langle 0,1\rangle$. Stoga je $\mathbf{F} \in [K^{(i)}]^{lc}$, odnosno $\mathbf{F} \in K^{lc}$, budući da su operacije uzimanja konveksnih ovojnica monotone obzirom na inkluziju.

Za dokaz obratne inkluzije dovoljno je provjeriti da je $\cup_{i=1}^{\infty} K^{(i)}$ laminacijski konveksan, pa će tvrdnja slijediti iz minimalnosti. U tu svrhu, neka su $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \cup_{i=1}^{\infty} K^{(i)}$ matrice koje zadovoljavaju $r(\mathbf{B}-\mathbf{A}) = 1$. S obzirom na to da je niz $(K^{(i)})$ rastući, možemo pretpostaviti da postoji indeks $j \in \mathbf{N}$ takav da je $\mathbf{A},\mathbf{B} \in K^{(j)}$. Po konstrukciji tada vrijedi

$$(\forall\, \lambda \in \langle 0,1\rangle) \quad \lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B} \in K^{(j+1)} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K^{(i)} \;,$$

čime je tvrdnja (ii) pokazana.

Q.E.D.

Naredna jednostavna lema pokazuje da je određivanje polikonveksne ovojnice najjednostavnija zadaća i da se, u neku ruku, svodi na računanje konveksne ovojnice nekog drugog povoljno odabranog skupa.

Lema 4. *Neka je za* $K \subset \mathrm{M}_{r\times d}$ $\tilde{K}$ *definiran s* $\tilde{K} := \{\mathbf{M}(\mathbf{F}) : \mathbf{F} \in K\}$. *Tada je*

$$K^{pc} = \{\mathbf{F} : \mathbf{M}(\mathbf{F}) \in (\tilde{K})^c\} \;.$$

Štoviše, vrijedi

$$K^{pc} = \{\langle \nu, id\rangle : \nu \in \mathcal{M}^{pc}(K)\} \;.$$

Dem. Po definiciji je $\mathbf{M}(\mathbf{F}) \in (\tilde{K})^c$ ako i samo ako za proizvoljnu konveksnu g vrijedi

$$g(\mathbf{M}(\mathbf{F})) \leqslant \sup_{\mathbf{G}\in K} g(\mathbf{M}(\mathbf{G})) \;,$$

što je po definiciji polikonveksnosti ekvivalentno zahtjevu

$$f(\mathbf{F}) \leqslant \sup_{\mathbf{G}\in K} f(\mathbf{G})$$

za sve polikonveksne f, i tvrdnja je dokazana.

Q.E.D.

Da bismo pokazali da se rješavanje zadaće 3 (relaksacijska zadaća) za skup K svodi na određivanje kvazikonveksne ovojnice K^{qc} trebat će nam najprije sljedeći tehnički rezultat:

Lema 5. (Zhangova lema) *Neka je* $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ *kompaktan skup, te* U *ograničena domena u* $\mathbf{R}^d$ *takve da je* $\mu(\partial U) = 0$. *Neka je, nadalje,*

$$|K|_\infty := \sup\{|\mathbf{F}| : \mathbf{F} \in K\} \;.$$

(i) Ako je $\mathsf{u}_n \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$ *niz takav da vrijedi*

$$d(\nabla \mathsf{u}_n, K) \xrightarrow{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)} 0 \;,$$

tada postoji niz $\mathsf{v}_n \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$ *koji zadovoljava*

$$|\nabla \mathsf{v}_n| \leqslant c(d,r)|K|_\infty \;,$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \neq \mathsf{v}_n(\mathbf{x})\} = 0 \;.$$

(ii) Ako je $\mathsf{u}_n \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U;\mathbf{R}^r)$ *niz takav da vrijedi*

$$d(\nabla \mathsf{u}_n, K) \xrightarrow{\mathrm{L}^1(U)} 0 \;, \quad \mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)} \mathsf{u} \;,$$

tada postoji niz $\mathsf{v}_n \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U;\mathbf{R}^r)$ *koji zadovoljava*

$$|\nabla \mathsf{v}_n| \leqslant c(d,r)|K|_\infty \;,$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \neq \mathsf{v}_n(\mathbf{x})\} = 0 \;, \quad \mathsf{v}_n = \mathsf{u} \;\; \textit{na nekoj okolini } \partial U \;.$$

∎

Dio (i) je varijanta Leme 3.1. iz [Zh 92]. Alternativno, ova tvrdnja slijedi iz dokaza Teorema 6.6.3. iz [EG 92], str 254–255, uzimajući $\lambda := 3C|K|_\infty$. Dio (ii) slijedi primjenom uobičajenog argumenta lokalizacije, vidi [Mü 97a].

Teorem 18. *Neka je $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ kompakt i $\mathbf{F} \longrightarrow d_K(\mathbf{F})$ funkcija udaljenosti do skupa K. Tada vrijedi*
(i) $K^{app} = K^{qc}$
(ii) $K^{qc} = \{\mathbf{F} \in \mathrm{M}_{r\times d} : (d_K)^{qc}(\mathbf{F}) = 0\}$
(iii) K^{qc} *je skup svih baricentara homogenih gradijentnih Youngovih mjera:*

$$K^{qc} = \{\langle \nu, id\rangle : \nu \in \mathcal{M}^{qc}(K)\} \ .$$

Dem.
(i) Da pokažemo da je $K^{app} \subseteq K^{qc}$ fiksirajmo $\mathbf{F} \in K^{app}$ i kvazikonveksnu $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$. Nadalje, neka je (u_k) ograničen niz u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ koji zadovoljava pretpostavke iz definicije skupa K^{app}. Preciznije, neka vrijedi

$$d(\nabla \mathsf{u}_k, K) \xrightarrow{\ \mu\ } 0 \ , \quad \mathsf{u}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad na \quad \partial\Omega \ .$$

Prema Teoremu 9 f je lokalno Lipschitzova, te postiže supremum na kompaktu K. Stoga očito možemo pretpostaviti da je $\sup_K f = 0$. To drugim riječima znači da je $f^+ \in \mathrm{C}^K(\mathrm{M}_{r\times d})$, te po Teoremu $I.1$ vrijedi $f^+(\nabla \mathsf{u}_k) \xrightarrow{\ \mu\ } 0$. Kako je slika niza $\nabla \mathsf{u}_k$ u nekom fiksnom kompaktu u $\mathbf{R}$, to je $|f^+(\nabla \mathsf{u}_k)| \leqslant C$, te po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_k \int_\Omega |f^+(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = 0 \ .$$

S druge strane, definiramo li niz $\mathsf{w}_k(\mathbf{x}) := \mathsf{u}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{F}\mathbf{x}$, rubni uvjet na u_k daje $\mathsf{w}_k \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te zbog kvazikonveksnosti funkcije f slijedi

$$f(\mathbf{F}) \leqslant \liminf_k \int_\Omega f(\mathbf{F} + \nabla \mathsf{w}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \liminf_k \int_\Omega f(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$$

$$\leqslant \liminf_k \int_\Omega f^+(\nabla \mathsf{u}_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = 0 \ .$$

Dakle je $f(\mathbf{F}) \leqslant 0 = \sup_K f$, odnosno $\mathbf{F} \in K^{qc}$.

Da pokažemo obratnu inkluziju, najprije primijetimo da $f|_K = 0 \,\& f \geqslant 0 \Rightarrow f^{qc}|_K = 0$. Zaista, kako je $f^{qc} = \sup\{g \leqslant f : g = g^{qc}\}$, to iz $f \geqslant 0$ zbog konveksnosti konstanti slijedi $f^{qc} \geqslant 0$, te je

$$f^{qc}|_K = \{0 \leqslant g|_K \leqslant f|_K = 0; g = g^{qc}\} \ ,$$

odnosno $f^{qc}|_K = 0$.

Specijalno je $\sup_K d_K^{qc} = 0$. Stoga za proizvoljnu $\mathbf{F} \in K^{qc}$ vrijedi $d_K^{qc}(\mathbf{F}) = 0$, odnosno vrijedi $K^{qc} \subseteq \{d_K^{qc} = 0\}$. Reprezentacija kvazikonveksne ovojnice funkcije d_K (vidi Teorem 12) daje

$$0 = d_K^{qc}(\mathbf{F}) = \lim_k \int_\Omega d_K(\mathbf{F} + \varphi_k(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \ ,$$

pri čemu vrijedi $\varphi_k \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$.

Definirajmo niz $\mathsf{u}_k(\mathbf{x}) := \mathbf{F}\mathbf{x} + \varphi_k(\mathbf{x})$. Očito se radi i Lipschitzovim funkcijama koje zadovoljavaju rubni uvjet iz formulacije zadaće za K^{app}. Tvrdimo da možemo konstruirati i niz koji bi zadovoljavao gornju relaciju i bio ograničen u $\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$. Zaista, kako niz (u_k) zadovoljava odgovarajuće pretpostavke, traženi zaključak slijedi iz Zhangove leme.

(ii) Već smo pokazali da vrijedi $K^{qc} \subseteq \{d_K^{qc} = 0\}$. S druge strane, ako je $(d_K)^{qc}(\mathbf{F}) = 0$, po (i) je tada $\mathbf{F} \in K^{app}$, te, ponovno po (i), $\mathbf{F} \in K^{qc}$.

(iii) Neka je najprije $\nu \in \mathcal{M}^{qc}(K)$. Po Teoremu 14, ν je homogena gradijentna Youngova mjera koja zadovoljava supp$\nu \subseteq K$ i $f(\langle\nu, id\rangle) \leqslant \langle\nu, f\rangle$, pri čemu je f proizvoljna kvazikonveksna funkcija. Kako je $||\nu|| \leqslant 1$, to vrijedi $\langle\nu, f\rangle \leqslant \sup_K f$, te uz $\mathbf{F} := \langle\nu, id\rangle$, i imamo $f(\mathbf{F}) \leqslant \sup_K f$, te je $\mathbf{F} \in K^{qc}$.

Ako je $\mathbf{F} \in K^{qc}$, tvrdimo da postoji $\nu \in \mathcal{M}^{qc}(K)$ takva da je $\langle\nu, id\rangle = \mathbf{F}$. Nakon afine transformacije koordinata možemo postići da je $F = 0$. Kako je po (i) tada $0 \in K^{app}$. to postoji niz $\mathsf{u}_k \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ koji zadovoljava uvjete iz definicije Zadaće 3. Stoga do na podniz vrijedi $\mathsf{u}_k \xrightarrow{*} \mathsf{u}$ u $\mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, odnosno $id \circ \mathsf{u}_k \xrightarrow{\mathrm{L}^1} id \circ \mathsf{u}$, te po osnovnom teoremu o Youngovim mjerama imamo

$$\int_\Omega \langle\nu_{\mathbf{x}}, id\rangle d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0; ,$$

pri čemu posljednja jednakost slijedi iz Gaussovog teorema.

Definiramo li mjeru $\overline{\nu}$ s

$$\langle\overline{\nu}, \psi\rangle := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \langle\nu_{\mathbf{x}}, \psi\rangle d\mathbf{x} ,$$

gdje je $\psi \in \mathrm{C}_0(\Omega)$, očito vrijedi $\langle\overline{\nu}, id\rangle = 0$, a kako je $\mathsf{u} \in \mathrm{W}_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ kvazikonveksnost od f i Gaussov teorem daju nejednakosti

$$\langle\overline{\nu}, f\rangle \geqslant \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(\langle\nu_{\mathbf{x}}, id\rangle) d\mathbf{x} = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f(\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \geqslant f\left\{\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right\} = f(0) .$$

Q.E.D.

6. Šverakov protuprimjer

O ovom odjeljku načinit ćemo kratak osvrt na Šverakov protuprimjer, koji je nakon dugo vremena potvrdio Morreyjevu slutnju iz 50-tih godina ovog stoljeća da, općenito, postoje funkcije konveksne ranga 1 koje nisu kvazikonveksne. Također navodimo kompleksnu inačicu Šverakovog originalnog primjera koji, uz rezultat Miltona (isp. [Mi 98]), služi kao primjer da općenito vrijedi $K^{rc} \neq K^{qc}$. Napominjemo da su ova pitanja u dimenzijama $r = d = 2$ i dalje otvorena. Nadalje, razmotrit ćemo i neke posljedice takvog rezultata, primjerice rezultat Kružika (isp. [Kr 97]) kojim je dan negativan odgovor na Albertijevu slutnju (vidi početak poglavlja).

Teorem 19. (Šverak, 1992) *Pretpostavimo da je $r \geqslant 3$ i $d \geqslant 2$. Tada postoji funkcija $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ koja je konveksna ranga 1, ali nije kvazikonveksna.*

Dem. Promotrimo periodičnu funkciju $\mathsf{u} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$

$$\mathsf{u}(x_1, x_2) := \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \sin 2\pi x_1 \\ \sin 2\pi x_2 \\ \sin 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix} .$$

Tada vrijedi

$$\nabla\mathsf{u}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi x_2 \\ \cos 2\pi(x_1 + x_2) & \cos 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix} ,$$

te je

$$L := \mathrm{span}\{\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbf{R} \right\} .$$

Primijetimo da su jedine matrice ranga 1 koje leže u L one koje zadovoljavaju $t = s = 0$ ili $t = r = 0$, ili $r = s = 0$. Specijalno je funkcija $g : L \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s

$$g(\mathbf{F}) := -rst$$

konveksna ranga 1, zapravo afina ranga 1. S druge strane je

$$\text{(2)} \qquad \int_{\langle 0,1 \rangle^2} g(\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\frac{1}{4} < 0 = g(0) .$$

Da pokažemo tvrdnju teorema, dovoljno je pokazati da je funkciju g moguće proširiti s potprostora L na cijeli $\mathrm{M}_{3\times 2}$. Odgovor na ovo pitanje nije poznat. Ipak, pokazat ćemo da postoji funkcija koja je konveksna ranga 1 na $\mathrm{M}_{3\times 2}$ i koja se *gotovo* podudara s g.

Neka je P operator ortogonalne projekcije na potprostor L. Promotrimo polinom

$$f_{\varepsilon,k}(\mathbf{F}) := g(P\mathbf{F}) + \varepsilon(|\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{F}|^4) + k|\mathbf{F} - P\mathbf{F}|^2 .$$

Tvrdimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k(\varepsilon) > 0$ takav da je $f_{\varepsilon,k(\varepsilon)}$ konveksna ranga 1. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da $f_{\varepsilon,k}$ nije konveksna ranga 1 za niti jedan $k > 0$. Prema već pokazanom, tada postoje $\mathbf{F}_k \in \mathrm{M}_{r\times d}$, $\mathsf{a}_k \in \mathbf{R}^r$, $\mathsf{b}_k \in \mathbf{R}^d$ tako da vrijedi $|\mathsf{a}_k| = |\mathsf{b}_k| = 1$ i

$$\mathsf{D}^2 f_{\varepsilon,k}(\mathbf{F}_k)(\mathsf{a}_k \otimes \mathsf{b}_k, \mathsf{a}_k \otimes \mathsf{b}_k) \leqslant 0 .$$

Sada je

$$\mathsf{D}^2 f_{\varepsilon,k}(\mathbf{F})(\mathbf{X}, \mathbf{X}) =$$
$$\mathsf{D}^2 g(P\mathbf{F})(P\mathbf{X}, P\mathbf{X}) + 2\varepsilon|\mathbf{X}|^2 + \varepsilon(4|\mathbf{F}|^2|\mathbf{X}|^2 + 8|\mathbf{F}\cdot\mathbf{X}|^2) + k|\mathbf{X} - P\mathbf{X}|^2 .$$

Prvi član $\mathsf{D}^2 g(P\mathbf{F})$ je linearan u F, dok je treći član na desnoj strani kvadratičan i pozitivno definitan. Stoga je niz $(\mathbf{F}_k)$ ograničen, te prijelazom na podniz možemo pretpostaviti da vrijedi $\mathbf{F}_k \longrightarrow \overline{\mathbf{F}}$, $\mathsf{a}_k \longrightarrow \overline{\mathsf{a}}$, $\mathsf{b}_k \longrightarrow \overline{\mathsf{b}}$. Kako je $f_{\varepsilon,k} \geqslant f_{\varepsilon,j}$ za $k \geqslant j$, zaključujemo da vrijedi

$$(\forall\, j \geqslant k) \quad \mathsf{D}^2(P\mathbf{F})(P\overline{\mathsf{a}} \otimes \overline{\mathsf{b}}, P\overline{\mathsf{a}} \otimes \overline{\mathsf{b}} + 2\varepsilon j|\overline{\mathsf{a}} \otimes \overline{\mathsf{b}} - P\overline{\mathsf{a}} \otimes \overline{\mathsf{b}}|^2 \leqslant 0 .$$

Stoga je $P\overline{\mathsf{a}} \otimes \overline{\mathsf{b}} = \overline{\mathsf{a}} \otimes \overline{\mathsf{b}}$, odnosno vrijedi $\overline{\mathsf{a}} \otimes \overline{\mathsf{b}} \in L$. Stoga je $t \longrightarrow g(P(\overline{F} + t\overline{\mathsf{a}} \otimes \overline{\mathsf{b}}))$ afina, i prvi član u gornjoj nejednakosti je jednak nuli. Dakle je $\varepsilon \leqslant 0$, —sto je kontradikcija.

Time je pokazano da postoji par $(\varepsilon, k(\varepsilon)) \in \langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle$ za koji je $f_{\varepsilon,k(\varepsilon)}$ konveksna ranga 1 na cijelom $\mathrm{M}_{3\times 2}$.

Na kraju, lako se vidi da uz dovoljno malen $\varepsilon > 0$ možemo sačuvati ocjenu iz (2), te $f_\varepsilon := f_{\varepsilon,k(\varepsilon)}$ nije kvazikonveksna.

Q.E.D.

Korolar 1. *Postoji skup $K \subseteq \mathrm{M}_{6\times 2}$ takav da vrijedi*

$$K^{qc} \neq K^{rc} .$$

Dem. Ideja je promatrati kompleksni analogon Šverakovog primjera iz prethodonog teorema. Uz uobičajenu identifikaciju $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ uz $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot i$ definiramo

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \\ z_3 & z_3 \end{pmatrix} : z_i \in \mathbf{C}, |z_i| = 1, z_3 = z_1 z_2 \right\} .$$

Stavimo $L := \mathrm{span} K$ i neka je P, kao i ranije, ortogonalna projekcija na L. Periodička funnkcija $\mathsf{w} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definirana s

$$\mathsf{w}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} e^{ix_1} \\ e^{ix_2} \\ e^{(ix_1 + x_2)} \end{pmatrix}$$

zadovoljava uvjet $\nabla \mathsf{w} \in K$.

Uz pomoć tvrdnje (ii) iz Teorema 18 lako se vidi da je $0 \in K^{qc}$. Tvrdimo da je

$$K^{qc} = K^{pc} = K \cup \{0\} .$$

Da to pokažemo, promatrajmo funkciju $g : L \longrightarrow \mathbf{R}$ definiranu s

$$g(z_1, z_2, z_3) := |z_1 z_2 - z_3|^2 + |\overline{z_2} z_3 - z_1|^2 + |z_3 \overline{z_1} - z_2|^2$$

i uočimo da g ima nultočke točno na skupu $K \cup \{0\}$. Tvrdimo da g možemo proširiti da polikonveksne, nenegativne funkcije f na cijelom $\mathbf{C}^{3\times 2} = \mathrm{M}_{6\times 2}$. Zaista, uz

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

možemo uzeti

$$f(\mathbf{F}) := |\det(F_1, F_2) - F_{31}|^2 + |\det(\overline{F_2}, F_2) - F_{11}|^2 + |\det(F_3, \overline{F_1}) - F_{22}|^2 + |\mathbf{F} - P\mathbf{F}|^2 .$$

Stoga je $K^{pc} \subseteq K \cup \{0\}$, i nadalje, $K^{pc} = K \cup \{0\}$ budući da je $0 \in K^{qc} \subseteq K^{pc}$. Štoviše, vrijedi ili $K^{rc} = K$ ili $K^{rc} = K \cup \{0\}$. Rezultat Pedregala (isp. [Pe 93]) garantira da je $K^{rc} = K$, i tvrdnja je dokazana.

Q.E.D.

Korolar 2. (Kružik, 1997) *Postoji funkcija* $f : \mathrm{M}_{3\times 2} \longrightarrow \mathbf{R} \bigcup \{+\infty\}$ *koja nije kvazikonveksna, i takva da je funkcija* $\tilde{f} : \mathrm{M}_{2\times 3} \longrightarrow \mathbf{R} \bigcup \{+\infty\}$ *definirana s*

$$\tilde{f}(\mathbf{F}) := f(\mathbf{F}^\tau)$$

kvazikonveksna.

Dem. Definirajmo $F : \mathrm{M}_{3\times 2} \longrightarrow \mathbf{R} \bigcup \{+\infty\}$ s

$$f(\mathbf{F}) := \begin{cases} -rst & \text{za } \mathbf{F} \in L, \\ +\infty & \text{inače }, \end{cases}$$

gdje je, kao u prethodnom,

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbf{R} \right\} .$$

Već je pokazano da f nije kvazikonveksna, te preostaje pokazati da je $\tilde{f}$ kvazikonveksna. Prema Teoremu 7 ekvivalentno je pokazati da vrijedi

$$\int_{\langle 0,1\rangle^3} \tilde{f}(\mathbf{F} + \nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \tilde{f}(\mathbf{F}) ,$$

za svaku periodičnu i Lipschitzovu funkciju $\mathsf{u} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Ukoliko je $(\mathbf{F} + \nabla\mathsf{u})^\tau \in \mathrm{M}_{3\times 2}\backslash L$, iz definicije funkcije f vidimo da je nejednakost ispunjena trivijalno. Neka je stoga $(\mathbf{F} + \nabla\mathsf{u})^\tau \in L$. Kako je $\int_{\langle 0,1\rangle^3} \nabla\mathsf{u}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$, to imamo $\mathbf{F}^\tau \in L$ ili $(\nabla\mathsf{u})^\tau \in L$. Dakle je

$$\partial_2 u_1 = \partial_1 u_2 = 0 \ , \quad \partial_3(u_1 - u_2) = 0 \ .$$

Vidimo da u_1 ne ovisi o x_2, dok u_2 ne ovisi o x_1, te slijedi

$$\partial_1\partial_3 u_1 = \partial_2\partial_3 u_2 = 0 \ ,$$

odnosno

$$u_1 = a(x_1) + b(x_3) \ , u_2 = c(x_2) + d(x_3) \ ,$$
$$\nabla\mathsf{u} = \begin{pmatrix} a'(x_1) & 0 & b'(x_3) \\ 0 & c'(x_2) & d'(x_3) \end{pmatrix} .$$

Konačno, primjenom Fubinijevog teorema i činjenice da je f konveksna ranga 1 slijedi tvrdnja korolara.

Q.E.D.

Na kraju napomenimo da nedavni rezultat S. Müllera (isp. [Mü 98]) pokazuje da gornji rezultat vrijedi i za kvazikonveksne funkcije.

V. Kvazikonveksifikacija i homogenizacija u $\mathrm{W}^{1,p}$

1. Iskaz zadaće

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se problem određivanja kvazikonveksne ovojnice prirodno pojavljuje u homogenizaciji. Cilj našeg razmatranja bit će proučavanje H–konvergencije za nelinearnu eliptičku jednadžbu s p–rastom u gradijentu. Preciznije, zanimat će nas vrijedi li rezultat koji daje egzistenciju H–konvergentnog podniza koeficijenata A^n čiji su pripadni (nelinearni) operatori A^n u odgovarajućoj klasi funkcija, te garantira da je jednadžba koja se dobije na limesu ponovno istog tipa. Kao što ćemo vidjeti, takav zaključak ćemo moći dokazati samo u slučaju $p = 2$, što je posljedica činjenice da su izvjesne funkcije nisu kvazikonveksne. Zbog potpunosti navodimo precizne tvrdnje koje su potrebne da bi se dokazao takav rezultat (Teorem 3). Napomenimo da su pomoćne leme tehničkog karaktera često iskazane u većoj općenitosti nego što to zahtijeva njihova primjena u dokazu Teorema 3.

U ovom odjeljku dat ćemo kratak pregled dosadašnjih rezultata za zadaće neperiodične homogenizacije. Prve od njih dugujemo Tartaru (isp. [Ta 77], [Ta 97]) i Muratu (isp. [Mu 78]). Njihova metoda temelji se na apstraktnoj konvergenciji koeficijenata (nazvanoj H–konvergencija) gdje pripadni H–limes sadrži informaciju o svojstvima homogeniziranog koeficijenta. Najjednostavniji primjer je homogenizacija linearne jednadžbe stacionarne difuzije. Vodljivost materijala opisana je matricama koje zadavoljavaju odgovarajuće ocjene. Preciznije, definiramo klasu $\mathbf{M}(\alpha, \beta; \Omega)$ kao skup svih preslikavanja $\mathsf{A} : \Omega \longrightarrow \mathrm{M}_{d\times d}$ za koje vrijedi

(i) $\mathsf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant \alpha|\mathbf{a}|^2$,
(ii) $\mathsf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant \frac{1}{\beta}|\mathsf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}|^2$.

Kažemo da niz A^n H–konvergeira k A^∞ ako za proizvoljnu $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ niz rješenja $u_n \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ za jednadžbu

$$-\mathsf{div}\, \mathsf{A}^n \nabla u_n = f$$

zadovoljava

$$u_n \xrightarrow{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} u_\infty \ ,$$
$$\mathsf{A}^n \nabla u_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^d)} \mathsf{A}^\infty \nabla u_\infty \ ,$$

pri čemu je $u_\infty \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ rješenja gornje jednadžbe za $n = \infty$.

Osnovni teorem H–konvergencije govori da svaki niz u klasi $\mathbf{M}(\alpha, \beta; \Omega)$ ima H–konvergentan podniz. Može se pokazati da H–konvergencija dolazi od prirodne slabe topologije (isp. [Ta 97], [MV]). U ovom specijalnom slučaju postoje i brojni drugi rezultati o H–limesima, kao što su neovisnost o rubnim uvjetima, lokalizacija, pozitivnost, stabilnost, egzistencija korektora i tome slično (isp. [Ta 97]).

Mnogi od ovih rezultata vrijede za nelinearnu jednažbu stacinarne difuzije uz linearne ocjene na nelinearni član, kao i za pripadne paraboličke jednadžbe. U nelinearnom slučaju svojstvo kompaktnosti ostaje i dalje sačuvano, ali je dokaz nešto složeniji. S druge strane, kako za nelinearne operatore nema prirodne generalizacije pojma transponiranog operatora, to nema niti rezultata pozitivnosti i stabilnosti.

Do 90-tih godina nije bilo bitnog pomaka po pitanju primjene tehnika uvedenih od strane Tartara i Murata na jednadžbe drugog tipa: valne jednažbe, semilinearne jednažbe provođenja ili kvazilinearne jednadžbe provođenja s p–rastom u gradijentu.

Rezultate za semilinearne jednadžbe dobili su najprije Boccardo i Vecchio (isp. [BV 91]), a zatim i Bensoussan, Boccardo i Murat (isp. [BBM 92]). Njihova metoda zasnovana je na preciznim L^∞–ocjenama na rješenja i rezultatima konvergencije za niz *rezanih* rješenja.

Mi pokušavamo primijeniti opisane ideje na jednadžbu

$$-\mathsf{div}\, |\nabla u|^{p-2}\nabla u = f \ ,$$

gdje je $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ i $u \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$. Kao što će slijediti iz narednog odjeljka, ova jednadžba je dobro postavljena te je moguće direktno primijeniti tehnike kao za slučaj $p = 2$.

2. Pripremni rezultati

Započnimo citiranjem poznatog Browder-Mintyjevog teorema, koji u teoriji nelinearnih jednadžbi ima istu ulogu koju u linearnom slučaju ima Lax-Milgramov teorem.

Teorem 1. *(Browder-Minty)*

Neka je V realan refleksivan Banachov prostor i $A : V \longrightarrow V'$ (nelinearan) operator takav da vrijedi:

(1) $\|u_n - u\|_V \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|A(u_n) - A(u)\|_{V'} \longrightarrow 0$ *(neprekinutost)*

(2) Za svaki ograničen $X \subseteq V$ vrijedi $A(X) \subseteq V'$ je ograničen (ograničenost)

(3) $(\forall\, u, v \in V) \quad {}_{V'}\langle\, A(u) - A(v), u - v\,\rangle_V \geqslant 0$ *(monotonost)*

(4) $\lim_{\|u\|_V \longrightarrow\infty} \frac{{}_{V'}\langle\, A(u),u\,\rangle_V}{\|u\|_V} = \infty$ *(koercitivnost)*

Tada je A surjekcija na V', odnosno za svaki $f \in V'$ jednadžba

$$A(u) = f$$

ima bar jedno rješenje $u \in V$. ∎

Dokaz ovog teorema u slučaju da je V i *separabilan* (što će kod nas uvijek biti slučaj) provodimo Galjorkinovom metodom aproksimacije (isp. [RR 92]).

Korolar 1. *Neka je V realan refleksivan Banachov prostor i $A : V \longrightarrow V'$ nelinearan operator koji je (globalno) Lipschitzov i uniformno monoton, tj. vrijedi*

(1) $(\exists\, M > 0)(\forall\, u, v \in V) \quad \|A(u) - A(v)\|_{V'} \leqslant M\|u - v\|_V$

(2) $(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, u, v \in V) \quad {}_{V'}\langle\, A(u) - A(v), u - v\,\rangle_V \geqslant \alpha\|u - v\|^2_V$.

Tada je $A : V \longrightarrow V'$ bijekcija i $A^{-1} : V' \longrightarrow V$ je Lipschitzov (s konstantom $M^* := \frac{1}{\alpha}$) i uniformno monoton (s konstantom $\alpha^* := \frac{\alpha}{M^2}$).

Dem. Primijetimo da iz uvjeta (2) odmah slijedi da je A injekcija: Ako je $A(u) = A(v)$, onda je i $u - v = 0$ tj. $u = v$. Tvrdimo da su ispunjeni uvjeti Browder-Mintyjevog teorema. Očito je A monoton, neprekinut i ograničen. Želimo pokazati da je i koercitivan. Iz uvjeta uniformne monotonosti specijalno za $v := 0$ slijedi

$${}_{V'}\langle\, A(u) - A(0), u\,\rangle_V \geqslant \alpha\|u\|^2_V \ ,$$

te je i

$$\frac{{}_{V'}\langle\, A(u), u\,\rangle_V}{\|u\|_V} - \frac{{}_{V'}\langle\, A(0), u\,\rangle_V}{\|u\|_V} \geqslant \alpha\|u\|_V \ ,$$

odnosno

$$\frac{{}_{V'}\langle\, A(u), u\,\rangle_V}{\|u\|_V} \geqslant \alpha\|u\|_V + \frac{{}_{V'}\langle\, A(0), u\,\rangle_V}{\|u\|_V} \geqslant \alpha\|u\|_V - \|A(0)\|_{V'}\frac{\|u\|_V}{\|u\|_V} = \alpha\|u\|_V - \|A(0)\|_{V'} \ ,$$

odakle direktno imamo koercitivnost. Stoga je po Browder-Mintyjevom teoremu $A : V \longrightarrow V^{'}$ bijekcija. Preostaje provjeriti da je A^{-1} Lipschitzov s konstantom M^{*} i uniformno monoton s konstantom α^{*}. To zaključujemo na sljedeći način:

Za proizvoljne $f, g \in V^{'}$ definirajmo $u := A^{-1}(f), g := A^{-1}(v)$. Tada zbog uniformne monotonosti od funkcije A slijedi

$$ {}_V\langle\, A^{-1}(f) - A^{-1}(g), f - g\,\rangle_{V'} \geqslant \alpha\|A^{-1}(f) - A^{-1}(g)\|_V^2 \;. $$

Nadalje je

$$ \begin{aligned} \|A^{-1}(f) - A^{-1}(g)\|_V^2 &\leqslant \frac{1}{\alpha}{}_V\langle\, A^{-1}(f) - A^{-1}(g), f - g\,\rangle_{V'} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{V'}\,{}_V\langle\, A^{-1}(f) - A^{-1}(g), \frac{f-g}{\|f-g\|_{V'}}\,\rangle_{V'} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{V'} \sup_{\|h\|_{V'}\leqslant 1} {}_V\langle\, A^{-1}(f) - A^{-1}(g), h\,\rangle_{V'} \\ &= \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{V'}\|A^{-1}(f) - A^{-1}(g)\|_V \;, \end{aligned} $$

odakle je

$$ \|A^{-1}(f) - A^{-1}(g)\|_V \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{V'} \;. $$

Preostaje pokazati da je $A^{-1} : V^{'} \longrightarrow V$ uniformno monoton s konstantom $\frac{\alpha}{M^2}$. Iz Lipschitovosti funkcije A vidimo da vrijedi

$$ \|f-g\|_{V'} \leqslant M\|A^{-1}(f) - A^{-1}(g)\|_V \;. $$

Stoga je

$$ \|A^{-1}(f) - A^{-1}(g)\|_V \geqslant \frac{1}{M}\|f-g\|_{V'} \;. $$

S druge strane, iz izraza za monotonost funkcije A slijedi

$$ {}_V\langle\, A^{-1}(f) - A^{-1}(g), f - g\,\rangle_{V'} \geqslant \alpha\|A^{-1}(f) - A^{-1}(g)\|_V^2 $$

te je

$$ {}_V\langle\, A^{-1}(f) - A^{-1}(g), f - g\,\rangle_{V'} \geqslant \alpha(\frac{1}{M}\|f-g\|_{V'})^2 = \frac{\alpha}{M^2}\|f-g\|_{V'}^2 \;, $$

i A^{-1} je (globalno) Lipschitzov i uniformno monoton s odgovarajućim konstantama.

Q.E.D.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup. Kažemo da je $f : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ *Carathéodoryjeva* ako vrijedi

(1) $(\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ je izmjeriva
(2) $\boldsymbol{\xi} \mapsto f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ je neprekinuta (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) .

Na ovom mjestu prisjetimo se osnovnog teorema o operatoru Niemitzkog u slučaju $p = q = 2$:

Teorem 2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup, $f : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ Carathéodoryjeva i takva da postoji konstanta $b \geqslant 0$ i $a \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tako da je*

$$ (\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad |f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant a(\mathbf{x}) + b|\boldsymbol{\xi}| \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \;. $$

Tada za preslikavanje $N_f : u(\cdot) \mapsto f(\cdot, u)$ vrijedi $N_f \in \mathcal{C}(\mathrm{L}^2(\Omega), \mathrm{L}^2(\Omega))$. ∎

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup. Carathéodoryjeva funkcija $\mathsf{A} : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ je u klasi $\mathbf{Mon}(\alpha, \beta; \Omega)$ ako vrijedi:
(1) $(\forall \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \alpha |\mathsf{a} - \mathsf{b}|^2$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)
(2) $(\forall \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \frac{1}{\beta} |\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})|^2$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

U [Ta 97] pokazano je da je klasa $\mathbf{Mon}(\alpha, \beta; \Omega)$ stabilna na H–konvergenciju. Prateći osnovne korake iz te reference, nastavljamo naša razmatranja sljedećim apstraktnim rezultatima:

Lema 1. *Neka je (X, d_x) metrički prostor, (Z, d_z) potpun metrički prostor, te $Y \subseteq Z$. Neka je $A \subseteq X$ gust u X i $f : A \longrightarrow f(A) \subseteq Y$ neprekinuto preslikavanje koje je i lokalno uniformno neprekinuto, odnosno za koje vrijedi:*

za svaki $R > 0$ preslikavanje $f|_{A \cap K(0,R)} : A \cap K(0, R) \longrightarrow Y$ je uniformno neprekinuto.

Tada postoji jedinstveno neprekinuto proširenje po neprekinutosti $\overline{f} : X \longrightarrow Z$ koje je i lokalno uniformno neprekinuto. Štoviše, slika od $\overline{f}$ je sadržana je u zatvaraču skupa Y u topologiji prostora (Z, d_z).

Dem. Prije dokaza tvrdnji navedenih u teoremu, uočimo da je ova lema zapravo precizan iskaz klasičnog teorema o proširenju. Nadalje, napomenimo da je svojstvo lokalno uniformne neprekinutosti slabije od (globalne) uniformne neprekinutosti, a jače od neprekinutosti. Primjerice, za $X := \langle 0, 1 \rangle$, $Y := \mathbf{R}$ funkcija $f(x) := \frac{1}{x}$ je neprekinuta, ali nije lokalno uniformno neprekinuta. S druge strane, svaka neprekinuta funkcija na konačnodimenzionalnom normiranom prostoru nad $\mathbf{R}$ je nužno lokalno uniformno neprekinuta, ali očito ne mora biti i uniformno neprekinuta.

Sada ćemo dokazati tvrdnje iz teorema.

Najprije primijetimo da ukoliko uopće postoji proširenje po neprekinutosti, ono je nužno jedinstveno. Zaista, ako su $\overline{f}_1$ i $\overline{f}_2$ takva proširenja, tada je $\overline{f}_1|_A = \overline{f}_2|_A$, te je zbog gustoće skupa A u X i neprekinutosti od $\overline{f}_1$ i $\overline{f}_2$ zapravo $\overline{f}_1 = \overline{f}_2$.

Kako je A gust u X, to za svaki $x \in X$ postoji niz (a_n) takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$ $a_n \in A$ i da vrijedi $d_x(a_n, x) \longrightarrow 0$. Budući da je niz (a_n) konvergentan, to je, specijalno, ograničen i Cauchyjev, te vrijedi:

$$(\exists\, R > 0)(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad a_n \in K(0, R) \ ,$$

odnosno, zbog lokalne uniformne neprekinutosti od f

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, m, n \in \mathbf{N}) \quad d_x(a_n, a_m) < \delta \Longrightarrow d_z(f(a_n) f(a_m)) < \varepsilon$$

Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljan i $\delta > 0$ kao u prethodnom. Kako je (a_n) Cauchyjev u X, to vrijedi

$$(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall\, m, n \in \mathbf{N}) \quad n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow d_x(a_n, a_m) < \delta \ ,$$

i dakle

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall\, m, n \in \mathbf{N}) \quad n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow d_z(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon \ .$$

Stoga je i niz $f(a_n)$ Cauchyjev u Z. No, Z je potpun, pa vrijedi

$$(\exists\, L \in Z) \quad L = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(a_n) \ .$$

Tvrdimo da L ne ovisi o izboru niza a_n, već samo o izboru točke $x \in X$. Neka je (a_n^*) neki drugi niz u A takav da $d_x(a_n^*, x) \longrightarrow 0$. Tada i niz $a_1, a_1^*, a_2, a_2^*, \ldots, a_n, a_n^*, \ldots$ također konvergira prema x. Specijalno je dakle i ograničen, te zbog lokalne uniformne neprekinutosti od f vrijedi

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0) \quad (\forall\, \alpha, \beta \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \{a_j, a_j^*\}) \quad d_x(\alpha, \beta) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_z(f(\alpha), f(\beta) < \varepsilon \ .$$

Potpuno analogno kao ranije zaključujemo da je

$$f(a_1), f(a_1^*), f(a_2), f(a_2^*), \dots, f(a_n), f(a_n^*), \dots$$

Cauchyjev niz u Z, te zbog potpunosti konvergira k, recimo, $\tilde{L}$. No, svaki podniz gornjeg niza također konvergira, i to k istom limesu $\tilde{L}$. S druge strane, kako (a_n) konvergira k L, to mora vrijediti $\tilde{L} = L$. Time je pokazano da limes L ne ovisi o izboru niza (a_n).

Definirajmo prelikavanja $\overline{f} : X \longrightarrow Z$ s

$$\overline{f}(x) := \lim_{n \longrightarrow \infty} f(a_n) ,$$

gdje je (a_n) proizvoljan niz u A takav da $d_x(a_n, x) \longrightarrow 0$. Zbog upravo pokazane tvrdnje, definicija od $\overline{f}$ je dobra. Očito je $\overline{f}|_A = f$, odnosno $\overline{f}$ je proširenje od f.

Pokažimo da je $\overline{f} : X \longrightarrow Z$ lokalno uniformno neprekinuto preslikavanje.

Fiksirajmo $R > 0$. Tvrdimo da vrijedi:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x, x^* \in K(0,R)) \quad d_x(x, x^*) < \delta \Longrightarrow d_z(\overline{f}(x), \overline{f}(x^*)) < \varepsilon .$$

Neka su $x, x^* \in X \cap K(0,R)$ i za $n \in \mathbf{N}$ $a_n, a_n^* \in A \cap K(0,R)$ takvi da vrijedi

$$d_x(a_n, x) \longrightarrow 0 \,, d_x(a_n^*, x^*) \longrightarrow 0 .$$

Kako je

$$d_x(a_n, a_n^*) \leqslant d_x(a_n, x) + d_x(x, x^*) + d_x(x^*, a_n^*) ,$$

to je i $\lim_{n \longrightarrow \infty} d_x(a_n, a_n^*) = d_x(x, x^*)$. Specijalno, vrijedi: ako je $d_x(x, x^*) < \frac{\delta}{3}$, tada je za dovoljno velik $n \in \mathbf{N}$ $d_x(a_n, a_n^*) < \delta$, i k tome

$$\begin{aligned} d_z(\overline{f}(x), \overline{f}(x^*)) &\leqslant d_z(\overline{f}(x), f(a_n)) + d_z(f(a_n), f(a_n^*)) + d(f(a_n^*), \overline{f}(x^*)) \\ &\leqslant d_z(\overline{f}(x), f(a_n)) + \varepsilon + d(f(a_n^*), \overline{f}(x^*)) \leqslant 3\varepsilon . \end{aligned}$$

Time je dokazano da je $\overline{f} : X \longrightarrow \overline{f}(X) \subseteq Z$ lokalno uniformno preslikavanje.

Q.E.D.

Korolar 2. *Neka je (X, d_x) metrički prostor, (Z, d_z) potpun metrički prostor, te $Y \subseteq Z$. Neka je $A \subseteq X$ gust u X i $f : A \longrightarrow f(A) \subseteq Y$ neprekinuto preslikavanje koje je i lokalno Lipschitz-neprekinuto, odnosno za koje vrijedi:*

za svaki $R > 0$ preslikavanje $f|_{A \cap K(0,R)} : A \cap K(0,R) \longrightarrow Y$ je Lipschitz-neprekinuto.

Tada postoji jedinstveno neprekinuto proširenje po neprekinutosti $\overline{f} : X \longrightarrow Z$ koje je i lokalno Lipschitz-neprekinuto.

Ako je $f : A \longrightarrow Y$ Lipschitz-neprekinuto, onda je i $\overline{f} : X \longrightarrow \mathsf{Cl}_Z(Y)$ Lipschitz-neprekinuto.

∎

Lema 2. *Neka je V Banachov prostor i $B_m : V' \longrightarrow V$ niz lokalno Lipschitzovih preslikavanja sa svojstvima*

(1) (B_m) je lokalno ekvineprekinuta familija tj. Lipschitzova konstanta na svakoj kugli u V je neovisna o $m \in \mathbf{N}$.

(2) $(\exists\, C > 0)(\forall\, m \in \mathbf{N}) \quad \|B_m(0)\|_V \leqslant C$

(3) Postoji gust podskup $\mathcal{G} \subset V'$ takav da B_m slabo konvergira na G odnosno da vrijedi:

$$(\forall\, f \in \mathcal{G}) \quad B_m(f) \xrightharpoonup{V} B(f) ,$$

Tada vrijedi:

$$(\forall\, f \in V') \quad B_m(f) \xrightharpoonup{V} B(f) ,$$

i preslikavanje $B : V' \longrightarrow V$ je Lipschitzovo s istom konstantom na svakoj kugli u V'.

Dem.

Najprije pokažimo da je preslikavanje $B : \mathcal{G} \longrightarrow V$ inducirano slabom konvergencijom niza B_m na $\mathcal{G}$ lokalno Lipschitzovo na $\mathcal{G}$. U tu svrhu, neka je M_R konstanta Lipschitzovosti za niz B_m na proizvoljno odabranoj kugli $K(0,R)$. Tada (zbog ekvineprekinutosti) vrijedi

$$(\forall\, g,h \in K(0,R))(\forall\, m \in \mathbf{N}) \quad \|B_m(g) - B_m(h)\|_V \leqslant M_R \|g-h\|_{V'} \ .$$

Po pretpostavci $B_m(g) - B_m(h) \xrightharpoonup{V} B(g) - B(h)$, pa zbog slabe nizovne neprekinutosti odozdo norme na V vrijedi

$$\liminf_{m \longrightarrow \infty} \|B_m(g) - B_m(h)\|_V \geqslant \|B(g) - B(h)\|_V \ ,$$

te je stoga

$$\|B(g) - B(h)\|_V \leqslant M_R \|g-h\|_{V'} \ .$$

Dakle je $B : \mathcal{G} \longrightarrow V$ lokalno Lipschitzovo preslikavanje. Kako je V potpun, to po prethodnoj lemi zaključujemo da postoji lokalno neprekinuto preslikavanje $\overline{B} : V^{'} \longrightarrow V$ takvo da je $\overline{B}|_{\mathcal{G}} = B$.

Tvrdimo da vrijedi

$$(\forall\, f \in V^{'}) \quad B_m(f) \xrightharpoonup{V} \overline{B}(f) \ .$$

Pretpostavimo suprotno tj. da postoji $f \in V^{'}$ takav da vrijedi:

$$(\exists\, \varphi_0 \in V^{'}) \quad \neg \quad {}_{V'}\langle\, \varphi_0, B_m(f)\,\rangle_V \longrightarrow {}_{V'}\langle\, \varphi_0, B(f)\,\rangle_V \ .$$

Nadalje, primijetimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\|\varphi_0\|_{V'} \leqslant 1$ (ako to ne vrijedi φ_0 zamijenimo s $\frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|_{V'}}$).

S druge strane je

$$\|B_m(f)\|_V \leqslant \|B_m(f) - B_m(0)\|_V + \|B_m(0)\|_V \leqslant M \|f\|_{V'} + C \ ,$$

odnosno

$$(\forall\, \psi \in V^{'}) \quad \|\psi\|_{V'} \leqslant 1 \Longrightarrow |{}_{V'}\langle\, \psi, B_m(f)\,\rangle_V| \leqslant M\|f\|_{V'} + C \ .$$

Specijalno je za $\psi := \varphi_0$ niz ${}_{V'}\langle\, \varphi_0, B_m(f)\,\rangle_V$ ograničen u $\mathbf{R}$, te ima konvergentan podniz (koji isto označimo), te vrijedi

$${}_{V'}\langle\, \varphi_0, B_m(f)\,\rangle_V \longrightarrow \alpha \ ,$$

gdje je po konstrukciji $\alpha \neq {}_{V'}\langle\, \varphi_0, \overline{B_m}(f)\,\rangle_V$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i fiksiran.

Zbog gustoće $\mathcal{G}$ u $V^{'}$ i gornjeg razmatranja iz četiri različita razloga slijedi da postoji niz (f_j) u $\mathcal{G}$ sa svojstvima:

(1) $(\exists\, m_1 \in \mathbf{N}) \quad m \geqslant m_1 \Longrightarrow |{}_{V'}\langle\, \varphi_0, B_m(f)\,\rangle_V - \alpha| < \frac{\varepsilon}{4}$
(2) $(\exists\, j_1 \in \mathbf{N}) \quad j \geqslant j_1 \Longrightarrow (\forall\, m \in \mathbf{N}) |{}_{V'}\langle\, \varphi_0, B_m(f_j) - B_m(f)\,\rangle_V| < \frac{\varepsilon}{4}$
(3) $(\exists\, m_2 \in \mathbf{N}) \quad m \geqslant m_2 \Longrightarrow (\forall\, j \in \mathbf{N}) |{}_{V'}\langle\, \varphi_0, B(f_j) - B_m(f_j)\,\rangle_V| < \frac{\varepsilon}{4}$
(4) $(\exists\, j_2 \in \mathbf{N}) \quad j \geqslant j_2 \Longrightarrow |{}_{V'}\langle\, \varphi_0, \overline{B}(f) - B(f_j)\,\rangle_V| < \frac{\varepsilon}{4}$

Sada odabirom $m \geqslant \max\{m_1, m_2\}$ i $j \geqslant \max\{j_1, j_2\}$ imamo

$$0 < |{}_{V'}\langle\, \varphi_0, \overline{B}(f)\,\rangle_V - \alpha| \leqslant$$

$$|{}_{V'}\langle\, \varphi_0, \overline{B}(f) - B(f_j) + B(f_j) - B_m(f_j) + B_m(f_j) - B_m(f) + B_m(f)\,\rangle_V - \alpha| \leqslant$$

$$|{}_{V'}\langle\, \varphi_0, \overline{B}(f) - B(f_j)\,\rangle_V| + |{}_{V'}\langle\, \varphi_0, B(f_j) - B_m(f_j)\,\rangle_V|$$

$$+|{}_{V'}\langle\, \varphi_0, B_m(f_j) - B_m(f)\,\rangle_V| + |{}_{V'}\langle\, \varphi_0, B_m(f)\,\rangle_V - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \ ,$$

što je kontradikcija.

Na kraju, iz nizovne poluneprekinutosti odozdo norme na V i upravo pokazane tvrdnje slijedi da je $\overline{B}$ Lipschitzovo s konstantom M_R na $K(0,R)$.

Q.E.D.

Za dokaz glavnog teorema trebat će nam i ovaj tehnički rezultat:

Lema 3. *Neka je (X, τ) σ–kompaktan Hausdorffov topološki prostor, $\mathcal{M}$ Borelova σ–algebra na X, te $(Y, \mathcal{N})$ proizvoljan izmjeriv prostor. Neka je $\Omega \subseteq X$ otvoren skup i $\mathsf{A} : \Omega \longrightarrow Y$ preslikavanje sa svojstvom:*

$$(\forall\, \omega \in \tau) \quad \overline{\omega} \subset \Omega \Longrightarrow \mathsf{A}|_{\omega} : \omega \longrightarrow Y \textit{ je izmjerivo} .$$

Tada je $A : \Omega \longrightarrow Y$ izmjerivo preslikavanje.

Dem. Kako je X σ–kompaktan, to je i svaki njegov otvoren podskup σ–kompaktan. Stoga postoji niz $\Omega_k \in \mathcal{K}(\Omega)$ takav da je

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k .$$

Definirajmo $\omega_k := \mathsf{Int}\, \Omega_k$. Tada $\omega_k \in \tau$. Kako je X Hausdorffov, to je Ω_k zatvoren, te je $\overline{\omega_k} \subseteq \Omega_k \subset \Omega$ i

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k .$$

Neka je $U \subseteq Y$ proizvoljan izmjeriv skup. Budući da vrijedi

$$\chi_{\omega_k} \longrightarrow \chi_{\Omega} ,$$

to i

$$\chi_{\omega_k \cap \mathsf{A}^{\leftarrow}(U)} \longrightarrow \chi_{\Omega \cap \mathsf{A}^{\leftarrow}(U)} ,$$

Iz $\omega_k \cap \mathsf{A}^{\leftarrow}(U) = \omega_k \cap \mathsf{A}|_{\omega_k}^{\leftarrow}(U)$ i $\Omega \cap \mathsf{A}^{\leftarrow}(U) = \mathsf{A}^{\leftarrow}(U)$ zaključujemo da vrijedi

$$\chi_{\mathsf{A}|_{\omega_k}^{\leftarrow}(U)} \longrightarrow \chi_{\mathsf{A}^{\leftarrow}(U)} .$$

Po pretpostavci je za svaki $k \in \mathbf{N}$ skup $\mathsf{A}|_{\omega_k}^{\leftarrow}(U)$ izmjeriv, te su i funkcije $\chi_{\mathsf{A}|_{\omega_k}^{\leftarrow}(U)}$ izmjerive za svaki $k \in \mathbf{N}$. Dakle je i funkcija $\chi_{\mathsf{A}^{\leftarrow}(U)}$ izmjeriva kao limes izmjerivih funkcija. Stoga je i skup $\mathsf{A}^{\leftarrow}(U)$ izmjeriv.

Q.E.D.

Lema 4. *Neka je $U \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren skup i $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(U)$ takva da vrijedi*

$$(\forall\, \psi \in \mathrm{C}_c(U)) \quad \psi \geqslant 0 \Longrightarrow \int_U \psi f d\mu \geqslant 0 .$$

Tada je $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$ (ss $\mathbf{x} \in U$) .

Dem. Kao u prethodnoj lemi, $U \in \tau(\mathbf{R}^d)$ možemo prikazati kao

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n ,$$

pri čemu je $U_n \in \tau(\mathbf{R}^d)$ i $\mu(U_n) < \infty$. Za fiksirani $n \in \mathbf{N}$ pokazat ćemo da je

$$f(\mathbf{x}) \geqslant 0 \ (\text{ss } \mathbf{x} \in U_n) ,$$

i time će tvrdnja biti pokazana.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Iz Luzinovog teorema slijedi da postoji $U_n^\varepsilon \in \mathcal{K}(U_n)$ takav da je $f|_{U_n^\varepsilon} \in \mathrm{C}_c(U_n^\varepsilon)$ i $\mu(U_n \backslash U_n^\varepsilon) < \varepsilon$. Birajući nenegativne $\psi \in \mathrm{C}_c(U_n^\varepsilon)$ zaključujemo da vrijedi

$$\int_{U_n^\varepsilon} \psi f d\mu \geqslant 0 \ .$$

Zbog neprekinutosti funkcije f na U_n^ε lako se, pretpostavljajući suprotno, vidi da je $f|_{U_n^\varepsilon} \geqslant 0$. Zbog proizvoljnosti od $\varepsilon > 0$ zaključujemo da je

$$f(\mathbf{x}) \geqslant 0 \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \bigcup_{\varepsilon > 0} U_n^\varepsilon) \ .$$

Kako je

$$\mu(U_n \backslash \bigcup_{\varepsilon > 0} U_n^\varepsilon) = 0 \ ,$$

to slijedi

$$f(\mathbf{x}) \geqslant 0 \ (\text{ss } \mathbf{x} \in U_n) \ .$$

Na kraju, primijetimo da se eksplicitnom konstrukcijom odgovarajuće test funkcije ψ može pokazati da je funkcija f nenegativna u svim svojim Lebesgueovim točkama, no taj rezultat nama neće trebati.

Q.E.D.

Promatrat ćemo jednadžbu

$$-\mathsf{div}\,(\mathsf{A}(\mathbf{x})|\nabla u(\mathbf{x})|^{p-2}\nabla u(\mathbf{x})) = f \ ,$$

gdje je $f \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)'$, $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ i $\mathsf{A} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; M_{d\times d})$, i pokušati dokazati rezultate analogne već pokazanim u slučaju $p = 2$.

Najprije će nam trebati neke nejednakosti vezane uz ocjene za p-laplacian.

Lema 5. *Neka je $1 < p < 2$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada vrijedi*

$(1)_p$ $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d)(|\mathsf{a}| + |\mathsf{b}| > 0)$ $\quad (|\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant (p-1)\frac{|\mathsf{a}-\mathsf{b}|^2}{(|\mathsf{a}|+|\mathsf{b}|)^{2-p}}$.

$(2)_p$ $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d)$ $\quad (|\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant 2^{q-2}q||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}|^q$.

Dem. Najprije ćemo pokazati prvu tvrdnju. Uočimo da uvjet $|\mathsf{a}| + |\mathsf{b}| > 0$ možemo zanemariti ukoliko traženu nejednakost pišemo u obliku koji ne sadrži kvocijent. U daljnjem ovo nećemo posebno naglašavati i izostavljat ćemo uvjet $|\mathsf{a}| + |\mathsf{b}| > 0$.

Neka su sada $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d$ proizvoljni i fiksirani. Neka je, npr. $|\mathsf{a}| \geqslant |\mathsf{b}|$ (to možemo pretpostaviti zbog simetričnosti). Također, primijetimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|\mathsf{a}| = 1$ i $|\mathsf{b}| \leqslant 1$. Zaista, ako traženu nejednakost podijelimo s $|\mathsf{a}|^p$ i definiramo nove vektore $\mathsf{a}_0 := \frac{\mathsf{a}}{|\mathsf{a}|}$ i $\mathsf{b}_0 := \frac{\mathsf{b}}{|\mathsf{a}|}$, tada je $|\mathsf{a}_0| = 1$, $|\mathsf{b}_0| \leqslant 1$ te a_0 i b_0 zadovoljavaju točno nejednakost (1).

Nadalje, primjetimo da vektori a i b određuju ravninu u $\mathbf{R}^d$. Stoga rotacijom koordinatnog sustava možemo postići da je xy–ravnina novog koordinatnog sustava podudarna s ravninom određenom s a i b.

Konačno, rotacijom novog koordinatnog sustava u xy–ravnini možemo postići da vektor a bude kolinearan s x-osi.

U ovako transformiranom koordinatnom sustavu vektori a i b imaju zapis

$$\mathsf{a} = (1, 0, 0, \ldots, 0) \ , \quad \mathsf{b} = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0) \ ,$$

gdje je $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leqslant 1$.

Uočimo da sada vrijedi

(*) $||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}| = \sqrt{(1 - y_1(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}^{\,p-2})^2 + (y_2(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}^{\,p-2})^2}$

(**) $|\mathsf{a} - \mathsf{b}| = \sqrt{(1 - y_1)^2 + y_2^2}$

(***) $(|\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) = (1 - y_1(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2})(1 - y_1) + y_2^2(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2}$,

iz (**) i (***) vidimo da se tražena nejednakost reducira na nejednakost oblika

$$(\forall\, y_1, y_2 \in \mathbf{R})(y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1)$$

$$(1 - y_1(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2})(1 - y_1) + y_2^2(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2} \geqslant (p-1)\frac{(1 - y_1)^2 + y_2^2}{(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \; .$$

Dakle preostaje pokazati slijedeću nejednakost:

$$(1 - y_1(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2})(1 - y_1) + y_2^2(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2}\frac{(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geqslant p - 1 \; .$$

Razmatrat ćemo dva slučaja:

Slučaj 1: $-1 \leqslant y_1 < 0$

$|y| \leqslant 1 \Longrightarrow |y|^{p-2} \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{1}{|y|^{p-2}} \geqslant 1 \Longrightarrow \frac{-y_1}{|y|^{p-2}} \geqslant -y_1 \Longrightarrow 1 - y_1|y|^{2-p} \geqslant 1 - y_1$

Stoga je i

$$\{(1 - y_1(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2})(1 - y_1) + y_2^2(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2}\}\frac{(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2}$$

$$\geqslant \{(1 - y_1)^2 + y_2^2(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2}\}\frac{(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2}$$

$$\geqslant \{(p-1)(1 - y_1)^2 + y_2^2(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2}\}\frac{(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2}$$

$$\geqslant \{(p-1)(1 - y_1)^2 + y_2^2\}\frac{(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2}$$

$$\geqslant \{(p-1)(1 - y_1)^2 + (p-1)y_2^2\}\frac{(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2}$$

$$= (p-1)(1 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p} \geqslant p - 1 \; ,$$

što smo i trebali pokazati.

Slučaj 2: $0 < y_1 \leqslant 1$

$(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p} \geqslant {y_1}^{2-p} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{2-p}} \leqslant \frac{1}{{y_1}^{2-p}} \Longrightarrow 1 - y_1(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{p-2} \geqslant 1 - \frac{y_1}{{y_1}^{2-p}}$.

Naš slijedeći korak bit će pokazati da vrijedi

$$(\forall\, y_1 \in [0,1]) \quad 1 - {y_1}^{p-1} \geqslant (p-1)(1-y_1)\ .$$

Definirajmo funkciju $\varphi : [0,1\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$\varphi(y_1) := \frac{1 - y_1^{p-1}}{1 - y_1}\ .$$

Tvrdimo da je φ ograničena odozdo s $p-1$. Kako je φ neprekinuta na $[0,1]$ (u smislu odgovarajućeg proširenja po neprekinutosti u točki $y_1 = 1$), to ona sigurno dostiže minimum na $[0,1]$. Zaključujemo da je dovoljno pokazati da vrijedi ocjena

$$(\forall\, y_1 \in [0,1]) \quad \varphi'(y_1) = 0 \Longrightarrow \varphi(y_1) \geqslant p-1\ .$$

Uočimo da je $\varphi'(y_1) = 0$ ako i samo ako je

$$-(p-1)y_1^{p-2}(1-y_1) - (1 - {y_1}^{p-2})(-1) = 0\ ,$$

te je, dakle, za kritične y_1

$$\varphi(y_1) = \frac{(p-1)y_1^{p-2}(1-y_1)}{1-y_1}\ ,$$

odnosno $\varphi(y_1) = (p-1)y_1^{p-1} = (p-1)\frac{1}{y_1^{2-p}} \geqslant p-1$.

Sada potpuno analogno kao u slučaju 1. zaključimo da vrijedi tražena ocjena.

Pokažimo drugu tvrdnju!

Uz iste argumente kao u prethodnom, iz (*) i (***) vidimo da je dovoljno pokazati:

$$(\forall\, y_1, y_2 \in \mathbf{R})(y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1)$$

$$(1 - y_1(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{p-2})(1-y_1) + y_2^2(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{p-2}$$

$$\geqslant 2^{q-2}q\{\sqrt{(1 - y_1(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{p-2})^2 + (y_2(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{p-2})^2}\}^q\ .$$

Uvedimo supstituciju

$$s := \sqrt{y_1^2+y_2^2} \quad t := \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\ .$$

Tada je $t^2 = y + 1^2 + y_2^2$, $st = y_1$ i $y_2^2 = t^2(1-s^2)$ te (***) prelazi u

$$(|\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) = 1 - (t^{p-1} + t)s + t^p\ ,$$

te je dovoljno pokazati da vrijedi

$$(\forall\, s,t \in [0,1]) \quad 1 - (t^{p-1}+t)s + t^p \geqslant 2^{q-2}q\{1 - 2st^{p-1} + (t^{p-1})^2\}^{\frac{q}{2}}\ .$$

Definirajmo funkciju $f : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$f(t,s) := \frac{1 - (t^{p-1}+t)s + t^p}{\{1 - 2st^{p-1} + (t^{p-1})^2\}^q}\ .$$

Uvedimo supstituciju $\tau := t^{p-1}$. Tada je $t = \tau^{q-1}$, budući da iz $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ slijedi $q-1 = \frac{1}{p-1}$. Također, stavimo $g(\tau, s) := f(\tau^{q-1}, s) = f(t, s)$. Tada je $g : \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ oblika

$$g(\tau, s) = \frac{1-(\tau+\tau^{q-1})s+\tau^q}{(1-2\tau s+\tau^2)^{\frac{q}{2}}} \; .$$

Pokažemo li da je g ograničena odozdo s $\frac{1}{2^{q-2}q}$, tvrdnja će slijediti. Kao i ranije, dovoljno je pokazati da je g ograničena odozdo u kritičnim točkama.

Kako vrijedi

$$(\forall\, \tau, s \in \langle 0,1\rangle) \quad \frac{\partial g}{\partial s} = 0 \iff 1-(\tau^{q-1}+\tau)s+\tau^q = \frac{\tau^{q-2}+1}{q}(1-2\tau s+\tau^2) \; ,$$

to g za kritične s ima oblik

$$g(\tau, s) = \frac{\tau^{q-2}+1}{q} \cdot \frac{1}{(1-2\tau s+\tau^2)^{\frac{q-2}{2}}} \; .$$

Iz nejednakosti $\sqrt{1-2s\tau+\tau^2} \leqslant 1+\tau$ slijedi

$$g(\tau, s) \geqslant \frac{\tau^{q-2}+1}{q} \cdot \frac{1}{(1+\tau)^{q-2}} \; .$$

Konačno, kako je $1 < p < 2$, i stoga $q > 2$, zaključujemo da vrijedi

$$\frac{\tau^{q-2}+1}{(1+\tau)^{q-2}} \geqslant \frac{1}{(1+\tau)^{q-2}} \geqslant \frac{1}{(1+1)^{q-2}} = \frac{1}{2^{q-2}} \; .$$

Stoga je i $g(\tau, s) \geqslant \frac{1}{2^{q-2}q}$.

Q.E.D.

Korolar 3. *Neka je $p \in \langle 1,2\rangle$. Tada vrijedi*

(+) $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad ||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}|^q \leqslant \frac{1}{(2^{q-2}q)^p}|\mathsf{a}-\mathsf{b}|^p$

(++) $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad ||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}| \leqslant \frac{1}{(2^{q-2}q)^{p-1}}|\mathsf{a}-\mathsf{b}|^{p-1}$

Dem. Iz $(2)_p$ direktno imamo

$$(|\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a}-\mathsf{b}) \geqslant 2^{q-2}q||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}|^q \; .$$

Stoga je

$$|\mathsf{a}-\mathsf{b}| \geqslant 2^{q-2}q||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}|^{q-1} \; ,$$

odnosno

$$||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}| \leqslant \frac{1}{(2^{q-2}q)^{p-1}}|\mathsf{a}-\mathsf{b}|^{p-1} \; ,$$

što je točno (++).

Ako posljednju nejednakost potenciramo s q i primijetimo da za konjugirane p i q vrijedi $q = \frac{p}{p-1}$, slijedi

$$(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad ||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}|^q \leqslant \frac{1}{(2^{q-2}q)^p}|\mathsf{a}-\mathsf{b}|^p \; ,$$

što je točno (+).

Q.E.D.

Lema 6. *Neka je* $p \geqslant 2$*. Tada vrijedi*
$(1)_p$ $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d)$ $\quad (|\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \frac{1}{2^{p-2}p}|\mathsf{a} - \mathsf{b}|^p$.
$(2)_p$ $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d)(|\mathsf{a}| + |\mathsf{b}| > 0)$ $\quad (|\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \frac{||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}|^2}{|\mathsf{a}|^{p-2} + |\mathsf{b}|^{p-2}}$.

Dem. U dokazu ćemo koristiti istu tehniku (i iste oznake) kao u prethodnoj lemi. Prije nego počnemo razmatrati tvrdnje $(1)_p$ i $(2)_p$, još jednom ćemo zapisati tvrdnje (*), (**) i (***) u terminima varijabli s i t:

(*) $|\mathsf{a} - \mathsf{b}| = \sqrt{1 - 2st + t^2}$
(**) $||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}| = \sqrt{1 - 2st^{p-1} + (t^{p-1})^2}$
(***) $(|\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) = 1 - (t^{p-1} + t)s + t^p$,

Uočimo, nadalje, da vrijedi

$$|\mathsf{a}| = 1 \qquad |\mathsf{b}| = t\ .$$

Sada imamo sve pripremljeno za dokaz tvrdnje (1). Iz (*) i (***) uvrštavanjem slijedi da je dovoljno pokazati da je funkcija $g : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s

$$g(\tau, s) := \frac{1 - (\tau + \tau^{p-1})s + \tau^p}{(1 - 2\tau s + \tau^2)^{\frac{p}{2}}}\ .$$

ograničena odozdo s $\frac{1}{2^{p-2}p}$. Kako je sada $p \geqslant 2$, to ova tvrdnja direktno slijedi iz dokaza tvrdnje (2) u prethodnoj lemi. Drugim riječima relacija (2) za slučaj $1 < p < 2$ ekvivalentna je relaciji (1) za slučaj $p \geqslant 2$. Ako su sada $p, q \in \langle 1, \infty\rangle$ konjugirani eksponenti takvi da je $1 < p < 2$ i $q > 2$, ovaj zaključak možemo zapisati s

$$(1)_q \quad \Longleftrightarrow \quad (2)_p\ .$$

Zbog simetrije očekujemo da zaključak ovog tipa vrijedi i za relaciju $(2)_p$ u slučaju $p \geqslant 2$, odnosno za tvrdnju koja nam je preostala za dokazati.

Iz (**) i (***) direktnim uvrštavanjem zaključujemo da je dosta pokazati da je funkcija $\psi : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s

$$\psi(t, s) := \frac{(1 - (\tau + \tau^{p-1})s + \tau^p)(1 + \tau^{p-2})}{(1 - 2\tau s + \tau^2)^{\frac{p}{2}}}$$

odozdo ograničena s odgovarajućom konstantom. Kao i ranije, računamo kritične točke funkcije ψ. Pokazuje se da vrijedi:

$$(\forall\, \tau, s \in \langle 0, 1\rangle) \quad \frac{\partial \psi(\tau, s)}{\partial s} = 0 \iff$$

$$-(t^{p-1} + t)(1 - 2st^{p-1} + (t^{p-1})^2) - (1 - (t^{p-1} + t)2 + t^p)(1 + t^{p-2})(-2t^{p-1}) = 0\ .$$

Stoga za kritične s funkcija ψ ima oblik

$$\psi(\tau, s) = \frac{(1 - (t^{p-1} + t^p)s + t^p)(1 + t^{p-2})}{2t^{p-2}(1 - ((t^{p-1} + t)s + t^p)}$$

$$= \frac{1}{2}(t^{p-2} + \frac{1}{t^{p-2}}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\ .$$

Time je dokazana tvrdnja $(2)_p$ za slučaj $p \geqslant 2$.

Na kraju, pokažimo da ekvivalencija $(1^*)_q \iff (2^*)_p$ vrijedi i za slučaj $p \geqslant 2$, gdje su (1^*) i (2^*) odgovarajuće dualne tvrdnje. Započinjemo definicijom tih tvrdnji: definiramo da $(2^*)_p$ bude točno već pokazana tvrdnja $(2)_p$, dok $(1^*)_q$ za $1 < q < 2$ definiramo s

$$(1^*)_q \quad (\forall \mathsf{a},\mathsf{b} \in \mathbf{R}^d)(|\mathsf{a}| + |\mathsf{b}| > 0) \quad (|\mathsf{a}|^{q-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{q-2}\mathsf{b}) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \frac{|\mathsf{a}-\mathsf{b}|^2}{|\mathsf{a}|^{2-q}+|\mathsf{b}|^{2-q}} \; .$$

Iz relacija (*) i (***) slijedi da je $(1^*)_q$ za $1 < q < 2$ ispunjena ako i samo ako je funkcija

$$\varphi(\tau, s) := \frac{(1 - (\tau + \tau^{q-1})s + \tau^q)(1 + \tau^{q-2})}{(1 - 2\tau s + \tau^2)^{\frac{q}{2}}}$$

odozdo ograničena s 1. Uočimo da u dokazu ograničenosti odozdo za funkciju ψ nigdje nismo koristili činjenicu da je $p > 2$. Stoga je i φ odozdo ograničena s 1, te tražena tvrdnja slijedi.

Kao posljednju napomenimo da dakle vrijedi slijedeći očekivani rezultat

$$(\forall p, q \in \langle 1, \infty\rangle)(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \quad (1)_q \quad \iff \quad (2)_p \; ,$$

uz konvenciju da tvrdnju $(1)_p$ iz Leme 4 zamijenimo tvrdnjom $(1^*)_p$, jer je očito da tvrdnja $(1)_p$ u Lemi 4 nije 'usklađena' sa ostalim tvrdnjama (što, uostalom, slijedi i iz dokaza te tvrdnje).

Q.E.D.

Korolar 4. *Neka je $p \in [2, \infty\rangle$. Tada za proizvoljne $u, v \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ vrijedi*

$$\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v|^q \leqslant 2^{p-2}\|\nabla u - \nabla v\|^q_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big\{\|\nabla u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|\nabla v\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}} \; .$$

Dem. Pođimo od relacije $(2)_p$ zapisane tako da ne sadrži kvocijent. Nakon primjene Schwartzove nejednakosti, dijeljenja obje strane s $||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}|$ te potenciranja s q imamo

$$||\mathsf{a}|^{p-2}\mathsf{a} - |\mathsf{b}|^{p-2}\mathsf{b}|^q \leqslant (|\mathsf{a}|^{p-2} + |\mathsf{b}|^{p-2})^q|\mathsf{a} - \mathsf{b}|^q \; .$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v|^q &\leqslant \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})^q|\nabla u - \nabla v|^q \\
&\leqslant \Big\{\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\Big\{\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})^{q\frac{p-1}{p-2}}\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&= \Big\{\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p\Big\}^{\frac{1}{p-1}}\Big\{\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})^{\frac{p}{p-2}}\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&\leqslant \|\nabla u - \nabla v\|^q_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big\{\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^p\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&\leqslant (2^{p-1})^{\frac{p-2}{p-1}}\|\nabla u - \nabla v\|^q_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big\{\int_\Omega (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p)\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}} \\
&= 2^{p-2}\|\nabla u - \nabla v\|^q_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big\{\|\nabla u\||^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|\nabla u\||^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}} \; .
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 7. *Neka je* $p \in \langle 1, \infty\rangle$ *i* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ *otvoren i ograničen skup, te* $\mathsf{A} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; M_{d\times d})$ *takva da je* $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})\mathbf{I}$, *gdje je* $\alpha \leqslant a(\mathbf{x}) \leqslant \beta$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$). *Definirajmo*

$$L(u) := -\mathsf{div}\,(\mathsf{A}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\ .$$

Tada vrijedi

$$\alpha\|u\|^{p-1}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant \|L(u)\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \leqslant \beta\|u\|^{p-1}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}$$

Dem. Evaluiramo li desnu i lijevi stranu iz definicije operatora L na elementu u, imamo relaciju

$$\int_\Omega \mathsf{A}^n|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla u = {}_{V'}\langle\, L(u), u\,\rangle_V .$$

Direktno slijedi ocjena

$$\alpha\|\nabla u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant \|L(u)\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}\ ,$$

odnosno

$$\alpha\|u\|^{p-1}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)} \leqslant \|L(u)\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\ .$$

S druge strane je

$$\|L(u)\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}\leqslant 1}\int_\Omega \mathsf{A}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi \leqslant \beta \sup_{\|\varphi\|_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}\leqslant 1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi$$

$$\leqslant \beta \sup_{\|\varphi\|_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}\leqslant 1} \||\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \beta\|\nabla u\|^{\frac{p}{q}}_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \beta\|u\|^{p-1}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}\ .$$

Q.E.D.

Lema 8. *Neka je* $p \in \langle 1, \infty\rangle$, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ *otvoren i ograničen skup, te* $\mathsf{A} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; M_{d\times d})$ *takva da je* $\mathsf{A}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})\mathbf{I}$, *gdje je* $\alpha \leqslant a(\mathbf{x}) \leqslant \beta$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

Tada je preslikavanje $L : (\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}) \longrightarrow (\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega), \|\cdot\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)})$ *definirano s*

$$L(u) := -\mathsf{div}\,(\mathsf{A}(\mathbf{x})|\nabla u(\mathbf{x})|^{p-2}\nabla u(\mathbf{x}))$$

lokalno Lipschitz-neprekinuta bijekcija.

Dem.

Zasebno ćemo razmatrati slučajeve $p \in \langle 1, 2\rangle$ i $p \in [2, \infty]$. S S_p označavamo jediničnu kuglu u $\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$.

Neka je najprije $p \in [2, \infty\rangle$. Primjenom Leme 5 ($(2)_p$) slijede nejednakosti

$$\|L(u) - L(v)\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{\varphi\in S_p}\int_\Omega (\mathsf{A}|\nabla u|^{p-2}\nabla u - \mathsf{A}|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\varphi$$

$$\leqslant \beta\sup_{\varphi\in S_p}\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v||\nabla\varphi| \leqslant \beta\sup_{\varphi\in S_p}\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2})|\nabla u - \nabla v||\nabla\varphi|$$

$$\leqslant \beta\sup_{\varphi\in S_p}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla u - \nabla v||\nabla\varphi| + \beta\sup_{\varphi\in S_p}\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}|\nabla u - \nabla v||\nabla\varphi|$$

$$\leqslant \beta \sup_{\varphi\in S_p}\{\int_\Omega |\nabla u|^{(p-2)q}|\nabla\varphi|^q\}^{\frac{1}{q}}\{\int_\Omega |\nabla u-\nabla v|^p\}^{\frac{1}{p}}$$

$$+\beta \sup_{\varphi\in S_p}\{\int_\Omega |\nabla v|^{(p-2)q}|\nabla\varphi|^q\}^{\frac{1}{q}}\{\int_\Omega |\nabla u-\nabla v|^p\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \beta\|\nabla u-\nabla v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\cdot\sup_{\varphi\in S_p}\Bigg(\Big(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-2)q}|\nabla\varphi|^q\Big)^{\frac{1}{q}}+\Big(\int_\Omega |\nabla v|^{(p-2)q}|\nabla\varphi|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$\leqslant \beta\|\nabla u-\nabla v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\cdot\sup_{\varphi\in S_p}\Big(\Big(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-2)qr}\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_\Omega |\nabla\varphi|^{qr'}\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\sup_{\varphi\in S_p}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^{(p-2)qr}\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_\Omega |\nabla\varphi|^{qr'}\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\Big[r=\frac{p-1}{p-2}=\frac{p}{(p-2)q}\,,r'=p-1\Big]=$$

$$\leqslant \beta\|\nabla u-\nabla v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\cdot\sup_{\varphi\in S_p}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big)^{\frac{p-2}{p}}\Big(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\sup_{\varphi\in S_p}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p\Big)^{\frac{p-2}{p}}\Big(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Stoga je

$$\|L(u)-L(v)\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\leqslant \beta\|\nabla u-\nabla v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big(\|\nabla u\|^{p-2}_{\mathrm{L}^p(\Omega)}+\|\nabla v\|^{p-2}_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big)$$

Time je pokazano da je za $p\in[2,\infty\rangle$ L lokalno Lipschitz-neprekinuto preslikavanje.

Sada prelazimo na slučaj $p\in\langle 1,2\rangle$.

Iz Korolara 3 (relacija (++)) slijedi ocjena:

$$\mathsf{I}:=\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v||\nabla\varphi|\leqslant \frac{1}{(2^{q-2}q)^{p-1}}\int_\Omega |\nabla v-\nabla u|^{p-1}|\nabla\varphi|$$

$$\leqslant \frac{1}{(2^{q-2}q)^{p-1}}\Big(\int_\Omega |\nabla u-\nabla v|^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{1}{(2^{q-2}q)^{p-1}}\|\nabla u-\nabla v\|^{\frac{p}{q}}_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$$

Konačno, vrijedi

$$\|L(u)-L(v)\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\leqslant \beta\sup_{\varphi\in S_p}\int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v||\nabla\varphi|$$

$$\leqslant \beta\frac{1}{(2^{q-2}q)^{p-1}}\|\nabla u-\nabla v\|^{p-1}_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\,.$$

Dakle je za $p\in\langle 1,2\rangle$ L uniformno neprekinut. Primijetimo da postoje funkcije koje su uniformno neprekinute, ali nisu lokalno Lipschitz-neprekinute. Primjer takve funkcije je $f(x):=\sqrt{x}$.

Specijalno je L neprekinut i ograničen. Iz Leme 4 i Leme 5 slijedi da je L i strogo monoton. Lako se vidi da je za $p \in \langle 1, \infty\rangle$ L koecitivan, budući da vrijedi

$$\frac{{}_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\langle\, L(u), u\,\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}}{\|u\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}} \geqslant \alpha \|u\|^{p-1}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} .$$

Stoga po Browder-Mintyjevim teoremu slijedi da je $L : \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ bijekcija. Tvrdimo da je $L^{-1} : \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ također neprekinuto preslikavanje.

Neka je najprije $p \in [2, \infty\rangle$. Iz Leme 5 ($(1)_p$) slijede ocjene

$${}_{V'}\langle\, L(u) - L(v), u - v\,\rangle_V \geqslant \alpha \frac{1}{2^{p-2}p} \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p = \alpha \frac{1}{2^{p-2}p} \|\nabla u - \nabla v\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} ,$$

i, nadalje,

$$\|L(u) - L(v)\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \geqslant \alpha \frac{1}{2^{p-2}p} \|u - v\|^{p-1}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} .$$

Birajući $f, g \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ takve da je $L(u) = f$ i $L(v) = g$, vidimo da smo pokazali da vrijedi

$$\|L^{-1}(f) - L^{-1}(g)\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant \Big[\frac{1}{\alpha} 2^{p-2} p\Big]^{\frac{1}{p-1}} \|f - g\|^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} ,$$

i slijedi da je za $p \in [2, \infty\rangle$ L^{-1} uniformno neprekinut operator (iako nije lokalno Lipschitz-neprekinut).

Uočimo da se za $p \searrow 2$ ova ocjena reducira na već izvedenu ocjenu u slučaju $p = 2$.

Neka je sada $p \in \langle 1, 2\rangle$. Iz Leme 4 (ocjena $(1*)_p$!) slijedi ocjena

$${}_{V'}\langle\, L(u) - L(v), u - v\,\rangle_V \geqslant \alpha \int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}} .$$

S druge strane je

$$\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p = \int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{\Big(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\Big)^{\frac{p}{2}}} \Big(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\Big)^{\frac{p}{2}}$$

$$= \{\theta = \frac{2}{p} , \theta' = \frac{2}{2-p}\} =$$

$$\Big\{\int_\Omega \Big(\frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{\Big(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\Big)^{\frac{p}{2}}}\Big)^\theta\Big\}^{\frac{1}{\theta}} \Big\{\int_\Omega \Big(\Big(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\Big)^{\frac{p}{2}}\Big)^{\theta'}\Big\}^{\frac{1}{\theta'}}$$

Stoga je

$$\|\nabla u - \nabla v\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant \Big\{\int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{\Big(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\Big)^{\frac{p}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{\int_\Omega \Big(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\Big)^{\frac{p}{2-p}}\Big\}^{\frac{2-p}{2p}}$$

$$\leqslant \Big\{\int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{\Big(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\Big)^{\frac{p}{2}}}\Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{\int_\Omega \Big(|\nabla u| + |\nabla v|\Big)^p\Big\}^{\frac{2-p}{2p}}$$

$$\leqslant (2^{p-1})^{\frac{2-p}{2p}} \left\{ \int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{\left(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\right)^{\frac{p}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) \right\}^{\frac{2-p}{2p}}$$

Na taj je način

$$\|\nabla u - \nabla v\|^2_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leqslant (2^{p-1})^{\frac{2-p}{p}} \left\{ \int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla v|^2}{\left(|\nabla u|^{2-p} + |\nabla v|^{2-p}\right)^{\frac{p}{2}}} \right\} \left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) \right\}^{\frac{2-p}{p}},$$

te iz ocjene za dualni produkt imamo

$$\|u - v\|^2_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}$$

$$\leqslant (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \frac{1}{\alpha} \|L(u) - L(v)\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \|u - v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|\nabla v\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \right\}^{\frac{2}{p}-1}$$

ili, ekvivalentno

$$\|u - v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \frac{1}{\alpha} \|L(u) - L(v)\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} + \|\nabla v\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \right\}^{\frac{2}{p}-1}.$$

Na kraju, iz relacije $\left(|x|^p + |y|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant |x| + |y|$ imamo

$$\|u - v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \frac{1}{\alpha} \|L(u) - L(v)\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \left\{ \|\nabla u\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} + \|\nabla v\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \right\}^{2-p}.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$\|L^{-1}(f) - L^{-1}(g)\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant$$

$$\frac{1}{\alpha} (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \|f - g\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} (\|L^{-1}(f)\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} + \|L^{-1}(g)\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)})^{2-p}$$

Iz Leme 7 sada imamo ocjenu

$$\|L^{-1}(f) - L^{-1}(g)\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha} (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \|f - g\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} \|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\frac{1}{\alpha} \|g\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right\}^{2-p},$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha^{1+\frac{2-p}{p-1}}} (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \|f - g\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \left\{ \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} + \|g\|^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \right\}^{2-p},$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha^{1+\frac{2-p}{p-1}}} (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \|f - g\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \left\{ \left\{ \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} + \|g\|^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \right\}^{p-1} \right\}^{\frac{2-p}{p-1}},$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha^{1+\frac{2-p}{p-1}}} (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \|f - g\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \left\{ \|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \right\}^{\frac{2-p}{p-1}},$$

te je za $p \in \langle 1, 2 \rangle$ L^{-1} lokalno Lipschitz-neprekinuto preslikavanje.

Q.E.D.

Lema 9. *Neka je* $L_n : \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *kao u prethodnom.*

Tada je $L_n^- 1 : \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *strogo monoton operator. Štoviše, vrijedi*

(1) $p \in \langle 1,2\rangle \Rightarrow {}_{V'}\langle\, f-g, L_n^{-1}(f) - L_n^{-1}(g)\,\rangle_V \geqslant \frac{\alpha}{\beta^q} 2^{q-3} q \|f-g\|^q_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}$

(2) $p \in [2,\infty\rangle \Rightarrow {}_{V'}\langle\, f-g, L_n^{-1}(f) - L_n^{-1}(g)\,\rangle_V \geqslant 2^{1-\frac{2}{p}} \frac{\alpha^{1+2(1-\frac{2}{p})}}{\beta^2} \frac{\|f-g\|^2_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}}{\|f\|_{V'}^{2(1-\frac{2}{p})} + \|g\|_{V'}^{2(1-\frac{2}{p})}}$ ∎

Lema 10. *Neka je* $p \in \langle 1,\infty\rangle$*, i neka su definirana sljedeća preslikavanja*

(1) za $p \in \langle 1,2\rangle$ $g, \tilde{g} : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$

$$g(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) := \frac{|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^2}{|\boldsymbol{\xi}_1|^{2-p} + |\boldsymbol{\xi}_2|^{2-p}}$$

$$\tilde{g}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) := \frac{|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^2}{(|\boldsymbol{\xi}_1| + |\boldsymbol{\xi}_2|)^{2-p}}$$

(2) za $p \in [2,\infty\rangle$ $h, \tilde{h} : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$

$$h(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) := \frac{|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^2}{|\boldsymbol{\xi}_1|^{p-2} + |\boldsymbol{\xi}_2|^{p-2}}$$

$$\tilde{h}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) := \frac{|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^2}{(|\boldsymbol{\xi}_1| + |\boldsymbol{\xi}_2|)^{p-2}}$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) ishodište je točka minimuma za funkcije g *i* $\tilde{g}$*, ali nije točka infleksije*

(ii) $g^c = 0$, $g^{sc} = g$, g *nije konveksna ranga 1 (i stoga nije kvazikonvesna)*
$\tilde{g}^c = 0$, $\tilde{g}^{sc} = \tilde{g}$, $\tilde{g}$ *nije konveksna ranga 1 (i stoga nije kvazikonvesna)*

(iii) $h^c = 0$, $h^{sc} = h$, h *nije konveksna ranga 1 (i stoga nije kvazikonvesna)*
$\tilde{h}^c = 0$, $\tilde{h}^{sc} = \tilde{h}$, $\tilde{h}$ *nije konveksna ranga 1 (i stoga nije kvazikonvesna)*

Dem.

(i) Jednostavnosti radi promatrat ćemo samo slučaj $d = 1$. Uvedimo sljedeće oznake:

$$I := \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} : x > 0, y > 0\}\ , \quad II := \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} : x < 0, y > 0\}$$

$$III := \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} : x < 0, y < 0\}\ , \quad IV := \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} : x > 0, y < 0\}\ ,$$

$$g_{++} := g|_I\ , \quad g_{-+} := g|_{II}\ ,$$

$$g_{--} := g|_{III}\ , \quad g_{+-} := g|_{IV}\ .$$

Uočimo da vrijedi $g(x,y) = g(y,x) = g(-x,-y)$, te na odgovarajućim domenama vrijedi

$$g_{+-}(x,y) = (x-y)^p\ , \quad g_{-+}(x,y) = g_{+-}(-x,-y) = (y-x)^p\ ,$$

$$g_{++}(x,y) = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^{2-p}}\ , \quad g_{--}(x,y) = g_{++}(-x,-y)\ .$$

Stoga se polazni problem reducira na provjeru tvrdnje za funkcije g_{++} i g_{+-}. Primijenit ćemo kriterij za lokalne ekstreme:

C^2–funkcija g ima lokalni minimum ako i samo ako je Hessian funkcije g u točki x_0 pozitivno semidefinitna matrica.

Promatrajmo sada funkciju g_{++}.

Računom se provjeri da vrijedi

$$\nabla g_{++}(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \ .$$

Kako je g_{++} nenegativna, i $g_{++}(x,y) = 0$ ako i samo ako $x = y$, zaključujemo da su sve kritične točke funkcije g_{++} (globalni) minimumi. Uočimo da time nismo eliminirali mogućnost da su ti minimumi nisu istovremeno i točke infleksije. Pretpostavimo, stoga da postoji barem jedna točka $(w,w) \in I$ koja je točka infleksije za g_{++}. Presječemo li epigraf funkcije g_{++} proizvoljnom ravninom π okomitom na xy-ravninu koja prolazi točkom (w,w) dobit ćemo epigraf funkcije $\varphi : \langle s_1, s_2\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definirane s

$$\varphi(s) := g_{++}(x(s), w)\frac{x(s)-w)^2}{(x(s)+w)^{2-p}} \ ,$$

Označimo s y_w (x_w) presjek ravnine π i (pozitivnog dijela) y–osi (x–osi) gdje su s_1 i s_2 odabrani tako da vrijedi

$$p(0) = s_1 \ , \quad p(x_w) = s_2 \ ,$$

pri čemu je p pravac dobiven kao presjek xy–ravnine i ravnine π, a čija jednažba je

$$s := p(x) := -\frac{y_w}{x_w}x + y_w \ ,$$

te je $s_1 = y_w$ i $s_2 = 0$. Štoviše, po izboru točke (w,w) postoji ravnina π takva da ova funkcije nema konveksan epigraf, i stoga nije konveksna. Tvrdimo da smo time smo dobili kontradikciju. Dosta je provjeriti da za proizvoljnu ravninu π kao gore vrijedi $\varphi'' \geqslant 0$. Kako je $x(s) = -\frac{x_w}{y_w}s + x_w$, to je $\varphi(s) = K \cdot \psi(t)$, gdje je redom

$$K := (\frac{x_w}{y_w})^p \ , \quad \psi(t) := \frac{(t-b)^2}{(t+b)^{2-p}} \ ,$$

$$b := \frac{w}{\frac{x_w}{y_w}} > 0 \ , \quad t := -s + y_w \ .$$

Budući da je $\varphi'' = \psi''$, to u daljnjem promatramo funkciju $\psi : \langle 0, y_w\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ za koju ćemo pokazati joj je druga derivacija nenegativna, pa će tvrdnja leme slijediti. Preciznije, pokazat ćemo tvrdnju za ψ definiranu na $\langle 0, +\infty\rangle$ i uz proizvoljnu konstantu $b > 0$.

U dokazu ćemo sada prvi puta iskoristiti da je $p \in \langle 1, 2\rangle$. Nakon kraćeg računa pokazuje se da vrijedi

$$(\forall\, t > 0) \quad \psi''(t) > 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(\forall\, t > 0) \quad (-p^2 + 9p - 12)t^2 + 2(p^2 - 5p + 6)bt + (-p^2 + p + 16)b^2 > 0 \ .$$

Stoga, da bismo pokazali željenu tvrdnju, dosta je provjeriti da su svi korijeni gornje kvadratne jednadžbe po t ili imaginarni ili realni i negativni. Kako je $p \in \langle 1, 2\rangle$, to vrijedi $p^2 - 5p + 6 > 0$, $-p^2 + 9p - 12 > 0$, $-p^2 + p + 16 > 0$, te direktnim rješavanjem kvadratne jednadžbe slijedi tvrdnja (i).

Sada ćemo razmotriti tvrdnju (ii). Prisjetimo se klasičnog teorema koji govori da proizvoljna (strogo) konveksna funkcija $\psi : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$ ima limes u beskonačnosti, te da šoviše vrijedi

$$\lim_{|\mathbf{x}| \longrightarrow +\infty} \psi(\mathbf{x}) = +\infty \ .$$

Koristeći ovaj rezultat , lako se, restrikcijom limesa na podskupove oblika

$$T_k := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d : \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2 = k\} ,$$

vidi da funkcije $\tilde{g}$ i g nisu konveksne, budući da vrijedi

$$\lim_{\boldsymbol{\xi}\in T_k, |\boldsymbol{\xi}| \longrightarrow +\infty} \tilde{g}(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\boldsymbol{\xi}\in T_k, |\boldsymbol{\xi}| \longrightarrow +\infty} g(\boldsymbol{\xi}) = 0 .$$

Iz gornjh relacija sada se trivijalno kontradikcijom pokazuje da je zaista $g^c = 0$ i $\tilde{g}^c = 0$.

Nadalje, birajući $\boldsymbol{\xi} := (t, 0, \dots 0)$ i promatrajući restrikciju od g na linearnu ljusku od $\boldsymbol{\xi}$ vidimo da (jer, po pokazanom, g nije konveksna za $d = 1$) g nije konveksna ranga 1. Imajući u vidu da je

$$t \longrightarrow g^{rc}(\mathbf{A} + t\mathbf{B})$$

konveksna za proizvoljne $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{2\times d}$ i $\mathbf{B} \in \mathrm{M}_{2\times d}$ tako da je $r(\mathbf{B}) = 1$, ovu tvrdnju možemo direktno pokazati kotradikcijom u za proizvoljni $d \in \mathbf{N}$, i to odabirući $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2$. Nadalje, kako je, specijalno, za $d = 1$ $g^c = g^{rc}$, vidimo da je u tom slučaju $g^{rc} = 0$. Zaključujemo da vrijedi

$$(g|_L)^{rc} = 0 ,$$

gdje je L proizvoljan potpostror u $\mathrm{M}_{2\times d}$ razapet matricom ranga 1. Na kraju, primijetimo da se tvrdnja (iii) dokazuje analogno kao i tvrdnja (ii).

Q.E.D.

3. Primjena u homogenizaciji

Neka je $p \in \langle 1, 2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, te $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup. Carathéodoryeva funkcija $\mathsf{A} : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ je u klasi $\mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ ako vrijedi

(1) $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \alpha \frac{|\mathsf{a}-\mathsf{b}|^2}{|\mathsf{a}|^{2-p} + |\mathsf{b}|^{2-p}}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

(2) $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \frac{1}{\beta} |\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})|^q$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

Neka je $p \in [2, \infty\rangle$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, te $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup. Carathéodoryeva funkcija $\mathsf{A} : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ je u klasi $\mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ ako vrijedi

(1) $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \alpha |\mathsf{a} - \mathsf{b}|^p$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

(2) $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \frac{1}{\beta} \frac{|\mathsf{A}(\mathbf{x},\mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x},\mathsf{b})|^2}{|\mathsf{a}|^{p-2} + |\mathsf{b}|^{p-2}}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

Najprije uočimo da postoje funkcije sa svojstvima kao u definiciji klase $\mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$. Naprimjer, možemo odabrati $a^n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ takve da vrijedi $\alpha \leqslant a_n(\mathbf{x}) \leqslant \beta$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

Definiramo li preslikavanja $\mathsf{A}^n : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ s

$$\mathsf{A}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := a^n(\mathbf{x}) \mathbf{I} |\boldsymbol{\xi}|^{p-2} \boldsymbol{\xi} ,$$

tada je $\mathsf{A}^n \in \mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$.

Također, odaberemo li niz matrica takav da je $\mathsf{A}^n \in \mathbf{M}(\alpha, \beta; \Omega)$ (što je ekvivalentno s $(\mathsf{A}^n)^\tau \in \mathbf{M}(\alpha, \beta; \Omega)$), tada je preslikavanje

$$\mathsf{A}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := (\mathsf{A}^n)^\tau \mathsf{A}^n \boldsymbol{\xi} |\mathsf{A}^n \boldsymbol{\xi}|^{p-2}$$

u klasi $\mathbf{Mon}^p(\frac{1}{\alpha^p}, \frac{1}{\beta^q}; \Omega)$ za $p \in \langle 1, 2\rangle$, odnosno u klasi $\mathbf{Mon}^p(\alpha^p, \frac{1}{\beta^p}; \Omega)$ za $p \in [2, \infty\rangle$.

Specijalno, ako su matrice A^n ortogonalne ($(\mathsf{A}^n)^{-1} = (\mathsf{A}^n)^\tau$), tada je $(\mathsf{A}^n)^{-1} = (\mathsf{A}^n)^\tau \in \mathbf{M}(\beta, \alpha; \Omega)$, i stoga je uvjet ispunjen uz $\beta := \alpha$.

Konačno, za $d = 1$ konstruirat ćemo funkcije iz klase $\mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ koje nemaju svojstvo

$$(\forall\, \lambda \in \mathbf{R})(\forall\, a \in \mathbf{R}) \quad \mathsf{A}^n(x, \lambda a) = \lambda|\lambda|^{p-2}\mathsf{A}^n(x, a)\ ,$$

iz čega zaključujemo da je uvjet homogenosti gornjeg tipa zaista dodatni zahtjev na funkcije iz $\mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$.

Naime, za Carthéodoryjeve funkcije $f_j^n : \Omega \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ($n \in \mathbf{N}$, $j = 1, \ldots, d$) takve da vrijedi

$$(\forall\, \xi \in \mathbf{R}) \quad \alpha^{'} \leqslant f_j^n(x, \xi) \leqslant \beta^{'} \text{ (ss } x \in \Omega)\ ,$$

lako se provjeri da za

(1) $p \in \langle 1, 2\rangle$ $\alpha^{'} := \alpha$, $\beta^{'} = \frac{\beta^{\frac{1}{q}}}{K_q}$

(2) $p \in [2, \infty\rangle$ $\alpha^{'} := \frac{\alpha}{K_p^p}$, $\beta^{'} := \beta^{\frac{1}{2}}$, gdje je K_p konstanta odabrana tako da vrijedi

$$(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad |\mathsf{a} - \mathsf{b}|_p| \geqslant K_p|\mathsf{a} - \mathsf{b}|_2$$

uz $\mathsf{A} = (\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_d) : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ i

$$\mathsf{A}_j^n(\mathbf{x}, \mathsf{a}) = \mathsf{A}_j^n(\mathbf{x}, a_1, \ldots, a_d) := \int_0^{a_j|a_j|^{p-2}} f_j^n(\mathbf{x}, \xi)d\xi$$

vrijedi $\mathsf{A}^n \in \mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$.

Neka je $p \in \langle 1, 2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, te $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup. Caratheodoryeva funkcija $\mathsf{A} : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ je u klasi $\mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ ako vrijedi

(1) $(\forall\, \mathsf{a} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, 0)) \cdot (\mathsf{a} - 0) \geqslant \alpha|\mathsf{a}|^p$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

(2) $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \frac{1}{\beta}|\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})|^q$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

Neka je $p \in [2, \infty\rangle$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, te $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ izmjeriv skup. Izmjeriva funkcija $\mathsf{A} : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ je u klasi $\mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ ako vrijedi

(1) $(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{b})) \cdot (\mathsf{a} - \mathsf{b}) \geqslant \alpha|\mathsf{a} - \mathsf{b}|^p$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

(2) $(\forall\, \mathsf{a} \in \mathbf{R}^d) \quad (\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, 0)) \cdot (\mathsf{a} - 0) \geqslant \frac{1}{\beta}|\mathsf{A}(\mathbf{x}, \mathsf{a}) - \mathsf{A}(\mathbf{x}, 0|^q$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$)

Očito vrijedi $(\forall\, p \in \langle 1, \infty\rangle)$ $\mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega) \subseteq \mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$. Nadalje, za $p \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$ vrijedi $\mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega) \neq \mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$. Naprimjer, za $d = 1$, $p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 2$, možemo definirati $\mathsf{A} : \Omega \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$A(x, a) := \int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a f(x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1})d\xi_{p-1} \cdots d\xi_2 d\xi_1\ ,$$

gdje je $f : \Omega \times \mathbf{R}^{p-1} \longrightarrow \mathbf{R}$ proizvoljna Carathéodoryjeva funkcija koja zadovoljava

$$(\forall\, (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}) \in \mathbf{R}^{p-1}) \quad \alpha \leqslant f(x, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}) \leqslant \beta^{p-1} \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega)\ .$$

Sada, za općeniti $d \in \mathbf{N}$ definiramo funkciju $\mathsf{A} = (A_1, \ldots, A_d) : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$, gdje je za $j = 1, \ldots, d$ $A_j : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s

$$A_j(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = A_j(\mathbf{x}, a_1, \ldots, a_d) := \int_0^{a_j} \int_0^{a_j} \cdots \int_0^{a_j} f(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1})d\xi_{p-1} \cdots d\xi_2 d\xi_1\ ,$$

gdje je $f_j : \Omega \times \mathbf{R}^{p-1} \longrightarrow \mathbf{R}$ proizvoljna izmjeriva funkcija koja zadovoljava

$$(\forall\, (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}) \in \mathbf{R}^{p-1}) \quad \frac{1}{K_p^p}\alpha \leqslant f_j(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}) \leqslant \beta^{p-1} \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega)\ ,$$

gdje je konstanta K_p odabrana tako da vrijedi

$$(\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^d) \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}|_p \geqslant K_p|\mathbf{a} - \mathbf{b}|_2\ .$$

Konačno, lako se provjeri da ovako konstruirane funkcije nisu u klasi $\mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$.

Teorem 3. *Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ograničen i otvoren skup, te $\mathsf{A}^n : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ proizvoljan niz u klasi $\mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$.*

Tada postoji podniz $\mathsf{A}^{n_k} \in \mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ i $\mathsf{A}^\infty \in \mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ te sa svojstvom da za svaku $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ niz rješenja $u^{n_k} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$ jednadžbe

$$-\mathsf{div}\,(\mathsf{A}^{n_k}(\cdot, \nabla u^{n_k})) = f$$

zadovoljava

$$u^{n_k} \xrightharpoonup{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)} u^\infty \quad i$$

$$\mathsf{A}^{n_k}(\cdot, \nabla u^{n_k}) \xrightharpoonup{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} \mathsf{A}^\infty(\cdot, \nabla u^\infty)\ ,$$

pri čemu je $u^\infty \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$ rješenje jednadžbe

$$-\mathsf{div}\,(\mathsf{A}^\infty(\cdot, \nabla u^\infty)) = f\ .$$

Dem. Neka je

$$L^n : \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega) \longrightarrow \mathrm{W}^{1,p'}(\Omega)$$

definiran s

$$L^n(u) := -\mathsf{div}\,(\mathsf{A}^n(\mathbf{x}, \nabla u(\mathbf{x}))\ .$$

Tada zbog $L_n(0) = 0$ iz Leme 8 zaključujemo da je za fiksiranu $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ niz $u^n := (L^n)^{-1}(f)$ ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$. Neka je $\mathcal{G} = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ prebrojiv gust podskup u $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Tada je $u^{n_1} := (L^n)^{-1}(f_1)$ ograničen u $\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$, pa ima slabo konvergentan podniz koji isto označimo s $u^{n^1_k}$, a pripadno gomilište s $B^\infty(f_1)$. Tada je $(L^{n^1_k})^{-1}(f_2)$ ograničen, te ima konvergentan podniz $u^{n^2_k}$, čije gomilište označimo s $B^\infty(f_2)$. Ponavljanjem ovog postupka dolazimo do niza $u^{n^k_k}$ (koji označimo s u^{n_l}) takvog da vrijedi

$$(\forall\, m \in \mathbf{N}) \quad (L^{n_l})^{-1}(f_m) \xrightharpoonup{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)} B^\infty(f_m)\ .$$

Time je definirano preslikavanje $B^\infty : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$.

Znamo da je, specijalno, ∇u^{n_l} ograničen u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^d)$. Kako je za svaki $k \in \mathbf{N}$ preslikavanje

$$\nabla u \longrightarrow \mathsf{A}^k(\cdot, \nabla u)$$

neprekinuto sa $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^q(\Omega; \mathbf{R}^d)$, to vrijedi: za svaki $k \in \mathbf{N}$ niz $(\mathsf{A}^k(\cdot, \nabla u^{n_l}))_{l \in \mathbf{N}}$ je ograničen u $\mathrm{L}^q(\Omega; \mathbf{R}^d)$. Prijelazom na slabo konvergentni podniz i provođenjem Cantorovog dijagonalnog postupka kao u gornjem dijelu dokaza zaključujemo da postoji podniz $(u^{(m)})$ i preslikavanje $R : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega; \mathbf{R}^d)$ za koji vrijedi:

$$\mathsf{A}^{(m)}(\cdot, \nabla u^{(m)}) \xrightharpoonup{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} R(f)$$

Uz $B^m := (L^{(m)})^{-1}$ za $f \in \mathcal{G}$ vrijedi $u^{(m)} = B^m(f)$ i stoga

$$(\forall\, f \in \mathcal{G}) \quad B^m(f) \xrightharpoonup{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)} B^\infty(f)\ ,$$

te se zbog Leme 6 B^∞ proširuje do lokalno uniformnog preslikavanja na $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Štoviše, vrijedi

$$(\forall\, f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)) \quad B^m(f) \xrightharpoonup{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)} B^\infty(f)\ .$$

Nadalje, budući da za proizvoljne $g, h \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ vrijedi

$$(\forall\, \psi \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)) \quad {}_V\langle\, B^m(g) - B^m(h), \psi \,\rangle_{V'} \longrightarrow {}_V\langle\, B^\infty(g) - B^\infty(h), \psi \,\rangle_{V'} \ ,$$

to odabirom $\psi := g - h$ iz Leme 9 dobijemo ocjene

$${}_V\langle\, B^\infty(g) - B^\infty(h), g - h \,\rangle_{V'} = \lim_{m \longrightarrow \infty} {}_V\langle\, B^m(g) - B^m(h), g - h \,\rangle_{V'}$$

$$\geqslant 2^{1-\frac{2}{p}} \frac{\alpha^{1+2(1-\frac{2}{p})}}{\beta^2} \frac{\|f - g\|^2_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}}{\|f\|_{V'}^{2(1-\frac{2}{p})} + \|g\|_{V'}^{2(1-\frac{2}{p})}}$$

ukoliko je $p \in [2, \infty\rangle$, odnosno

$${}_V\langle\, B^\infty(g) - B^\infty(h), g - h \,\rangle_{V'} =$$

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} {}_V\langle\, B^m(g) - B^m(h), g - h \,\rangle_{V'} \geqslant \frac{\alpha}{\beta^q} 2^{q-3} q \|f - g\|^q_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \ ,$$

ukoliko je $p \in \langle 1, 2 \rangle$.

Stoga B^∞ također zadovoljava uvjete Browder-Mintyjevog teorema. Štoviše, $(B^\infty)^{-1}$ je lokalno uniformno neprekinut. Dakle je $f = (B^\infty)^{-1}(u^\infty)$, odnosno, za $f \in \mathcal{G}$

$$\mathsf{A}^{(m)}(\cdot, \nabla u^{(m)}) \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^d)} R \circ (B^\infty)^{-1}(u^\infty)$$

Pokazat ćemo da gornja konvergencija zapravo vrijedi za svaku $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$. No, najprije pokažimo da se R može proširiti na $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Tvrdimo da je za $p \in \langle 1, 2 \rangle$ $R : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega; \mathbf{R}^d)$ lokalno uniformno neprekinut, i stoga proširiv na $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Iz Korolara 3 (ocjena (+)) imamo

$$\|R(f) - R(g)\|^q_{\mathrm{L}^q(\Omega; \mathbf{R}^d)} \leqslant \beta^q \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega ||\nabla u^n|^{p-2} \nabla u^n - |\nabla v^n|^{p-2} \nabla v^n|^q$$

$$\leqslant \beta^q \frac{1}{(2^{q-2} q)^p} \liminf_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u^n - \nabla v^n|^p$$

Dakle vrijedi

$$\|R(f) - R(g)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega; \mathbf{R}^d)} \leqslant \beta \frac{1}{(2^{q-2} q)^{p-1}} \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|u^n - v^n\|^{p-1}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}$$

$$= \beta \frac{1}{(2^{q-2} q)^{p-1}} \liminf_{n \longrightarrow \infty} \|L_n^{-1}(f) - L_n^{-1}(g)\|^{p-1}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}$$

Iz Leme 8 imamo da je dalje

$$\|R(f) - R(g)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega; \mathbf{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta \frac{1}{(2^{q-2} q)^{p-1}} \left\{ \frac{1}{\alpha^{1+\frac{2-p}{p-1}}} (2^{p-1})^{\frac{2}{p}-1} \|f - g\|^{p-1}_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \Big\{ \|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \Big\}^{\frac{2-p}{p-1}} \right\}^{p-1}$$

$$\leqslant \frac{\beta}{\alpha} \kappa(p) \|f - g\|^{p-1}_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} \Big\{ \|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)} \Big\}^{2-p} \ ,$$

gdje je $\kappa(p) := \frac{1}{(2^{q-2}q)^{p-1}}(2^{p-1})^{(\frac{2}{p}-1)(p-1)}$.

Stoga je $R : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)$ lokalno uniformno neprekinut, i zato proširiv na $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Sada ćemo pokazati analognu tvrdnju u slučaju $p \in [2,\infty\rangle$.

Kao i ranije, polazimo od relacije

$$\|R(f)-R(g)\|^q_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} \leqslant \beta^q \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega ||\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n - |\nabla v^n|^{p-2}\nabla v^n|^q\ .$$

Po Korolaru 4 tada vrijedi

$$\|R(f)-R(g)\|^q_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} \leqslant \beta^q 2^{p-2} \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|\nabla u^n-\nabla v^n\|^q_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big\{\|\nabla u^n\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}+\|\nabla v^n\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}}$$

$$= \beta^q 2^{p-2} \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|L_n^{-1}(f)-L_n^{-1}(g)\|^q_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\Big\{\|L_n^{-1}(f)\|^p_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)} + \|L_n^{-1}(g)\|^p_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}}$$

$$\leqslant \theta \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|L_n^{-1}(f)-L_n^{-1}(g)\|^q_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\Big\{\{\|L_n^{-1}(f)\|^{p-1}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\}^{\frac{p}{p-1}} + \{\|L_n^{-1}(g)\|^{p-1}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\}^{\frac{p}{p-1}}\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}}$$

pri čemu je $\theta(p) := \beta^q 2^{p-2}$. Koristeći Lemu 7 imamo ocjenu

$$\|R(f)-R(g)\|^q_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \theta(p) \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|L_n^{-1}(f)-L_n^{-1}(g)\|^q_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\Big\{\{\frac{1}{\alpha}\|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\}^{\frac{p}{p-1}} + \{\frac{1}{\alpha}\|g\|_{\mathrm{W}_0^{-1,p'}(\Omega)}\}^{\frac{p}{p-1}}\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}}$$

$$= \theta(p)(\frac{1}{\alpha^q})^{\frac{p-2}{p-1}} \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|L_n^{-1}(f)-L_n^{-1}(g)\|^q_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\Big\{\{\|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\}^q + \{\|g\|_{\mathrm{W}_0^{-1,p'}(\Omega)}\}^q\Big\}^{\frac{p-2}{p-1}}$$

Nadalje je

$$\|R(f)-R(g)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta}{\alpha^{\frac{p-2}{p-1}}} 2^{\frac{p-2}{q}} \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|L_n^{-1}(f)-L_n^{-1}(g)\|_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\Big\{\{\|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\}^q + \{\|g\|_{\mathrm{W}_0^{-1,p'}(\Omega)}\}^q\Big\}^{\frac{p-2}{p}}\ .$$

Konačno, primjenjujući rezultat iz Leme 8 zaključujemo da vrijedi

$$\|R(f)-R(g)\|_{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta}{\alpha^{\frac{p-2}{p-1}}} 2^{\frac{p-2}{q}} \Big[\frac{1}{\alpha}2^{p-2}p\Big]^{\frac{1}{p-1}} \|f-g\|^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\Big\{\{\|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\}^q + \{\|g\|_{\mathrm{W}_0^{-1,p'}(\Omega)}\}^q\Big\}^{\frac{p-2}{p}}$$

$$\leqslant \frac{\beta}{\alpha}\sigma(p)\|f-g\|^{\frac{1}{p-1}}_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\Big\{\{\|f\|_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}\}^q + \{\|g\|_{\mathrm{W}_0^{-1,p'}(\Omega)}\}^q\Big\}^{\frac{p-2}{p}}\ ,$$

gdje je $\sigma(p) := p^{\frac{1}{p-1}} \cdot 2^{\frac{(p-2)^2}{p}}$. Vidimo da je za $p \in [2,\infty\rangle$ R lokalno uniformno neprekinut, odnosno proširiv na $\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Definirajmo operator $C : \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)$ s $C := R\circ B^{-1}$. Tada vrijedi

$$\mathsf{A}^{(m)}(\cdot,\nabla u^{(m)}) \xrightarrow{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^d)} C(u^\infty)\ .$$

Preostaje pokazati da je C oblika

$$C(u^\infty) = A^\infty(\cdot, \nabla u^\infty) \ ,$$

za neku $A^\infty \in \mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$.

Koristit ćemo varijantu tzv. Mintyjevog trika. Primijetimo, dakle, da za proizvoljni $\omega \subset\subset \Omega$ i proizvoljnu $\varphi \in \mathrm{C}^1_c(\Omega)$ takvu da je $\varphi|_\omega = 1$ vrijedi: za svaki $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ možemo odabrati $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ takvu da vrijedi

$$v^\infty(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}$$

Ova tvrdnja vrijedi zbog jedinstvenosti rješenja ovog (nelinearnog) problema:

$$-\mathsf{div}\,(C(\overline{v})) = f \ ,$$

pri čemu je $\overline{v}(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$. Naime, ako su v^n rješenja odgovarajućih zadaća uz ovako definiran f, iz konvergencije

$$v^n \xrightarrow{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega)} v^\infty$$

slijedi $v^\infty = \overline{v}$, budući da je v^∞ rješenje jednadžbe

$$-\mathsf{div}\,(C(v^\infty)) = f$$

Za takve $\omega \subset\subset \Omega$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ i $f \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ definiramo

$$\mathsf{A}^\infty|_\omega(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := R(f)(\mathbf{x}) \ , \mathbf{x} \in \omega \ .$$

Tvrdimo da je time dobro definirano preslikavanje $\mathsf{A}^\infty : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$, da je $\mathsf{A}^\infty \in \mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ te da zadovoljava ostale uvjete iz teorema.

Da bismo pokazali da je A^∞ dobro definirano, treba pokazati:

Ukoliko su za $i = 1, 2$ $\omega_i \subset\subset \Omega$, $\varphi_i \in \mathrm{C}^1_c(\Omega)$, $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbf{R}^d$ i $f_i \in \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)$ kao u gornjem razmatranju, definiramo li za $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \omega_i \times \mathbf{R}^d$ $\mathsf{A}^\infty_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i) := \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i)$, mora vrijediti

$$(\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad \mathsf{A}^\infty_1|_{\omega_1 \cap \omega_2}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) = \mathsf{A}^\infty_2|_{\omega_1 \cap \omega_2}(\cdot, \boldsymbol{\xi})$$

ili, ekvivalentno,

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2 \Longrightarrow \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) = \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2) \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \omega_1 \cap \omega_2) \ .$$

Odmah vidimo da su $\mathsf{A}^\infty_i : \omega_i \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ i izmjerive funkcije. Štoviše, za svaki $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ $\mathbf{x} \mapsto \mathsf{A}^\infty_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ su funkcije iz $\mathrm{L}^q(\omega_i)$. Neka su za j=1,2 $v_j^{(m)} \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$ takvi da vrijedi

$$v_j^{(m)}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)} \varphi_j(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}_j \cdot \mathbf{x} \ .$$

Stavimo $E^m_j := \nabla v_j^{(m)}$ i $D^m_j := \mathsf{A}^{(m)}(\cdot, \nabla v_j^{(m)})$.

Uočimo da po konstrukciji vrijedi

$$E^m_2 - E^m_1 \xrightarrow{\mathrm{L}^p(\omega_2 \cap \omega_1; \mathbf{R}^d)} \boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1 \ ,$$

budući da je po konstrukciji $\varphi_1|_{\omega_2 \cap \omega_1} = \varphi_2|_{\omega_2 \cap \omega_1} = 1$, i stoga i

$$\nabla(\varphi_2(\mathbf{x})p_2 \cdot \mathbf{x}) - \nabla(\varphi_1(\mathbf{x})p_1 \cdot \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1 \ (\text{ss } \mathbf{x} \in \omega_2 \cap \omega_1) \ .$$

Također vrijedi

$$D_2^m - D_1^m \xrightharpoonup{\mathrm{L}^q(\omega_2\cap\omega_1;\mathbf{R}^d)} \mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_1) \ .$$

Kako je, štoviše, $\operatorname{div} D_j^m = f_j$ i $\operatorname{rot} E_j^m = 0$, možemo primijeniti div-rot lemu, te zaključujemo da za proizvoljnu $\psi \in \mathrm{C}_c(\omega_1 \cap \omega_2)$ vrijedi

$$\int \psi(D_2^m - D_1^m)\cdot(E_2^m - E_1^m) \longrightarrow L := \int \psi(\mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_1))\cdot(\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1) \ .$$

Stavimo

$$L_0 := \int \psi(\mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\cdot,0))\cdot(\boldsymbol{\xi}_2 - 0) \ .$$

Zasebno ćemo razmatrati slučajeve $p \in \langle 1,2\rangle$ i $p \in [2,\infty\rangle$.

Neka je najprije $p \in \langle 1,2\rangle$. Specijalno za nenegativne funkcije ψ zaključujemo:

$$\int_\Omega \psi(\mathbf{x})(D_2^m(\mathbf{x}) - D_1^m(\mathbf{x}))\cdot(E_2^m(\mathbf{x}) - E_1^m(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$$

$$= \int_\Omega \psi(\mathbf{x})(\mathsf{A}^{(m)}(\mathbf{x},\nabla v_2^{(m)}(\mathbf{x})) - \mathsf{A}^{(m)}(\mathbf{x},\nabla v_1^{(m)}(\mathbf{x})))\cdot(\nabla v_1^{(m)}(\mathbf{x}) - \nabla v_2^{(m)}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \ .$$

$$\geqslant \int_{\omega_1\cap\omega_2} \alpha\frac{|\nabla v_1^{(m)}(\mathbf{x}) - \nabla v_2^{(m)}(\mathbf{x}))|^2}{|\nabla v_1^{(m)}(\mathbf{x})|^{2-p} + |\nabla v_2^{(m)}(\mathbf{x}))|^{2-p}}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Na ovom mjestu prisjetimo se da po Lemi 10 preslikavanje $g : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$ definirano s

$$g(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2) = \frac{|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^2}{|\boldsymbol{\xi}_1|^{2-p} + |\boldsymbol{\xi}_2|^{2-p}}$$

nije kvazikonveksna, te ne možemo primijeniti Teorem 11 iz poglavlja 4. Kako je, s druge strane, $g^{sp} = g$, uz $\boldsymbol{\xi}_1 := 0$, $v_1^{(m)} := 0$ i

$$\nabla v_2^{(m)} \xrightharpoonup{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^d)} \boldsymbol{\xi}_2 \ ,$$

imamo ocjenu

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\int \psi(D_2^m - D_1^m)\cdot(E_2^m - 0) \geqslant \liminf_{m\longrightarrow\infty}\int_{\omega_1\cap\omega_2} \alpha\frac{|\nabla v_2^{(m)}(\mathbf{x}) - 0|^2}{|\nabla v_2^{(m)}(\mathbf{x})|^{2-p} + |0|^{2-p}}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$\geqslant \int_{\omega_1\cap\omega_2} \alpha\frac{|\boldsymbol{\xi}_2 - 0|^2}{|\boldsymbol{\xi}_2|^{2-p} + |0|^{2-p}}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \alpha|\boldsymbol{\xi}_2|^p\int_{\omega_1\cap\omega_2}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Kako je, s druge strane, $(\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \mapsto |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^q$ konveksna, slično se uz pomoć svojstva (2) i Tonellijevog teorema iz definicije klase $\mathbf{Mon}^p(\alpha,\beta;\Omega))$ pokaže da vrijedi i ocjena

$$L \geqslant \liminf_{m\longrightarrow\infty}\int_\Omega \psi\frac{1}{\beta}|D_2^m - D_1^m|^q \geqslant \int_\Omega \psi\frac{1}{\beta}|\mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_1)|^q \ .$$

Birajući $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\xi}_2$ iz definicije od L imamo da je $L = 0$ te je i

$$\int_\Omega \psi\frac{1}{\beta}|\mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\cdot,\boldsymbol{\xi}_1)|^q = 0 \ .$$

Kako je gornja relacija ispunjena za svaku nenegativnu $\psi \in \mathrm{C}_c(\omega_2 \cap \omega_1)$, zbog nenegativnosti čitavog integranda slijedi

$$(\forall\, \psi \in \mathrm{C}_c(\omega_2 \cap \omega_1; \mathbf{R}_0^+)) \quad \psi(\mathbf{x})|\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1)|^2 = 0 \text{ (ss } \mathbf{x} \in \omega_2 \cap \omega_1) \ ,$$

te je

$$\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2) = \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) \text{ (ss } \mathbf{x} \in \omega_2 \cap \omega_1) \ .$$

Time je pokazano da je A^∞ dobro definirano preslikavanje.

Pokažimo sada da je $\mathsf{A}^\infty \in \mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$.

Najprije uočimo da je po Lemi 2 za proizvoljan i fiksiran $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ preslikavanje $\mathbf{x} \longrightarrow \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ izmjerivo.

Već smo pokazali da je za nenegativne ψ

$$L_0 \geqslant \int_{\omega_1 \cap \omega_2} \alpha |\boldsymbol{\xi}_2|^p \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \ ,$$

te je stoga uz $\omega_2 = \omega_1$ za proizvoljnu $\psi \in \mathrm{C}_c(\omega_1; \mathbf{R}^+)$ ispunjeno i

$$\int_{\omega_1} ((\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, 0)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_2 - 0) - \alpha |\boldsymbol{\xi}_2|^p) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geqslant 0 \ .$$

Dakle je i (detaljno obrazloženje ovog zaključka dano je u Lemi 3)

$$(\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, 0)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1) \geqslant \alpha |\boldsymbol{\xi}_2|^p \text{ (ss } x \in \omega_1) \ ,$$

te je zadovoljen uvjet (1) iz definicije klase $\mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$. Analogno se pokazuje da je zadovoljen i uvjet (2).

Primjenom div-rot leme na nizove $(\mathsf{A}^{(m)}(\cdot, \nabla u^{(m)}) - D_1^m)$ i $(\nabla u^{(m)} - E_1^m)$ slično se (uz pomoć Leme 3) pokaže da proizvoljni $\omega_1 \subset\subset \Omega$ vrijedi:

$$(\forall\, \boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbf{R}^d) \quad (C(u^\infty)(\mathbf{x}) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1)) \cdot (u^\infty(\mathbf{x}_0) - \boldsymbol{\xi}_1) \geqslant \beta |C(u^\infty)(\mathbf{x}) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1)|^q \ ,$$

za skoro svaki $\mathbf{x} \in \omega_1$.

Fiksirajmo $\mathbf{x}_0 \in \omega_1 \backslash E_1$, gdje je $E_1 \subset \omega_1$ skup na kojem gornja nejednakost vrijedi točkovno i takav da je $\mu(E_1) = 0$. Tada vrijedi

$$|C(u^\infty)(\mathbf{x}_0) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}_0, p_1)| \leqslant \beta^{p-1} |\nabla u^\infty(\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\xi}_1|^{p-1} \ .$$

Specijalno, za $\boldsymbol{\xi}_1 := \nabla u^\infty(\mathbf{x}_0)$ imamo

$$|C(u^\infty)(\mathbf{x}_0) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}_0, \nabla u^\infty(\mathbf{x}_0))| \leqslant \beta^{p-1} |\nabla u^\infty(\mathbf{x}_0) - \nabla u^\infty(\mathbf{x}_0)|^{p-1} = 0 \ ,$$

odnosno

$$(\forall\, \mathbf{x}_0 \in \omega_1 \backslash E_1) \quad C(u^\infty)(\mathbf{x}_0) = \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}_0, \nabla u^\infty(\mathbf{x}_0)) \ .$$

Biranjem niza $\omega_k \nearrow \Omega$ vidimo da smo dokazali:

$$C(u^\infty)(\mathbf{x}) = \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \nabla u^\infty(\mathbf{x}_0)) \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega)$$

Konačno, pokažimo da je preslikavanje $\boldsymbol{\xi} \longrightarrow \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ neprekinuto za skoro svaki $\mathbf{x} \in \Omega$. Fiksirajmo $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ i $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$. Tada je po konstrukciji

$$\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) = \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}_0, \nabla u^\infty(\mathbf{x}_0) \ ,$$

za neku $u^\infty \in \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Za $\delta^{p-1} := \frac{\varepsilon}{\beta^{p-1}}$ tada vrijedi

$$(\forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d) \quad |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| < \delta \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}|\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta})| &= |C(u^\infty)(\mathbf{x}_0) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\eta})| \\ &\leqslant \beta^{p-1}|\nabla u^\infty(\mathbf{x}_0) - \boldsymbol{\eta}|^{p-1} = \beta^{p-1}|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|^{p-1} = \varepsilon \,.\end{aligned}$$

Stoga je $\mathsf{A}^\infty : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ Carathéodoryjeva, te $\mathsf{A}^\infty \in \mathbf{WMon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$.

Na kraju, iz konvergencije

$$\mathsf{A}^{(m)}(\cdot, \nabla u^{(m)}) \xrightharpoonup{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} \mathsf{A}^\infty(\cdot, \nabla u^\infty)$$

zaključujemo da je u^∞ rješenje jednadžbe

$$-\mathsf{div}\, \mathsf{A}^\infty(\cdot, \nabla u^\infty) = f \,.$$

Sada ćemo razmotriti slučaj $p \in [2, \infty\rangle$. Uočimo da zbog $p \in [2, \infty\rangle$ slijedi $q \in \langle 1, 2]$, a zbog ograničenosti skupa Ω vrijedi

$$f_n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^d)} f \Rightarrow f_n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)} f \,.$$

Stoga zaključujemo

$$(E_1^m, E_1^m, D_1^m, D_2^m) \xrightharpoonup{\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)} (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \mathsf{A}^\infty(\cdot, \boldsymbol{\xi}_1), \mathsf{A}^\infty(\cdot, \boldsymbol{\xi}_1))$$

Iz Leme 10 slijedi da preslikavanje $h : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$ definirano s

$$h(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) := \frac{|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^2}{|\boldsymbol{\xi}_1|^{p-2} + |\boldsymbol{\xi}_2|^{p-2}}$$

ima konveksifikaciju nula, te Tonellijev teorem može dati samo trivijalnu ocjenu. S druge strane je $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \mapsto |\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^p$ konveksna funkcija, te iz definicije klase $\mathbf{Mon}^p(\alpha, \beta; \Omega)$ za $p \in [2, \infty\rangle$ zaključujemo

$$\int_\Omega \psi(\mathbf{x})(D_2^m(\mathbf{x}) - D_1^m(\mathbf{x})) \cdot (E_2^m(\mathbf{x}) - E_1^m(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant$$
$$\frac{1}{\beta}\int_{\omega_1\cap\omega_2} \frac{|D_1^m(\mathbf{x}) - D_2^m(\mathbf{x}))|^2}{|E_1^m(\mathbf{x})|^{2-p} + |E_2^m(\mathbf{x}))|^{2-p}}\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

odnosno

$$\int_\Omega \psi(\mathbf{x})(D_2^m(\mathbf{x}) - D_1^m(\mathbf{x})) \cdot (E_2^m(\mathbf{x}) - E_1^m(\mathbf{x}))d\mathbf{x} \geqslant \int_{\omega_1\cap\omega_2} \alpha\psi(\mathbf{x})|E_1^m - E_2^m|^p \,.$$

Stoga (ponovno po Tonellijevom teoremu) u gornjoj relaciji možemo prijeći na limes, te imamo

$$\int_\Omega \psi(\mathbf{x})(\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2)d\mathbf{x} \geqslant \int_{\omega_1\cap\omega_2} \alpha\psi(\mathbf{x})|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^p \,,$$

odnosno

$$\int_\Omega \psi(\mathbf{x})(\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, 0)) \cdot (\boldsymbol{\xi}_2 - 0)d\mathbf{x} \geqslant \frac{1}{\beta}\int_{\omega_1\cap\omega_2} |\mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^\infty(\mathbf{x}, 0))|^q\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \,,$$

Kao i ranije, primjenom Leme 3 slijedi

$$\mathsf{A}^{\infty}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^{\infty}(\mathbf{x},0)\cdot(\boldsymbol{\xi}_2 - 0) \geqslant \frac{1}{\beta}|\mathsf{A}^{\infty}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_2) - \mathsf{A}^{\infty}(\mathbf{x},0)|^q$$

$$\mathsf{A}^{\infty}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_1) - \mathsf{A}^{\infty}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_2)\cdot(\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2) \geqslant \alpha|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2|^p \ .$$

te je $\mathsf{A}^{\infty} : \Omega \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ dobro definirano preslikavanje, izmjerivo po $\mathbf{x} \in \Omega$ i zadovoljava ocjene iz definicije klase $\mathbf{WMon}^p(\alpha,\beta;\Omega)$. Potpuno analogno kao u slučaju $p \in \langle 1, 2\rangle$ pokazuje se da je $\boldsymbol{\xi} \longrightarrow \mathsf{A}^{\infty}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ neprekinuta u nuli za skoro svaki $\mathbf{x} \in \Omega$.

Time je pokazano da je $\mathsf{A}^{\infty} \in \mathbf{WMon}^p(\alpha,\beta;\Omega)$.

Konačno, zbog slabe konvergencije u $\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbf{R}^d)$ lako se vidi da u^{∞} zadovoljava

$$-\mathsf{div}\,\mathsf{A}^{\infty}(\cdot,\nabla u^{\infty}) = f \ .$$

Q.E.D.

VI. Alternativni opis mikrostruktura

Egzaktna rješenja

U poglavlju 4 vidjeli smo da rješavanje relaksacijske zadaće odgovara određivanju kvazikonveksne ovojnice. Konstrukcija netrivijalnih egzaktnih rješenja je delikatnija: na osnovi negativnih rezultata za zadaću dva gradijenta do nedavno se smatralo da je netrivijalna egzaktna rješenja moguće konstruirati vrlo rijetko. Ipak, rezultati posljednjih godina sugeriraju da takva rješenja postoje, ali da moraju biti vrlo komplicirana. Kao pripremu za dokaz nekih od gore spomenutih rezultata poslužit će nam neke generalizacije dosadašnjih pojmova. Napominjemo da glavne rezultate ovog poglavlja ne dokazujemo: dokazi su tehnički složeni i još uvijek nisu publicirani ([MS 99]).

Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ otvoren skup. Funkcija $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ je konveksna ranga 1 na $\mathcal{O}$ ako vrijedi

$$(\forall\, \lambda \in [0,1])(\forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{O})(r(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 1)$$
$$\lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B} \in \mathcal{O} \Rightarrow f(\lambda\mathbf{A} + (1-\lambda)\mathbf{B}) \leqslant \lambda f(\mathbf{A}) + (1-\lambda) f(\mathbf{B}) \;.$$

Lako se vidi da je takva f lokalno Lipschitzova na $\mathcal{O}$.

Sljedeća definicija preuzeta je iz [Da 89].

Za konačnu familiju parova $(\lambda_i, \mathbf{F}_i) \in \langle 0,1\rangle \times \mathrm{M}_{r\times d}$ uvjet (H_l) definiramo induktivno kako slijedi.

(i) Parovi $(\lambda_1, \mathbf{F}_1)$ i $(\lambda_2, \mathbf{F}_2)$ zadovoljavaju (H_2) ako vrijedi

$$r(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) = 1 \;, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \;.$$

(ii) Familija $(\lambda_i, \mathbf{F}_i)_{i=1}^l$ zadovoljava uvjet (H_l) ako, nakon prenumeriranja, vrijedi

$$r(\mathbf{F}_l - \mathbf{F}_{l-1}) = 1 \;,$$

te nova familija $(\tilde\lambda_i, \tilde{\mathbf{F}}_i)_{i=1}^l$ definirana s

$$\tilde{\mathbf{F}}_{l-1} := \frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_{l-1} + \lambda_l}\mathbf{F}_{l-1} + \frac{\lambda_l}{\lambda_{l-1} + \lambda_l}\mathbf{F}_l$$
$$(\tilde\lambda_i, \tilde{\mathbf{F}}_i) := (\lambda_i, \mathbf{F}_i) \;\text{ za }\; 1 \leqslant i \leqslant l-2$$

zadovoljava uvjet (H_{l-1}).

Vjerojatnosna mjera $\nu \in \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d})$ je *lamina konačnog reda* ako postoji familija $(\lambda_i, \mathbf{F}_i) \in \langle 0,1\rangle \times \mathrm{M}_{r\times d}$ koja zadovoljava uvjet (H_l) i vrijedi

$$\nu = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \delta_{\mathbf{F}_i} \;.$$

Vjerojatnosna mjera $\nu \in \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d})$ je *lamina* ako postoji niz (ν_j) lamina konačnog reda s nosačem u fiksnom kompaktnom skupu takav da vrijedi

$$\nu_j \overset{*}{\longrightarrow} \nu \;,$$

u smislu konvergencije u $\mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d})$.

Skup lamina konačnog reda na $\mathrm{M}_{r\times d}$ označavamo s $\mathcal{L}(\mathrm{M}_{r\times d})$, uz analognu oznaku $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ za lamine na otvorenom skupu $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$. U [Pe 93] dokazan je sljedeći važni teorem:

Teorem 1. *Vjerojatnosna mjera $\nu \in \mathcal{M}_b(\mathrm{M}_{r\times d})$ s kompaktnim nosačem K je lamina ako i samo ako za svaku funkciju $f : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ koja je konveksna ranga 1 vrijedi*

$$\langle \nu, f\rangle \geqslant f(\langle \nu, id\rangle) \ .$$

∎

Drugim riječima, rečeni skup se podudara s $\mathcal{M}^{rc}(K)$. Napominjemo da je jedna od najznačajnijih posljedica Šverakovog kontraprimjera činjenica da postoje Youngove mjere koje nisu lamine. U daljnjem koristimo oznaku $\overline{\nu} := \langle \nu, id\rangle$.

Lema 1. *Neka je $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ kompaktan skup, $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ otvoren skup takav da je $K^{rc} \subseteq \mathcal{O}$ i $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ konveksna ranga 1 na $\mathcal{O}$. Tada postoji otvorena okolina W skupa K^{rc} i funkcija $F_W : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ koja je konveksna ranga 1 na $\mathrm{M}_{r\times d}$ tako da vrijedi*

$$F_W|_W = f|_W \ .$$

Dem. Koristeći definiciju skupa K^{rc} lako se pokaže da postoji nenegativna funkcija g koja je konveksna ranga 1 takva da vrijedi

$$K^{rc} = \{\mathbf{X} \in \mathrm{M}_{r\times d} : g(\mathbf{X}) = 0\} \ .$$

Kako je f lokalno Lipschitzova, to bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $f > 0$ na nekoj okolini skupa K^{rc}. Za $k > 0$ definirajmo

$$U_k := \{\mathbf{X} \in \mathcal{O} : f(\mathbf{X}) > kg(\mathbf{X})\} \ .$$

Neka je V_k unija svih komponenti povezanosti skupa U_k koje imaju neprezan presjek s K^{rc}. Lako se vidi da postoji k_0 takav da vrijedi $\overline{V}_{k_0} \subseteq \mathcal{O}$. Na kraju, definirajmo $F : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ s

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}) \ , & \text{za } \mathbf{X} \in V_{k_0} \\ k_0 g(\mathbf{X}) \ , & \text{inače} \end{cases} \ .$$

Q.E.D.

Lema 2. *Neka je $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ otvoren skup i $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekinuta funkcija. Definirajmo $R_{\mathcal{O}} f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R}$ s*

$$R_{\mathcal{O}} f := \sup\{g : g \leqslant f \ \& \ g : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{R} \ \text{ je konveksna ranga 1}\} \ .$$

Tada za svaki $\mathbf{X} \in \mathcal{O}$ vrijedi

$$R_{\mathcal{O}} f(\mathbf{X}) = \inf\{\langle \nu, f\rangle : \nu \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \ \& \ \overline{\nu} = \mathbf{X}\} \ .$$

Dem. Označimo s $\tilde{f}$ funkciju $\mathcal{O}$ definiranu s

$$\tilde{f} := \inf\{\langle \nu, f\rangle \ , \nu \in \mathcal{L}(\mathcal{O}) \ , \overline{\nu} = \mathbf{X}\} \ .$$

Očito vrijedi $R_{\mathcal{O}} f \leqslant \tilde{f}$ na $\mathcal{O}$. S druge strane, iz definicije skupa $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ slijedi da je za proizvoljni segment ranga 1 $[\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2]$ sadržan u $\mathcal{O}$ takav da je $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ i svaka konveksna kombinacija elemenata ν_1 i ν_2 ponovno u $\mathcal{L}(\mathcal{O})$. Stoga je $\tilde{f}$ konveksna ranga 1 na $\mathcal{O}$ i $R_{\mathcal{O}} f = \tilde{f}$.

Q.E.D.

Teorem 2. *Neka je* $K \in \mathcal{K}(\mathrm{M}_{r\times d})$ *i* $\nu \in \mathcal{M}^{rc}(K)$. *Neka je* $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ *otvoren skup yakav da je* $K^{rc} \subseteq \mathcal{O}$. *Tada postoji niz* $\nu_j \in \mathcal{L}(\mathcal{O})$ *takav da vrijedi*
(i) $(\forall j \in \mathbf{N}) \quad \langle \nu_j, id\rangle = \langle \nu, id\rangle$
(ii) $\nu_j \xrightarrow{\;*\;} \nu$

Dem. Neka je $\nu \in \mathcal{M}^{rc}$ i $\mathbf{A} := \overline{\nu}$. Tada je $\mathbf{A} \in K^{rc}$. Odaberimo otvoren skup $U \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ koji zadovoljava $K^{rc} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \mathcal{O}$ i definirajmo

$$\mathcal{F} := \{\mu \in \mathcal{L}(U) : \overline{\mu} = \mathbf{A}\}\ .$$

Tvrdimo da slabi–$*$ zatvarač skupa $\mathcal{F}$ sadrži ν. Pretpostavimo suprotno. kako je $\mathcal{F}$ konveksan, prema geometrijskoj formi Hahn-Banachovog teorema postoji neprekinuta funkcija $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbf{R}$ koja zadovoljava

$$\langle \nu, f\rangle < \inf\{\langle \mu, f\rangle : \mu \in \mathcal{L}(U)\ , \overline{\mu} = \mathbf{A}\}\ .$$

Prema Lemi 2 funkcija $\tilde{f} := R_U f$ je konveksna ranga 1 na U i zadovoljava

$$\langle \mu, \tilde{f}\rangle \leqslant \langle \mu, f\rangle < \tilde{f}(\overline{\nu})\ .$$

Prema Lemi 1 možemo konstruirati funkciju $F : \mathrm{M}_{r\times d} \longrightarrow \mathbf{R}$ koja je konveksna ranga 1 i takvu da je $\tilde{f} = F$ na K^{rc}. Prema tome ν ne pripada $\mathcal{M}^{qc}$, što je kontradikcija.

Q.E.D.

Za iskaz glavnih rezultat ovog odjeljka trebat će nam neke defnicije.

Lipschitzovo preslikavanje $\mathsf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ je *po dijelovima afino* ako postoji prebrojivo međusobno disjunktnih podskupova $\Omega_j \subseteq \Omega$ koji pokrivaju Ω do na skup mjere nula tako da je u na svakom od njih afina funkcija.

Neka je $\mathcal{F}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ familija neprekinutih preslikavanja s Ω u $\mathbf{R}^r$. Kažemo da neprekinuto preslikavanje $\mathsf{v}_0 : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ dopušta *finu* C^0*–aproksimaciju* familijom $\mathcal{F}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ ako za proizvoljnu neprekinutu funkciju $\varepsilon : \Omega \longrightarrow \langle 0, \infty\rangle$ postoji element v familije $\mathcal{F}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ tako da vrijedi

$$(\forall \mathbf{x} \in \Omega) \quad |\mathsf{v}(\mathbf{x}) - \mathsf{v}_0(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon(\mathbf{x})\ .$$

Neka je sada $K \in \mathcal{K}(\mathrm{M}_{r\times d})$. Niz otvorenih skupova $(U_j)_{j=1}^{\infty}$ čini *in–aproksimaciju* skupa K ako vrijedi
(i) U_i su otvoreni i sadržani u fiksiranoj kugli
(ii) $U_i \subseteq U_i^{rc}$ za svaki $i \in \mathbf{N}$
(iii) $\lim_{i\longrightarrow\infty} sup_{\mathbf{X}\in U_i} d(\mathbf{X}, K) = 0$

Do sada smo promatrali različite konveksne ovojnice *kompaktnih* skupova u $\mathrm{M}_{r\times d}$. Sada ćemo ovu definiciju na prikladan način proširiti na *otvorene* podskupove u $\mathrm{M}_{r\times d}$. Za $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ otvoren skup definiramo

$$\mathcal{O}^{rc} := \bigcup\{K^{rc} : K \subseteq \mathcal{O}\ , K \in \mathcal{K}(\mathrm{M}_{r\times d})\}\ .$$

Teorem 3. **(Otvorene relacije)** *Neka je* $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ *otvoren i* $P \subseteq \mathcal{O}^{rc}$ *kompakt. Neka je* $\mathsf{u}_0 : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *po dijelovim afino Lipschitzovo preslikavanje takvo da je* $\nabla \mathsf{u}_0(\mathbf{x}) \in P$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$). *Tada* u_0 *dopušta finu* C^0*– aproksimaciju po dijelovima afinim Lipschitzovim preslikavanjima* $\mathsf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ *koja zadovoljavaju* $\nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).

∎

Teorem 4. (Zatvorene relacije) *Pretpostavimo da kompakt $K \subseteq \mathrm{M}_{r\times d}$ dopušta in–aproksimaciju nizom (U_i). Tada proizvoljna funkcija $\mathsf{v} \in \mathrm{C}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$ koja zadovoljava*

$$\nabla \mathsf{v}(\mathbf{x}) \in U_1 \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega)$$

dopušta finu C^0–aproksimaciju Lipschitzovim funkcijama $\mathsf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ koje zadovoljavaju

$$\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in K \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \ .$$

Štoviše, postoji Lipschitzovo preslikavanje $\mathsf{w} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ koje zadovoljava

$$\nabla \mathsf{w}(\mathbf{x}) \in K \text{ (ss } \mathbf{x} \in \Omega) \ \& \ \ u = \mathsf{w} \ \text{ na } \ \partial\Omega \ .$$

∎

Dokaz gornjih teorema zasniva se na Gromovljevoj metodi konveksne integracije (isp. [Gr 86]) i konstrukcija podsjeća na konstrukciju neprekinutih, ali nigdje diferencijabilnih funkcija.

Neki otvoreni problemi

U prethodnom odjeljku navedeni se trenutno poznati pozitivni rezultati koji se tiču egzaktnih rješenja za neke netrivijalne podskupove u $\mathrm{M}_{r\times d}$. Ovdje navodimo neka neriješena pitanja vezana uz tu problematiku, te neka općenitija pitanja vezana uz preciznije varijacijske modele mikrostruktura koji uključuju eksperimentalne rezultate (za precizan iskaz vidi poglavlje 1, Zadaće 4 i 5).

Jedan od glavnih otvorenih problema je možemo li u definiciji in–aproksimacije konveksnu ovojnicu ranga 1 (ili laminacijski konveksnu ovojnicu) zamijeniti kvazikonveksnom ovojnicom. Očekuje se da je ključni korak razrješenje sljedeće slutnje:

Slutnja. Neka je $K \in \mathrm{M}_{r\times d}$ kompaktan kvazikonveksan skup i $\nu \in \mathcal{M}^{qc}(K)$. Tada za svaki otvoren skup takav da je $K \subseteq U$ postoji niz $\mathsf{u}_n : \langle 0,1\rangle^d \longrightarrow \mathbf{R}^r$ takav da $\nabla \mathsf{u}_n$ generira ν i da vrijedi $\nabla \mathsf{u}_n(\mathbf{x}) \in U$ (ss $\mathbf{x} \in \langle 0,1\rangle^d$).

Poznato je da je slutnja istinita za kompaktne konveksne skupove (isp. [Mü 97a]), što je zapravo poopćenje Zhangove leme, koja tretira samo slučaj kad je K zatvorena kugla.

Nadalje, navodimo rezultate koji su nastali kao posljedica činjenice da su egzaktna rješenja promatrana u prethodnom poglavlju vrlo komplicirana, te se postavilo pitanje jesu li rješenja nešto jednostavnija uz neke geometrijske pretpostavke na Ω ili za specijalne K.

Prisjetimo se definicije perimetra skupa u $\mathbf{R}^d$. Ako je $E \subseteq \Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, tada

$$\mathrm{Per}E := \sup\Big\{ \int_E \mathsf{div}\, \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} : \varphi \in \mathrm{C}^1_0(\Omega; \mathbf{R}^r), |\varphi| \leqslant 1 \Big\} \ .$$

Za poliedarske skupove ili skupove s glatkim rubom $\mathrm{Per}E$ podudara se s $(d-1)$–dimenzionalnom Hausdorffovom mjerom skupa ∂E.

Teorem 5. *Neka je u rješenje zadaće dvije potencijalne jame i neka je*

$$E := \{\mathbf{x} \in \Omega : \nabla \mathsf{u}(\mathbf{x}) \in SO(2)\mathbf{A}\}$$

skup konačnog perimetra. Tada je u lokalno jednostavna lamina i ∂E se sastoji od segmenata koji se mogu sjeći samo na $\partial\Omega$.

∎

Zanimljivo je napomenuti da je jedan od ključnih koraka u dokazu ovog teorema sljedeći rezultat, koji je neposredno vezan uz zadaću jedne potencijalne jame. Najprije nam je potrebna sljedeća definicija: Skup konačnog perimetra A je *nedekompozabilan* ako za proizvoljan $A_1 \subseteq A$ koji zadovoljava $\mathrm{Per}A = \mathrm{Per}A_1 + \mathrm{Per}A\backslash A_1$ slijedi da jedan od skupova A_1 ili $A\backslash A_1$ d-dimenzionalne Lebesgueove mjere nula. Može se pokazati da je svaki skup konačnog perimetra unija najviše prebrojivo nedekompozabilnih komponenti.

Teorem 6. *Neka je* $\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ *takva da vrijedi* $det\nabla\mathsf{u} \geqslant c > 0$. *Pretpostavimo da je* $E \subseteq \Omega$ *skup konačnog perimetra i da vrijedi*

$$\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in SO(d) \text{ (ss } \mathbf{x} \in E) \ .$$

Tada je $\nabla\mathsf{u}$ *konstanta na svakoj nedekompozabilnoj komponenti skupa* E. ∎

Iako su dosadašnji rezultati zanimljivi i dobro aproksimiraju fizikalnu situaciju, minimizacija elastične energije kontinuuma je zapravo veliko pojednostavljenje. Problem da ovakav pristup zanemaruje dodirnu energiju, skalu i geometriju mikrostruktura obično se korigira uvođenjem malenih doprinosa viših gradijenata. Najpoznatiji funkcionali su

$$I^\varepsilon(\mathsf{u}) := \int_\Omega W(\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \int_\Omega \varepsilon^2|\nabla^2\mathsf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \ ,$$

$$J^\varepsilon(\mathsf{u}) := \int_\Omega W(\nabla\mathsf{u}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} + \int_\Omega \varepsilon|\nabla^2\mathsf{u}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \ .$$

Parametar $\varepsilon > 0$ uvodi karakterističnu duljinu, te je za očekivati da se na limesu kad $\varepsilon \longrightarrow 0$ oba gornja modela približavaju standardnom modelu koji uzima u obzir samo minimizaciju elastične energije. Čak i osnovni modeli opisani funkcionalima I^ε i J^ε nisu proučeni u slučaju preslikavanja $\mathsf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3$, uz $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$. Realističniji modeli uključivali bi anizotropični član $\nabla^2\mathsf{u}$ ili, općenitije, članove oblika $h(\nabla\mathsf{u}, \varepsilon\nabla^2\mathsf{u})$.

Za sada poznati rezultati minimizacije funkcionala I^ε odnose se na slučaj $d = 1$ uz odgovarajuće periodične rubne uvjete.

Teorem 7. *Neka je*

$$I^\varepsilon(u) := \int_0^1 (\varepsilon^2 u_{xx}^2 + (u_x^2 - 1)^2 + u^2)dx$$

Tada je za dovoljno malen $\varepsilon > 0$ *svaki minimizator od* I^ε *(uz periodične rubne uvjete) periodičan uz minimalni period*

$$P^\varepsilon := 4(2\varepsilon)^{\frac{1}{3}} + O(\varepsilon^{\frac{2}{3}}) \ .$$

∎

Konačno, naša razmatranja završit ćemo pregledom nekih matematičkih objekata i postupaka koji u nekim situacijama u usporedbi s Youngovim mjerama uspješnije rješavaju odgovarajuće probleme.

Kako Youngove mjere ne detektiraju smjer, skalu ili geometriju oscilacija, posljednjih godina uvedeni su novi objekti koji detektiraju neke od gornjih pojmova. Napominjemo da su slični objekti postojali i ranije: primjerice, Federer je nezavisno od našeg konteksta uveo pojam semieliptičnosti (koji je vrlo blizak kvazikonveksnosti), te objekte poznate kao *varifolds* (koji u njegovoj teoriji igraju ulogu Youngovih mjera).

Noviji objekti koji mogu detektirati smjer širenja oscilacija su H–mjere (također poznate kao mikrolokalne defektne mjere) koje je nedavno uveo Tartar (isp. [Ta 90]), i nezavisno Gérard (isp. [Ge 91]). Oni su pokazali da za proizvoljan niz (u_n) koji konvergira k nuli slabo u $\mathrm{L}^2(\Omega)$ postoji podniz (u_{n_k}) i Radonova mjera $\boldsymbol{\mu}$ na $\Omega \times S^{d-1}$ koju nazivamo H–mjerom niza (u_n) takva da za proizvoljni pseudodiferencijalni operator A reda nula čiji je pripadni simbol $a(x,\xi)$ dovoljno regularan vrijedi

$$_{\mathrm{L}^2}\langle\, Au_{n_k}, u_{n_k}\,\rangle_{\mathrm{L}^2} \longrightarrow \int_{\overline{\Omega}\times S^{d-1}} a d\boldsymbol{\mu}\ ,$$

pri čemu je s S^{d-1} označena sfera u $\mathbf{R}^d$. Jedan od važnih otvorenih problema je veza između Youngovih mjera i H–mjera (vidi [MT 97], [Ta 95] za djelomične rezultate), te mogućnost generalizacije H–mjera na nekvadratični slučaj.

S druge strane, jedan od objekata koji mogu opisati skalu oscilacija nedavno su uveli Alberti i Müller pod imenom *dvoskalne Youngove mjere* (isp. [AM 99]). Promatrajmo niz periodičkih funkcija $w_n : \langle 0,1\rangle \longrightarrow [-M,M]$. Za dani niz skala $h_n \longrightarrow 0$ definiramo novi niz

$$v_n(x,y) := w_n(x+h_n y)\ .$$

Skup

$$K := \{g \in \mathrm{L}^\infty\langle -L,L\rangle : |g| \leqslant M\}\ ,$$

$L \geqslant 0$, je slabo–$*$ kompaktan skup u $\mathrm{L}^\infty\langle -L,L\rangle$ i v_n možemo shvatiti kao preslikavanje $V_n : \langle 0,1\rangle \longrightarrow K$, definirano s $x \longrightarrow v_n(x,\cdot)$.

Kako je K kompaktan metrički prostor, to postoji podniz niz V_n koji generira Y-oungovu mjeru $\nu \in \mathrm{L}^\infty_{w*}(\langle 0,1\rangle; \mathcal{M}_b(K))$. Koristeći ovu ideju i rezultate Γ–konvergencije, moguće je opisati asimptotičko ponašanje kad $\varepsilon \longrightarrow 0$ funkcionala

$$I_\varepsilon := \int_0^1 (\varepsilon^2 u_{xx}^2(x) + W \circ u_x(x) + a(x)u^2(x))dx\ ,$$

gdje je $0 < c \leqslant a(x) \leqslant C$. Primjena ovog pristupa na funkcionale I_ε u višim dimenzijama otvoren je problerm, kao i mogućnost uključivanja nelokalnih članova u podintegralnu funkciju.

Literatura

[AM 99] Giovanni Alberti, Stefan Müller: u pripremi

[AD 92] J.J. Alibert, B. Dacorogna: An example of a quasiconvex function not polyconvex in dimension two, Archive for Rational Mechanics and Analysis **117** (1992), 155–166

[An 96] Nenad Antonić: H-measures applied to symmetric systems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A **126** (1996) 1133–1155

[AB 97] Nenad Antonić, Neven Balenović: On a variational problem related to a model of black and white printing, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1 **46** (1997) 1–11

[NB] Neven Balenović: Youngove mjere i primjene, magistarski rad, Zagreb, 1999.

[Ba 77] John M. Ball: Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, Archive for Rational Mechanics and Analysis **63** (1977) 337–403

[Ba 89] John M. Ball: A version of the fundamental theorem for Young measures, PDEs and continuum models of phase transitions, Rascle, Serre and Slemrod (ur.), LNP 344, Springer-Verlag (1989) 207–215

[Ba 89a] John M. Ball: Crystal microstructure, Young measures, and variational problems in elasticity theory, ICTP-1989, SMR.398/11

[Ba 89b] John M. Ball: Dynamics and minimizing sequences, ICTP-1989, SMR.398/12

[Ba 90] John M. Ball: Sets of gradients with no rank-one connections, Journal de mathèmatiques pures et appliques **69** (1990) 241–259

[BHJPS 91] John M. Ball, P. J. Holmes, Richard D. James, R. L. Pego, Peter J. Swart: On the dynamics of fine structure, Journal of Nonlinear Science **1** (1991) 17–70

[BJ 87] John M. Ball, Richard D. James: Fine phase mixtures as minimizers of energy, Archive for Rational Mechanics and Analysis (1987) 13–52

[BJ 92] John M. Ball, Richard D. James: Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two-well problem, Philosophical Transactions of the Royal Society A **338** (1992) 389–450

[BK 87] John M. Ball, G. Knowles: A numerical method for detecting singular minimizers, Numerische Mathematik **51** (1987) 181–197

[BM 84a] John M. Ball, Jerrold E. Marsden: Quasiconvexity at the boundary, positivity of the second variation and elastic stability, Archive for Rational Mechanics and Analysis **86** (1984) 251–277

[BM 85] John M. Ball, Victor J. Mizel: One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange equation, Archive for Rational Mechanics and Analysis **90** (1985) 325–385

[BM 84] John M. Ball, François Murat: $\mathrm{W}^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals, Journal of Functional Analysis **58** (1984) 225–253

[BBM 92] Alain Bensoussan, Lucio Boccardo, François Murat: H–convergence for quasilinear elliptic equations with quadratic growth, Applied Mathematics and Optimization **26** (1992) 253–272

[Bh 91] Kaushik Bhattacharya: Wedge-like microstructure in martensites, Acta mettal. mat. **39** (1991) 2431–2444

[Bh 93] Kaushik Bhattacharya: Comparison of the geometrically nonlinear and linear theories of martensitic transformation, Continuum Mechanics and Thermodynamics **5** (1993) 205–242

[BK 97] Kaushik Bhattacharya, Robert V. Kohn: Elastic energy Minimization and the Recoverable Strains of Polycrystalline Shape-Memory Materials, Archive for Rational Mechanics and Analysis **139** (1997) 99–180

[BD 98] Kaushik Bhattacharya, Georg Dolzmann: Relaxation of some multi-well problems [MPI-MIS preprint 1998/50]

[BK 96] Kaushik Bhattacharya, Robert V. Kohn: Symmetry, texture and the recoverable strain of shape-memory polycrystals, Acta Materialia **44** (1996) 529–542

[Bh 92] Kaushik Bhattacharya: Self-Accomodation in martensite, Archive for Rational Mechanics and Analysis **120** (1992) 201–244

[BFJK 94] Kaushik Bhattacharya, Nikan B. Firoozye, Richard D. James, Robert V. Kohn: Restrictions on microstructure, preprint (1994)

[BM 82] Lucio Boccardo, François Murat: Nouveaux résultats de convergence dans des problèmes unilatéraux, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar (vol. II), Haïm Brezis, Jacques-Louis Lions (ur.), Pitman, Boston, 1982

[BM 82a] Lucio Boccardo, François Murat: Homogenisation de problémes quasi-lineaires, Atti del convegno Studio di problemi limite dell'Analisi funzionale, Bressanone (1981) Pitagora ur. 1982.

[BM 92] Lucio Boccardo, François Murat: Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **19** (1992) 581–597

[BM 92] Lucio Boccardo, François Murat: Strongly nonlinear Cauchy problems with gradient-dependent lower order nonlinearity, preprint

[BV 91] Lucio Boccardo, T. del Vecchio: Homogenization of strongly nonlinear equations with gradient dependent lower order nonlinearity, Asymptotic Analysis **5** (1991) 75–90

[BB 97] M. Bousselsal, B. Brighi: Rank-one-convex and quasiconvex envelopes for functions depending on quadratic forms, Journal of Convex Analysis **4** (1997) 305–319

[BM 54] J. S. Bowles, J. K. MacKenzie: The crystallography of martensite transformations I, II; Acta Metallurgica **2** (1954) 129–147

[CT 93] Enrico Casadio Tarabusi: An algebraic characterisation of quasi-convex functions, Ricerce di Matematica, **24** (1993) 11-24

[CP 97] Carsten Carstensen, Petr Plecháč: Numerical solution of the scalar double-well problem allowing microstructure, Mathematics of Computation **66** (1997) 997–1026

[CP 98] Pietro Celada, Stefania Perrotta: Functions with prescribed singular values of the gradient, Nonlinear Differential Equations and Applications **5** (1998) 383–396

[Ce 97] Arrigo Cellina: Minimizing a functional depending on ∇u and on u, Annales de l'Institute Henri Poincaré C **14** (1997) 339–352

[CK 88] Michele Chipôt, David Kinderlehrer: Equilibrium configurations of crystals, Archive for Rational Mechanics and Analysis **103** (1988) 237–277

[Da 82] Bernard Dacorogna: Quasiconvexity and relaxation of nonconvex problems in the calculus of variations, Journal of Functional Analysis **46** (1982) 102–118

[Da 82a] Bernard Dacorogna: Weak continuity and weak lower semicontinuity of non-linear functionals, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Da 85] Bernard Dacorogna: Remarques sur les notions de polyconvexité, quasi-convexité et convexité de rang 1, Journal de mathèmatiques pures et appliques **64** (1985) 403–438

[Da 87] Bernard Dacorogna: A Relaxation theorem and its application to the equilibrium of gases, Archive for Rational Mechanics and Analysis **77** (1987) 359–386

[Da 89] Bernard Dacorogna: Direct methods in the calculus of variations, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[DD 97] Bernard Dacorogna, O. Došlý: Convexity of certain integrals in the calculus of variations – III, Bolletino della Unione Matematica Italiana **11–B** (1997) 837–850

[DH 96] Bernard Dacorogna, Jean-Pierre Haeberly: On convexity properties of homogeneous functions of degree one, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **126A** (1996) 947–956

[DM 88] Bernard Dacorogna, Paolo Marcellini: A counterexample in the vectorial calculus of variations, Material instabilities in continuum mechanics and related mathematical problems (J.M. Ball, ur.), Oxford University Press, 1988, 77–83

[DM 95] Bernard Dacorogna, Paolo Marcellini: Existence of minimizers for non-quasiconvex integrals, Archive for Rational Mechanics and Analysis **131**(1995) 359–399

[DM 97] Bernard Dacorogna, Paolo Marcellini: General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial cases, Acta Mathematica **178** (1997) 1–37

[DM 96] Bernard Dacorogna, Paolo Marcellini: Sur le problème de Cauchy-Dirichlet pour les systèmes d'équations non linéaires du premier ordre, preprint (1996)

[DT 98] Bernard Dacorogna, C. Tanteri: On the different convex hulls of sets involving singular values, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **128A** (1998) 1261–1280

[DS 73] Ennio DeGiorgi, Sergio Spagnolo: Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine, Bolletino della Unione Matematica Italiana **8** (1973) 391–411

[De 93] Sophia Demoulini: Young measure solutions for nonlinear parabolic equation of the forward-backward type, Ph. D. Thesis at U. of Minnesota, June 1993.

[De 97] Sophia Demoulini: Young measure solutions for nonlinear evolutionary systems of mixed type, Annales de l'Institute Henri Poincaré C, **14** (1997) 143–162

[De 95] Antonio DeSimone: Hysteresis and imperfection sensitivity in small ferromagnetic particles, Meccanica **30** (1995) 591–603

[De 97a] Antonio DeSimone, Georg Dolzmann: Existence of minimizers for a variational problem in 2-D nonlinear magnetoelasticity, MPI preprint 2/1997. (14 str.)

[De 94] Antonio DeSimone, Gero Friesecke: On the problem of two linearized wells, preprint (1994)

[DK 99] Georg Dolzmann, Bernd Kirchheim, Stefan Müller, Vladimir Šverák: The two-well problem in three dimensions [MPI-MIS preprint 1999/21]

[DM 95] Georg Dolzmann, Stefan Müller: Microstructures with finite surface energy: the two-well problem, Archive for Rational Mechanics and Analysis **132** (1995) 101–141

[Mi 98] Graeme Milton: The effective tensors of composites, knjiga u pripremi

[Er 79] Jerry L. Ericksen: On the symmetry of deformable crystals, Archive for Rational Mechanics and Analysis **72** (1979) 1–11

[Er 80] Jerry L. Ericksen: Some phase transitions in crystals, Archive for Rational Mechanics and Analysis **73** (1980) 99–124

[Er 89] Jerry L. Ericksen: Weak martesitic transformations in Bravais lattices, Archive for Rational Mechanics and Analysis **107** (1989) 23–36

[EG 87] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy: Blowup, compactness and partial regularity in the calculus of variations, Indiana University Mathematics Journal **36** (1987) 361–371

[Ev 86] Lawrence C. Evans: Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations, Archive for Rational Mechanics and Analysis **95** (1986) 227–252

[EG 92] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy: Measure theory and fine properties of functions, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[FF 60] Herbert Federer, William L. Fleming: Normal and integral currents, Annals of Mathematics **72** (1960) 458–520

[Fo 88] Irene Fonseca: The lower quasiconvex envelope of the stored energy function for an elastic material, Journal de mathèmatiques pures et appliques **67** (1998) 175–195

[Fo 97] Irene Fonseca, J. Malý: Relaxation of multiple integrals below the growth exponent, Annales de l'Institute Henri Poincaré **14** (1997) 309–338

[FP 92] Irene Fonseca, Gareth P. Parry: Equilibrium configurations of defective crystals, Archive for Rational Mechanics and Analysis **120** (1992) 245–283

[FM 93] Irene Fonseca, Stefan Müller: Relaxation of quasiconvex functionals in $BV(\Omega;\mathbf{R}^d)$ for integrands $f(x,u,\nabla u)$, Archive for Rational Mechanics and Analysis **123** (1993) 1–49

[Ed 65] R. E. Edwards: Functional analysis: Theory and applications, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[FR 95] Martin Fuchs, Jürgen Reuling: Partial regularity for certain classes of polyconvex functionals related to nonlinear elasticity, Manuscripta Mathematica **87** (1995) 13–26

[FH 85] Nicolo Fusco, J. Hutchinson: $\mathrm{C}^{1,\alpha}$ partial regularity of functions minimising quasiconvex integrals, Manuscripta Mathematica (1985)

[Ge 88] Patrick Gérard: Compacité par compensation et régularité 2-microlocale, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique (1988) VI

[Ge 91] Patrick Gérard: Microlocal defect measures, Communications in Partial Differential Equations **16** (1991) 1761–1794

[Ge 96] Patrick Gérard: Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, Journal of Functional Analysis **141** (1996) 60–98

[GMT 92] Giuseppe Geymonat, Stefan Müller, Nicolas Triantafyllidis: Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity, Archive for Rational Mechanics and Analysis **122** (1993) 197–212

[Gr 86] Mihael Gromov: Partial differential relations, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[HR 94] K. H. Hoffmann, Tomáš Roubíček: Optimal control of a fine structure, Applied Mathematics & Optimization **30** (1994) 113–126

[RR 92] Michael Renardy, Robert C. Rogers: An Introduction to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[Gu] Morton E. Gurtin: An introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, 1981.

[HLP 34] G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: Inequalities, Cambridge University Press, 1934.

[Ki 88] David Kinderlehrer: Remarks about equilibrium configuirations of crystals, Material instabilities in continuum mechanics and related mathematical problems (J.M. Ball, ur.), Oxford University Press, 1988, 217–242

[KP 91] David Kinderlehrer, Pablo Pedregal: Characterizations of Young measures generated by gradients, Archive for Rational Mechanics and Analysis **115** (1991) 329–365

[Ki 98] Bernd Kircheim: Lipschitz minimizers of the three-well problem having gradients of bounded variation, MPI preprint-Nr. 12/1998

[KM 94] Robert V. Kohn, Stefan Müller: Surface energy and microstructure in coherent phase transitions, Communications on Pure and Applied Mathematics **47** (1994) 405–435

[MP 93] Microstructure and phase transition, David Kinderlehrer, Richard James, Mitchell Luskin, Jerry L. Ericksen (ur.), Springer-Verlag, New York, 1993.

[Kr 94] Jan Kristensen: Finite functionals and Young measures generated by gradients of Sobolev functions, Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark, Lyngby.

[Kr 97a] Jan Kristensen: On the non-locality of quasiconvexity, u tisku

[Kr 97b] Jan Kristensen: Lower semicontinuity in spaces of weakly differentiable functions, preprint

[Kr 97] Martin Kružik: On the composition of quasiconvex functions and the transposition, preprint 1997.

[LL 97] Elliott H. Lieb, Michael Loss: Analysis, Graduate studies in mathematics 14, American Mathematical Society, 1997.

[Ma 92] João Palhoto Matos: Young measures and the absence of fine microstructures in a class of phase transitions, Euro Journal of Applied Mathematics **3** (1992) 31–54

[MP 98] J. Matoušek, P. Plecháč: On functional separately convex hulls, Discrete and Computational Geometry **19** (1998) 105–130

[Me 66] P.-A. Meyer: Probability and potentials, Blaisdell, 1966.

[MM 77] L. Modica, S. Mortola: Un esempio di Γ^-–convergenza,
Bolletino della Unione Matematica Italiana , (5) **14**–B (1977) 285–299

[Mü 1] Stefan Müller: Higher integrability of determinants and weak convergence in L^1, preprint

[Mü 2] Stefan Müller: A surprising higher integrability property of mappings with positive determinant, preprint

[Mü 96] Stefan Müller: Microstructures, Phase Transitions and Geometry, Proc. ECM2 Budepest, 1996, Birkhauser

[Mü 97] Stefan Müller: Microstructure and the calculus of variations, Nachdiplomvorlesung ETH Zurich, u pripremi

[Mü 97a] Stefan Müller: A sharp version of Zhang's theorem on truncatong sequences of gradients, to appear in Transactions of the American Mathematical Society

[Mü 98] Stefan Müller: Quasiconvexity is not invariant under transposition, MPI prepint Nr. 19/1998

[MF 98] Stefan Müller, Irene Fonseca: A–quasiconvexity, lower semicontinuity and Young measures, MPI prepint Nr. 18/1998

[MS 98] Stefan Müller, Vladimír Šverák: Unexpected Solutions of First and Second Order Partial Differential Equations, Documenta Mathematica, extra volume ICM 1998–II, 691–702

[MS 99] Stefan Müller, Vladimír Šverák: private comunication

[Mu 77] François Murat: H–convergence, Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'Université de l'Alger, 1977–1978

[Mu 78] François Murat: Compacité par compensation, Annali della Scuola Normale Superiore Pisa **5** (1978) 489–507

[Mu 81] François Murat: Compacité par compensation: condition nécessaire et suffisante de continuité faible sous une hypothèse de rang constant, Annali della Scuola Normale Superiore Pisa **8** (1981) 69–102

[Mu 87] François Murat: A survey on compensated compactness, Contributions to modern calculus of variations, L. Cesari, Pitman research notes in mathematics series 148, Longman, Harlow (1987) 145–183

[MT 97] François Murat, Luc Tartar: On the relation between Young measures and H–measures, u pripremi

[Pa 95] Gareth P. Parry: On the planar rank-one convexity condition, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **125 A** (1995) 247–264

[Pa 98] Gareth P. Parry: Low-dimensional lattice groups for the continuum mechanics of phase transitions in crystals, Archive for Rational Mechanics and Analysis **145** (1998) 1–22

[RSS 89] PDEs and continuum models of phase transitions, M. Rascle, D. Serre, M. Slemrod (ur.), Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Pe 93] Pablo Pedregal: Laminates and microstructures, Euro Journal of Applied Mathematics **4** (1993) 121–149

[Pe 96] Pablo Pedregal: Some remarks on quasiconvexity and rank-one convexity, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **126A**(1996) 1055–1065

[Pe 97] Pablo Pedregal: Parametrized measures and variational principles, Birkhäuser, 1997.

[Pe 97a] Pablo Pedregal: Nonlocal variational principles, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **29** (1997) 1379–1392

[PS 98] Pablo Pedregal, Vladimír Šverák: A note on quasiconvexity and rank-one convexity for 2×2 matrices, Journal of Convex Analysis **5** (1998) 107–117

[Ra 96] Andrija Raguž: Youngove mjere i nepostizanje ekstrema u varijacijskom računu, rad za Rektorovu nagradu, Zagreb, 1996.

[RV 99] Andrija Raguž, Marko Vrdoljak: Homogenisation of nonlinear elliptic systems, u pripremi

[Re 67] Ju. G. Rešetnjak: Ob ustoičivosti konformnih otobraženija v mnogomernih prostranstvah, Sibirskij matematičeski žurnal **8** (1967) 91–114

[Ro 95] Tomáš Roubìček: Effective Characterization of generalized Young measures generated by gradients, Bolletino della Unione Matematica Italiana **7** (1995) 755–779

[Ro 97] Tomáš Roubìček: Relaxation in optimization theory and variational calculus, Walter de Gruyter, Berlin, 1997.

[Sy 87] Michael A. Sychev: A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy, preprint [SISSA, March 1997]

[Sv 91a] Vladimír Šverák: Quasiconvex functions with subquadratic growth, Proceedings of the Royal Society of London A **433** (1991) 723–725

[Sv 91b] Vladimír Šverák: On regularity for the Monge-Ampère equation without convexity assumptions, Herriot-Watt preprint, 1991.

[Sv 92b] Vladimír Šverák: New examples of quasiconvex functions, Archive for Rational Mechanics and Analysis **119** (1992) 293-300

[Sv 95] V. Šverák: Lower–Semicontinuity of Variational Integrals and Compensated Compactness, Proceedings of the International Congress of Mathematics, Zürich, Switzerland 1994

[Ta 77] Luc Tartar: Cours Peccot, 1977.

[Ta 86] Luc Tartar: The appearance of oscillations in optimization problems, Non-classical continuum mechanics, Proceedings of the London mathematical society symposium, Durham, July 1986, R. J. Knops, A. A. Lacey, ur. pp. 129–150, London mathematical society lecture notes series 122, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[Ta 87] Luc Tartar: Discontinuities and oscillations, Directions in partial differential equations. Mathematics research symposium, pp. 211–233, M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz, ur. Academic Press, 1987.

[Ta 87a] Luc Tartar: A personal view on homogenization, Limeil-Los Alamos meeting, January 1987, Los Alamos internal report

[Ta 87b] Luc Tartar: An introduction to homogenization theory, Analysis seminar at Kent State University, December 12, 1987.

[Ta 90] Luc Tartar: H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **115A**, 193–230, 1990.

[Ta 91] Luc Tartar: Propagation of oscillations and concentration effects in partial differential equations, Ordinary and partial differential equations vol. III, B. D. Sleeman, R. J. Jarvis, ur. pp. 208–219, Pitman research notes in mathematics 524, Longman, 1991.

[Ta 91a] Luc Tartar: H-measures and applications, Proceedings of the international congress of mathematicians, Kyoto, Japan, 1990, Vol II, 1215–1223, Mathematical society of Japan, 1991.

[Ta 92] Luc Tartar: On mathematical tools for studying partial differential equations of continuum physics: H-measures and Young measures, New developments in partial differential equations and applications to mathematical physics, G. Buttazzo, G. P. Galdi, L. Zanghirati, ur. 201–217, Plenum Press, New York, 1992.

[Ta 93] Luc Tartar: Some remarks on separately convex functions, Microstructures and phase transitions, D. Kinderlehrer, R. James, M. Luskin, J. L. Ericksen, ur. pp. 192–204, IMA volumes in mathematics and its applications, vol. 54, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Ta 95] Luc Tartar: Beyond Young measures, Meccanica **30** (1995) 505–526

[Ta 97] Luc Tartar: Homogenization, Compensated compactness and H–measures, knjiga u pripremi

[CK 97] Topics in the mathematical modelling of composite materials, A. Cherkaev, R. Kohn (ur.), Birkhäuser, 1997

[IT 69] A. & C. Ionescu Tulcea: Topics in the theory of liftings, Springer, 1969.

[MV] Marko Vrdoljak: Primjena homogenizacije u problemima optimalnog dizajna, magistarski rad, Zagreb, 1999.

[Zh 92] Kewei Zhang: A construction of quasiconvex functions with linear growth at infinity, Ann. S. N. S. Pisa **19** (1992) 313–326

[Zh] Kewei Zhang: Rank-one connections and the three-well problem, preprint

Sažetak

Mikrostruktura je struktura na proizvoljnoj skali koja je između makroskopske skale i atomske skale. U ovom radu proučavamo varijacijske modele za sustave koji spontano formiraju mikrostrukture, pri čemu pretpostavljamo da dobivena struktura optimizira izvjesno svojstvo.

Rad se sastoji od šest poglavlja. U prvom poglavlju formulirane su osnovne zadaće: karakterizirati egzaktna i aproksimativna rješenja u klasi Lipschitzovih funkcija za zadaću $\nabla \mathsf{u} \in K$, gdje je K kompaktan skup matrica. Nadalje, opisana je fizikalna interpretacija rješenja te veze među različitim aproksimativnim rješenjima.

U drugom poglavlju bavimo se slučajem kada je K konačan skup, osobito kada sadrži dvije, tri ili četiri matrice, te kada je K točno grupa rotacija.

U trećem poglavlju definiramo pojam Youngove mjere, dokazujemo osnovni teorem o Youngovim mjerama, te teoreme lokalizacije i homogenizacije. Također, preko primjera povezujemo Youngove mjere s problemom klasifikacije minimizirajućih nizova, odnosno aproksimativnih rješenja.

Četvrto poglavlje uvodi pojmove konveksnosti te konveksnih ovojnica za funkcije i skupove. Detaljno je opisan odnos među pojmovima polikonveksnosti, kvazikonveksnosti i konveksnosti ranga 1, te su dane karakterizacije kvazikonveksnosti koje su potrebne za konstrukciju u Šverakovom protuprimjeru. Nadalje, pokazano je da se relaksacijska zadaća za aproksimativna rješenja svodi na određivanje kvazikonveksne ovojnice pripadnog skupa.

U petom poglavlju proučavamo homogenizacijsku zadaću za izvjesnu klasu kvazilinearnih eliptičkih jednadžbi s p–rastom o gradijentu. Po uzoru na [Ta 97], uvodimo klasu Carathéodoryjevih funkcija koja kao specijalan slučaj obuhvaća klasu koju je uveo Tartar (Course Peccot 1977.), izvodimo precizne apriorne ocjene i promatramo pripadni H–limes. Pokazujemo da je problem određivanja H–zatvarača takve klase funkcija ekvivalentan određivanju kvazikonveksne ovojnice odgovarajućih funkcija. Za razliku od slučaja $p = 2$, gubitak kvazikonveksnosti ima za posljedicu gubitak kompaktnosti promatrane klase uz prirodnu H–topologiju.

U šestom poglavlju promatramo problem egzistencije egzaktnih rješenja za apstraktnu klasu kompaktnih skupova K, dokazujemo neke rezultate vezane uz generalizacije dosadašnjih pojmova, te navodimo novije rezultate, otvorene probleme i slutnje koje se tiču zadaće dvije potencijalne jame, problema in–aproksimacije i C^0–aproksimacije Lipschitzovih funkcija.

Summary

A *microstructure* is any structure on a scale between the macroscopic scale (on which we make observations) and the atomic scale. We study variational models of systems which spontaneously form internal microstructure by assuming that the structure formed has certain optimality property.

This work is divided into six chapters. The first one sets the problem: how to characterise exact and approximate Lipschitz functions satisfying constraints of the type $\nabla \mathsf{u} \in K$, where K is a fixed compact set of matrices. We also describe the physical background and investigate the relationship among possibly different approximate solutions in some detail.

In the second chapter some special cases of the above problem are being studied. In particular, we consider the case where K contains only two, three or four matrices. Moreover, we prove that the one-well problem, where $K = SO(d)$, admits only trivial exact and approximate solutions.

The third chapter introduces and develops Young measures as a part of functional-analytic apparatus necessary for further exposure. Apart from the Fundamental theorem for Young measures, localisation and homogenisation results are proved, and some of the applications in the calculus of variations are being indicated.

The fourth chapter deals with convexity properties of sets and functions, and their relationship to some relaxation problems which are understood as natural generalisations of the above ones. We prove some classical theorems regarding the weak lower semicontinuity of integral functionals with respect to weak convergence in various spaces of functions, where specific information on the integrand is given. Here we also study some famous (recently solved, as well as unsolved) questions, such as Šverak's counterexample and its consequences.

In the fifth chapter we study a homogenisation problem for a class of quasilinear elliptic equations. More precisely, for suitably defined class of functions, we are trying to determine whether or not it is stable with respect to H–convergence, and if not, to describe its H-closure. Remarkably, we find that this problem coincides with quasiconvexification of certain functions, establishing therefore a link with homogenisation and relaxation problems in the theory of microstructure.

Finally, in the sixth chapter we briefly mention some nontrivial results related to exact solutions, and give an overview of alternative ways to describe microstructures, especially those that include issues like propagation phenomena or geometric structure for realistic microstructures.

Životopis

Rođen sam 11. rujna 1974. u Zagrebu (Medveščak). Od rođenja do 1983. godine živio sam s roditeljima u Dardi (Baranja), gdje sam pohađao osnovnu školu do 3. razreda. Potom smo preselili u Osijek gdje sam završio osnovnu i srednju školu.

Godine 1993. upisao sam kao redovni student prvu godinu dodiplomskog studija Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu na Matematičkom odjelu, (dipl. inž. matematike), te sam kao izvrstan student bio dobitnik stipendije grada Zagreba. Tijekom 1996. pod vodstvom doc. dr. sc. N. Antonića napravio sam rad *Youngove mjere i nepostizanje ekstrema u varijacijskom računu* koji je nominiran za Rektorovu nagradu.

Iste sam godine, kao student-volonter sudjelovao u organizaciji prvog Hrvatskog Matematičkog Kongresa, te sam bio neformalni sudionik drugog Europskog Kongresa Matematičara u Budimpešti.

16. listopada 1997. diplomirao sam s temom *Eliptički Dirichletov rubni problem* na smjeru teorijska matematika pod vodstvom prof. dr. sc. Z. Tuteka.

Nakon toga sam upisao poslijediplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, od kada sam i aktivan član Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu.

Od 1. veljače 1998. zaposlen sam na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematički odjel kao znanstveni novak na Zavodu za primijenjenu matematiku.

Dobitnik sam jednogodišnje DAAD stipendije za studijski boravak na Max Planck Institutu za Matematiku u prirodnim znanostima, Leipzig, za akademsku godinu 1999/2000.