

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Zoran Brajković

NEKE PRIMJENE MATEMATIKE U
GEODEZIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nenad Antić

Zagreb, kolovoza 2012.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Predgovor

Budući da sam rođen u "geodetskoj" obitelji kroz godine sam stekao određenu privrženost prema samoj geodeziji ali i prema kartografiji, GIS-u¹ te GPS-u, područja i znanosti koje su usko povezane sa geodezijom. Upisavši preddiplomski studij matematike te kasnije studij primijenjene matematike nisam išao putem kojim su mnogi očekivali da ću krenuti, svejedno, na zadnjoj godini diplomskog studija odlučio sam da će moj diplomski rad biti povezan sa znanosti koja mi je na neki način u krvi.

U prvom dijelu ovog diplomskog rada bavit ćemo se najprije tipovima koordinatnih sustava te vrstama koordinata. Navodimo problem transformacije iz jednih koordinata u druge, koji obrađujemo u drugom dijelu. Nadalje, uvodimo pojam rotacijskog elipsoida koji će nam poslužiti kao model za Zemlju te naravno sve veličine koje su vezane za elipsoid. Uvodimo pojmove poput Besselovog elipsoida, WGS84 elipsoida.

U drugom dijelu bavimo se transformacijama između geodetskih i pravokutnih koordinata, gdje ćemo navesti nekoliko načina transformacija te ih numerički usporediti pomoću programa MATLAB.

U zadnjem dijelu bavimo se pojmovima kao što su ekvipotencijalne plohe, geoid te undulacije geoida koje definiramo pomoću kuglenih funkcija koje se u velikoj mjeri koriste u sustavu GPS-a.

¹Geoinformacijski sustavi

Sadržaj

Predgovor	v
Sadržaj	vii
1 Koordinate	1
1.1 Uvod	1
1.2 Kartezijev koordinatni sustav	1
1.3 Sferni koordinatni sustav u prostoru	2
1.4 Geografske koordinate na sferi i rotacijskom elipsoidu	4
2 Oblik i veličina Zemlje	7
2.1 Elementi rotacijskog elipsoida	7
2.2 Besselov elipsoid	8
2.3 GRS80 elipsoid	9
2.4 WGS 84 elipsoid	10
2.5 Geodetski datum	12
3 Transformacija koordinata	14
3.1 Uvod	14
3.2 Koriženje jednačbe četvrtog stupnja	15
3.3 Podudaranje geodetske i geocentrične širine	19
3.4 Bowringova i poboljšana Bowringova metoda	20
4 Geoid	26
4.1 Gravitacijski potencijal	26
4.2 Definicija	28
4.3 Formule, reprezentacije i analiza	28
Literatura	33

<i>SADRŽAJ</i>	viii
Sažetak	35
Summary	36
Životopis	37

Poglavlje 1

Koordinate

1.1 Uvod

Koordinate koje su danas općenito prihvaćene i koje su nama svima nekako prirodne jesu tzv. *Kartezijeve koordinate* koje je u 17. st. uveo francuski filozof i matematičar R. Descartes (1596–1650). U svom djelu *Geometrija* je upotrebljavao **kosi** koordinatni sustav s koordinatama koje su mogle biti samo pozitivni brojevi. Nekoliko godina kasnije nizozemski matematičar J. Hudde prilaže rad uz novo izdanje *Geometrije* gdje se dopuštaju i negativne vrijednosti za koordinate.

Međutim, ponekad nam nije zgodno sve gledati pod ”*pravim kutom*”, odnosno nekad imamo problem koji je lakše promatrati u nekim drugim koordinatama i koordinatnim sustavima. Uzmimo za primjer Zemlju, najjednostavniji model koji za nju možemo uzeti je da kažemo da ima oblik kugle, stoga je prirodno da se za probleme vezane za Zemlju uzmu *sferne koordinate*, ili ako želimo da naš model bude vjerniji Zemljinom obliku, Zemlju poistovjetimo s elipsoidom itd. Ali, započnimo našu priču o koordinatama s Kartezijevim koordinatama i koordinatnim sustavom.

1.2 Kartezijev koordinatni sustav

Neka je E^3 standardni trodimenzionalni euklidski prostor za koji pretpostavljamo da ima točkovnu strukturu. Uzmimo bilo koje dvije točke A i B . Uređeni par (A, B) tih točaka nazivamo *orijentirana dužina* za koju je A početak, a B kraj.

Neka je $O \in E^3$ bilo koja dana točka. Označimo s $V^3(O)$ skup svih orijentiranih dužina koje imaju početak u O – $V^3(O) = \{\overrightarrow{OX} | X \in E^3\}$. Svaki element tog skupa nazivamo *radijvektor* u točki O i pišemo kraće $\overrightarrow{OX} = \vec{r}_X$. Skup $V^3(O)$ nazivamo i *prostor radijevktora* u točki O . Budući da je i $V^3(O)$ vektorski prostor, možemo za njega odabrati

neku ortogonalnu bazu. Označimo tu bazu s $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, gdje su $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ i $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ radijvektori. Tada će proizvoljni radijvektor $\vec{r} \in V^3(O)$ imati jedinstveni prikaz

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Uređenu trojku (x, y, z) nazivamo *pravokutne koordinate radijvektora \vec{r}* s obzirom na danu bazu.

Sada uvodimo koordinatni sustav u E^3 . Ako je $O \in E^3$ bilo koja točka, a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ neka ortonormirana baza u $V^3(O)$, onda izbor

$$\{O; (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$$

nazivamo *pravokutni ili Kartezijev koordinatni sustav u E^3* . Točka O je njegovo ishodište, a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ koordinatni vektori. Pravce koji su određeni s koordinatnim vektorima nazivamo osi koordinatnog sustava, odnosno $x = [\vec{i}]$ je os apscisa, $y = [\vec{j}]$ je os ordinata a $z = [\vec{k}]$ os aplikata.

Točke u E^3 možemo okarakterizirati i realnim brojevima. Naime, ako uzmemo da je $T \in E^3$ bilo koja točka, tada je jednoznačno određen radijvektor \overrightarrow{OT} , a taj u danoj bazi za $V^3(O)$ jednoznačno određuje uređenu trojku realnih brojeva, svoje koordinate. Tako imamo pridruživanje

$$T \mapsto r_T^{\vec{r}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \mapsto (x, y, z), \quad (1.1)$$

kojim je definirano preslikavanje

$$k : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Ovo preslikavanje je bijektivno i nazivamo ga *koordinatizacija prostora E^3* .

Ako je $k(T) = (x, y, z)$, uređenu trojku (x, y, z) realnih brojeva nazivamo *pravokutne ili Kartezijeve koordinate* točke T . Napomenimo da se koordinate proizvoljne točke podudaraju s koordinatama radijvektora te točke.

1.3 Sferni koordinatni sustav u prostoru

Neka je $O \in E^3$, nadalje odaberimo orijentirani pravac z koji prolazi točkom O i poluravninu Π omeđenu sa z koje redom zovemo *pol*, *polarna os* i *polarna poluravnina*. Odaberimo $T \in E^3$ bilo koju točku, te neka je Δ ravnina određena tom točkom i pravcem z , a T' ortogonalna projekcija T na okomicu u polu koja leži u Δ . Definirajmo:

$$\begin{aligned} \phi &= \angle(\Pi, \Delta) \\ \rho &= d(\overrightarrow{OT}) \\ \theta &= \angle(z, \overrightarrow{OT}) \end{aligned}$$

Tada uređenu trojku

$$(\phi, \rho, \theta)$$

nazivamo sferne koordinate točke T , a fiksne elemente zajedno sa zakonom pridruživanja *sfernim koordinatnim sustavom* u prostoru. Sada možemo povezati sferne koordinate s pravokutnima na jednostavan način sljedećim izrazima (vidi sliku):

$$x = \rho \cos \phi \sin \theta, \quad (1.2)$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad (1.3)$$

$$z = \rho \cos \theta, \quad (1.4)$$

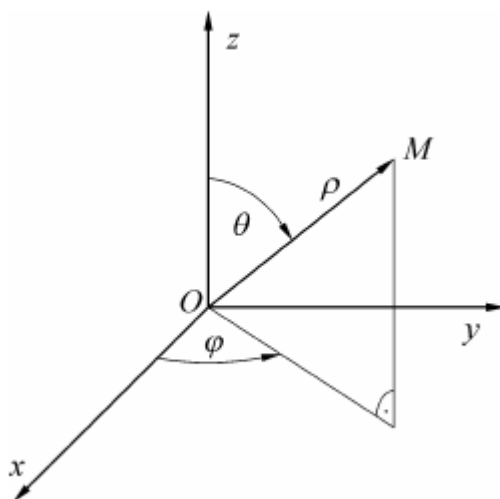
odnosno

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad (1.5)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.6)$$

$$\theta = \arccos z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.7)$$

gdje je $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Pridruživanje $(\rho, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ je bijekcija na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \cup \{\theta = \pm\pi\}$, dok je njegov jakobijan $j = \rho^2 \sin \phi$.



Slika 1.1: Sferični koordinatni sustav u matematici

1.4 Geografske koordinate na sferi i rotacijskom elipsoidu

Vidjeli smo kako se definiraju sferne koordinate; sada bismo htjeli to povezati s modelom Zemlje. Najprije ćemo promatrati površinu Zemlju kao sferu sa središtem u ishodištu pravokutnog Kartezijevog sustava i s polumjerom R , odnosno skup točaka čije koordinate zadovoljavaju:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Takvu sferu nazivamo *Zemljinom sferom*. Tada definiramo sljedeće pojmove:

- Točka $(0, 0, R)$ naziva se *Sjeverni pol*, dok $(0, 0, -R)$ nazivamo *Južnim polom*.
- Kružnicu koja je jednako udaljena od polova nazivamo *ekvatorom* ili *polutarom*, i ona dijeli sferu na dvije polusfere — *polutke*.
- *Os Zemljine sfere* nazivamo pravac koji prolazi kroz polove, a ravinu u kojoj se nalazi ekvator — *ekvatorskom ravninom*.
- Kut koji zatvara normala proizvoljne točke M na Zemljinoj sferi s ekvatorskom ravninom naziva se *geografskom širinom* i označava sa ϕ , gdje je $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. Točke koje imaju istu geografsku širinu leže na kružnici koju nazivamo *paralelom* ili *usporednicom*.
- Polukružnice na Zemljinoj sferi koje spajaju Južni i Sjeverni pol nazivaju se *meridijanima* ili *podnevnica*. Uobičajeno je da meridijan koji leži u ravnini $y = 0$ nazivamo *nultim ili početnim meridijanom*.
- Kut između meridijana koji prolazi točkom M i nultog meridijana nazivamo *geografskom duljinom* i označavamo ga s λ , $-\pi < \lambda \leq \pi$. Slijedi, da sve točke koje leže na istom meridijanu imaju istu geografsku duljinu.

Geografski koordinatni sustav može se interpretirati kao restrikcija sfernog prostornog koordinatnog sustava na sferu polumjera R , međutim primjerice u kartografiji i geodeziji umjesto ϕ dolazi λ , odnosno $\phi = \lambda$, a umjesto θ dolazi ϕ , odnosno $\phi = \pi/2 - \theta$.

Kao što znamo Zemlja nema oblik kugle, odnosno lagano je spljoštena na polovima. Dakle, točnije bi bilo kad bismo za model Zemljine plohe uzeli rotacijski elipsoid. Jednadžba rotacijskog elipsoida sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava je dana sa :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (1.8)$$

Pojmove koje smo definirali u prethodnom odjeljku definiramo na analogan način. Jedina je razlika u povezanosti pravokutnih koordinata x , y i z te geografskih koordinata λ i ϕ . Točnije, povezane su na sljedeći način:

$$x = \frac{a}{W} \cos \phi \cos \lambda, \quad (1.9)$$

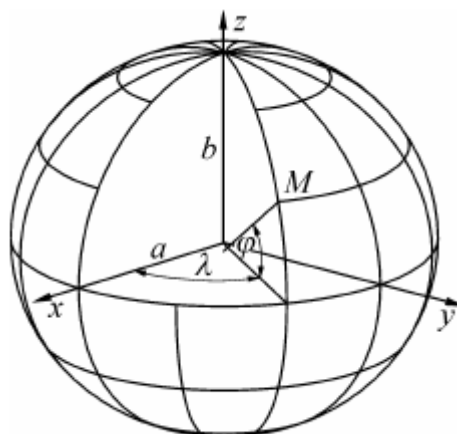
$$y = \frac{a}{W} \cos \phi \sin \lambda, \quad (1.10)$$

$$z = \frac{a}{W} (1 - \varepsilon^2) \sin \phi, \quad (1.11)$$

gdje je

$$W = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}, \quad (1.12)$$

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (1.13)$$



Slika 1.2: Geografski koordinatni sustav na rotacijskom elipsoidu

Sljedeći pojam koji uvodimo je *elipsoidna* ili *geodetska visina* – udaljenost točke do plašta rotacijskog elipsoida (vidi sliku 1.4).

Nadalje, ako uzmemo proizvoljnu geografsku duljinu λ dobivamo elipsu sa velikom poluosi a i malom poluosi b . Tada možemo definirati pojam *polumjer zakrivljenosti krivulje* u bilo kojoj točki na elipsi koja ovisi o geografskoj širini i označit ćemo ga sa R_N .

Sada možemo definirati povezanost elipsoidnih koordinata i pravokutnih ako se ne na-

lazimo na površini rotacijskog elipsoida, odnosno kada je $h \neq 0$:

$$x = (R_N + h) \cos \phi \cos \lambda \quad (1.14)$$

$$y = (R_N + h) \cos \phi \sin \lambda \quad (1.15)$$

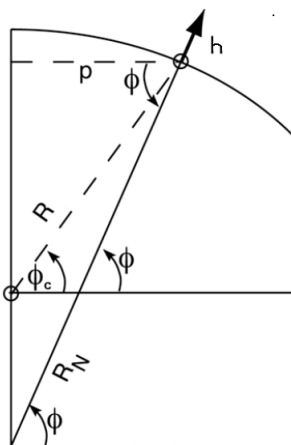
$$z = [(1 - \varepsilon^2)R_N + h] \sin \phi, \quad (1.16)$$

gdje je $R_N = \frac{a}{W}$.

Uz geodetsku širinu, možemo definirati i *geocentričnu širinu* ϕ_c kao kut između ekvatorijalne ravnine i radijusa iz centra do proizvoljne točke na površini (vidi sliku 1.4). Veza između geodetske i geocentrične širine dana je sa sljedećom jednakosti:

$$\operatorname{tg} \phi_c = \left[1 - \varepsilon^2 \frac{R_N}{R_N + h} \right] \operatorname{tg} \phi, \quad (1.17)$$

gdje je R_N polumjer zakrivljenosti, a h geodetska visina.



Slika 1.3: Geocentrična širina ϕ_c i geodetska visina h

Poglavlje 2

Oblik i veličina Zemlje

2.1 Elementi rotacijskog elipsoida

Uzmimo rotacijski elipsoid zadan sa sljedećom jednačbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.1)$$

gdje je a velika poluos, a b mala. Tada definiramo sljedeće elemente elipsoida:

- *spljoštenost*

$$f = \frac{a - b}{a}, \quad (2.2)$$

- *drugu spljoštenost*

$$f' = \frac{a - b}{b}, \quad (2.3)$$

- *treću spljoštenost*

$$n = \frac{a - b}{a + b}, \quad (2.4)$$

- *prvi i drugi numerički ekscentricitet*

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \varepsilon' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (2.5)$$

Opći Zemljin elipsoid

Definicija 2.1.1. *Zemljin opći elipsoid je elipsoid kojim se najbolje prikazuje Zemlja kao planet.*

Definicija takvih modela ima više, ali neke stvari svi imaju zajedničko, a to su da je svaki od tih elipsoida u prostoru apsolutno orijentiran, odnosno ravnina ekvatora se podudara s ravninom ekvatora Zemlje, a mala os sa srednjim položajem rotacijske osi Zemlje. Naravno, svakom tom modelu je cilj što veće podudarnosti, danas su takva mjerenja većinom provedena pomoću umjetnih satelita. U povijesti takva mjerenja nisu bila moguća, pa se opći Zemljin elipsoid nije mogao orijentirati na odgovarajući način, te on nije mogao biti *referentni*, odnosno na njemu se nisu mogla provoditi geodetska mjerenja, tj. nisu se dobivali dovoljno točni podaci.

2.2 Besselov elipsoid

Friedrich Wilhelm Bessel (1748-1846), njemački astronom, matematičar i geodet izračunava parametre Zemljina elipsoida 1841. godine - *Besselov elipsoid*. Ti parametri su bili prihvaćeni u mnogim zemljama dugi niz godina za službena geodetska i kartografska mjerenja, uključujući i Hrvatsku do 2010. godine kada na snagu stupa zakon koji određuje da službeni elipsoid postaje *GRS80*¹ koji je tema sljedećeg odjeljka. U literaturi se navode numeričke vrijednosti male i velike poluosi u metrima:

$$\begin{aligned} a &= 6\,377\,397,15500 \\ b &= 6\,356\,078,96325, \end{aligned}$$

ili u obliku dekadskih logaritama:

$$\begin{aligned} \log a &= 6,80464\,34637 \\ \log b &= 6,80318\,92839, \end{aligned}$$

ili istovremeno u oba zapisa. Međutim, ako antilogaritmiramo prethodna dva izraza doći će do neslaganja koje je reda veličine u milimetrima, točnije:

$$\begin{aligned} a &= 6\,377\,397,15507\,6050 \\ b &= 6\,356\,078,96289\,7785. \end{aligned}$$

Mittermayer (1964) je rezultate koje je prvi objavio Helmert (1880) proučio te zaključio da ta razlika nije zanemariva, te predložio da se kao bespogrešne vrijednosti uzmu dekadski logaritmi poluosi te se pomoću njih izračunaju same poluosi i ostale konstante.

¹Geodetski referentni sustav 1980.

2.3 GRS80 elipsoid

Geodetski referentni sustav 1980 se za razliku od Besselovog elipsoida koji se zadaje pomoću velike i male poluosi, zadaje pomoću sljedeća četiri parametra:

- a - polumjer ekvatora²,
- GM - geocetrična gravitacijska konstanta,
- J_2 - dinamička spljoštenost,
- ω - kutna brzina,

gdje je a velika poluos meridijanske elipse, a GM produkt Newtonove gravitacijske konstante G i ukupne Zemljine mase M . Konstanta J_2 je definirana sljedećim izrazom:

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}, \quad (2.6)$$

gdje je C glavni polarni, a A glavni ekvatorski moment tromosti.

Proces računanja ostalih konstanti započinjemo s računanjem prvog ekscentriciteta e^2 . Počinjemo od izraza za dinamičku spljoštenost J_2 , odnosno

$$J_2 = \frac{\varepsilon^2}{3} \left(1 - \frac{2}{15} \frac{m\varepsilon'}{q_0} \right), \quad (2.7)$$

iz koje možemo izraziti ε^2 , te uz jednakosti $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ i $b\varepsilon' = a\varepsilon$ dobijemo sljedeću nelinearnu jednadžbu

$$\varepsilon^2 = 3J_2 + \frac{4}{15} \frac{\omega^2 a^3}{GM} \frac{\varepsilon^3}{2q_0}, \quad (2.8)$$

koju rješavamo nekim iterativnim postupkom, uz sljedeći q_0 ,

$$q_0 = \left(1 + \frac{3}{\varepsilon'^2} \arctg \right) \varepsilon' - \frac{3}{\varepsilon'}. \quad (2.9)$$

²Temeljena na procjenama rađenima u periodu 1976-1979 pomoću laserskih, Dopplerovih i radarskih podataka i tehnika.

Tablica 2.1: GRS 80 konstante prema Moritzu (1992).

Zadane konstante	
$a = 6\,378\,137\text{m}$	velika poluos
$GM = 3\,986\,005 \times 10^8 \text{m}^3 \text{s}^{-2}$	geocentrična gravitacijska konstanta
$J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$	dinamička spljoštenost
$\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11} \text{rad s}^{-1}$	kutna brzina
Izračunate konstante	
$b = 6\,356\,752,3141$	mala poluos
$c = 6\,399\,752,6259$	polumjer zakrivljenosti na polu
$\varepsilon^2 = 0,006\,694\,380\,022\,90$	prvi ekscentricitet
$\varepsilon'^2 = 0,006\,739\,496\,775\,48$	drugi ekscentricitet
$f = 0,003\,352\,810\,681\,18$	spljoštenost
$f^{-1} = 298,257\,222\,101$	recipročna vrijednost spljoštenosti

2.4 WGS 84 elipsoid

World Geodetic System 1984–WGS 84 je razvijen u SAD-u kao zamjena za WGS 72 radi pružanja točnijih geodetskih i gravimetrijskih mjerenja za potrebe Ministarstva obrane –DoD³. Originalno se taj elipsoid definirao s istim konstantama kao i GRS80, odnosno s velikom poluosi a , gravitacijskom konstantom GM , dinamičkom spljoštenošću ($C_{2,0}$) i kutnom brzinom ω s jedinom razlikom u notaciji vezano za dinamičku spljoštenost koju smo tada nazivali J_2 .

1993. godine provedeni su izračuni koji su rezultirali značajnim promjenama originalnih parametara. Jedna promjena se odnosila na GM , na prijedlog DMA, temeljem empirijskih dokaza. 1994. godine preporučena je nova vrijednost GM -a za korištenje u svim visoko točnim DoD aplikacijama koje se koriste u satelitima u orbiti. Druga promjena odnosila se na ($C_{2,0}$), koja je proizašla iz zajedničkog projekta NIMA/NASA nazvan *Earth Gravitational Model 1996 (EGM96)*.

Odlučeno je da se za definiranje novog WGS 84 uzmu sljedeće konstante:

1. Velika poluos (a)

Vrijednost velike poluosi a je jednaka kao i za GRS80 elipsoid te iznosi

$$a = 6378137,0 \text{ m.} \quad (2.10)$$

Iako su nakon perioda 1976-1979. godine dobivene točnije procjene, ta razlika se mjeri u decimetrima i nije toliko bitna u primjeni. Naime, razni uređaji i sustavi, poput GPS prijemnika koriste elipsoid kao referentnu površinu. U tim sustavima nije

³Department of Defense

potrebno definirati elipsoid koji najbolje odgovara geoidu, čak se i preporučuje, radi skupoće i dugotrajnosti same pretvorbe koordinata, ali i ažuriranja raznih programa, da se koristi originalni referetni elipsoid.

2. Spljoštenost (f)

Vrijednost spljoštenosti f dana je u sljedećem obliku

$$1/f = 298,257223563. \quad (2.11)$$

Više je praktičnih razloga zašto je spljoštenost f postala definirajući parametar, a jedan od njih je sljedeći. Naime, u originalnom WGS84 dinamička spljoštenost ($C_{2,0}$) je bila definirajući parametar te je u tom slučaju spljoštenost f bila dobivena nizom računanja i dobivena vrijednost se razlikovala od spljoštenosti GRS80 elipsoida radi niza procesa kraćenja velikih/malih brojeva. Ta razlika nije bila velika i nije utjecala u praktičnim primjenama, ali činjenica je da su vrijednosti bile numerički različite. Dakle, cilj je bio zadržati određenu sličnost s GRS80 elipsoidom, a da se pritom vrijednosti numerički korektno računaju, odnosno da nema npr. oduzimanja "velikih brojeva" i sl.

3. Kutna brzina Zemlje (ω)

Vrijednost kutne brzine jednaka je kao i za GRS80 elipsoid te iznosi

$$\omega = 7292115 \times 10^{-11} \frac{rad}{s}. \quad (2.12)$$

Vrijednost predstavlja standardnu Zemljinu rotaciju s konstantnom kutnom brzinom. Napomenimo da stvarna kutna brzina Zemlje fluktuirala s vremenom, ali za geodetske programe koje koriste kutnu brzinu te fluktuacije su zanemarive.

4. Zemljina gravitacijska konstanta GM

Konstanta GM je izračunata s većom točnošću nego li univerzalna gravitacijska konstanta G ili masa Zemlje M . U procesu procjenjivanja konstante GM u razdoblju nakon originalnog WGS84 došlo se do tih zaključaka. Vrijednost koja se koristi u definiciji WGS84 je sljedeća:

$$GM = (3986004,418 \pm 0,008) \times 10^8 \frac{m^3}{s^2}. \quad (2.13)$$

Ova vrijednost uključuje i masu Zemljine atmosfere i bazirana je na većem broju svemirskih mjerenja. Za neke primjene potrebno je ili imati GM vrijednost Zemlje koja ne uključuje masu atmosfere ili imati GM vrijednost same atmosfere. Dakle,

potrebno je znati masu Zemljine atmosfere M_A i univerzalne gravitacijske konstante G . Tada vrijednost GM_A iznosi

$$GM_A = (3,5 \pm 0,1) \times 10^8 \frac{m^3}{s^2}, \quad (2.14)$$

dok je Zemljina gravitacijska konstanta bez atmosfere:

$$GM' = (3986000,9 \pm 0,1) \times 10^8 \frac{m^3}{s^2}. \quad (2.15)$$

Tablica 2.2: WGS 84 konstante (World geodetic system 1984, 2000)

Zadane konstante	
$a = 6\,378\,137\,m$	velika poluos
$GM = 3\,986\,004,418 \times 10^8 m^3 s^{-2}$	geocentrična gravitacijska konstanta
$1/f = 298,257223563$	dinamička spljoštenost
$\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11} rad s^{-1}$	kutna brzina
Izračunate konstante	
$b = 6\,356\,752,3142$	mala poluos
$c = 6\,399\,593,6258$	polumjer zakrivljenosti na polu
$\varepsilon^2 = 0,006\,694\,379\,990\,14$	prvi ekscentricitet
$\varepsilon'^2 = 0,006\,739\,496\,742\,28$	drugi ekscentricitet

Koordinatni sustav WGS 84 je nastao modificiranjem sustava Navy Navigation Satellite System Doppler Reference Frame-a (NSWC 9Z-2). To je geocentrični koordinatni sustav čije je ishodište u središtu Zemljine mase. Os Z je umjerena prema srednjem položaju sjevernog pola od 1900. do 1905. godine, odnosno prema smjeru *Conventional Terrestrial Pole (CTP)*. Os X leži u ekvatorijalnoj ravnini i prolazi srednjim griničkim meridianom. Os Y okomita je na osi X i Z i usmjerena je na istok. Ishodište i osi koordinatnog sustava WGS 84 također služe i kao gravimetrijsko središte, a X, Y, Z kao osi elipsoida.

2.5 Geodetski datum

Geodetski datum možemo definirati kao skup podataka koji definira veličinu i oblik Zemljinog elipsoida, koordinatni sustav i orijentaciju u odnosu na Zemlju. Kao što smo dosad vidjeli možemo zaključiti da ne postoji samo jedan geodetski datum. Primjerice vidjeli smo razliku, iako ona nije velika, u korištenju GRS 80 elipsoida od strane RH Hrvatske i sustava GPS-a koji koristi WGS 84 elipsoid. Tako i neka druga država ili neko šire

područje koriste neki svoj *referetni* datum i na temelju njega provode mjerenja na tom području. Dakle potrebno je definirati vezu između dva datuma u Kartezijevim pravokutnim koordinatama.

Definicija 2.5.1. *Pretvorbu između datuma D_A i D_B u Kartezijevim pravokutnim koordinatama definiramo na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} X_{D_B} &= X_{D_A} - D_{X,AB} \\ Y_{D_B} &= Y_{D_A} - D_{Y,AB} \\ Z_{D_B} &= Z_{D_A} - D_{Z,AB}, \end{aligned}$$

gdje su $D_{X,AB}$, $D_{Y,AB}$ i $D_{Z,AB}$ konstante koje su izračunate.

Budući da se WGS 84 datum koristi u sustavu GPS-a, a primjerice geodeti širom svijeta ne mogu više bez te tehnologije, često su potrebne transformacije iz lokalnog geodetskog datuma u WGS 84 pa stoga dajemo tablicu imena korištenih datuma, njihovih referentnih elipsoida i transformacijskih parametara⁴ u odnosu na WGS 84 datum.

Tablica 2.3: Transformacijski parametri iz lokalnog datuma u WGS84

Datum	Elipsoid	Država	$D_{X,AB}$	$D_{Y,AB}$	$D_{Z,AB}$
European 1950	International 1924	Italija(Sicilija)	-97	-88	-135
European 1950	International 1924	Italija(Sardinija)	-97	-103	-120
European 1950	International 1924	Austrija	-87	-98	-121
European 1950	International 1924	Španjolska	-84	-107	-120
Hermannskogel	Bessel 1841	Hrvatska	653	-212	449
North Sahara 1959	Clarke 1880	Alžir	-186	-93	310
South American 1969	South American 1969	Brazil	-60	-2	-41
South American 1969	South American 1969	Čile	-75	-1	-44
South American 1969	South American 1969	Kolumbija	-44	6	-36

⁴http://surveying.wb.psu.edu/sur351/DatumTrans/datum_transformations.htm

Poglavlje 3

Transformacija koordinata

3.1 Uvod

Veza između geodetskih i elipsoidnih koordinata je dobro poznata i nju smo naveli ranije, međutim problem se javlja, kad tražimo inverznu funkciju i ako se ne nalazimo na plaštu rotacijskog elipsoida, odnosno kada je geodetska visina $h \neq 0$. Problem je kroz povijest rješavan na više načina, a ja ću iznijeti neke od načina s kojima sam se susreo, te ih usporediti.

Najprije ću iznijeti **pretpostavke** koje će vrijediti za svaku metodu.

1. Rotacijski elipsoid je definiran sljedećom jednačbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (3.1)$$

2. Relacija između Kartezijevih i elipsoidnih koordinata glasi:

$$x = (R_N + h) \cos \phi \cos \lambda \quad (3.2)$$

$$y = (R_N + h) \cos \phi \sin \lambda \quad (3.3)$$

$$z = \left(\frac{b^2}{a^2} R_N + h \right) \sin \phi, \quad (3.4)$$

gdje je

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3.5)$$

3. Udaljenost točke od ishodišta u ravnini i prostoru je

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.6)$$

3.2 Korijen jednadžbe četvrtog stupnja

Metoda, kao što sam naslov kaže, će se temeljiti na rješavanju polinomijalne jednadžbe četvrtog stupnja (Lapaine, 1990). Rješenje te jednadžbe će nam dati geodetsku širinu ϕ te geodetsku visinu h , dok ćemo geodetsku dužinu dobiti jednostavnom formulom. Da dođemo do jednadžbe naprije je potrebno napraviti sljedeću zamjenu varijabli koja uključuje tzv. *Keplerov astronomski parametar* x_k :

$$\frac{a}{b} \operatorname{tg} \phi_c = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \phi = \frac{2x_k}{1 - x_k^2}, \quad (3.7)$$

gdje je ϕ geodetska, a ϕ_c geocetrična širina. Tada relacije koje povezuje Kartezijeve i geodetske koordinate možemo napisati na sljedeći način:

$$x = (1 - x_k^2) \left(\frac{a}{1 + x_k^2} + \frac{bh}{R_N} \right) \cos \lambda \quad (3.8)$$

$$y = (1 - x_k^2) \left(\frac{a}{1 + x_k^2} + \frac{bh}{R_N} \right) \sin \lambda \quad (3.9)$$

$$z = 2x_k \left(\frac{b}{1 + x_k^2} + \frac{ah}{R_N} \right) \quad (3.10)$$

gdje je norma vektora normale R_N dana sa

$$R_N = \sqrt{4a^2x_k^2 + b^2(1 - x_k^2)^2},$$

iz koje dobivamo jednadžbu četvrtog stupnja za x_k koja postaje temeljni problem ovog algoritma:

$$bz x_k^4 + 2(ap + a^2 - b^2)x_k^3 + 2(ap + b^2 - a^2)x_k - bz = 0. \quad (3.11)$$

Nakon što riješimo dobivenu jednadžbu, geodetsku širinu ϕ izračunamo iz

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2x_k}{1 - x_k^2} \frac{a}{b}, \quad (3.12)$$

a geodetsku visinu h iz

$$h = \frac{\left(z - \frac{2x_k b}{1 + x_k^2} \right)}{\sin \phi} = (p - a) \cos \phi + (z - bx_k) \sin \phi, \quad (3.13)$$

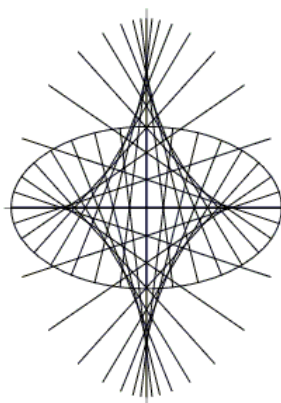
dok geodetsku dužinu izračunamo na jednostavan način

$$\lambda = \frac{y}{x}. \quad (3.14)$$

Iz algebarskog stajališta sve smo riješili, međutim postavlja se pitanje, koje od 4 rješenja dobivene jednačbe nama zapravo treba.

Odabir pravog rješenja

Promatrajući sliku 3.2 zaključujemo da ako se nalazimo izvan elipse imamo dvije, a ako smo unutar imamo 4 normale koje prolaze danom točkom. Da bismo odabrali jednu, potrebno je pretpostaviti dvije prirodne činjenice; za svaku točku T koja se nalazi na površini elipse, geodetska visina h je jednaka 0 te da visina h mora biti neprekidna funkcija. Radi simetrije polja normala možemo trenutno pretpostaviti da je $z > 0$. Tada se



Slika 3.1: Normale na elipsu

jednačba (3.11) može pojednostaviti do

$$f(x_k) = x_k^4 + 2mx_k^3 + 2nx_k - 1 = 0, \quad (3.15)$$

gdje je

$$m = \frac{ap + a^2 - b^2}{bz}, \quad (3.16)$$

$$n = \frac{ap + b^2 - a^2}{bz}, \quad (3.17)$$

sa svojstvima da je

$$f(0) = -1, \quad (3.18)$$

te

$$f(1) = 4\frac{ap}{bz} > 0. \quad (3.19)$$

Zaključujemo da postoji barem jedna nultočka na intervalu $[0, 1]$. Tada pomoću Ferrarijeve metode za rješavanje jednadžbe četvrtog stupnja dobivamo rješenje koje je dano sa

$$x = -s + \sqrt{s^2 - t}, \quad (3.20)$$

gdje su

$$t = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad (3.21)$$

te

$$s = \frac{n - mt}{2\sqrt{y^2 + 1}}. \quad (3.22)$$

Napomena 3.2.1. Varijabla y je bilo koje realno rješenje kubične rezolvente

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad (3.23)$$

gdje je $3p = mn + 1$ i $4q = m^2 - n^2$.

Napomena 3.2.2. Ponašanje korijena jednadžbi rezolvente, kao i jednadžbe četvrtog stupnja ovisi o diskriminanti

$$D = q^2 + p^3. \quad (3.24)$$

Kako su poluosi Zemljinog astroida oko 43 km, možemo iskoristiti Cardanovu formulu za potrebe geodetskih snimanja za $D \geq 0$

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{q + \sqrt{D}}, \quad (3.25)$$

dok za $D < 0$ koristimo

$$y = -2r \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \quad r = \sqrt{-p}, \quad \cos \alpha = \frac{q}{r^3}. \quad (3.26)$$

Eliminacija numeričkih nestabilnosti

Numeričke nestabilnosti se pojavljuju kada se proizvoljna točka T nalazi blizu ekvatorijalne ravnine ili kad je $z = 0$. To možemo izbjeći na način da koristimo novi parametar x_K koji je u sljedećoj vezi s ϕ

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1 - x_K^2}{2x_K} \frac{a}{b}. \quad (3.27)$$

Dobivamo novu jednadžbu četvrtog stupnja

$$apx_K^4 + 2(bz - a^2 + b^2)x_K^3 + 2(bz - b^2 + a^2)x_K - ap = 0, \quad (3.28)$$

koju rješavamo na analogni način te pomoću (3.27) izračunamo ϕ , a h pomoću sljedeće jednakosti:

$$h = \frac{\left(p - \frac{2x_K a}{1+x_K^2}\right)}{\cos \phi} = (p - ax_K) \cos \phi + (z - b) \sin \phi. \quad (3.29)$$

Poglavlje završavamo s dvije napomene vezane uz algoritam.

Napomena 3.2.3.

1. *Prvu parametrizaciju koristimo za područje za koje vrijedi $ap < bz$, drugu koristimo za područje za koje je $ap > bz$. U slučaju da vrijedi jednakost svejedno je koju parametrizaciju koristimo (jedino u slučaju kada je $p = z = 0$, odnosno kada ϕ nije konačan).*
2. *Ako je $z < 0$, sve račune možemo provesti sa $-z$, samo što na kraju treba promijeniti predznak ϕ .*

3.3 Podudaranje geodetske i geocentrične širine

Napomena 3.3.1. Ako pretpostavimo da za Zemljin model uzimamo model kugle tada su geocentrična i geodetska širina jednake. U tom slučaju možemo lagano izračunati geocentričnu širinu, odnosno

$$\phi = \phi_c = \arctg\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (3.30)$$

Metoda kojom ćemo se baviti u ovom odjeljku će biti iterativna barem što se tiče izračunavanja geodetske širine ϕ , naime za početnu vrijednost u iterativnom postupku ćemo uzeti geocentričnu širinu. Visinu h ćemo izračunati iz dobivene širine, dok geodetsku dužinu λ možemo odmah dobiti direktnim računom jednako kao i u prethodnom odjeljku.

Algoritam 1. "Geocentrična=Geodetska"

- **Ulaz** Kartezijeve koordinate zadane točke (x, y, z) , točnost tol
- **Izlaz** Geodetske/geografske koordinate (ϕ, λ, h)

1. **Korak:** Izračunaj geodetsku dužinu λ

$$\lambda = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. **Korak:** Izračunaj geodetsku širinu ϕ

$$\phi_{stari} = \arctg\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

Dok (istina)

$$\left| \begin{array}{l} R_N = \frac{a}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi_{stari}} \\ h = \frac{p}{\cos \phi_{stari}} - R_N(\phi_{stari}) \\ \phi_{novi} = \arctg\left[\frac{z}{p} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{R_N}{R_N + h}\right)^{-1}\right] \\ \text{Ako } (|\phi_{stari} - \phi_{novi}| > tol) \\ \quad \text{break;} \\ \phi_{novi} = \phi_{stari} \end{array} \right.$$

$$\phi = \phi_{novi}$$

3. **Korak:** Izračunaj geodetsku visinu h

$$\text{Ako } \phi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet h = \frac{L}{\sin \phi} - R_N \text{ ili}$$

$$\bullet h = \sqrt{L^2 + z^2} - R_N$$

$$\text{gdje je } L = z + \varepsilon^2 R_N \sin \phi$$

inače

$$\bullet h = \frac{p}{\cos \phi} - R_N$$

Napomena 3.3.2. *Petlja u 2.koraku će iskonvergirati nakon 4 do 5 koraka do na točnost nekoliko centimetara.*

3.4 Bowringova i poboljšana Bowringova metoda

B.R. Bowring je 1976. razvio vrlo brzo konvergentnu iterativnu metodu koja je bazirana na Newtonovoj metodi za računanje geodetske širine ϕ . *Bowringova metoda* je odbačena od strane nekoliko znanstvenika koji su kao razlog odbacivanja istaknuli nekoliko relativno skupih trigonometrijskih evaluacija po koraku iteracija. Međutim, pokazat ćemo da jednostavnim promatranjem da takve evaluacije nisu potrebne tijekom iteracija. Ova tvrdnja stoji iz razloga što ćemo početnu vrijednost za iterativni postupak tako *dobro* pogoditi da će biti dovoljna samo jedna iteracija, a u tom slučaju nam neće biti ni potreban kriterij zaustavljanja što dodatno pojednostavljuje metodu. Navest ćemo dva algoritma, Bowringovu metodu i *poboljšanu Bowringovu metodu*.

Bowringova metoda

Uvodimo pomoćnu varijablu β za iterativni postupak koja za početnu vrijednost ima

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{a z}{c p}. \quad (3.31)$$

Tada možemo definirati iterativni algoritam na sljedeći način:

Algoritam 2. *Bowringova metoda (R.M.Toms, 1995)*

- **Ulaz** Kartezijeve koordinate zadane točke (x, y, z) , točnost tol
- **Izlaz** Geodetske/geografske koordinate (ϕ, λ, h)
- Početna vrijednost $\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{a z}{c p}$

1. **Korak:** Izračunaj geodetsku dužinu λ

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

2. **Korak** Izračunaj geodetsku širinu ϕ

Dok $(|\operatorname{tg} \phi_{stari} - \operatorname{tg} \phi_{novi}| < tol)$

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{az}{cp} \\ \operatorname{tg} \phi_{novi} = \frac{(Z + b\epsilon^2 \sin^3 \beta_0)}{p - a\epsilon^2 \cos^3 \beta_0} \\ \operatorname{tg} \beta_1 = (1 - f) \operatorname{tg} \phi_{novi} \\ \phi_{stari} = \phi_{novi} \end{array} \right.$$

3. **Korak:** Izračunaj geodetsku visinu h

Ako $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$

- $h = \frac{z}{\sin \phi} + R_N(\varepsilon^2 - 1)$

inače

- $h = \frac{p}{\cos \phi} - R_N$

Napomena 3.4.1. Vidimo da je u svakoj iteraciji potrebno računati \cos , \sin i \arctg , međutim to se može izbjeći, i to je zapravo **poboljšana Bowringova metoda**

Poboljšana Bowringova metoda

Primijetimo najprije da se u 2. koraku prethodnog algoritma nigdje **eksplicitno** ne pojavljuje β . Umjesto toga potrebni su nam $\sin \beta$, $\cos \beta$ te $\operatorname{tg} \beta$. Ove izraze međutim možemo izračunati koristeći osnovne trigonometrijske identitete.

Neka je

$$A_i = z + c\varepsilon'^2 \sin^3 \beta_i \quad (3.32)$$

i

$$B_i = p - a\varepsilon^2 \cos^3 \beta_i, \quad (3.33)$$

tada je

$$\operatorname{tg} \beta_{i+1} = \frac{A_i}{B_i}. \quad (3.34)$$

Tada, po definiciji slijedi

$$\sin \phi_{i+1} = \frac{A_i}{[A_i^2 + B_i^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.35)$$

$$\cos \phi_{i+1} = \frac{B_i}{[A_i^2 + B_i^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.36)$$

Vrijednosti $\sin \beta_{i+1}$ i $\cos \beta_{i+1}$ koristimo u sljedećoj iteraciji u jednakosti $\operatorname{tg} \beta_{i+1} = (1 - f) \operatorname{tg} \phi_{i+1}$, a početni uvjet (3.31) postaje

$$\sin \beta_0 = \frac{az}{[(ap)^2 + (bz)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.37)$$

$$\cos \beta_0 = \frac{cp}{[(ap)^2 + (bz)^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.38)$$

Koristeći (3.32) i (3.38) sve trigonometrijske funkcije su eliminirane i zamjenjene s dva druga korijena.

Bowringova metoda se dodatno još može poboljšati ako napravimo jednostavnu modifikaciju početne vrijednosti $\text{tg}\beta$. Ispitivanja su pokazala da je pogreška koja se javlja u $\text{tg}\phi$ istog predznaka u prvom kvadrantu. Temeljem toga uvodi se multiplikativni težinski faktor D u (3.31) da se minimizira greška E , koju definiramo na sljedeći način u Euklidskoj 2-normi

$$E = \left[(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 + (z - z_a)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

Dakle, uvodimo faktor D u jednakost (3.31)

$$\text{tg}\beta_0 = \frac{aDz}{bp}, \quad (3.40)$$

koji možemo odabrati na taj način da minimizira grešku E na nekom skupu \mathbf{S} koji se može odrediti bez da znamo ϕ i h . Skup \mathbf{S} se definira kao skup svih točaka P u prvom kvadrantu s koordinatama (p, z) koje leže u području omeđenim elipsama

$$\left[\frac{p}{a + h_{\min}} \right]^2 + \left[\frac{z}{b + h_{\min}} \right]^2 = 1 \quad (3.41)$$

i

$$\left[\frac{p}{a + h_{\max}} \right]^2 + \left[\frac{z}{b + h_{\max}} \right]^2 = 1. \quad (3.42)$$

¹Trojka (x, y, z) su egzaktne, a (x_a, y_a, z_a) su izračunate koordinate.

Primjer 3.4.2.Tablica 3.1: Tablica optimalnih vrijednosti za WGS 84 ($E \leq 0.01m$), (R.M.Toms, 2000)

Područje	h_{min}	h_{max}	aD/b
1	$-1. \times 10^5$	$2. \times 10^6$	1,0026000
2	$2.10. \times 10^6$	$6. \times 10^6$	1,00092592
3	6.10×10^6	$18. \times 10^6$	0,99925097
4	$18. \times 10^6$	$1. \times 10^9$	0,997523508

Algoritam 3. *Poboljšana Bowringova metoda (R.M.Toms, 2000)*

- **Ulaz** Kartezijeve koordinate zadane točke (x, y, z) , multiplikativni faktor D
 - **Izlaz** Geodetske/geografske koordinate (ϕ, λ, h)
1. **Korak:** Izračunaj geodetsku dužinu λ

$$\lambda = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$
 2. **Korak:** Izračunaj geodetsku širinu ϕ
 - Izračunaj $T_0 = \frac{zaD}{b}$
 - Izračunaj $S_0 = \left[\frac{zaD}{b} + p^2\right]^{\frac{1}{2}}$
 - Izračunaj $\sin \beta_0 = \frac{T_0}{S_0}$ i $\cos \beta_0 = \frac{p}{S_0}$
 - Izračunaj $T_1 = z + b\varepsilon'^2 \sin^3 \beta_0$
 - Izračunaj $S_1 = \left[T_1^2 + (p - a\varepsilon^2 \cos^3 \beta_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$
 - Koristi 3.37 i 3.38 za izračunati $\sin \phi_1 = \frac{T_1}{S_1}$ i $\cos \phi_1 = \frac{[p - a\varepsilon^2 \cos^3 \beta_0]}{S_1}$
 - Izračunaj ϕ iz $\arctg^{-1}\left(\frac{\sin \phi_1}{\cos \phi_1}\right)$
 3. **Korak** Izračunaj geodetsku visinu h
 - Izračunaj $R_N = \frac{a}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi_1)^{\frac{1}{2}}}$
 - Ako $|\cos \phi_1| \geq \cos(|67, 5^\circ|)$

$$h = \frac{p}{|\cos \phi_1| - R_N}$$
 - Inače

$$h = \frac{z}{\sin \phi_1 + R_N(\varepsilon^2 - 1)}$$

Usporedba algoritama

Usporedbu ćemo provesti pomoću programa MATLAB. Usporediti ćemo brzinu izvršavanja² te broj potrebnih iteracija kod iterativnih metoda na 30000 slučajno odabranih koordinata koje smo dobili pomoću MATLAB-ove funkcije *rand*.

Početne pretpostavke

1. GRS80 elipsoid

- $a = 6378137 \text{ m}$
- $b = 6356752 \text{ m}$
- $f = 0.00335281068118$

2. $\text{tol} = 10^{-10}$

3. $X = 10^7 \times \text{rand}(30000, 1)$, $Y = 10^7 \times \text{rand}(30000, 1)$, $Z = 10^7 \times \text{rand}(30000, 1)$

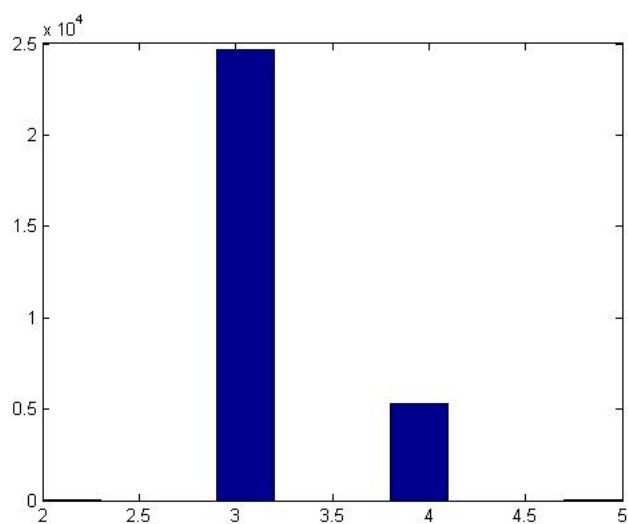
Tablica 3.2: Usporedba algoritama.

	GeoC=GeoD	Korijen4	Bowring	PBowring
Vrijeme izvršavanja	0,4375 s	4,98 s	0,5625 s	0,359375 s

²Koristili MATLAB funkciju *cputime*.

Napomena 3.4.3. *Kod svih algoritama, osim kod "Geoc=GeoD", smo imali samo jednu iteraciju, odnosno direktno rješenje, dok kod spomenutog algoritma javljale su se iteracije u rasponu od 2-5 iteracija(vidi sliku 3.2).*

Slika 3.2: Histogram broja iteracija za "GeoC=GeoD" algoritam



Zaključak

Očekivano je poboljšana Bowringova metoda najbrža, skoro dvostruko brža od "obične" Bowringove metode te 20% brža od "GeoC=GeoD" metode. Algoritam Korijen4 najsporniji, ponajviše radi višestrukog računanja trećeg korijena "velikih brojeva".

Poglavlje 4

Geoid

Razne geodetske aplikacije zahtijevaju da se jasno definiraju tri različite plohe. Jedna od njih je topografska ploha, koja uključuje vanjski reljef i podvodni morski reljef. Druga vrsta je već spomenuta matematička referentna ploha, elipsoid, te ekvipotencijalna ploha *geoid*, o kojoj će biti riječi u ovom poglavlju. Ali prije toga moramo definirati gravitacijski potencijal Zemlje za koji ćemo vidjeti da je to zapravo matematički model što ga čine koeficijenti razvoja potencijala Zemljinog pola ubrzanja sile teže po sfernih funkcijama. Uz pomoć tog modela se tada mogu izračunati vrijednosti svih fizikalnih parametara, pa tako i globalnog geoida za svaku točku na Zemlji.

4.1 Gravitacijski potencijal

Ukupni Zemljin gravitacijski potencijal W je definiran na sljedeći način (World geodetic system, 2000):

$$W = V + \Phi, \quad (4.1)$$

gdje je Φ potencijal uslijed Zemljine rotacije. Ako je ω kutna brzina Zemlje tada je

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2), \quad (4.2)$$

gdje su x i y Kartezijeve koordinate bilo koje točke u WGS84 referentnom elipsoidu. Funkcija gravitacijskog potencijala V je definirana s

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{n_{max}} \sum_{m=2}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi') (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (4.3)$$

gdje su:

1. GM – Zemljina gravitacijska konstanta,

2. r – Udaljenost od centra Zemljine mase,
3. a – Velika poluos WGS84 elipsoida,
4. n i m – Stupanj i red modela,
5. ϕ' – Geocentrična širina,
6. λ – Geocentrična dužina = Geodetska dužina,
7. $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – normalizirani gravitacijski koeficijenti,
8. Pridružena normalizirana Legendreova funkcija

$$\bar{P}_{nm}(\sin \phi') = \left[\frac{(n-m)!(2n+1)k}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_{nm}(\sin \phi'), \quad (4.4)$$

9. Pridružena Legendreova funkcija

$$P_{nm}(\sin \phi') = (\cos \phi')^m \frac{d^m}{d(\sin \phi')^m} [P_n(\sin \phi')], \quad (4.5)$$

10. Legendreov polinom

$$P_n(\sin \phi') = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\sin \phi')^n} (\sin^2 \phi' - 1)^n, \quad (4.6)$$

11. Vrijedi

$$\left| \frac{\bar{C}_{nm}}{\bar{S}_{nm}} \right| = \left[\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)!} k \right] \left| \frac{C'_{nm}}{S'_{nm}} \right|, \quad (4.7)$$

gdje su C'_{nm} i S'_{nm} konvencionalne gravitacijske konstante za $m = 0, k = 1$ te $m \neq 0$ i $k = 2$.

Napomena 4.1.1. Red teorijski konvergira za $r \geq a$, iako se može primijeniti, uz zanemarljivu pogrešku, blizu Zemljine površine, ali red se ne smije koristiti za točke ispod Zemljine površine.

4.2 Definicija

Definicija 4.2.1. *Ekvipotencijalne plohe su plohe koje imaju konstantni skalarni potencijal. Tada*

$$W(x, y, z) = \text{const.} \quad (4.8)$$

definira familiju ekvipotencijalnih ploha–geopa.

Definicija 4.2.2. *Geoid je geop koji približno predstavlja srednju razinu mora.*

Kada se geoid razvija, konstanta W , koja predstavlja potencijal bilo gdje na površini, je ograničena ili se pretpostavlja da je jednaka normalnom potencijalu (U_0) najbolje odgovarajućeg elipsoida. Pretpostavljalo se da je WGS 84 elipsoid najbolje odgovarajući elipsoid, međutim to se pokazalo krivim zaključkom – razlika velike poluosi WGS 84 i najbolje odgovarajućeg je 0,54 m. U terminima geoida, ovaj efekt je riješen kroz "nultu undulaciju" N_0 geoida. S ovakvim pristupom WGS 84 elipsoid se može nesmetano koristiti bez uvođenja ikakve dodatne greške ili drugog elipsoida.

Uobičajeno je da je geoid izražen u svakoj točki kao udaljenosti, iznad (+ N) ili ispod (– N) elipsoida. Radi praktičnih razloga, geoid služi kao referentna površina za srednju razinu mora. U područjima gdje se visinski podaci ne mogu dobiti standardnim mjerenjima, radi se procjena srednje razine mora na sljedeći način koristeći ortometričnu visinu:

$$H = h - N, \quad (4.9)$$

gdje su:

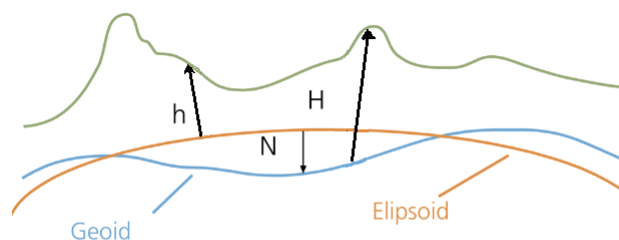
1. h = geodetska visina (relativna visina u odnosu na elipsoid),
2. N = undulacija geoida,
3. H = ortometrična visina – relativna visina u odnosu na geoid.

Alternativno, u nekim zemljama se ortometričnu visinu zamjenjuje s normalnom visinom H^* , a undulacije geoida s anomalijom ζ . Tada (4.9) možemo reformulirati:

$$h = H + N = H^* + \zeta. \quad (4.10)$$

4.3 Formule, reprezentacije i analiza

Računanje undulacije geoida temelji se na visinskim anomalijama izračuna pomoću WGS 84 EGM96 sferičnih harmoničkih koeficijenata stupnja i reda 360. Da bi se transformirale visinske anomalije u undulacije geoida, nulta undulacija od –0,53 m i WGS 84



Slika 4.1: Zemljini geoid i elipsoid

EGM96 korekcija koeficijenata moraju se implementirati u postupak računanja undulacija. Vrijednost od $-0,53 m$ je bazirana na razlici između idealnog Zemljinog elipsoida u sustavu bez plime i oseke s WGS 84 elipsoidom. Idealni elipsoid je sustav bez utjecaja plime i oseke, s velikom poluosi a i spljoštenosti f :

$$a = 6378136,46 m, \quad (4.11)$$

$$1/f = 298,25765. \quad (4.12)$$

Da bismo izračunali undulacije geoida moramo najprije izračunati visinske anomalije ζ :

$$\zeta(\phi, \lambda, r) = \frac{GM}{\gamma(\phi)r} \left[\sum_{n=2}^m \left(\frac{a^n}{r}\right) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \phi) \right]^1, \quad (4.13)$$

gdje su \bar{C}_{nm} i \bar{S}_{nm} normalizirani koeficijenti potencijala stupnja n i reda m iz EGM96. Prethodna jednadžba se evaluira u točki $P(\phi, \lambda, r)$ na ili iznad površine Zemlje.

Sve vrijednosti u prethodnoj jednakosti su definirane za WGS84 EGM96 s jednom iznimkom; parni zonalni koeficijenti sa indeksima 2-10 su koeficijenti razlike između dinamičkog WGS84 EGM96 i geometrijski izračunatih koeficijenata.

Za računanje undulacije geoida N u metrima koristimo formulu:

$$N(\phi, \lambda) = N_0 + \zeta(\phi, \lambda, r) + \frac{\Delta g_{BA}(\phi, \lambda)}{\gamma H(\phi, \lambda)}, \quad (4.14)$$

gdje su:

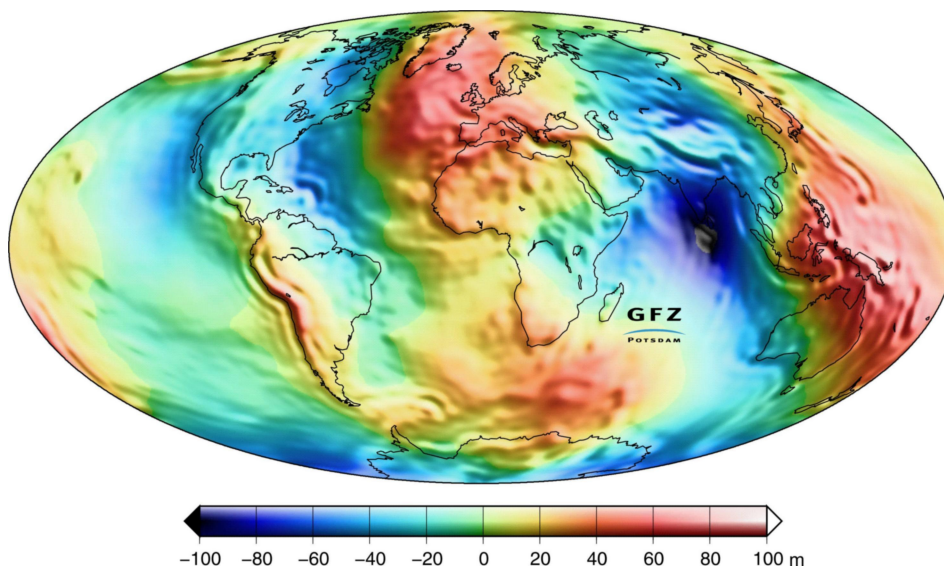
1. $N_0 = -0,530$ – nulta undulacija,

¹Konstante su jednake kao i u poglavlju 4.1.

2. $\Delta g_{BA}(\phi, \lambda)$ = Bourgeorova gravitacijska normala iz EGM96,
3. γ = prosječna vrijednost normalne gravitacije,
4. $H(\phi, \lambda)$ definirana iz harmoničke analize JGP95E, baze visinskih podataka.

Napomena 4.3.1. Bourgerova anomalija se može izračunati iz EGM96 skupa sferičnih harmoničkih funkcija i harmoničke analize JGP95E.

Odstupanja geoida se može prikazati kao karta slojnica² koja pokazuje devijaciju geoida u odnosu na elipsoid koji je uzet kao matematički prikaz Zemljine površine. Dajemo prikaz odstupanja geoida na svjetskoj razini, tablicu statistike te položajne podatke maksimalne i minimalne undulacije.



Slika 4.2: Undulacije WGS84 EGM96 geoida

Geoid EGM96 na području Republike Hrvatske

Naravno, EGM96 geoid nije jedini geoid koji je razvijen. Postoje i ostali, primjerice kao GFZ97 koji sadrži koeficijente sfernih harmonika do reda i stupnja 359 ili OSU91A koji se najviše upotrebljavao do pojave EGM96. Koeficijenti tog modela su išli do stupnja 50 definirani satelitskim putem preko globalnog modela GEM-T2, a zatim do stupnja 360

²http://www.ualberta.ca/~dumberry/geoph110/L3erthdim_files/geoid_eigen-grace02s.jpg

Tablica 4.1: statistički podaci geoida WGS84 EGM96 (World Geodetic System 1984, 2000).

srednja vrijednost	$-0,57m$
standardna devijacija	$30,56m$
minimum	$-106,99m$
maksimum	$85,39m$

Tablica 4.2: Koordinate minimalnog i maksimalnog odstupanja (World Geodetic System 1984, 2000).

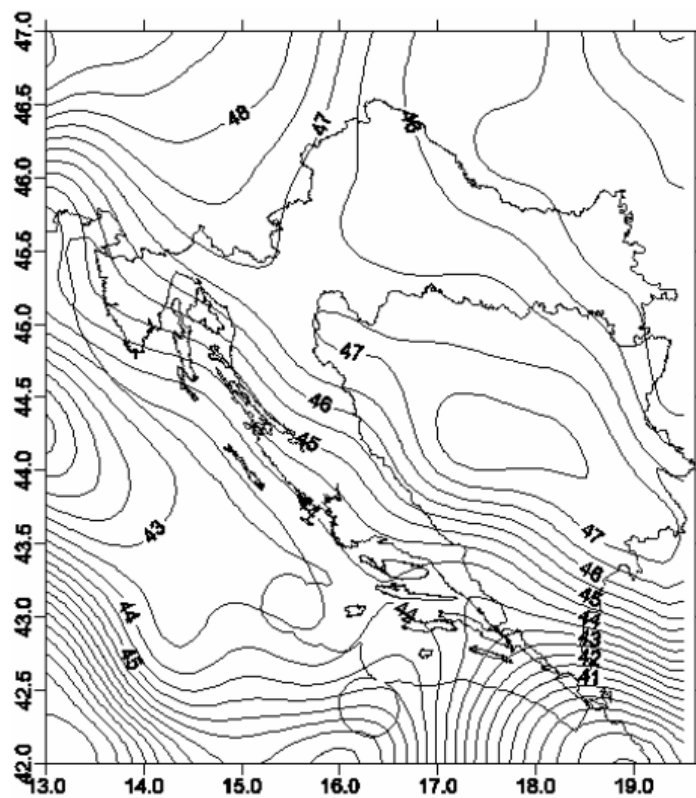
	ϕ	λ
minimum	$4,75^{\circ}N$	$78,75^{\circ}E$
maksimum	$8,25^{\circ}S$	$147,25^{\circ}E$

dodavanjem iz površinskih vrijednosti anomalija ubrzanja sile teže. Međutim, EGM96 se pokazao kao najbolji za globalne svrhe, također i za područje Republike Hrvatske.

Način na koji se provodi test da li je neki model dobar ili nije je sljedeći; radimo usporedbe GPS-nivelmanske undulacije s undulacijama globalnih modela. Koristila se 121 referentna GPS-nivelmanska točka na teritoriju RH te se zaključilo da model EGM96 ima najmanje standardno odstupanja razlika od $0,44m$. Dajemo ostale statističke podatke te kartu slojnica EGM96 geoida na području RH.

Tablica 4.3: Statistički podaci geoida WGS84 EGM96 na području RH (Hećimović, Bašić).

srednja vrijednost	$45,48m$
standardna devijacija	$1,958m$
minimum	$38,277m$
maksimum	$50,176m$



Slika 4.3: WGS84 EGM96 geoid na području Republike Hrvatske (Hećimović, Bašić).

Tablica 4.4: Statistika razlika između GPS-nivelnanskih undulacija i undulacije geoida WGS84 EGM96 na području RH (Hećimović, Bašić).

srednja vrijednost	-1,33m
standardna devijacija	0,443m
minimum	-2,427m
maksimum	0,214m

Literatura

- [1] B. Borčić, *Matematička kartografija*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1955.
- [2] J. R. Clync, *Geodetic Coordinate Conversion*, (2006), http://www.gmat.unsw.edu.au/snap/gps/clync_pdfs/coordcvt.pdf
- [3] N. Frančula, *Kartografske projekcije*, Zagreb, 2004.
- [4] Ž. Hećimović, T. Bašić, *Globalni geopotencijalni modeli na teritoriju Hrvatske*, <http://www.geof.unizg.hr/~zhecimovic/PopisRadova/Globalnigeopotencijalnimodeli.pdf>
- [5] F. Helmert, *Die mathematischen und physikalischen Theorien der h'oheren Geod'asie, Einleitung und I. Teil: Die mathematischen Theorien*, B. G. Teubner, Leipzig, 1880.
- [6] K. Horvatić, *Linearna algebra*, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.
- [7] M. Lapaine, *A new direct solution of the transformation problem Cartesian into ellipsoidal coordinates*, Rapp, R. i Sansó, F. (Eds.): *Determination of the Geoid, Present and Future*, Springer Verlag, *Proceedings from the International Association of Geodesy Symposia* (1991) br. 106, 395–404
- [8] M. Lapaine, M. Lapaine, D. Tutić, *Numeričke vrijednosti geometrijskih konstanti elipsoida GRS 80*, *Geodetski list* (2006), br. 4, 259–269., hrcak.srce.hr/file/8367
- [9] E. Mittermayer, *Die numerischen Werte der Besselschen Erdkonstanten*, *Zeitschrift für Vermessungswesen* (1964), br. 12, 469–470.,
- [10] H. Moritz, *Das Geod'atische Bezugssystem 1980. Festschrift zur Emeritierung von o.Univ.-Prf.Dipl.-Ing.Dr.techn. Karl Hubeny*, *Mitt. der geod'atischen Institute der Technischen Universit'at Graz*, Folge 35, 153–159.,
- [11] R. M. Toms, *An Efficient Algorithm for Geocentric to Geodetic Coordinate Conversion*, Lawrence Livermore National Laboratory, (1995), <http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/110235-MLuPMu/webviewable/110235.pdf>.

[12] *World geodetic system 1984*, NIMA TR8350.2, (2000), <http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf>.

Sažetak

Diplomski rad možemo podijeliti na dva važnija dijela, transformacije pravokutnih koordinata u geodetske i definiranje pojma geoida, koji je Gauss definirao kao *matematička figura Zemlje*.

Kroz razne algoritme transformacije uvidjeli smo da se problem rješavao na različite načine, da li koristeći neke početne pretpostavke, ograničavanja područja na kojem transformiramo koordinate ili jednostavno koristeći neke stalno korištene metode, kao što je Ferrarijeva metoda za rješavanje polinomijalne jednadžbe četvrtog stupnja.

Iako je geoid prisutan u povijesti geodezije i geofizike zadnjih par stoljeća, tek je u posljednjih par desetljeća definiran u velikoj točnosti. Geoid je također često opisan kao istinska fizička struktura Zemlje, ali puno blaža u odnosu na stvarnu fizičku sliku Zemlje. Naime, totalna varijacija geoida je manja od 200 m u odnosu na referentni elipsoid, dok na primjer znamo da je Mt. Everest ima visinu preko 8000 m, a Marijanska brazda dubinu preko 11 000 m što daje totalnu varijaciju preko 19 000 m.

Summary

Graduate work can be divided into two major parts, the transformation of Cartesian coordinates in geodetic and defining the geoid, which Gauss defined as *mathematical figure of the Earth*.

Through a variety of transformation algorithms we realized that the problem was resolved in different ways, whether using some initial assumptions, limiting the areas in which we transform coordinates or simply using some well-used methods, such as Ferrari's method for solving polynomial equations of the fourth degree.

Although the geoid is present in the history of geodesy and geophysics last few centuries, it was only in the last few decades is defined to high precision. Geoid is also often described if true physical structure of the Earth, but considerably smoother than the actual physical image of Earth. Specifically, the total variation of the geoid is less than 200 *m* with respect to the reference ellipsoid, while for example we know that Mt. Everest has a height of over 8000 *m*, and the Mariana Trench depth over 11,000 *m* which gives the total variation of over 19,000 *m*.

Životopis

Dana 29.10.1988. nešto poslije 16:00 sati rođen sam u Rijeci. Međutim, dolazim iz malog sela Čipri pokraj Pazina. U Pazinu sam pohađao Osnovnu školu Vladimira Nazora Pazin. Nakon završetka osmogodišnjeg školovanja upisujem opću gimnaziju u Gimnaziji i strukovnoj školi Jurja Dobrile. Tijekom srednje škole stvorio sam određenu privrženost prema matematici te u skladu s time sudjelovao na nekoliko županijskih natjecanja. Osim matematike, svoje slobodno vrijeme sam dosta provodio igrajući i trenirajući tenis sudjelovavši nekoliko godina na turnirima Hrvatskog teniskog saveza. 2007. godine upisujem preddiplomski studij matematike na PMF-u Zagrebu. Njega sam uspješno završio, te 2010. upisujem diplomski studij primijenjene matematike na istom fakultetu.