SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Viktor Grantverger

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, srpnja 2013

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovom prigodom želio bih se zahvaliti mentoru prof. dr. sc. Nenadu Antoniću koji me poticao na rad, uložio svoje strpljenje i povjerenje u mene tijekom studija, te mi uvelike pomogao tijekom pisanja ovog rada. Također bih se zahvalio svim profesorima, i vama u komisiji, koji su mi predavali i prenijeli mnoge matematičke i druge vještine, kolegama koji su mi učinili studiranje zanimljivijim i ljepšim. Od kolega, posebno bih se zahvalio Marku Hajbi s kojim sam najviše učio i koji mi je pomogao oko diplomskog rada. Želim se zahvaliti cijeloj svojoj obitelji i svim prijateljima na pruženoj podršci, strpljenju i razumijevanju.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod i motivacija

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se običnim diferencijalnim jednadžbama u kompleksnom prostoru. Najviše ćemo se orijentirati na obične diferencijalne jednadžbe čija će rješenja biti kompleksni polinomi ili obični redovi potencija, odnosno redovi potencija čiji će radijus konvergencije biti jednak 0. Rješenja u obliku polinoma su jednostavnija za razmatranje od običnih redova potencija, ali se uglavnom rješenja ne mogu zapisati u obliku polinoma, osim u nekim jednostavnim slučajevima, zbog čega se moramo prvo pozabaviti redovima potencija.
Rad se sastoji od sljedećih poglavlja:

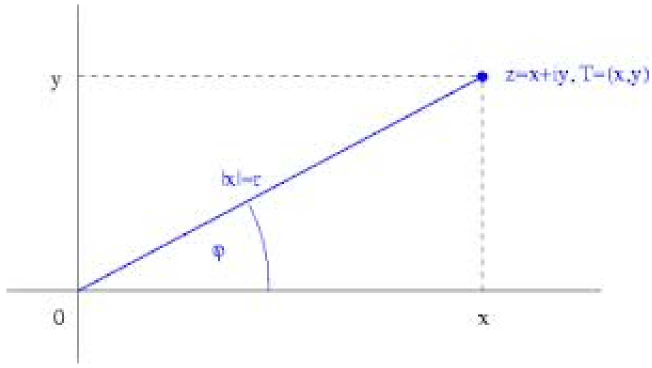
Poglavlje 1 je uvod i motivacija.
Poglavlje 2 bavi se asimptotskim redovima potencija.
Poglavlje 3 bavi se integralnim operatorima.
Poglavlje 4 opisuje sumabilne redove potencija.
Poglavlje 5 daje pregled multisumabilnih redova potencija.

1.1 Kompleksni brojevi

U ovom dijelu ponovit ćemo i dopuniti važne rezultate koje ćemo koristiti kasnije u radu. Reći ćemo nešto o polarnom i eksponencijalnom zapisu kompleksnog broja, Cauchyjevom integralnom teoremu, Pragmén-Lindelöfovom principu i sl.

Polarni i eksponencijalni zapis kompleksnog broja

Budući da kompleksne brojeve možemo prikazivati kao uređene parove (x, y), onda ih možemo zapisati u više oblika.



Slika 1.1: Prikaz kompleksnog broja.

U polarnim koordinatama je tako

$$x = r\cos\phi$$

$$y = r\sin\phi,$$

gdje je $r \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$, a polarni zapis kompleksnog broja je tada

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Eulerov oblik dobiva se iz Taylorovog razvoja eksponencijalne funkcije oko nule:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Umjesto x uvrstimo $i\phi$:

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= 1 + \frac{i\phi}{1!} - \frac{\phi^2}{2!} + ... + \frac{i^n\phi^n}{n!} + ... \\ &= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + ...\right) + i\left(\frac{\phi}{1!} - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} + ...\right) \\ &= \cos\phi + i\sin\phi. \end{aligned}$$

Time smo dobili eksponencijalni zapis kompleksnog broja pomoću polarnog oblika:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}.$$

Zapravo smo definirali i eksponencijalnu funkciju na kompleksnom prostoru, koja je proširenje realne eksponencijalne funkcije:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Za $y = 0$ dobili bismo običnu realnu eksponencijalnu funkciju.

Navedimo još De Moivreovu formulu u Eulerovom zapisu kompleksnog broja:

$$z^n = (re^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi}.$$

Cauchyjev integralni teorem

Pretpostavljamo da je Cauchyjev teorem za holomorfne funkcije s vrijednostima u $\mathbb{C}$ poznata i iz njega ćemo izvesti isto i za funkcije s vrijednosti u Banachovom prostoru $\mathbb{E}$ nad $\mathbb{C}$.

Sljedeći teorem je ključan rezultat.

Teorem 1.1.1. *(Cauchyjev integralni teorem i formula) Neka je G jednostavno povezan i $f : G \to \mathbb{E}$ neprekidna funkcija. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *Funkcija f je slabo holomorfna na G.*

(b) *Funkcije f je holomorfna na G.*

(c) *Integral funkcije f po zatvorenoj krivulju u G iščezava.*

(d) *Za svaku pozitivno orijentiranu Jordanovu krivulju γ i svaki z u unutrašnjem području γ vrijedi*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\omega}{\omega - z} d\omega. \tag{1.1}$$

Sa $\mathbf{H}(G, \mathbb{E})$ označavat ćemo skup svih holomorfnih funkcija u G s vrijednostima u $\mathbb{E}$. Sljedeći teorem posljedica je Cauchyjevog integralnog teorema.

Teorem 1.1.2. *Svaka $f \in \boldsymbol{H}(G, \mathbb{E})$ je beskonačno puta diferencijabilna i vrijedi*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega, \; n \geq 0, \tag{1.2}$$

za γ i z kao u Cauchyjevom integralnom teoremu.

Holomorfno proširenje

Neka je $f \in \mathbf{H}(G, \mathbb{E})$ i neka je γ proizvoljna krivulja parametrizacije $z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, koja počinje iz točke $z_0 \in G$, ali završava u $z_1 \notin G$. Kažemo da se f može holomorfno proširiti na γ, ako postoji particija $0 = t_1 < t_1 < ... < t_m = 1$ i $\varepsilon > 0$ tako da $|z(t) - z(t_k)| < \varepsilon$ za $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $1 \leq k \leq m$, i da f, sukcesivnim proširivanjem njenog reda potencija oko točke $z(t_k)$, bude definirana unutar diska $D(z(t_k), \varepsilon)$. Tada je f holomorfna na svakom takvom disku, ali postoji mogućnost da nije holomorfna na njihovoj uniji, jer ako krivulja siječe samu sebe postoji mogućnost da nije jedinstveno definirana u sjecištu.

Teorem 1.1.3. ***(teorem monodromije)***
Neka je G proizvoljno područje, neka je $D = D(z_0, \rho) \subset G$, te neka je $f \in \boldsymbol{H}(d, \mathbb{E})$. Pretpostavimo još da se f može holomorfno proširiti na svaku krivulju γ koja počinje u točki z_0 i završava unutar G. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) *Neka su γ_0 i γ_1 dva homotopna puta koji počinju u z_0, a završavaju u z_1. Tada je vrijednost holomorfnog proširenja funkcije f jednaka za obje krivulje i iznosi $f(z_1)$.*

(b) *Ako je G jednostavno povezano područje, onda je $f \in \boldsymbol{H}(G, \mathbb{E})$.*

Phragmén- Lindelöfov princip

Postoje brojne verzije Phragmén- Lindelöfovog principa i sve su to zapravo posljedice principa maksimuma.

Teorem 1.1.4. ***(Princip maksimuma)***
Neka je područje $G \subseteq \mathbb{C}$ i neka postoje z_0 i $\rho > 0$ tako da je $D(z_0, \rho) \subseteq G$, te neka vrijedi

$$\|f(z)\| \leq \|f(z_0)\|, \; z \in D(z_0, \rho).$$

Tada je f konstanta.

Gornji rezultat možemo izreći i na sljedeći način: za proizvoljnu $f \in \mathbf{H}(G, \mathbb{E})$ sa svojstvom $f'(z) \neq 0$, funkcija $F(z) = \|f(z)\|$ nema lokalni maksimum na G. Navodimo važnu posljedicu prethodnog teorema:

Teorem 1.1.5. ***(Phragmén - Lindelöfov princip)***
Neka je $k > 0$ te $S = \{z : |z| < \rho_0, \alpha < arg z < \beta\}$, gdje je $\rho_0 > 0$, $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{k}$. Za $f \in \boldsymbol{H}(S, \mathbb{E})$ pretpostavimo da vrijedi $\|f(z)\| \leq c exp[K|z|^k]$ u S, gdje su $c, K > 0$ dovoljno veliki. Pretpostavimo još da je f neprekidna do ruba skupa S i ograničena konstantom C. Tada vrijedi

$$\|f(z)\| \leq C, \; z \in S.$$

1.2 Motivacijski primjeri

Pokažimo s nekoliko primjera primjene redova potencija.

Primjer 1.2.1. *Za diferencijalnu jednadžbu*

$$x'(z) = x(z), \tag{1.3}$$

egzaktno rješenje glasi $x(z) = e^z$*, a tada je red potencija dan s*

$$\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{1.4}$$

Primjer 1.2.2. *Neka diferencijalna jednadžba glasi*

$$x'(z) = x(z) \cdot th(z).$$

Njeno egzaktno rješenje je $x(z) = ch(z)$ *pa je pripadni red potencija*

$$\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Primjer 1.2.3. *Diferencijalna jednadžba*

$$(1 - z)x'(z) = x(z), \tag{1.5}$$

gdje je $z \in \mathbb{C}$ *takav da vrijedi* $|z| < 1$, *ima rješenje* $x(z) = \frac{1}{1-z}$ *pa je pripadni red potencija*

$$\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Primjer 1.2.4. *Diferencijalna jednadžba*

$$z^2 x'(z) = x(z) - z \tag{1.6}$$

ima rješenje u obliku reda potencija

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n+1}. \tag{1.7}$$

Možemo se lako uvjeriti da dano rješenje x zadovoljava ovu običnu diferencijalnu jednadžbu, ali nemamo garanciju da ćemo za svaku običnu diferencijalnu jednadžbu (ODJ) njeno rješenje moći izračunati eksplicitno, ali ćemo je i dalje moći prikazati u obliku reda potencija.

U jednostvnim slučajevima, rješenje možemo zapisati u obliku polinoma, pri čemu moramo odrediti stupanj polinoma m i $m + 1$ nepoznanica $p_0, p_1, ..., p_m$ pomoću linearnog sustava ODJ. Rješenje je tada dano sa

$$p(z) = \sum_{n=0}^{m} p_n z^n. \tag{1.8}$$

U većini slučajeva, za veliki m, nećemo moći eksplicitno odrediti koeficijente $p_0, p_1, ..., p_m$, ali ćemo možda biti u stanju utvrditi egzistenciju i/ili jedinstvenost polinomijalnih rješenja. U slučaju da rješenje nije polinomijalnog oblika, tražimo ga u obliku reda potencija:

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n, \tag{1.9}$$

s odgovarajućim izborom za točke z_0 i koeficijentima f_n koje treba odrediti.
Tu se javljaju novi problemi:

1) dobivamo sustav s beskonačno mnogo jednadžbi i s beskonačno mnogo nepoznanica.
2) kako odrediti radijus konvergencije reda potencija

Ponekad se prvi problem može riješiti rekurzijom, tj. relacijom kojom je f_{n+1} određeno pomoću $f_0, f_1, ..., f_n$. Tako se u prethodnom primjeru dobiva rekurzija

$$z_0 = 0, f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = n f_n, n \geq 1. \tag{1.10}$$

Unotač tome i dalje imamo problem s radijusom konvergencije koji ne mora biti nužno jednak nuli.

Primjer 1.2.5. *Za diferencijalnu jednadžbu*

$$x(z + 1) = (1 - az^{-2})x(z) \tag{1.11}$$

rješenje je dano sa:

$$x(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{-n}. \tag{1.12}$$

Koeficijente možemo jedinstveno odrediti iz rekurzije koja proizlazi iz naše jednadžbe. Oni rastu slično kao i $n!$, zbog čega je radijus konvergencije jednak nuli.

Primjer 1.2.6. *(Jednadžba provođenja)*
Promatramo jednadžbu provođenja

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, \cdot) = \varphi, \end{cases}$$

gdje je φ holomorfna funkcija na nekom području $G \subseteq \mathbb{C}$. Jedinstveno rješenje dano je s

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n, \tag{1.13}$$

gdje je $u_n(x) = \frac{\varphi^{(2n)}(x)}{n!}$, $n \geq 0$.

Ovo rješenje zapisano je u obliku reda potencija s varijablom t, a koeficijenti su holomorfne funkcije na području G koje ne ovisi o varijabli x. Koeficijenti $u_n(x)$, za fiksni x, ponašaju se slično kao $n!$ pa je radijus konvergencije jednak nuli. Cauchyjeva integralna formula pokazuje da koeficijenti rastu slično kao $n!$

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)}}d\xi.$$

Bavit ćemo se s dva različita vida redova potencija: Opća teorija o asimptotičkom proširenju redova potencija bavi se holomorfnim funkcijama u nekom sektoru S, koje su singularne na rubu te vrijedi

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0), \tag{1.14}$$

gdje je $z \in S$, z_0 je vrh S, odnosno govorimo o funkcijama koje su beskonačno puta diferencijabilne u z_0, ali nisu holomorfne u z_0.

Vrijednosti f_n mogu biti koeficijenti dobiveni razvojem funkcije f u Taylorov red, ali postoji mogućnost da taj red ne konvergira k funkciji f ili da uopće ne konvergira. Primjer za takav slučaj je funcija

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} \tag{1.15}$$

u desnoj poluravnini. Za funkciju $f(z)$ vrijedi $\lim_{z\to 0} f^{(n)}(z) = 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ pa prema tome Taylorov red $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$ ne može odrediti funkciju f, jer nije riječ o nul-funkciji.

Dakle, uvjerili smo se da nije nužno da red potencija određuje točno jednu funkciju. Ipak, moguće je u nekim slučajevima izračunati neku funkciju f iz reda potencija $\hat{f}$. Tada f rješava istu ODJ kao i $\hat{f}$ (to ćemo zvati teorija sumabilnost reda potencija).
Pokažimo na jednom jednostavnom primjeru kako možemo doći do funkcije f polazeći od nekog reda potencija $\hat{f}$.

Primjer 1.2.7. *Neka je*

$$\hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1.16}$$

te neka vrijedi $|f_n| \geq n!$, $n \geq 0$. Definirajmo $g_n = \frac{f_n}{n!}$ i

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n. \tag{1.17}$$

Uočimo da vrijedi $|g_n| \geq 1$, za $n \geq 0$ pa red $g(z)$ konvergira za $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$. Slijedi da je g holomorfna na krugu oko 0 radijusa 1. Definirajmo $f(z) = z^{-1}\int_0^{\infty} g(u)e^{-\frac{u}{z}}du$. Zamijenimo li g sa $\hat{g}$, dobivamo $\hat{f}$ zbog

$$z^{-1}\int_0^\infty \hat{g}(u)e^{-\frac{u}{z}}du = z^{-1}\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty g_n u^n e^{-\frac{u}{z}}du = z^{-1}\sum_{n=0}^\infty g_n \int_0^\infty u^n e^{-\frac{u}{z}}du =$$

$$= z^{-1}\sum_{n=0}^\infty \frac{f_n}{n!}z^{n+1}n! = \sum_{n=0}^\infty f_n z^n = \hat{f}, \tag{1.18}$$

što je posljedica tvrdnje da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\int_0^\infty u^n e^{-\frac{u}{z}}du = n!z^{n+1}. \tag{1.19}$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po n.

Baza: $n = 0$

$$\int_0^\infty ue^{-\frac{u}{z}}du = -ze^{-\frac{u}{z}}|_0^\infty = ze^0 = z. \tag{1.20}$$

Pretpostavka: neka vrijedi $\int_0^\infty u^k e^{-\frac{u}{z}}du = k!z^{k+1}$, za neki $k \in \mathbb{N}$

Korak:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u^{k+1}e^{-\frac{u}{z}}du &= u^{k+1}(-1)ze^{-\frac{u}{z}}|_0^\infty + \int_0^\infty (k+1)u^k ze^{-\frac{u}{z}}du \\ &= 0 - 0 + (k+1)z\int_0^\infty (k+1)u^k e^{-\frac{u}{z}}du \\ &= (k+1)zk!z^{k+1} = (k+1)!z^{k+2}.\end{aligned}$$

□

Javljaju se dva problema:

1) funkcija g je holomorfna na jediničnom krugu, ali može biti i nedefinirana izvan njega pa navedeni integral nema smisla

2) vrijednost funkcije g može brzo rasti na realnoj osi pa navedeni integral može divergirati.

Iz navedenog vidimo da moramo naći neki drugi način na koji ćemo izračunati sumu naših redova potencija. Proučit ćemo jedan od takvih procesa koji se zove multisumabilnost. Pomoću tog procesa radit ćemo općenito s redovima potencija koji zadovoljavaju neku običnu diferencijalnu jednadžbu.

Poglavlje 2

Asimptotski redovi potencija

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam asimptotičkog razvoja i pokazati njegova glavna svojstva. Najviše ćemo se baviti Gevreyevim asimptotama. Ograničavamo se na redove potencija s varijablom z, gdje ćemo u nekom području promatrati asimptotičko ponašanje funkcija, odnosno promatrat ćemo što se događa s funkcijom kad varijabla z teži k ishodištu.

Ako se razvije teorija za redove potencija, čiji su koeficijenti skalari, ona se automatski prenosi i na redove potencija čiji su koeficijenti matrice i gledamo na njih kao na matrice čiji su elementi skalarni redovi potencija. Razmatramo odgovarajući fiksirani Banachov prostor $\mathbb{E}$ nad poljem $\mathbb{C}$ i funkcije čije se vrijednosti nalaze u $\mathbb{E}$, tj. redove potencija čiji su koeficijenti u $\mathbb{E}$. U nekim rezultatima neće biti nužno da $\mathbb{E}$ bude Banachov prostor, npr. dovoljno će biti da imamo jednu ili više polunormi koje tvore tolopogiju (točnije, Fréchetov prostor). Ponekad će biti dovoljno i da je $\mathbb{E}$ samo vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.

U ovom radu pretpostavljamo da $\mathbb{E}$ označava Banachov prostor s normom $\|\cdot\|$, a najčešće ćemo razmatrati slučaj kada je $\mathbb{E} = \mathbb{C}$ i norma definirana kao modul kompleksnog broja $|\cdot|$.

2.1 Sektori i sektorska područja

Definirajmo sektore, zatvorene sektore i sektorska područja.

Definicija 2.1.1. *Sektor S je neprazan skup svih kompleksnih brojeva z tako da vrijedi*

$$S(d,\alpha,\rho) = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \rho, |d - argz| < \frac{\alpha}{2} \right\}, \tag{2.1}$$

gdje je $d \in \mathbb{R}$ smjer sektora, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ otvorenje sektora, a $\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ radijus sektora. U slučaju beskonačnog radijusa, kraće pišemo $S(d,\alpha) = S(d,\alpha,\infty)$.

Nećemo se baviti praznim sektorima niti sektorima beskonačnog otvorenja.

Definicija 2.1.2. *Zatvoreni sektor $\bar{S}(d,\alpha,\rho)$ je skup*

$$\bar{S}(d,\alpha,\rho) = \left\{ z : 0 < |z| < \rho, |d - argz| \leq \frac{\alpha}{2} \right\}, \tag{2.2}$$

gdje se d, α, ρ nazivaju jednako kao i kod definicije sektora.

Uočimo da iz danih definicija slijedi da ne postoji sektor niti zatvoreni sektor koji sadrži ishodište.

Definicija 2.1.3. *Sektorsko područje $G \subseteq \mathbb{C}$ je skup za koji vrijedi:*

Ako postoje realni brojevi d i $\alpha > 0$ takvi da je $G \subseteq S(d,\alpha)$ te za svaki β realni broj, $0 < \beta < \alpha$, možemo naći $\rho > 0$ tako da je $\bar{S}(d,\beta,\rho) \subseteq G$, tada d nazivamo smjer, a α otvorenje sektorskog područja G i pišemo

$$G(d,\alpha) = \left\{ z \in S(d,\alpha) : (\forall \beta \in (0,\alpha))(\exists \rho > 0) \quad \bar{S}(d,\beta,\rho) \subseteq G(d,\alpha) \right\}. \tag{2.3}$$

Sljedeći primjer pokazuje da smjer i otvorenje sektorskog područja ne određuju nužno jedinstveno sektorsko područje.

Primjer 2.1.1. *Neka je dan realni broj $argz_0$. Za taj broj možemo naći beskonačno mnogo kompleksnih brojeva čiji je argument jednak $argz_0$, ali se ti brojevi razlikuju po modulu. Ako uzmemo da je $d = argz_0$, a $\alpha = \pi$, svaki otvoren krug*

$$D(z_0,|z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z_0|\}$$

je sektorsko područje smjera $argz_0$ i otvorenja π.

Dokaz. Neka je $z \in D(z_0,|z_0|)$ proizvoljan. Tada je $|z - z_0| < |z_0|$ iz čega slijedi $|z| < 2|z_0|$. Dakle, dobili smo ograničenost i očito je zadovoljeno $|argz - argz_0| < \frac{\pi}{2}$, što povlači relaciju $D(z_0,|z_0|) \subseteq S(argz_0,\pi)$.
Neka je $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta < \pi$, proizvoljan i fiksan. Neka je $z \in \bar{S}(argz_0,\beta,2|z_0|)$. Tada vrijedi $|argz_0 - argz| \leq \frac{\beta}{2}$ te $|z| < 2|z_0|$, iz čega slijedi $|z - z_0| < |z_0|$, tj. $z \in K(z_0,|z_0|)$, odnosno $\bar{S}(argz_0,\beta,2|z_0|) \subseteq D(z_0,|z_0|)$. Time smo pokazali da je $D(z_0,|z_0|)$ sektorsko područje smjera $argz_0$ i otvorenja π. □

Pokažimo primjerima neka zanimljiva svojstva vezana uz sektorska područja.

Primjer 2.1.2. *Neka je $k > 0$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, te neka je G sektorsko područje smjera k i otvorenja α.*

Tada preslikavanje $z \mapsto az^k$ preslikava sektorsko područje u novo sektosko područje smjera $kd + arga$ i otvorenja $k\alpha$.

Dokaz. Po definiciji sektorskog područja $G(d,\alpha)$ $(\exists\alpha > 0)$ $(\exists d \in \mathbb{R})$ $\quad |d - argz| < \frac{\alpha}{2}$, te $(\forall\beta \in \langle 0,\alpha\rangle)$ $(\exists\rho > 0)$ $\quad \bar{S}(\alpha,\beta,\rho) \subseteq G(d,\alpha)$.
S obzirom da je $z = |z|e^{iargz}$, logaritmiranjem ove jednadžbe dobivamo

$$lnz = ln|z| + iargz \Rightarrow argz = \frac{ln\frac{z}{|z|}}{i}.$$

Promatramo

$$az^k = |a||z|^k e^{iarg(az^k)} \Rightarrow arg(az^k) = arga + kargz.$$

Provjerimo da je skup $\{az^k : z \in G(d,\alpha)\}$ također sektorsko područje:

$$|kd + arga - arg(az^k)| = |kd + arga - arga - kargz| =$$
$$= |kd - kargz| = k|d - argz| < \frac{k\alpha}{2}.$$

Time dobivamo $G(kd + arga, k\alpha) \subset S(kd + arga, k\alpha)$.
Neka je $\beta < \alpha$ proizvoljan i fiksiran. Za taj β postoji $\rho > 0$ tako da je $\bar{S}(d,\beta,\rho) \subseteq G(d,\alpha)$.
Moramo pokazati $\bar{S}(kd + arga, k\beta,\rho) \subseteq G(kd + arga, k\alpha)$.
Neka je $z \in \bar{S}(kd + arga, k\beta,\rho)$. Tada za $|z| \leq \rho$ vrijedi $|kd + arga - arg(az^k)| \leq \frac{k\beta}{2}$, iz čega dobivamo

$$\frac{k\beta}{2} \geq |kd + arga - arg(az^k)| = |kd + arga - arga - kargz| = k|d - argz|$$

što smo i trebali pokazati.
Dakle, $\bar{S}(kd + arga, k\beta,\rho) \subseteq G(kd + arga, k\alpha)$, pa vrijedi da je $G(kd + arga, k\alpha)$ sektorsko područje. □

Primjer 2.1.3. *Neka je $k > 0$, $c \geq 0$ te $\tau \in \mathbb{R}$. Pokazat ćemo da je skup*

$$G = \left\{z \in \mathbb{C} : k|\tau - argz| < \frac{\pi}{2}, cos[k(\tau - argz)] > c|z|^k\right\}$$

sektorsko područje smjera τ, otvorenja $\frac{\pi}{k}$.

Dokaz. Prvo promatramo slučaj $c > 0$.
Neka je $z \in G$. Tada vrijedi $k|\tau - argz| < \frac{\pi}{2}$, odnosno $|\tau - argz| < \frac{\pi}{2k}$. Dakle, $z \in S(\tau, \frac{\pi}{k})$ pa je $G \subseteq S(\tau, \frac{\pi}{k})$.
Neka je $\beta < \frac{\pi}{k}$ proizvoljan i fiksiran. Moramo naći $\rho > 0$ tako da vrijedi $\bar{S}(\tau,\beta,\rho) \subseteq G$.
Neka je $z \in \bar{S}(\tau,\beta,\rho)$. Tada vrijedi $|z| \leq \rho$ i $|\tau - argz| \leq \frac{\beta}{2}$.
Definirajmo $\rho = \sqrt[k]{\frac{cos[k(\tau - argz)]}{c}}$. Sada imamo $|\tau - argz| \leq \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2k}$, odnosno $k(\tau - argz) < \frac{\pi}{2}$.

Zbog $c|z|^k < cos[k(\tau - argz)]$ vrijedi

$$|z|^k < \frac{cos[k(\tau - argz)]}{c} \Rightarrow |z| < \sqrt[k]{\frac{cos[k(\tau - argz)]}{c}} = \rho.$$

Dakle, $|z| < \rho$, tj. $z \in G$ čime smo pokazali da je G sektorsko područje smjera τ i otvorenja $\frac{\pi}{k}$.
Neka je sada $c = 0$. Tada je

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} : k|\tau - argz| < \frac{\pi}{2}, cos[k(\tau - argz)] > 0^k = 0 \right\}.$$

S obzirom da vrijedi $k(\tau - argz) < \frac{\pi}{2}$, a funckija cos je padajuća funkcija na prvom kvadrantu, slijedi da je $cos[k(\tau - argz)] > cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Time smo pokazali da drugi uvjet odmah slijedi iz prvog, tj.

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} : k|\tau - argz| < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Pokažimo da je G sektorsko područje smjera τ i otvorenja $\frac{\pi}{k}$.

Neka je $z \in G$. Tada vrijedi $k|\tau - argz| < \frac{\pi}{2}$, tj. $|\tau - argz| < \frac{\pi}{2k}$ pa je $G \subseteq S(\tau, \frac{\pi}{k})$.
Uzmimo $\beta < \frac{\pi}{k}$ proizvoljan i pokažimo $\bar{S}(\tau, \beta, \rho) \subseteq G$. Zaista,

$$z \in \bar{S}(\tau, \beta, \rho) \Rightarrow |\tau - argz| \leq \beta < \frac{\pi}{k},$$

pa je $k|\tau - argz| < \frac{\pi}{2}$, tj. $z \in G$ odakle slijedi $\bar{S}(\tau, \beta, \rho) \subseteq G$.
Time smo pokazali da je G sektorsko područje smjera τ i otvorenja $\frac{\pi}{k}$. □

2.2 Funkcije u sektorskim područjima

Razmotrit ćemo holomorfne funkcije na odgovarajućem sektorskom području G. Skup svih holomorfnih funkcija na G s vrijednostima u nekom Banachovom prostoru $\mathbb{E}$ označavat ćemo s $H(G, \mathbb{E})$.

Definicija 2.2.1. *Kažemo da je funkcija $f : G \to \mathbb{E}$ omeđena u ishodištu ako vrijedi da za svaki zatvoren podsektor $\bar{S}$ sektorskog područja G postoji pozitivna realna konstanta c, koja ovisi o $\bar{S}$, tako da vrijedi $\|f(z)\| \leq c$, $z \in \bar{S}$.*

Definicija 2.2.2. *Kažemo da je funkcija f neprekidna u ishodištu ako vrijedi da za svaki $\bar{S} \subseteq G$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\rho > 0$ tako da vrijedi $\|f(z) - f(0)\| \leq \varepsilon$, za svaki $z \in \bar{S}$ tako da je $|z| < \rho$.*

Neprekidnost funkcije u ishodištu osigurava egzistenciju limesa u smislu da kompleksan broj z teži k ishodištu preko neke krivulje koja se cijela nalazi u odgovarajućem podsektoru $\bar{S}$.

Definicija 2.2.3. *Kažemo da je funkcija f holomorfna u ishodištu ako je f holomorfno neprekidna u sektoru $S \subset G$ otvorenja većeg od 2π, te ako je f omeđena u ishodištu.*

Definicija 2.2.4. *Kažemo da je funkcija f diferencijabilna u ishodištu ako je kvocijent $\frac{f(z)-f(0)}{z}$ neprekidna funkcija, te vrijednost $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$ označavamo s $f'(0)$ i nazivamo derivacijom u ishodištu funkcije f.*

Očito je da diferencijabilnost funkcije u ishodištu povlači njenu neprekidnost u ishodištu.

Definicija 2.2.5. *Kažemo da je funkcija f n-puta diferencijabilna u ishodištu ako je njezina $(n-1)$ derivacija, u oznaci $f^{(n-1)}(z)$, diferencijabilna u ishodištu.*

Definicija 2.2.6. *Neka je $S(d,\alpha)$ sektor i neka je funkcija f holomorfna u S. Kažemo da je funkcija f eksponencijalnog rasta najviše k u S ako postoji $k>0$ tako da za svaki ϕ, za koji vrijedi $|d-\phi|<\frac{\alpha}{2}$, postoje $\rho, c_1, c_2 > 0$ tako da za svaki z, $|z|\geq\rho$, $|d-arg z|\leq\rho$, vrijedi $\|f(z)\|\leq c_1 e^{c_2|z|^k}$. Skup svih holomorfnih funkcija eksponencijalnog rasta najviše k u S, a koje su neprekidne u ishodištu, označavat ćemo s $A^{(k)}(S,\mathbb{E})$.*

Definicija 2.2.7. *Kažemo da je funkcija f eksponencijalnog rasta ne većeg od k u smjeru d, ako za neki $\varepsilon>0$ vrijedi $f\in A^{(k)}(S(d,\varepsilon),\mathbb{E})$.*

Primjer 2.2.1. *Neka je G sektorsko područje, neka je f analitička u G i neka je f' neprekidna u ishodištu. Označimo $f'(0)=\lim_{z\to 0} f'(z)$. Pokazat ćemo da je tada f diferencijabilna u ishodištu, te da je $f'(0)$ jednak njenoj derivaciji u ishodištu.*

Dokaz. Trebamo pokazati da je funkcija $\frac{f(z)-f(0)}{z}$ neprekidna u ishodištu, tj. da za proizvoljan $\varepsilon>0$, postoji $\rho>0$ tako da vrijedi $\|\frac{f(z)-f(0)}{z}\|\leq\varepsilon$ za $|z|<\rho$.
Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan i fiksan. S obzirom da je f analitička u G, za $\frac{\varepsilon}{2}>0$ postoji $\rho>0$ tako da je $|f'(z)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ za $|z|<\rho$.

Kako je f' neprekidna u ishodištu, vrijedi $f'(0)=\lim_{z\to 0} f'(0)$, tj. za $\frac{\varepsilon}{2}>0$ postoji $\rho>0$ tako da je $\|f'(z)-f'(0)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ za $|z|<\rho$.
Iz definicije imamo $f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$, pa zbog svojstava norme vrijedi $\|f'(0)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\|f'(z)\|$, odnosno $\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ za $|z|<\rho$.
Dakle, f je diferencijabilna u ishodištu. Također, vrijedi $f'(0)=\lim_{z\to 0} f'(z)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$, pa je $f'(0)$ jednako derivaciji od f u ishodištu. □

Primjer 2.2.2. *Neka je G sektorsko područje, neka je funkcija f analitička na G i diferencijabilna u ishodištu. Pokažimo da je f' neprekidna u ishodištu.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i fiksan. Budući da je f analitička na G, za $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ postoji ρ tako da vrijedi $\|f'(z)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ za $|z| < \rho$.
Kako je f diferencijabilna u ishodištu, po definiciji je $\frac{f(z)-f(0)}{z}$ neprekidna u ishodištu, pa za $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ postoji $\rho > 0$ tako da je $\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ za $|z| < \rho$.
Za $|z| < \rho$ po pravilu trokuta za normu slijedi

$$\|f'(z) - f'(0)\| \leq \|f'(z)\| + \|f'(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{za } |z| < \rho.$$

Dakle, f' je neprekidna u ishodištu, jer je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan. □

2.3 Formalni redovi potencija

Definicija 2.3.1. *Neka je (f_n) niz u Banachovom prostoru $\mathbb{E}$.
Red $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ nazivamo formalnim redom potencija (u z), u smislu da nemamo nikakve uvjete na elemente f_n, te radijus konvergencije može biti jednak nuli. Skup svih takvih redova označavat ćemo s $\mathbb{E}[[z]]$.*

Definicija 2.3.2. *Kažemo da $\hat{f}$ konvergira ako postoji $\rho > 0$ tako da red potencija konvergira za svaki z za koji je $|z| < \rho$ te time definira holomorfnu funkciju f na krugu oko ishodišta radijusa ρ, u oznaci $D(0, \rho)$, koju nazivamo sumom reda $\hat{f}$ i pišemo $f = S\hat{f}$. Skup svih konvergentnih redova potencija označavat ćemo s $\mathbb{E}\{z\}$.*

Definicija 2.3.3. *Kažemo da je $\hat{f}$ red potencija Gevreyevog reda s, ako postoje pozitivne konstante $c, K, s \geq 0$ tako da vrijedi $\|f_n\| \leq cK^n\Gamma(1 + sn)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Skup svih redova potencija Gevreyevog reda s označavat ćemo s $\mathbb{E}[[z]]_s$.*

U prethodnoj definiciji $\Gamma(z)$ označava gama funkciju, definiranu sa $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, gdje je z kompleksan broj čiji je realni dio pozitivan.

Primjer 2.3.1. *Pokažimo da vrijedi jednakost $\mathbb{E}[[z]]_0 = \mathbb{E}\{z\}$, odnosno da red potencija konvergira ako i samo ako je Gevreyevog reda nula.*

Dokaz. Neka je $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$, $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]_0$. Iz definicije postoje $c > 0$ i $K > 0$ tako da je $\|f_n\| \leq cK^n\Gamma(1) = cK^n$.
Definirajmo $\rho = \frac{1}{2K}$. Tada vrijedi

$$\|\hat{f}(z)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} cK^n\rho^n = c\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

a ovo je geometrijski red koji konvergira. Dakle, $\hat{f}(z) \in \mathbb{E}\{z\}$.

Obratno, neka $\hat{f}$ konvergira. Tada po definiciji postoji $\rho > 0$ tako da $\hat{f}(z)$ konvergira, za svaki z manji od ρ. Kako red potencija $\hat{f}$ konvergira, tada su svi elementi niza omeđene funkcije, tj. $(\exists M > 0)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall z \in G)$ $\|f_n z^n\| \leq M$. Vrijedi $\|f_n\|\,\|z\|^n \leq M$ pa je $\|f_n\|\rho^n \leq M$, tj. $\|f_n\| \leq \frac{1}{\rho^n}M$. Ako stavimo $c = M$ i $K = \frac{1}{\rho}$, dobivamo da vrijedi $\|f_n\| \leq cK^n$, za svaki prirodan broj n, uključujući i nulu.
Time smo pokazali $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]_0$. □

2.4 Asimptotičke jednakosti

Neka je dana holomorfna funkcija f u sektorskom području G te neka je dan formalni red potencija $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$.

Definicija 2.4.1. *Kažemo da je funkcija $f(z)$ asimptotički jednaka redu potencija $\hat{f}(z)$ ako vrijedi da je ostatak omeđena funkcija u ishodištu, za svaki $N > 0$, gdje se ostatak označava sa rf(z, N), a definiran je na sljedeći način:*

$$rf(z,N) = z^{-N}\left(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\right). \tag{2.4}$$

Asimptotičku jednakost označavamo s $f(z) \cong \hat{f}(z)$ u G.

Propozicija 2.4.2. *Neka je G odgovarajuće sektorsko područje i neka je f holomorfna na G. Neka vrijedi $f(z) \cong \hat{f}(z)$ u G. Tada su svi ostaci $rf(z,N)$ neprekidne funkcije u ishodištu i vrijedi*

$$rf(z,N) \to f_N,$$

za $z \in G$, $z \to 0$, $N \geq 0$.

Dokaz. Pokažimo prvo matematičkom indukcijom da vrijedi

$$zrf(z,N+1) = rf(z,N) - f_N,$$

za svaki $N \geq 0$ i svaki $z \in G$.

baza: $N = 0$

$$zrf(z,1) = zz^{-1}(f(z) - f_0 z^0) = f(z) - f_0 = rf(z,0) - f_0.$$

pretpostavka: neka vrijedi $zrf(z,N) = rf(z,N-1) - f_{N-1}$, za neki $N \in \mathbb{N}_0$.
korak:

$$zrf(z,N+1) = zz^{-N-1}\left(f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n z^n\right) = z^{-N}\left(f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n - f_N z^N\right) = \tag{2.5}$$

$$z^{-N}\left(f(z)-\sum_{n=0}^{N-1} f_n z^n\right)-z^{-N} f_N z^N = rf(z,N)-f_N \tag{2.6}$$

Time smo dokazali pomoćnu tvrdnju.

Zbog asimptotičke jednakosti za $z \in G$, $z \to 0$ i $N \geq 0$ vrijedi sljedeće

$$(\exists c > 0)\|rf(z,N)\| \leq c.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i fiksan. Definiramo $\rho = \frac{\varepsilon}{c}$. Za $|z| < \rho$ vrijedi

$$\|rf(z,N)-f_N\| = \|zrf(z,N+1)\| \leq \|z\|c \leq \rho c = \varepsilon. \tag{2.7}$$

Dakle, $rf(z,N)$ je neprekidna u ishodištu za $N \geq 0$ i vrijedi $\lim_{z\to 0} rf(z,N) = f_N$, za $N \geq 0$, $z \in G$. □

Sljedeća propozicija bit će često korištena u poglavljima koja slijede.

Propozicija 2.4.3. *Neka je f holomorfna funkcija u sektorskom području G. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

i) $f(z) \cong \hat{f}(z)$;

ii) f je beskonačno puta diferencijabilna u ishodištu i vrijedi $f^{(n)}(0) = n!f_n$, za $n \geq 0$;

iii) $f^{(n)}$ je neprekidna u ishodištu te vrijedi $f^{(n)}(z) \to n!f_n$, za $z \to 0$, $n \geq 0$.

U daljnjem radu veliki značaj imat će holomorfne funkcije na G koje su asimptotički jednake redu potencija. Skup svih takvih funkcija označavat ćemo s $A(G,\mathbb{E})$.

Definicija 2.4.4. *Neka je $J : A(G,\mathbb{E}) \to \mathbb{E}[[z]]$ preslikavanje definirano sa $Jf = \hat{f}$, tj. J preslikava holomorfnu funkciju f u red potencija $\hat{f}$ s kojim je asimptotički jednaka.*

Iz (2.4.2) vidimo da svaka funkcija $f \in A(G,\mathbb{E})$ ima točno jednu $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ tako da vrijedi $f(z) \cong \hat{f}(z)$. To znači da je J surjekcija, a uskoro ćemo pokazati i da je J homomorfizam.

Teorem 2.4.5. *Neka je G sektorsko područje, te neka su $f_1, f_2 \in A(G,\mathbb{E})$. Tada vrijedi $f_1 + f_2 \in A(G,\mathbb{E})$ i $J(f_1+f_2) = J(f_1) + J(f_2)$.*

Dokaz. Budući da su $f_1, f_2 \in A(G,\mathbb{E})$, tada postoje $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in \mathbb{E}[[z]]$ za koje vrijedi $Jf_1 = \hat{f}_1$ i $Jf_2 = \hat{f}_2$.

Neka je

$\hat{f}_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ i $\hat{f}_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$

Prema (2.4.2) vrijedi $f_n = \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!}$, $g_n = \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!}$ za $n \geq 0$. Definirajmo $h_n = f_n + g_n$. Tada je

$$h_n = \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(f_1+f_2)^{(n)}(0)}{n!}, n \geq 0$$

iz čega slijedi

$$J(f_1 + f_2) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = J(f_1) + J(f_2).$$

□

Korolar 2.4.6. *Neka je $\mathbb{E}$ Banachova algebra, te neka su $f_1, f_2 \in A(G, \mathbb{E})$. Tada su $f_1, f_2 \in A(G, \mathbb{E})$ i vrijedi $J(f_1 f_2) = J(f_1)J(f_2)$.*

Navodimo Rittov teorem [1] koji nam daje surjektivnost preslikavanja J.

Teorem 2.4.7. *Za proizvoljno područje G i proizvoljan $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ postoji $f \in A(G, \mathbb{E})$ tako da vrijedi $f(z) \cong \hat{f}(z)$ na G.*

Dakle, preslikavanje J je surjektivni homomorfizam, ali J nije injekcija.

Primjer 2.4.1. *Neka je $G = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x > 0\}$. Pokažimo da je funkcija $f(z) = e^{-\frac{1}{z}} \cong \hat{0}$, gdje $\hat{0}$ označava red potencija čiji su svi koeficijenti jednaki nulama.*

Dokaz. U desnoj poluravnini za funkciju $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ vrijedi $\lim_{z \to 0} f^{(n)}(z) = 0$ za $n \geq 0$ te po (2.4.3) vrijedi $\lim_{z \to 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = f_n, n \geq 0$. To povlači da je $f_n = 0$, za $n \geq 0$, tj. $e^{-\frac{1}{z}} \cong \hat{0}$. □

Iz ovog je primjera vidljivo da J nije injekcija jer za $\hat{f}(z) = \hat{0} \in \mathbb{E}[[z]]$ postoje dvije različite holomorfne funkcije koje J preslikava u $\hat{f}$: $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ i $g(z) = 0$, za $z \in G = \{z : z = x + iy, x > 0\}$.

2.5 Gevreyeve asimptote

Neka je dan realni broj $s > 0$, G sektorsko područje, te $f \in H(G, \mathbb{E})$.

Definicija 2.5.1. *Kažemo da je f asimptotički jednaka redu potencija $\hat{f}$ ili ekvivalentno da je $\hat{f}$ asimptotički razvoj f, Gevreyevog reda s, ako za svaki zatvoreni podsektor $\bar{S}$ sektorskog područja G postoje $c, K > 0$ tako da za svaki $N \geq 0$ i za svaki $z \in \bar{S}$ vrijedi*

$$\|rf(z, N)\| \leq cK^N \Gamma(1 + sN), \tag{2.8}$$

i tada pišemo $f(z) \cong_s \hat{f(z)}$.

Primjer 2.5.1. *Pokažimo sljedeću tvrdnju:*

$$f(z) \cong_s \hat{f}(z) \Rightarrow f(z) \cong \hat{f}(z). \tag{2.9}$$

Dokaz. Neka vrijedi $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$. Iz definicije znamo da tada postoje $c, K > 0$ tako da $\|rf(z,N)\| \leq cK^N\Gamma(1+sN)$, za $N \geq 0$ i $z \in \bar{S}$
Definirajmo $C = cK^N\Gamma(1+sN)$. Uočimo da C ovisi o N. Dakle, postoji $C > 0$, $C = C(N, \bar{S})$ tako da vrijedi $\|rf()z,N)\| \leq C$. Time smo dobili omeđenost u ishodištu $rf(z,N)$, za $N \geq 0$ pa vrijedi $f(z) \cong \hat{f}(z)$, što smo i trebali dokazati. □

Propozicija 2.5.2. *Neka je G sektorsko područje, f holomorfna na G te $s \geq 0$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
i) $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$
ii) sve derivacije $f^{(n)}(z)$ su neprekidne u ishodištu i za svaki zatvoren podsektor $\bar{S}$ u G postoje konstante $c, K > 0$ tako da vrijedi

$$\frac{1}{n!}\sup_{z\in\bar{S}}\|f^{(n)}(z)\| \leq cK^n\Gamma(1+sn), n \geq 0. \tag{2.10}$$

Skup svih holomorfnih funkcija u G koje imaju asimptotički razvoj Gevreyevog reda s označavamo sa $A_s(G,\mathbb{E})$. Analogno kao u prethodnoj cjelini, definiramo $J : A_s(G,\mathbb{E}) \to E[[z]]_s$ definirano sa $f \mapsto Jf = \hat{f}$, kada vrijedi $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$.

Sljedeći teorem i korolar pokazat će da je J homomorfizam.

Teorem 2.5.3. *Neka je G sektorsko područje i neka je $s \geq 0$, te neka su $f_1, f_2 \in A_s(G,\mathbb{E})$. Tada je $f_1 + f_2 \in A_s(G,\mathbb{E})$ i $J(f_1+f_2) = J(f_1) + J(f_2)$.*

Dokaz. Neka su $f_1, f_2 \in A_s(G,\mathbb{E})$. To znači da postoje $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in \mathbb{E}[[z]]_s$ takvi da je $f_1(z) \cong \hat{f}_1(z)$ i $f_2(z) \cong_s \hat{f}_2(z)$. Dakle, postoje $c_1, c_2, K_1, K_2 > 0$ takvi da vrijedi:

$$\|rf_1(z,N)\| \leq c_1K_1^N\Gamma(1+sN)$$

i

$$\|rf_2(z,N)\| \leq c_2K_2^N\Gamma(1+sN),$$

za $N \geq 0$ i $z \in G$.

Neka je $f = f_1 + f_2$. Prema (2.5.2) za $n \geq 0$ vrijedi

$$\frac{1}{n!}\sup_{z\in\bar{S}}\|f_1^{(n)}(z)\| \leq c_1K_1^n\Gamma(1+sn)$$

i

$$\frac{1}{n!}\sup_{z\in\bar{S}}\|f_2^{(n)}(z)\| \leq c_2K_2^n\Gamma(1+sn).$$

Za funkciju f tada vrijedi

$$\frac{1}{n!}\sup_{z\in\bar{S}}\|f^{(n)}(z)\| = \frac{1}{n!}\sup_{z\in\bar{S}}\|f_1^{(n)} + f_2^{(n)}\| \leq \frac{1}{n!}\sup_{z\in\bar{S}}\|f_1^{(n)}(z)\| + \frac{1}{n!}\sup_{z\in\bar{S}}\|f_2^{(n)}(z)\|$$

$$\begin{aligned} &\leq c_1 K_1^n \Gamma(1+sn) + c_2 K_2^n \Gamma(1+sn) \\ &\leq (c_1+c_2)(K_1+K_2)^n \Gamma(1+sn), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Definiramo $c = c_1 + c_2$ i $K = K_1 + K_2$. Dobivamo da vrijedi

$$\frac{1}{n!} \sup_{z \in \bar{S}} \|f^{(n)}(z)\| \leq cK^n \Gamma(1+sn), n \geq 0,$$

i time smo pokazali da je $f_1 + f_2 = f \in A_s(G, \mathbb{E})$. Također, vrijedi

$$\hat{f}_1 + \hat{f}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) z^n = J(f) = J(f_1 + f_2).$$

Dakle, $f_1 + f_2 \in A_s(G; \mathbb{E})$ i $J(f_1 + f_2) = J(f_1) + J(f_2)$. □

Korolar 2.5.4. *Neka su $f_1, f_2 \in A_s(G, \mathbb{E})$. Tada je $f_1 f_2 \in A_s(G, \mathbb{E})$ i $J(f_1 f_2) = J(f_1) J(f_2)$.*

Propozicija 2.5.5. *(Rittov teorem za Gevreyeve asimptote)*
Za dano $s \geq 0$, neka je $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_s$, i neka je dano sektorsko područje G otvorenja najviše $s\pi$. Tada postoji holomorfna funkcija f u G tako da vrijedi $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$ u G.

Ova propozicija nam daje da je preslikavanje $J : A_s(G, \mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{E}[[z]]_s$ surjektivno ako je otvorenje od G manje ili jednako $s\pi$.

U prethodnoj cjelini smo pokazali da je J surjektivan homomorfizam, ali da nije injekcija. U slučaju Gevreyevih asimptota pokazali smo da je J također surjektivan homomorfizam, a sad ćemo spomenuti Watsonovu lemu [1], koja će nam osigurati i injektivnost preslikavanja J, ali samo u određenim uvjetima.

Propozicija 2.5.6. *(Watsonova lema)*
Neka je G sektorsko područje otvorenja većeg od $s\pi$, za $s > 0$, te neka je $f \in H(G, \mathbb{E})$ i neka je $f(z) \cong_s \hat{0}$. Tada je f identički jednaka nuli na G, odnosno vrijedi $f \equiv 0$ na G.

Definicija 2.5.7. *Neka je G dano sektorsko područje. Za potprostor B od $A(G, \mathbb{E})$ kažemo da je asimptotički prostor ako je preslikavanje $J\colon B \longrightarrow \mathbb{E}[[z]]_s$ injektivno.*

Dakle, primjer asimptotičkog prostora je prostor $A_s(G, \mathbb{E})$ u slučaju da je otvorenje od G veće od $s\pi$.

Ovaj rezultat će nam biti jako važan u poglavljima koja slijede. Za dani običan red potencija $\hat{f}(z)$ i dano sektorsko područje G, otvorenja većeg od $s\pi$, ako postoji holomorfna funkcija f na G za koju vrijedi $f(z) \cong_s \hat{f}(z)$, tada znamo da je f jedinstvena, i moći ćemo f na neki način smatrati sumom reda $\hat{f}$.

Poglavlje 3

Integralni operatori

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s integralnim operatorima koji će nam biti važni nešto kasnije u radu. Najjednostavniji će biti Laplaceov operator. Koristit ćemo ih za definiranje nekih od metoda sumabilnosti, metoda momenta. Unatoč činjenici da su gotovo sve ove metode ekvivalentne, raspolaganje sa više metoda daje fleksibilnost, kao i teorijska saznanja o svojstvima potrebnim za određene metode.

Laplaceov i Borelov operator koriste se u nekoliko područja matematike, a nama će biti potrebni u teoriji multisumabilnosti. Koristit ćemo ih samo za funkcije koje su holomorfne u sektorskom području i neprekidne u ishodištu.

3.1 Laplaceov operator

Neka je S sektor beskonačnog radijusa i $f \in A^{(k)}(S, \mathbb{E})$. Za τ za koji vrijedi $|d - \tau| < \dfrac{\alpha}{2}$, integral $\int_0^{\infty(\tau)} f(u) exp[-\left(\frac{u}{z}\right)^k] du^k$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno u otvorenom skupu $cos(k[\tau - argz]) > c|z|^k$, ako je c dovoljno velik (ovisno o f i τ). Na sektorskom području $G = G(\tau, \frac{\pi}{k})$ otvorenja $\frac{\pi}{k}$ i smjera τ funkcija

$$g(z) = z^{-k} \int_0^{\infty(\tau)} f(u) exp[-\left(\frac{u}{z}\right)^k] du^k \tag{3.1}$$

je holomorfna. Kažemo da je $g = \mathcal{L}_k f$ i $\mathcal{L}_k$ nazivamo Laplaceov operator reda k. Također, ponekad kažemo da je $g = \mathcal{L}_k f$ Laplaceova transformacija reda k od f.

Uočimo da je $g(z^{\frac{1}{k}})$ Laplaceova transformacija reda 1 za $f(u^{\frac{1}{k}})$ u određenom sektorskom području. Definirajmo preslikavanje s_α, za $\alpha > 0$, sa $(s_\alpha f)(z) = f(z^\alpha)$. Posljednju činjenicu možemo zapisati i općenitije:

$$\mathcal{L}_{\alpha k} \circ s_\alpha = s_\alpha \circ \mathcal{L}_k, \tag{3.2}$$

za svaki $k > 0$.

Ispred integralne reprezentacije $g(z)$ javlja se faktor z^{-k}, jer želimo da Laplaceova transformacija potencije u^λ bude jednaka $\Gamma(1 + \frac{\lambda}{k})z^\lambda$.
Sljedeći teorem povezuje Laplaceove operatore sa Gevreyevim asimptotama.

Teorem 3.1.1. *Neka je $f \in A^{(k)}(S, \mathbb{E})$, za $k > 0$ i sektor S, te neka je $g = \mathcal{L}_k f$ Laplaceova transformacija reda k, definirana u odgovarajućem sektorskom području $G = G(d, \alpha + \frac{\pi}{k})$. Za $s_1 > 0$, pretpostavimo da vrijedi $f(z) \cong_{s_1} \hat{f}(z)$ u S. Uzmimo $s_2 = \frac{1}{k} + s_1$ i neka je $\hat{g} = \hat{\mathcal{L}}_k \hat{f}$. Tada u G vrijedi*

$$g(z) \cong_{s_2} \hat{g}(z).$$

Neka je $A^{(k)}_{s_1}(S, \mathbb{E}) = A^{(k)}(S, \mathbb{E}) \cap A_{s_1}(S, \mathbb{E})$. Prethodni teorem kaže da $\mathcal{L}_k$ preslikava $A^{(k)}_{s_1}(S, \mathbb{E})$ na $A_{s_2}(S, \mathbb{E})$ i vrijedi $J \circ \mathcal{L}_k = \hat{\mathcal{L}}_k \circ J$.

3.2 Borelov operator

Neka je $\gamma_k(\tau)$ krivulja negativne orijentacije koja čini rub sektora smjera τ, konačnog radijusa i otvorenja većeg od $\frac{\pi}{2k}$.

Neka je $G = G(d, \alpha)$ sektorsko područje otvorenja $\alpha > \frac{\pi}{k}$. Tada za svaki τ sa svojstvom $|\tau - d| < (\alpha - \frac{\pi}{k})/2$ možemo odabrati ε i r tako da $\gamma_k(\tau)$ bude u području G. Ako je $f(z)$ holomorfna u G i ograničena u ishodištu, možemo definirati Borelovu transformaciju od f reda k integralom

$$(\mathcal{B}_k f)(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(\tau)} z^k f(z) exp[\left(\frac{u}{z}\right)^k] dz^{-k}, \tag{3.3}$$

za $u \in S(\tau, \frac{\varepsilon}{k})$. Uočimo da za ovakve u eksponencijalna funkcija pod integralom pada na dijelovima krivulje, pa integral konvergira apsolutno i lokalno uniformno te reprezentira holomorfnu funkciju u varijabli u. Integralni operator $\mathcal{B}_k$ definiran kao gore nazivamo još i Borelov operator reda k.

Po Cauchyjevom teoremu možemo zaključiti da $\mathcal{B}_k f$ ne ovisi o ε i r, dok promjena τ daje holomorfno proširenje $\mathcal{B}_k f$. Zbog toga možemo zaključiti da $\mathcal{B}_k f$ ne ovisi niti o τ, pa je stoga i holomorfna na sektoru $S(d, \alpha - \frac{\pi}{k})$. Slično kao i kod Laplaceovog operatora, vrijedi

$$s_\alpha \circ \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{\alpha k} \circ s_\alpha,$$

za $k, \alpha > 0$.

Borelov operator kao formalni red potencija jednak je

$$(\hat{\mathcal{B}}_k \hat{f})(z) = \sum_0^\infty \frac{f_n z^n}{\Gamma(1 + n/k)},$$

gdje je $\hat{\mathcal{B}}_k$ formalni Borelov operator.

Također, kao i za Laplaceov operator, Borelov operator se "dobro" ponaša u odnosu na Gevreyeve asimptote:

Teorem 3.2.1. *Neka je G sektorsko područje, neka je f holomorfna na G te pretpostavljamo da za $s_1 \geq 0$ vrijedi $f(z) \cong_{s_1} \hat{f}(z)$ na G. Neka je $k > 0$ tako da vrijedi $\alpha > \frac{\pi}{k}$. Tada je $\mathcal{B}_k$ definiran i holomorfan na $S(d, \alpha + \frac{\pi}{k})$. Definiramo $s_2 = s_1 - k^{-1}$ ako je $\frac{1}{s_1} < k$, inače $s_2 = 0$. Tada na S vrijedi*

$$(\mathcal{B}_k f)(u) \cong_{s_2} (\hat{\mathcal{B}}_k \hat{f})(u).$$

Prethodni teorem za slučaj $\frac{1}{s_1} \geq k$ kaže da je tada $\mathcal{B}_k f$ holomorfna u ishodištu, a $\hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}$ razvoj u red potencija.

Neka su $G(d, \alpha)$, f, k i τ kao u definiciji Borelovog operatora, te neka je $c > 0$ dovoljno velik. Krivulja β_y, parametrizirana sa $z(t) = e^{i\pi}(c + it)^{-1/k}$, gdje je $-y \leq t \leq y$, sadržana je u G za proizvoljni $y > 0$. Koristeći Cauchyjev integralni teorem, za $\arg u = \tau$, dobivamo

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_y} z^k f(z) exp\left(\frac{u}{z}\right)^k dz^{-k} = (\mathcal{B}_k f)(u). \tag{3.4}$$

Za kraj, može se dokazati da je Borelov operator inverz Laplaceovog operatora.

3.3 Opći integralni operatori

Promotrit ćemo neka poopćenja Laplaceovog i Borelovog operatora. Definirat ćemo parove integralnih operatora, tako da je jedan inverz drugome na odgovarajućem području, pri čemu će svaki par imati posebni redoslijed momenata.

Za početak, definirajmo parove funkcija koji će činiti jezgre operatora.

Definicija 3.3.1. *Par kompleksnih funkcija e i E zovemo jezgre funkcija ako postoji $k > \frac{1}{2}$ tako da vrijedi:*

- *Funkcija e je holomorfna na $S_+ = S(0, \frac{\pi}{k})$ i $z^{-1}e(z)$ je integrabilna u ishodištu (integral $\int_0^{x_0} x^{-1}|e(xe^{i\tau})|dx$ postoji za $x_0 > 0$ i $2k|\tau| < \pi$). Nadalje, za svaki $\varepsilon > 0$ postoje konstante c, $K > 0$ tako da vrijedi*

$$|e(z)| \leq c exp[-\left(\frac{|z|}{K}\right)^k], \quad 2k|\arg z| \leq \pi - \varepsilon.$$

- *Za pozitivni realni $z = x$, $e(x)$ je pozitivan realan broj.*
- *Funkcija E ima najviše eksponencijalni rast k. Nadalje, u $S_- = S(\pi, \pi(2 - \frac{1}{k}))$ funkcija $z^{-1}E(1/z)$ je integrabilna u ishodištu kao što je navedeno gore.*

- *Funkcije e i E su povezane uvjetom momenta, tj. definiramo funkciju momenta za jezgru e sa*

$$m(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e(x)dx, \quad Reu \geq 0. \tag{3.5}$$

Red potencija $E(z)$ je tada jednak

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m(n)}. \tag{3.6}$$

Broj k često nazivamo red para funkcija jezgri $e(z)$, $E(z)$.

Pomoću parova funkcija jezgri možemo definirati parove integralnih operatora kao što slijedi.

Neka je S sektor beskonačnog radijusa i neka je $f \in A^{(k)}(S, \mathbb{E})$. Tada za $|d - \tau| < \frac{\alpha}{2}$ integral

$$(Tf)(z) = \int_0^{\infty(\tau)} e\left(\frac{u}{z}\right) f(u) \frac{du}{u} \tag{3.7}$$

konvergira apsolutno i lokalno uniformno za dovoljno veliki $c > 0$. Mijenjanjem τ dobivamo holomorfno proširenje Tf. Dakle, možemo zaključiti da je Tf holomorfan u sektorskom području G.

U slučaju sektorskog područja G otvorenja većeg od $\frac{\pi}{k}$ te $f \in H(G, \mathbb{E})$ neprekidne u ishodištu, definiramo operator $T^- f$

$$(T^- f)(u) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_k(\tau)} E\left(\frac{u}{z}\right) f(z) \frac{dz}{z}, \tag{3.8}$$

pri čemu je $\gamma_k(\tau)$ kao kod Borelovog operatora. $T^- f$ je holomorfan i eksponencijalnog rasta najviše k u $S(d, \alpha - \frac{\pi}{k})$.

Za $e(z) = kz^k exp(-z^k)$ integralni operatori se podudaraju s Laplaceovim i Borelovim operatorom.

3.4 Jezgre malog reda

U prethodnom dijelu ograničili smo se na jezgre reda $k > \frac{1}{2}$. Sada ćemo poopćiti zaključke za manje k.

Definicija 3.4.1. *Kompleksna funkcija $e(z)$ naziva se funkcija jezgre reda $k > 0$ ako možemo naći par funkcija jezgri $\tilde{e}(z)$, $\tilde{E}(z)$ reda $\tilde{k} > \frac{1}{2}$ tako da vrijedi*

$$e(z) = \tilde{e}\left(z^{k/\tilde{k}}\right) \frac{k}{\tilde{k}}, \ z \in S\left(0, \frac{\pi}{k}\right). \tag{3.9}$$

Za $k > \frac{1}{2}$ možemo odabrati $\tilde{k} = k$, jer je $e(z)$ funkcija jezgre. Također, kako bismo provjerili da li je $e(z)$ funkcija jezgre reda k, možemo uzeti $\tilde{k} = pk$ za dovoljno velik $p \in \mathbb{N}$. To nam daje sljedeću karakterizaciju funkcije jezgre:

Za $k > 0$, $e(z)$ je funkcija jezgre reda k ako i samo ako vrijedi:

- Funkcija e je holomorfna na $S_+ = S(0, \frac{\pi}{k})$ i $z^{-1}e^z$ je integrabilna u ishodištu. Nadalje, za svaki $\varepsilon > 0$ postoje konstante $c, K > 0$ tako da vrijedi

$$|e(z)| \leq cexp[-\left(\frac{|z|}{K}\right)^k],\ 2k|argz| \leq \pi - \varepsilon.$$

- Za pozitivni realni $z = x$, $e(x)$ je pozitivan realan broj.
- Postoji $p \in \mathbb{N}$ tako da je $pk > \frac{1}{2}$, a funkcija $E_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{m(n/p)}$ je manja od eksponencijalnog rasta pk. Nadalje, u sektoru $S(\pi, \pi(2 - \frac{1}{pk}))$ funkcija $z^{-1}E_p(1/z)$ je integrabilna u ishodištu.

Želimo definirati parove integralnih operatora za $0 < k \leq \frac{1}{2}$. Operator T je jednako definiran kao (3.7), ali operator T^- ćemo morati definirati malo drugačije nego do sada. Neka je dana funkcija jezgre $e(z)$ reda $0 < k \leq \frac{1}{2}$. Odaberimo $\tilde{k} > \frac{1}{2}$, te neka $\tilde{e}$ i $\tilde{E}$ čine par funkcija jezgri i $\alpha = \frac{\tilde{k}}{k}$. Za sektorsko područje G otvorenja većeg od $\frac{\pi}{k}$ i $f \in H(G, \mathbb{E})$ koja je neprekidna u ishodištu, definiramo

$$(T^- f)(u) = -\frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma_k(\tau)} \tilde{E}\left(\left(\frac{u}{z}\right)^{1/\alpha}\right) f(z) \frac{dz}{z}, \tag{3.10}$$

pri čemu je $\gamma_k(\tau)$ definirana kao kod Borelovog operatora.

Posljedica dane definicije operatora T^- je sljedeća: Za $\tilde{f} = s_\alpha f$ i $g = T^- f$, $\tilde{g} = \tilde{T}^- \tilde{f}$ vrijedi $\tilde{g}(u) = s_\alpha g$.

Nadalje, vrijedi

$$s_\alpha \circ T = \tilde{T} \circ s_\alpha,\ s_\alpha \circ T^- = \tilde{T}^- \circ s_\alpha. \tag{3.11}$$

Specijalno, T preslikava potenciju u^n u $m(n)z^n$, a T^- je inverz T za dane potencije. Ova činjenica motivira nas da damo formalne definicije operatora $\tilde{T}$ i $\tilde{T}^-$ koji su povezani s formalnim redom potencija $\tilde{f}$. Također, $\tilde{T}$ i $\tilde{T}^-$ su inverz jedan drugome.

3.5 Svojstva integralnih operatora

U ovom odjeljku navodimo neka važna svojstva integralnih operatora koja ćemo koristiti u narednim cjelinama. Neka su T, T^{-} operatori reda $k > 0$.

Teorem 3.5.1. *Neka je $f \in \boldsymbol{A}^{(k)}(S, \mathbb{E})$, $k > 0$ i neka je $S = S(d, \alpha)$ sektor. Nadalje, neka je $g = Tf$ dana sa (3.7) i definirana na odgovarajućem sektorskom području $G = G(d, \alpha + \frac{\pi}{k})$. Neka je $f(z) \cong_{s_1} \hat{f}(z)$ u S za $s_1 \geq 0$ i neka je $s_2 = \frac{1}{k} + s_1$. Ako je $\hat{g} = \hat{T}\hat{f}$, tada vrijedi:*

$$g(z) \cong_{s_2} \hat{g}(z) \;\; na \; G.$$

Teorem 3.5.2. *Neka je $G = G(d, \alpha)$ proizvoljno sektorsko područje, neka je f holomorfna funkcija na G te neka je za $s_1 > 0$ $f(z) \cong_{s_1} \hat{f}(z)$ na G. Za $k > 0$ takvo da je $\alpha > \frac{\pi}{k}$ je $T^{-}f$ definirano i holomorfno na $S = S(d, \alpha - \frac{\pi}{k})$. Definiramo $s_2 = s_1 - k^{-1}$ ako je $\frac{1}{s_1} < k$, a inače $s_2 = 0$. Tada vrijedi*

$$(T^{-}f)(u) \cong_{s_2} (\hat{T}^{-}\hat{f})(u), \;\; na \; \tilde{S}.$$

Teorem 3.5.3. *Neka je $G(d, \alpha)$ sektorsko područje i neka je $k > \frac{\pi}{\alpha}$. Za $f \in \boldsymbol{H}(G, \mathbb{E})$ koja je neprekidna u ishodištu, neka je*

$$g(\alpha) = (T^{-}f)(u), \;\; u \in S.$$

Tada je $g(u)$ eksponencijalnog rasta najviše k u S pa je $(Tg)(z)$ holomorfna u sektorskom području $\tilde{G} = \tilde{G}(d, \tilde{\alpha})$, gdje je $\frac{\pi}{k} < \tilde{\alpha}$ i

$$f(z) = (Tg)(z), \;\; z \in \tilde{G} \cap G.$$

Teorem 3.5.4. *Neka je $S = S(d, \alpha)$ sektor beskonačnog radijusa i $k > 0$ te neka je $f \in \boldsymbol{A}^{(k)}(S, \mathbb{E})$. Definiramo $g(z) = (Tf)(z)$, $z \in G = G(d, \alpha + \frac{\pi}{k})$. Tada vrijedi $f = T^{-}g$.*

3.6 Konvolucija jezgri

Neka su T_1, T_2 i T_1^{-}, T_2^{-} dva para operatora reda k_1, odnosno k_2 i neka su $m_1(u)$ i $m_2(u)$ funkcije momenata. Pokušat ćemo naći treći par operatora T, T^{-}, tako da je $T = T_2^{+} \circ T_1^{-}$ barem za geometrijski red. Tada je odgovarajući $m(u)$ jednak ili produktu $m_2(u)m_1(u)$ ili kvocijentu $\frac{m_2(u)}{m_1(u)}$. U prvom slučaju novi operatori bit će reda $k = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}$, a u drugom slučaju reda $k = \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)^{-1}$, pri čemu je $k_1 > k_2$. S obzirom da je T^{-} inverz operatora T, dovoljno nam je pronaći T i njenu funkciju jezgre $e(z)$.

Sljedeća lema bit će korisna kod dobivanja funkcije $e(z)$ iz $m(n)$.

Lema 3.6.1. *Neka je dana funkcija jezgre* $e(z)$ *reda* k *i odgovarajući operator* T. *Za* $f(u) = (1-u)^{-1}$ *definiramo* $g = Tf$. *Tada je* $g(z)$ *holomorfna za* $-\frac{\pi}{2k} < argz < \left(2 + \frac{1}{2k}\right)\pi$, $\hat{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m(n)z^n$ *je Gevreyevog reda* $s = \frac{1}{k}$ *i* $g(z) \to 0$ *kada* $z \to \infty$. *Nadalje, vrijedi*

$$g(z) - g(ze^{2\pi i}) = 2\pi i e\left(\frac{1}{z}\right), \ |argz| < \frac{\pi}{2k}. \tag{3.12}$$

Teorem 3.6.1. *Neka su* e_1, e_2 *funkcije jezgre reda* k_1, k_2, *te neka su* $m_j(u)$ *odgovarajuće funkcije momenta, a* T_j *operatori. Tada postoji jedinstvena funkcija jezgre* $e(z)$ *reda* $k = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}$ *s pripadajućom funkcijom momenta* $m(u) = m_1(u)m_2(u)$. *Za pripadni operator* T *i* $f(u) = (1-u)^{-1}$ *vrijedi*

$$Tf = (T_1 \circ T_2)f = (T_2 \circ T_1)f.$$

Specijalno, funkcija $e(1/z)$ *je dana primjenom* T_1 *na funkciju* $e_2(1/u)$.

Dokaz. Jedinstvenost dobivamo direktno iz prethodne leme.

Trebamo pokazati egzistenciju rješenja. Neka je $g(z) = (T_1 \circ T_2)f$, $f(u) = (1-u)^{-1}$, a $e(z)$ definirano kao u (3.12). Promjenom redoslijeda u integraciji $(T_1 \circ T_2)f$ dobivamo da je $e(1/z)$ primjena operatora T_1 na $e_2(1/u)$. Funkcija $e(z)$ ima svojstva koja su nužna da bi bila funkcija jezgre. Specijalno $E_p(z)$ možemo dobiti primjenom T_2^- na funkciju $E_{1,p}(z)$. □

Teorem 3.6.2. *Neka su* e_j, $j = 1, 2$ *funkcije jezgre reda* k_j, $k_1 > k_2$ *te neka su* $m_j(u)$ *odgovarajuće funkcije momenta. Tada postoji jedinstvena funkcija jezgre* $e(z)$ *reda* $k = \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)^{-1}$ *i pripadna funkcija momenta* $m(u) = \frac{m_2(u)}{m_1(u)}$. *Specijalno, funkcija* $e(1/u)$ *je dana primjenom operatora* T_1^- *na funkciju* $e_2(1/z)$.

Poglavlje 4

Sumabilni redovi potencija

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s k-sumabilnošću formalnih redova potencija. Naučit ćemo klasičnu definiciju metoda sumabilnosti momenata u obliku koji je primjenjiv na formalne redove potencija te ih povezati s metodama za k-sumabilnost.

Opću metodu sumabilnosti možemo zamisliti kao linearni funkcional $\mathbf{S}$ na nekom linearnom prostoru X redova s kompleksnim vrijednostima. Često taj funkcional ima sljedeću reprezentaciju:
Neka je $A = [a_{jk}]_{j,k=0}^{\infty}$ matrica beskonačne dimenzije. Tada kažemo da je red $\sum_0^{\infty} x_k$ A-sumabilan ako red $\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}x_k$ konvergira za svaki $j \geq 0$ i

$$\mathbf{S}_A\left(\sum x_k\right) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}x_k$$

postoji. Broj $\mathbf{S}_A(\sum x_k)$ nazivamo A-suma reda $\sum x_k$. Ovakve metode nazivamo matričnim metodama i kažemo da je red sumabilan po metodi A, ili kraće, A-sumabilan. Prostor X koji sadrži sve A-sumabilne redove naziva se sumabilna domena metode. Ovaj način označavanja ima smisla i u općenitijim situacijama za red $\sum x_k$ u Banachovom prostoru $\mathbb{E}$. Možemo zamijeniti a_{jk} matrice A s (neprekidnim) linearnim operatorima na $\mathbb{E}$, ali to neće biti predmet ovog rada.

Indeks j zamijenit ćemo neprekidnim parametrom T, pa ćemo umjesto matrice beskonačne dimenzije imati niz funkcija $a_k(T)$, $T \geq 0$ i to označiti sa A. To znači da funkcional sada glasi $\mathbf{S}_A\left(\sum x_k\right) = \lim_{T\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(T)x_k$. Ako je red kojeg želimo izračunati formalni red potencija ($x_k = f_k z^k$), tada $\mathbf{S}_A\left(\sum x_k\right)$, ako konvergira za $|z| < \rho$, definira familiju holomorfnih funkcija $a(x; T)$ na $D = D(0, \rho)$. Ograničit ćemo se na slučajeve kada je konvergencija pri $T \to \infty$ lokalno uniformna po z, barem za z u podpodručju G od D kako bismo dobili holomorfnu funkciju $f(z) = \lim_{T\to\infty} a(x; T)$ na G. Tada kažemo da je formalni red potencija $\hat{f}(z)$ A-sumabilan na području G. Funkcija $(\mathbf{S}_A\hat{f})(z) = f(z)$ je suma za $\hat{f}(z)$ u smislu sumacije metodom A.

Osim holomorfnosti sume, potrebna su nam još neka svojstva metoda sumacija kako bi bile pogodne za diferencijalne jednadžbe:

- Domena X je diferencijalna algebra, tj. sadrži sve konvergentne redove potencija.
- Funkcional $\mathbf{S}$ je homomorfizam, dakle ne samo da je linearan, već mora preslikavati produkt u produkt i derivaciju u derivaciju.
- Preslikavanje J definirano u (2.4.4) je inverz $\mathbf{S}$.

Jednostavan primjer metode koja zadovoljava sve gornje uvjete je dan s $X = \mathbb{E}\{z\}$ i $\mathbf{S} = S$, to je preslikavanje koje svaki konvergentni red potencija preslikava u njihovu prirodnu sumu. Ova metoda je primjenjiva samo na konvergentne redove.

4.1 Definicija k - sumabilnosti

U ovom dijelu rada definirat ćemo k-sumabilnost. Prije toga navest ćemo nekoliko važnih definicija i svojstava.

Definicija 4.1.1. *Neka je $k > 0$, $d \in \mathbb{R}$ i $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$. Kažemo da je $\hat{f}$ k-sumabilan u smjeru d ako postoji sektorsko područje G otvorenja $\alpha > \frac{\pi}{k}$ i funkcija $f \in A_{1/k}(G, \mathbb{E})$ tako da vrijedi $J(f) = \hat{f}$.*

Ako želimo ispitati k-sumabilnost u smjeru d reda $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ i odrediti mu sumu nailazimo na nekoliko problema:

- Funkcija $g(z)$, koja je dana lokalno konvergentnim redom $\hat{\mathcal{B}}_k\hat{f}$, mora biti holomorfno neprekidna na sektoru $S(d, \varepsilon)$, za neki $\varepsilon > 0$, što je vrlo često mali broj.
- Moramo pokazati da je g eksponencijalnog rasta ne više od k u sektoru.
- Moramo izračunati integral $\mathcal{L}_k g$.

Budući da postoje metode za rješavanje prvog problema, najveći problem zapravo predstavlja problem broj 2.

Navodimo nekoliko teorema koji su vezani uz algebarska svojstva, a direktna su posljedica poglavlja o Gevreyeveovim asimptotama. Neka su $k > 0$ i d dani te neka $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ označava skup svih $\hat{f}$ koji su k-sumabilni u smjeru d.

Teorem 4.1.2. *Za fiksni, proizvoljan $k > 0$ i d, neka su dani $\hat{f}_0$, $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

$$\hat{g}_1 + \hat{g}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}, \; S_{k,d}(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) = S_{k,d}\hat{g}_1 + S_{k,d}\hat{g}_2;$$

$$\hat{f}' \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d},\ S_{k,d}(\hat{f}') = \frac{d}{dz}(S_{k,d}\hat{f});$$

$$\int_0^z \hat{f}(\omega)d\omega \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d},\ S_{k,d}\left(\int_0^z \hat{f}(\omega)d\omega\right) = \int_0^z (S_{k,d}\hat{f})(\omega)d\omega.$$

Nadalje, za $p \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\hat{f}(z^p) \in \mathbb{E}_{pk,d/p},\ S_{pk,d/p}(\hat{f}(z^p)) = (S_{k,d}\hat{f})(z^p).$$

Teorem 4.1.3. *Neka su $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ Banachovi prostori, $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$, $\hat{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})\{z\}$, $\hat{\alpha} \in \mathbb{C}\{z\}_{k,d}$. Tada vrijedi*

$$\hat{T}\hat{f} \in \mathbb{F}\{z\}_{k,d},\ S_{k,d}(\hat{T}\hat{f}) = (S_{k,d}\hat{T})(S_{k,d}\hat{f});$$

$$\hat{\alpha}\hat{f} \in \mathbb{F}\{z\}_{k,d},\ S_{k,d}(\hat{\alpha}\hat{f}) = (S_{k,d}\hat{\alpha})(S_{k,d}\hat{f}).$$

Teorem 4.1.4. *Za fiksni, proizvoljni $k > 0$ i d neka su dane $\hat{f}$, $\hat{g}_1$, $\hat{g}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$. Ako je $\mathbb{E}$ Banachova algebra, tada vrijedi*

$$\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d},\ S_{k,d}(\hat{g}_1\hat{g}_2) = (S_{k,d}\hat{g}_1)(S_{k,d}\hat{g}_2).$$

Nadalje, ako $\mathbb{E}$ ima jedinični element i $\hat{f}$ ima invertibilni konstantni izraz, tada vrijedi

$$\hat{f}^{-1} \in \mathbb{E}_{k,d},\ S_{k,d}(\hat{f}^{-1}) = (S_{k,d}\hat{f})^{-1},$$

kada god je desna strana dobro definirana.

Ove rezultate možemo lakše zapamtiti kao činjenicu da $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ ima ista algebarska svojstva kao i $\mathbb{E}\{z\}$, prostor konvergentnih redova potencija.

Skup smjerova d za koje je $\hat{f}$ k-sumabilan je uvijek otvoren. Komplement tog skupa može biti neprebrojiv, ali u većini slučajeva vrijedi da je $\hat{f}$ k-sumabilan u svim smjerovima d osim u njih konačno mnogo.

Definicija 4.1.5. *$\hat{f}$ je k-sumabilan ako je k-sumabilan u svim smjerovima d, osim u konačno mnogo njih $d_1, d_2, ..., d_n$ (nakon računanja modulo 2π). Smjerovi $d_1, d_2, ..., d_n$ se nazivaju singularni smjerovi od $\hat{f}$. Skup svih k-sumabilnih redova $\hat{f}$ označavamo sa $\mathbb{E}\{z\}_k$, a ponekad uzimamo da je $\mathbb{E}\{z\}_\infty = \mathbb{E}\{z\}$, gdje je $\mathbb{E}\{z\}$ jednak skupu svih konvergentnih redova.*

Teoremi navedeni u ovom odjeljku tako vrijede odmah i za $\mathbb{E}\{z\}_k$, a indentiteti za sume stoje za sve smjerove osim konačno mnogo njih (modulo 2π).

Sljedeća propozicija pokazuje što se događa sa $S_{k,d}\hat{f}$ u singularnim smjerovima.

Propozicija 4.1.6. *Neka je $\alpha < d_0 < \beta$, $k > 0$ i neka je $\hat{f}$ k-sumabilan u svim smjerovima $d \in (\alpha, \beta)$, $d \neq d_0$. Neka su d_1, d_2 takvi da je $\alpha < d_1 < d_0 < d_2 < \beta$, $|d_1 - d_2| < \frac{\pi}{2k}$. Ako vrijedi*

$$(S_{k,d_1}\hat{f})(z) = (S_{k,d_2}\hat{f})(z)$$

za svaki z kada su obje strane definirane, tada je $\hat{f}$ k-sumabilan u smjeru d_0.

Dokaz. Za $1 \leq j \leq 2$ funkcije $f_j = S_{k,d_j}\hat{f}$ su holomorfne u sektorskom području $G_j = G(d_j, \alpha_j)$ otvorenja $\alpha_j > \frac{\pi}{k}$. Ta sektorska područja nalaze se na Riemannovom području logaritma i na njihovom presjeku, pa su funkcije f_1 i f_2 jednake. Dakle, $f = f_1 = f_2$ su holomorfne na $G_1 \cup G_2$ i tu vrijedi $f(z) \cong_k \hat{f}(z)$. Uočimo da $G_1 \cup G_2$ sadrži sektorsko područje otvorenja većeg od $\frac{\pi}{k}$ i sadrži smjer d_0 pa je $\hat{f}$ k-sumabilan u smjeru d_0. □

Ako je formalni red potencija k-sumabilan u svim smjerovima, onda je konvergentan kao što ćemo pokazati u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 4.1.7. *Neka $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_k$ nema singularnih smjerova, tj. $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ za svaki d. Tada je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}$, $\hat{f}(z)$ konvergira za dovoljno mali $|z|$.*

Neka je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_k$ i neka je d_0 singularan smjer za $\hat{f}$. Tada za $g = S(\hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}_k)$ postoje dvije mogućnosti:

- g(u) je singularna za neki u_0 kada je $arg u_0 = d_0$ i tada holomorfno proširenje na $arg u = d_0$ ima točku prekida
- neki smjer d blizu d_0 nije singularan pa je $g(u)$ holomorfna na sektoru $S(d_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ i ne može biti eksponencijalnog rasta najviše k na $arg u = d_0$.

Ovo se može dogoditi samo ako je $g(u)$ beskonačnog eksponencijalnog reda na $arg u = d_0$ i to ćemo vidjeti u tzv. Phragmén-Lindelöfovom principu:

Propozicija 4.1.8. *Neka je $k > 0$, $\alpha < d_0 < \beta$ i $\hat{f}$ k-sumabilan u smjeru d za svaki $d \neq d_0$, $d \in (\alpha, \beta)$. Nadalje, neka za neki $\tilde{k} > k$ i $g = S(\hat{\mathcal{B}}\hat{f})$ postoji holomorfno proširenje na $arg u = d_0$ i neka je eksponencijalnog rasta najviše $\tilde{k}$ na $arg u = d_0$. Tada je $\hat{f}$ k-sumabilan u smjeru d_0.*

Dokaz. U $S = S(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta - \alpha)$ vrijedi $g = S(\hat{\mathcal{B}}\hat{f})$ za svaku zraku osim za $d = d_0$ te je eksponencijalnog rasta najviše k. Primjernom Phragmén-Lindelöfovog principa slijedi tvrdnja za $d = d_0$. □

Za fiksni d divergentni red $\hat{f}$ može biti k_1- i k_2-sumabilan u smjeru d. To se mijenja ako to zahtijevamo za sve osim konačno mnogo smjerova istovremeno, jer tada konvergira:

Teorem 4.1.9. *Neka je* $k_1 > k_2 > 0$*. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{E}\{z\}_{k_1} = \mathbb{E}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{E}[[z]]_{\frac{1}{k_1}} = \mathbb{E}\{z\}.$$

Dokaz. Znamo da vrijedi

$$\mathbb{E}\{z\} \subset \mathbb{E}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{E}\{z\}_{k_1} \subset \mathbb{E}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{E}[[z]]_{\frac{1}{k_1}}.$$

Ako je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{k_2} \cap \mathbb{E}[[z]]_{\frac{1}{k_1}}$, onda je $\hat{g} = \hat{\mathcal{B}}_{k_2}(\hat{f})$ cijela i eksponencijalnog rasta najviše k, $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}$. Sada zbog prethodne propozicije slijedi da $\hat{f}$, s obzirom na k_2-sumabilnost, ne može imati singularnih smjerova, a to povlači konvergenciju po (4.1.7).

□

Prethodni teorem nam govori da k-sumabilni redovi Gevreyevog reda strogo manjeg od $\frac{1}{k}$ nužno konvergiraju. Također, iz dokaza je vidljivo da smo našli i uvjet za k-sumabilnost: biti Gevreyevog reda manjeg of $\frac{1}{k}$ je dovoljan uvjet kako bismo znali da tada red nema singularnih smjerova. To nas navodi na zaključak da je (4.1.8) jači rezultat od samog teorema.

4.2 Sumabilnost općeg momenta

Pokazat ćemo da parovi operatora sličnih Laplaceovom i Borelovom operatoru definiraju metodu sumabilnosti i da su sve metode koje koriste jezgre fiksnog reda $k > 0$ jednake u smislu da sumiraju isti formalni red potencija iste analitičke funkcije. No, ne možemo reći da takve dvije jezgre istog reda reprezentiraju sumu na istom sektorskom području. Nadalje, dvije metode sumabilnosti mogu biti različite za red koji nije red potencija.

Sve metode koje promatramo, uz neke male promjene, mogu se smjestiti u dvije familije: metode momenta i metoda sumabilnosti redova potencija.

Metode momenta

Neka je $e(x)$ pozitivna i neprekidna na pozitivnom dijelu realne osi i asimptotski nula kada $x \to \infty$. Tada za $n \geq 0$ momenti $m(n) = \int_0^\infty x^n e(x)dx$ postoje i pozitivni su. Red $\sum x_n$ je tada m_e-sumabilan ako red potencija $x(t) = \sum_{n=0}^\infty t^n \frac{x_n}{m(n)}$ konvergira za svaki $t \in \mathbb{C}$ te

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T e(t)x(t)dt = \int_0^\infty e(t)x(t)dt$$

postoji.

Primjenom na formalne redove potencija, ne možemo općenito tvrditi kada sumabilnost u nekoj točki $z \neq 0$ povlači sumabilnost u drugim točkama, specijalno za vrijednosti blizu ishodišta. Nadalje, u primjeni na ODJ prirodnije je ne zahtijevati konvergenciju $\sum t^n \frac{x_n}{m(n)}$ za svaki t, već da ima pozitivan radijus konvergencije i da postoji holomorfno proširenje na pozitivnom dijelu realne osi. To nas vodi do modificirane definicije sumabilnosti formalnih redova potencija pomoću metoda definiranih funkcijama jezgre.

Metoda sumabilnosti redova potencija

Definicija 4.2.1. *Neka je $e(z)$ reda $k > 0$ i neka je T pripadni integralni operator. Kažemo da je formalni red potencija $\hat{f}(z)$ T-sumabilan ako vrijedi:*

(S1) Red $\hat{g} = \hat{T}^- \hat{f}$ ima pozitivan radijus konvergencije.

(S2) Postoji $\varepsilon > 0$ za koji se funkcija $g = S\hat{g}$ može holomorfno proširiti na $S = S(d, \varepsilon)$ i na S je eksponencijalnog rasta najviše k.

Uočimo da (S1) vrijedi ako i samo ako je $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]_{\frac{1}{k}}$. Uvjet (S2) daje primjenu integralnog operatora T na g, pa $f = Tg$ nazivamo T-sumom za $\hat{f}$ i pišemo $f = S_{T,d}\hat{f}$. Skup svih takvih $\hat{f}$ označavamo sa $\mathbb{E}\{z\}_{T,d}$.

Ova metoda je ekvivalentna k-sumabilnosti u smislu sljedećeg teorema:

Teorem 4.2.2. *Neka je $e(z)$ proizvoljna funkcija jezgre reda $k > 0$. Tada je $\mathbb{E}\{z\}_{T,d} = \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ i za svaki $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{T,d}$ vrijedi $(S_{T,d}\hat{f})(z) = (S_{k,d}\hat{f})(z)$ na nekom sektorskom području smjera d i otvorenja većeg od $\frac{\pi}{k}$.*

Dokaz. Neka je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{T,d}$. Tada po teoremu (3.5.1) slijedi da je $S_{T,d}\hat{f}(z) \cong_{\frac{1}{k}} \hat{f}(z)$ na sektorskom području G sa smjerom d i otvorenjem većim od $\frac{\pi}{k}$ pa je po definiciji $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ i $S_{T,d}\hat{f}(z) = S_{k,d}\hat{f}(z)$ na G.

Obratno, $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ povlači po teoremu (3.5.2) da je $g = T^-(S_{k,d}\hat{f})$ analitička i eksponencijalnog rasta najviše k u sektoru $S(d, \varepsilon)$. Također, na tom sektoru vrijedi $g(u) \cong_0 \hat{g}(u) = \hat{T}^-\hat{f}(u)$. Budući da je Gevreyevog red nula, $\hat{g}$ konvergira k g za dovoljno mali $|u|$. □

4.3 Faktorijelni redovi

Promatrat ćemo redove oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)},\ b_n \in \mathbb{E}. \tag{4.1}$$

Izraz zahtijeva da varijabla z ne bude negativni cijeli broj, pa ćemo restringirati z na desnu poluravninu.

Redovi ovog ili sličnog oblika su često bili proučavani u vezi s Laplaceovom i Mellinovom transformacijom i često se nazivaju faktorijelni redovi. Mnogi su autori koristili ove redove za reprezentaciju rješenja ODJ-a i drugih jednadžbi.

Za razliku od redova potencija, faktorijelni redovi konvergiraju u poluravninama, što je povezano s Gamma funkcijom. Kvocijent

$$\frac{n!}{(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)} = \frac{\Gamma(1+n)\Gamma(1+z)}{\Gamma(1+z+n)} \sim \frac{\Gamma(1+z)}{n^z}$$

teži u jedan kada $n \to \infty$. Ako faktorijelni red oblika (4.1) konvergira za neki $z = z_0$ u desnoj poluravnini, onda izraz nužno ide u nulu. To pak znači da je $|b_n| \leq n^{Rez_0} n!$ za veliki n. Dakle, imamo apsolutnu i lokalno uniformnu konvergenciju faktorijelnog reda (4.1) za svaki z sa svojstvom $\mathrm{Re}z > c = 1+\mathrm{Re}z_0$. Također, možemo uočiti da je brzina konvergencije faktorijelnih redova poprilično spora, a to pak ograničava njihovu uporabu u numerici.

Poznata je poveznica između faktorijelnih redova i Laplaceovog integrala, a pokazat ćemo pripadnu poveznicu s k-sumabilnosti, gdje ćemo koristiti Stirlingove brojeve.

Stirlingovi brojevi

Definicija 4.3.1. *Brojevi definirani s*

$$\omega(\omega+1)\cdot\ldots\cdot(\omega+n-1) = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{n-m}^{n}\omega^m,\ n \geq 1,\ \omega \in \mathbb{C}$$

nazivaju se Stirlingovi brojevi ili faktorijelni koeficijenti.

Za Stirlingove brojeve postoji rekurzivna relacija, a podsjetimo se i jedne Stirlingove formule:

Neka je $\Gamma_m^n = 0$ za $m \geq n$. Tada su Stirlingovi brojevi povezani rekurzijom

$$\Gamma_m^{n+1} = n\Gamma_{m-1}^n + \Gamma_m^n,\ n \geq m \geq 0.$$

Teorem 4.3.2. *(**Stirlingova formula**)*
Neka $|z| \to \infty$ na sektoru $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Tada vrijedi

$$\Gamma(z)\frac{e^z\sqrt{z}}{\sqrt{2\pi}z^z} \to 1. \tag{4.2}$$

Želimo uspostaviti vezu između k-sumabilnosti i faktorijelnih redova, pa ćemo prvo promotriti slučaj kada je $k = 1$.

Propozicija 4.3.3. *Neka je $d \in \mathbb{R}$. Za proizvoljni formalni red potencija $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in \mathbb{E}\{z\}_{1,d}$ i $\omega = re^{id}$, $r > 0$ definiramo*

$$b_n(\omega) = \sum_{m=1}^{n} \omega^m f_m \Gamma_{n-m}^n, \ n \geq 1. \tag{4.3}$$

Tada za svaki dovoljno mali $r > 0$ postoji broj $c > 0$ tako da faktorijelni red

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\omega)}{(\omega/z + 1)\cdot ... \cdot(\omega/z + n)} \tag{4.4}$$

konvergira apsolutno za $Re\left(\frac{\omega}{z}\right) > c$. Funkcija f tada ne ovisi o r i vrijedi

$$f_0 + f(z) = (S_{1,d}\hat{f})(z), \tag{4.5}$$

za svaki z kada su obje strane definirane.

Dokaz. Uočimo prvo da je funkcija $g = S(\hat{\mathcal{B}}_1\hat{f})$ analitička na $G = D(0,\rho) \cup S(d,\varepsilon)$ za dovoljno male $\rho, \varepsilon > 0$. Ako je r dovoljno mali, funkcija $g(u\omega)$ je holomorfna u području definiranim s $|1 - e^{-u}| < 1$ i neprekidna do ruba. Drugim riječima, funkcija $h(t) = g(-\omega \log[1 - t])$ je analitička na krugu oko ishodišta radijusa jedan i neprekidna na rubu osim u singularitetu $t = 1$. Na sektoru $S(d,\varepsilon)$, funkcija $g(u)$ je eksponencijalnog rasta najviše jedan. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $\varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$, čime dobivamo da $|g(u)| \leq c|\exp[Kue^{-id}]|$ na G za dovoljno velike $c, K > 0$. To povlači da je

$$|h(t)| \leq \frac{c}{|1 - t|^r K}, \ |t| \leq 1, \tag{4.6}$$

za $0 < r < \frac{1}{K}$, jer tada h ima integrabilni singularitet u $t = 1$. Koeficijenti h_n proširenja reda potencija za $h(t)$ oko ishodišta jednaki su $\frac{b_n(\omega)}{n!}$, gdje su koeficijenti b_n dani kao u (4.3) za $n \geq 1$, dok je $b_0 = f_0$. Koristeći Cauchyjevu formulu i (4.6), zaključujemo da je ostatak izraz $h_N(t) = \sum_{n=M}^{\infty} h_n t^n$:

$$|h_N(t)| = \left|\frac{t^N}{2\pi i}\oint_{|u|=1}\frac{h(u)du}{u^N(u-t)}\right| \leq \frac{c}{2\pi|1-t|}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{|1 - e^{i\phi}|^{Kr}},$$

za $0 \leq t < 1$. Dobivamo za varijablu u

$$g(u) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\omega)}{n!}(1 - e^{-u/\omega})^n,$$

gdje je $|g_N(u)| = |h_N(1 - e^{u/\omega})| \leq \tilde{c}|e^{u/\omega}|$ za arg$u = d$. Proširenje za $g(u)$ možemo koristiti u Laplaceovoj transformaciji i integrirati. Budući da je Laplaceova transformacija reda jedan za $(1 - e^{-u/\omega})^n$ jednaka $[(\omega/z + 1) \cdot ... \cdot (\omega/z + n)]^{-1} n!$, dobivamo tvrdnju. $\square$

Gornja propozicija povlači $f_n = \delta_{nm}$, $m \in \mathbb{N}$, tako da je

$$z^m = \omega^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\Gamma_{n-m}^n}{(\omega/z + 1) \cdot ... \cdot (\omega/z + n)}, \tag{4.7}$$

gdje ω označava bilo koji kompleksni broj. Pokazali smo da red konvergira kada je ω/z u desnoj poluravnini. To znači da za proizvoljan formalni red potencija $\hat{f}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m z^m$ možemo zamijeniti s gornjim proširenjem i možemo formalno zamijeniti poredak suma kako dobili formalni faktorijelni red. Gornju propoziciju možemo shvatiti kao način da 1-sumabilni red pretvorimo u konvergentan faktorijelni red. Budući da $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{1,d}$ povlači $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{1,\tau}$, gdje je τ dovoljno blizu d, pa (4.4) ostaje konvergentan za $\omega = re^{i\tau}$, $0 < t \leq r_0(\tau)$. Sljedeća propozicija pokazuje da su 1-sumabilnost i sumacija u vidu faktorijelnog reda ekvivalentni.

Propozicija 4.3.4. *Neka je $d \in \mathbb{R}$. Za proizvoljni formalni red potencija $\hat{f}(z) = \sum_0^{\infty} f_n z^n$, neka je $\omega = re^{id}$, $r > 0$ i neka su $b_n(\omega)$ definirani kao u (4.3). Neka je $\alpha < d < \beta$ i neka postoji $r_0 = r_0(d) > 0$ tako da za $0 < r < r_0$ faktorijelni red (4.4) konvergira apsolutno za Re$(\frac{\omega}{z}) > c$, za dovoljno veliki $c = c(r) \geq 0$. Tada je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{1,d}$ za svaki d iz pretpostavke.*

Dokaz. Uočimo da apsolutna konvergencija (4.4) povlači $f(z) \to 0$ za $z \to 0$ uniformno na području Re$\frac{\omega}{z} \geq c + \varepsilon$, za svaki $\varepsilon > 0$. Pod pretpostavkom da smo pokazali da je f neovisna od ω trebalo bi pokazati još da je $g = \mathcal{B}_1 f$ holomorfna oko ishodišta. Dokazat ćemo obje tvrdnje odjednom na sljedeći način:

Neka je ω fiksiran. Koristeći (3.4) dobivamo $g(u) = g(u; \omega) = (\mathcal{B}_1 f)(u)$, za $u = xe^{id}$, $x > 0$. Nadalje, promjenom mjesta sumacije i granice $y \to \infty$ dobivamo $g(u) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\omega) \frac{(1-e^{-u/\omega})^n}{n!}$. Dobili smo red potencija u $t = 1 - e^{-u/\omega}$, i njegovu konvergenciju na disku $|t| < \rho$. Time smo pokazali konvergenciju oko ishodišta. Ponovnim proširenjem gornjeg reda kao reda potencija u u i koristeći (4.3) dolazimo do $g = S(\hat{\mathcal{B}}_1 f)$, a time smo pokazali da g ne ovisi o ω (a tada ni f ne ovisi o ω). $\square$

U gornjem razmatranju imali smo slučaj $k = 1$, a sada ćemo dati zaključke o općenitijem slučaju, $k = \frac{p}{q}$, gdje su $p, q \in \mathbb{N}$ relativno prosti. Ovaj slučaj je dovoljan za promatranje sistema ODJ-a. Neka je $\hat{f}(z) = \sum f_n z^n$ k-sumabilan u smjeru d i neka je $g(u)$ suma za $\hat{\mathcal{B}}_k \hat{f}$. Neka je $f(z)$ k-suma u smjeru d za $\hat{f}(z)$. Prva ideja bila bi da pokažemo da je $f(z^{1/k})$ Laplaceova transformacija indeksa jedan za $g(u^{1/k})$ i tada primjenimo prethodnu propoziciju. Ali, $g(u^{1/k})$ ne mora biti analitička u ishodištu, no može imati reprezentaciju u obliku reda potencija u varijabli $u^{1/p}$. Definiramo

$$\hat{f}_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{pn+j} z^{pn}, \ 0 \le j \le p-1, \tag{4.8}$$

tako da je $\hat{f}(z) = \sum_{j=0}^{p-1} z^j \hat{f}_j(z)$.

Neka je $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ i neka su $\hat{f}_j$ definirane kao u (4.8). Tada vrijedi

$$\hat{f}_j(z) = pz^{-j} \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{-2\pi i j\mu/p} \hat{f}(ze^{2\pi i\mu/p}), \ 0 \le j \le p-1,$$

te su svi $\hat{f}_j$ k-sumabilni u smjeru d ako i samo ako je $\hat{f}$ k-sumabilan u svim smjerovima oblika $d + \frac{2j\pi}{p}$, $0 \le j \le p-1$. Upravo zbog toga možemo primijeniti gornju propoziciju na svaki od redova $\hat{f}_j(z^{1/k})$ čime dobivamo reprezentaciju njihovih suma kao konvergentne faktorijelne redove u varijabli $\frac{\omega}{z^k}$. Kombinacijom tih reprezentacija, dolazimo do formule za sumu $\hat{f}$. S obzirom da ovo nećemo koristiti kasnije u radu, nećemo se baviti detaljima ovog pristupa.

Restringirajmo se na ispitivanje konvergencije faktorijelnih redova. U kontekstu diferencijalnih jednadžbi, pojavljuju se i divergentni faktorijelni redovi, ali njihova svojstva sumabilnosti se mogu ispitati. Umjesto faktorijelnih redova, koriste se i neki drugi redovi kako bismo mogli reprezentirati rješenje ODJ-a. Mnogi od njih konvergiraju globalno, što je prednost, te se mogu koristiti i u druge svrhe.

Poglavlje 5

Multisumabilni redovi potencija

U ovom poglavlju bavit ćemo se multisumabilnim redovima potencija. Pokazat će se da je multisumabilnost jače svojstvo nego k-sumabilnost, $k > 0$. Također, svaki multisumabilni formalni red potencija se može zapisati kao suma konačno mnogo formalnih redova potencija, gdje su svi oni k-sumabilni, u nekom smjeru, gdje $k > 0$ ovisi o redu. Ugrubo rečeno, skup multisumabilnih redova potencija čini linearnu ljusku unije skupova k-sumabilnih redova potencija. Posljednja tvrdnja nije u potpunosti točna, jer moramo voditi računa o smjerovima, što ćemo objasniti nešto kasnije.

5.1 Konvolucija ili iteracije operatora?

Do sada smo već predstavili funkcije jezgre $e(z)$ i pripadni integralni operator T. Najvažniji primjer je bio $e(z) = kz^k exp(-z^k)$, $k > 0$ i pripadni operatori su bili Laplaceov i Borelov integralni operator.

Neka su dane dvije funkcije jezgre $e_1(z)$ i $e_2(z)$ redova $k_1, k_2 > 0$ i neka su T_1 i T_2 pripadni operatori, te funkcije momenata $m_1(u)$, $m_2(u)$. Definirali smo novu jezgru $e(z)$ reda $k = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}$ s pripadnom funkcijom momenta $m_1(u)m_2(u)$. Takva jezgra se naziva konvolucija $e_1 * e_2$ funkcija e_1 i e_2. Tada je integralni operator definiran s $T_1 * T_2$, a mi želimo provjeriti njegovu vezu s $T_1 \circ T_2$.

Lema 5.1.1. *Neka su pretpostavke kao u odjeljku iznad i neka je $f \in \mathbf{A}^{(k)}(S(d, \varepsilon), \mathbb{E})$, za neki $d \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$, tako da je $T_1 * T_2 f$ definiran. Tada je $g = T_2 f$ holomorfna na sektoru $S(d, \varepsilon + \frac{\pi}{k_2})$ i eksponencijalnog rasta najviše k_1. Također, $T_1 g$ je definirano i integriranjem po smjeru d_1 za koji vrijedi $2|d - d_1| > \varepsilon + \frac{\pi}{k_2}$ dobivamo $T_1 g = T_1 * T_2 f$.*

Gornja lema pokazuje da je $T_1 * T_2$ ekvivalentno $T_1 \circ T_2$ kad god je konvolucija $T_1 * T_2$ definirana. Također možemo uočiti da se $T_1 \circ T_2$ može primijeniti na širi spektar funkcija.

5.2 Multisumabilnost u smjeru

Neka je $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_q)$ q-torka integralnih operatora T_j reda $\kappa_j > 0$. Nadalje, promatramo fiksni multismjer $d = d_1, ..., d_q$, kojeg nazivamo dopustivim za $\mathbf{T}$ i neka vrijedi

$$2\kappa_j|d_j - d_{j-1}| \leq \pi, \ 2 \leq j \leq q. \tag{5.1}$$

Za dane $\mathbf{T}$ i d definirat ćemo $\mathbf{T}$-sumabilnost u multismjeru d. Trebamo inverz formalnih operatora $\hat{T}_j$

$$(\hat{T}_j\hat{f})(z) = \sum f_n \frac{z^n}{m_j(n)}, \text{ za } \hat{f}(z) = \sum f_n z^n \in \mathbb{E}[[z]].$$

- Za $q = 1$ kažemo da je formalni red potencija $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ $\mathbf{T}$ sumabilan u multimjeru d ako je $\hat{g} = \hat{T}_1^{-1}\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}$ i ako je suma $g(z) \in A^{(\kappa_1)}(S(d_1, \varepsilon), \mathbb{E})$ za neki $\varepsilon > 0$.
- Za $q \geq 2$ promatramo skup $\tilde{\mathbf{T}} = (T_2, ..., T_q)$ i multismjer $\tilde{d} = (d_2, ..., d_q)$. Kažemo da je formalni red potencija $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ $\mathbf{T}$-sumabilan u multismjeru d ako je $\hat{g} = \hat{T}_1^{-1}\hat{f}$ $\mathbf{T}$-sumabilan u multimjeru $\tilde{d}$ i ako je $\hat{\mathbf{T}}$-suma $g(z)$ element od $A^{(\kappa_1)}(S(d_1, \varepsilon), \mathbb{E})$ za neki $\varepsilon > 0$.
- Uočimo da se u oba slučaja operator T_1 može primijeniti na funkciju $g(z)$, integriranjem po zraci unutar sektora $S(d_1, \varepsilon)$. Kažemo da je $f = T_1 g$ $\mathbf{T}$-suma za $\hat{f}$ u multismjeru d i pišemo $f = S_{\mathbf{T},d}\hat{f}$.

Trebali bismo pisati $\mathbb{E}_{\mathbf{T},d}$ za skup formalnih redova koji su $\mathbf{T}$-sumabilni u multismjeru d. Uočimo za kraj da ako je $q = 1$ po teoremu 4.2.2 vrijedi $\mathbb{E}\{z\}_{\mathbf{T},d} = \mathbb{E}\{z\}_{\kappa_1,d}$

5.3 Elementarna svojstva

Sljedeća lema daje svojstva multisumabilnosti koja slijede iz definicije:

Lema 5.3.1. **(a)** *Neka je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\boldsymbol{T},d}$ i $1 \leq j \leq q$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $f \in \mathbb{E}\{z\}_{\boldsymbol{T},\tilde{d}}$ i $S_{\boldsymbol{T},d}\hat{f}$ vrijedi za svaki $\tilde{d} = (d_1, ..., d_{j-1}, \tilde{d}_j, d_{j+1}, ..., d_q)$ ako je zadovoljeno $|\tilde{d}_j - d_j| < \varepsilon$, $2\kappa_j|\tilde{d}_j - d_{j-1}| \leq \pi$ i $2\kappa_{j+1}|d_{j+1} - \tilde{d}_j| \leq \pi$.*

(b) *Neka je $\hat{f} \in \mathbb{E}[[z]]$ i neka je $d = (d_1, ..., d_q)$ dopustiv za $\boldsymbol{T}$. Tada je $\tilde{d} = (\tilde{d}_1, ..., \tilde{d}_q)$, gdje je $\tilde{d}_j = d_j + 2\pi$, $1 \leq j \leq q$, također dopustiv za $\boldsymbol{T}$ i $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\boldsymbol{T},d}$ ako i samo ako je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\boldsymbol{T},\tilde{d}}$. Nadalje, tada vrijedi $(S_{\boldsymbol{T},d}\hat{f})(z) = (S_{\boldsymbol{T},\tilde{d}}\hat{f})(ze^{2\pi i})$ za svaki z gdje je jedna od strana definirana.*

Neka je $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_q)$, neka je $d = (d_1, ..., d_q)$ dopustiv za $\mathbf{T}$ i $q \geq 2$. Za $1 \leq \nu \leq q$ definiramo $\tilde{\mathbf{T}} = (T_1, ..., T_{q-1})$ ako je $\nu = q$, a inače $\tilde{\mathbf{T}} = (T_1, ..., T_{\nu-1}, T_\nu * T_{\nu+1}, T_{\nu+2}, ..., T_q)$, dok je $\tilde{d} = (d_1, ..., d_{\nu-1}, d_{\nu+1}, ..., d_q)$ dopustiv za $\tilde{\mathbf{T}}$.

Lema 5.3.2. *Za $q \geq 2$ i $\boldsymbol{T}$, d te $\tilde{\boldsymbol{T}}$, $\tilde{d}$ kao u odjeljku gore vrijedi $\mathbb{E}\{z\}_{\tilde{T},\tilde{d}} \subseteq \mathbb{E}\{z\}_{T,d}$. Nadalje, za svaki $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{T},\tilde{d}}$ vrijedi $(S_{\tilde{T},\tilde{d}}\hat{f})(z) = (S_{T,d}\hat{f})(z)$ kada god su obje strane definirane.*

Dokaz. Neka je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{\mathbf{T}},\tilde{d}}$. Ako je $\nu = q$, onda je $g = S \circ \hat{T}_q^{-1} \circ ... \circ \hat{T}_1^{-1}\hat{f}$ cijela i eksponencijalnog rasta najviše κ_q u svakom sektoru beskočnog radijusa. Tada je $\tilde{g} = T_q g = S \circ \hat{T}_{q-1}^{-1} \circ ... \circ \hat{T}_1^{-1}\hat{f}$, gdje integracija u integralnim operatorima može biti po bilo kojoj zraci. Time smo dokazali tvrdnju za ovaj slučaj.

Neka je $1 \leq \nu \leq q-1$, g definirana kao u prvom slučaju te neka je $\tilde{g} = T_{\nu+2} \circ ... \circ T_q g$. Specijalno, neka je $\tilde{g} = g$ za $\nu = q-1$. Sada po lemi (5.1.1) vrijedi $T_\nu * T_{\nu+1}\tilde{g} = T_\nu \circ T_{\nu+1}\tilde{g}$ i time smo pokazali tvdnju. □

5.4 Glavni teorem dekompozicije

Neka je integralni operator $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_q)$ reda $\kappa_1, ..., \kappa_q$ i multismjera $d = (d_1, ..., d_q)$ dopustiv za $\mathbf{T}$. Definiramo $k = (k_1, ..., k_q)$, gdje je $\frac{1}{k_j} = \sum_{l=1}^{j} \frac{1}{\kappa_l}$. Tada je $\hat{f}_j \in \mathbb{E}\{z\}_{k_j,d_j}$, $1 \leq j \leq q$ i $\hat{f} = \sum \hat{f}_j \in \mathbb{E}\{z\}_{\mathbf{T},d}$, $1 \leq j \leq q$. U ovom odjeljku pokazat ćemo da se za slučaj $\kappa_j > \frac{1}{2}$, $1 \leq j \leq q$ svaki $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\mathbf{T},d}$ dobiva na opisani način. Tome će poslužiti sljedeća lema:

Lema 5.4.1. *Neka su $\tilde{k} > k > 0$ realni brojevi tako da je $\tilde{k} > \frac{1}{2}$ i definiramo κ s $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{k} - \frac{1}{\tilde{k}}$. Neka je T integralni operator reda κ. Za $\hat{h} \in \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{k},\tilde{d}}$ i neki realni broj $\tilde{d}$ definiramo $\hat{f} = \hat{T}\hat{h}$. Tada vrijedi $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$, gdje je $\hat{f}_1 \in \mathbb{E}[[z]]_{\frac{1}{\kappa}}$ i $\hat{f}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,\tilde{d}}$.*

Dokaz. Po definiciji $h = S_{\tilde{k},\tilde{d}}\hat{h}$ je holomorfna u sektorskom području $G = G(\tilde{d}, \alpha)$, gdje je $\alpha > \frac{\pi}{\tilde{k}}$, $h(z) \cong_{1/\tilde{k}} \hat{h}(z)$ na G. Neka je $\bar{S} = \bar{S}(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho})$ zatvoren podsektor od G takav da je $2\pi > \tilde{\alpha} > \frac{\pi}{\tilde{k}}$ te neka je γ pozitivno orijentiran rub skupa $\bar{S}$. Rastavimo γ kao $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, gdje je γ_1 kružni dio γ. Neka je

$$h_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \frac{h(\omega)}{\omega - z}d\omega,\ z \in S(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho}),\ j = 1, 2.$$

Tada je $h = h_1 + h_2$ po Cauchyjevoj formuli i h_1 je holomorfna u ishodištu. Također, $h_2(z) = h(z) - h_1(z) \cong_{1/\tilde{k}} \hat{h}_2(z)$ na $S(\tilde{d}, \tilde{\alpha}, \tilde{\rho})$ i $\hat{h}_2(z) = \hat{h}(z) - \hat{h}_1(z)$, gdje je $\hat{h}_1(z)$ konvergentan red potencija za $h_1(z)$. Slijedi $\hat{f}_1 = \hat{T}\hat{h}_1 \in \mathbb{E}[[z]]_{1/\kappa}$. Nadalje, h_2 je holomorfna na $\hat{S} = \hat{S}(\tilde{d}, \tilde{\alpha})$, koji teži k nuli za $z \to \infty$ na $\hat{S}$. Po teoremu (3.5.1) slijedi $f_2(z) = (Th_2)(z) \cong_{1/k} \hat{f}_2(z) = (\hat{T}\hat{h}_2)(z)$ na sektoru otvorenja većeg of $\frac{\pi}{k}$ sa smjerom $\tilde{d}$. Tada po definiciji vrijedi $\hat{f}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,\tilde{d}}$. □

Sada smo spremni za glavni teorem dekompozicije:

Teorem 5.4.1. ***(Glavni teorem dekompozicije)***
Neka je $\boldsymbol{T} = (T_1, ..., T_q)$ i $d = (d_1, ..., d_q)$ dopustiv za $\boldsymbol{T}$. Definiramo k_j kao $\frac{1}{k_j} = \sum_{l=1}^{j} \frac{1}{\kappa_l}$, $1 \leq j \leq q$. Ako su svi $\kappa_j > \frac{1}{2}$ za $1 \leq j \leq q$, onda za $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\boldsymbol{T},d}$ vrijedi $\hat{f} = \sum_{j=1}^{q} \hat{f}_j$, gdje je $\hat{f}_j \in \mathbb{E}\{z\}_{k_j,d_j}$, $1 \leq j \leq q$. Nadalje, vrijedi $S_{\boldsymbol{T},d}\hat{f} = \sum_{j=1}^{q} S_{k_j,d_j}\hat{f}_j$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po q.

Za $q = 1$ tvrdnja je očita.

Neka je $q \geq 2$. Tada vrijedi $\hat{h}(z) = \hat{T}_{q-1}^{-1} \circ ... \circ \hat{T}_1^{-1}\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\kappa_q,d_q}$. Neka je $k = k_q$, $\tilde{k} = \kappa_q$, tada je broj κ u lemi (5.4.1) jednak k_{q-1}. Primjenjujemo lemu uz $\tilde{d} = d_q$ i $T = T_1 * ... * T_{q-1}$ čime dobivamo da vrijedi $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$, gdje je $\hat{f}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d_q} \subset \mathbb{E}\{z\}_{\mathbf{T},d}$ i $\hat{f}_1 \in \mathbb{E}[[z]]_{1/k_{q-1}}$. Budući da je $\hat{f}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{\mathbf{T},d}$, to je $\hat{f}_1 \in \mathbb{E}\{z\}_{\mathbf{T},d} \cap \mathbb{E}[[z]]_{1/k_{q-1}}$. Iz toga slijedi da je $\hat{f}_1 \in \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{\mathbf{T}},\tilde{d}}$, gdje je $\tilde{\mathbf{T}} = (T_1, ..., T_{q-1})$, a $\tilde{d} = (d_1, ..., d_{q-1})$. Sada primjenimo pretpostavku hipoteze na $\hat{f}_1$ kako bismo dovršili dokaz. □

Sljedeći korolar je važna posljedica prethodnog teorema.

Korolar 5.4.2. *Neka su $\boldsymbol{T} = (T_1, ..., T_q)$ i $\tilde{\boldsymbol{T}} = (\tilde{T}_1, ..., \tilde{T}_q)$ parovi integralnih operatora gdje T_j i $\tilde{T}_j$ imaju jednak red $\kappa_j > 0$, $1 \leq j \leq q$. Tada $\mathbb{E}\{z\}_{\boldsymbol{T},d} = \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{\boldsymbol{T}},d}$ za svaki multismjer d koji zadovoljava (5.1) i $S_{\boldsymbol{T},d}\hat{f} = S_{\tilde{\boldsymbol{T}},d}\hat{f}$ za svaki $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\boldsymbol{T},d} = \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{\boldsymbol{T}},d}$.*

S obzirom na prethodni korolar koristit ćemo sljedeću terminologiju:

- $k = (k_1, .., k_q)$ zvat ćemo tip multisumabilnosti ili ponekad dopustiv i smatramo da vrijedi $k_1 > k_2 > ... > k_q > 0$. Za takav k definiramo $\kappa_1, ..., \kappa_q$ s $\frac{1}{\kappa_j} = \frac{1}{k_j} - \frac{1}{k_{j-1}}$, $2 \leq j \leq q$, jer tada su k_j kao u glavnom teoremu dekompozicije.

- Za dani tip k multisumabilnosti, kažemo da je $\hat{f}(z)$ k-sumabilna u dopustivom multismjeru d ako postoji q-torka $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_q)$ integralnih operatora s pripadnim redovima $\kappa_1, ..., \kappa_q$ tako da je $\hat{f}(z)$ $\mathbf{T}$-sumabilna u multismjeru d. Zbog prethodnog korolara možemo zaključiti da je poredak operatora t_j potpuno proizvoljan, no moramo paziti na njihove redove. Specijalno, suma $S_{\mathbf{T},d}\hat{f}$ ovisi samo o tipu multisumabilnosti k i multismjeru d pa ćemo pisati $S_{k,d}\hat{f}$ i $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ umjesto $S_{\mathbf{T},d}\hat{f}$ i $\mathbb{E}\{z\}_{\mathbf{T},d}$.

Umjesto k_j koristit ćemo red integralnog operatora κ_j kako bismo definirali tip multisumabilnosti. U nekoj literaturi k_j ima općenitije značenje.

Gornji rezultati pokazuju da možemo proizvoljno odabrati operatore $T_1, ..., T_q$, ali oni moraju imati određeni red. Za primjenu često možemo uzeti Laplaceove operatore $\mathcal{L}_{\kappa_1}, ..., \mathcal{L}_{\kappa_q}$.

5.5 Pravila za multisumabilnost redova potencija

Mnoga pravila za k-sumabilnost generalizirat ćemo na multisumabilnost.

Teorem 5.5.1. *Za sve dopustive k i d vrijedi:*

(a) *Ako su $\hat{f}, \hat{g}_1, \hat{g}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$, tada vrijedi:*

$$\hat{g}_1 + \hat{g}_2 \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d},\ S_{k,d}(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) = S_{k,d}\hat{g}_1 + S_{k,d}\hat{g}_2,$$

$$\hat{f}' \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d},\ S_{k,d}(\hat{f}') = \frac{d}{dz}(S_{k,d}\hat{f}),$$

$$\int_0^z \hat{f}(\omega)d\omega \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d},\ S_{k,d}\left(\int_0^z \hat{f}(\omega)d\omega\right) = \int_0^z (S_{k,d}\hat{f})(\omega)d\omega.$$

(b) *Ako je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ i p prirodan broj, tada je $\hat{g}(z) = \hat{f}(z^p) \in \mathbb{E}\{z\}_{pk,p^{-1}d}$ i vrijedi $(S_{pk,p^{-1}d}\hat{g})(z) = (s_{k,d}\hat{f})(z^p)$.*

(c) *Ako je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$ i p prirodan broj takav da je $\hat{g}(z) = \hat{f}(z^{1/p})$ red potencija, tada $\hat{g}(z) \in \mathbb{E}\{z\}_{p^{-1}k,pd}$ i vrijedi $(S_{p^{-1}k,pd}\hat{g})(z) = (S_{k,d}\hat{f})(z^{1/p})$.*

5.6 Singularni multismjerovi

Počinjemo definicijom singularnog multismjera d:

Definicija 5.6.1. *Neka je dan tip multisumabilnosti $k = (k_1, ..., k_q)$ i neka je $\hat{f}(z) \in \mathbb{E}[[z]]$ formalni red potencija. Dopustiv multismjer d za k naziva se singularnim za $\hat{f}$ ako i samo ako je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$. U suprotnom, multismjer d nazivamo nesingularnim. Skup svih singularnih multismjerova nazivamo singularnim skupom za $\hat{f}$ (s obzirom na k).*

Moguće je da su svi multismjerovi singularni, npr. ako $\hat{f} \notin \mathbb{E}[[z]]_{1/k_q}$ ili kada $g = S(\hat{\mathcal{B}}_{k_q}\hat{f})$ nije holomorfno proširiva na rub nekog područja koje sadržava ishodište.

Promatrajući definiciju skupa $\mathbb{E}\{z\}_{k,d}$, možemo uočiti da razlog za oznaku $\hat{f} \notin \mathbb{E}\{z\}_{k,d}$, tj. d je singularan, može biti povezan s tzv. "nivoom" j, budući da funkcije $f_j, ..., f_q$ postoje, definirane su s

$$f_j(z) \cong_{s_j} \hat{f}_j = (\hat{T}_j^{-1} \circ ... \circ \hat{T}_1^{-1}\hat{f})(z) \text{ na } G_j,\ 0 \le j \le q-1,$$

gdje je $s_j = \sum_{j+1}^{q} \frac{1}{\kappa_\nu}$,a G_j sektorsko područje sa smjerom d_{j+1} i otvorenja većeg od $\frac{\pi}{\kappa_{j+1}}$. Funkcija f_0 je tada **T**-suma za $\hat{f}$ i vrijedi $\hat{f}_0(z) = \hat{f}(z)$. Funkcija f_j ne može se holomorfno proširiti na sektor beskonačnog radijusa i smjera d_j ili pak ima eksponencijalni rast veći od κ_j, pa ne možemo primijeniti operator. U ovakvom slučaju kažemo da je d singularan nivoa j.

Neka je $d = (d_1, ..., d_q)$ singularan nivoa j za $\hat{f}$. Tada iz gornje diskusije slijedi da su svi multismjerovi $\tilde{d} = (\tilde{d}_1, ..., \tilde{d}_q)$, gdje je $\tilde{d}_\nu = d_\nu$ za $j \leq \nu \leq q$, singularni nivoa j za $\hat{f}$. Nadalje, s obzirom na (5.3.1) možemo identificirati multismjerove d s $\tilde{d}$ pomoću $d_j - \tilde{d}_j = 2\mu\pi$, za neki $\mu \in \mathbb{Z}$. Tada singularni skup za $\hat{f}$ može, ali ne mora, sadržavati konačno mnogo elemenata. U slučaju da ima konačno mnogo elemenata, kažemo da je $\hat{f}$ k-sumabilna. Također, u slučaju $q = 1$ pišemo $\mathbb{E}\{z\}_k$ za skup svih k-sumabilnih formanih redova potencija koji imaju koeficijente u $\mathbb{E}$.

U slučaju $q = 1$ vidjeli smo da nema singularniih smjerova, a to je povlačilo konvergenciju reda $\hat{f}$. Tu činjenicu ćemo sada generalizirati za proizvoljni q:

Propozicija 5.6.2. *Neka je $k = (k_1, ..., k_q)$, $q \geq 2$, dopustiv i neka $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_k$ nema singularnih multismjerova nivoa j, za neki fiksni j, $1 \leq j \leq q$. Tada je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{k}}$, gdje je $\tilde{k} = \pi_j(k) = (k_1, ..., k_{j-1}, k_{j+1}, ..., k_q)$. Nadalje, za svaki nesingularni multismjer $d = (d_1, ..., d_q)$ za odgovarajući k, multismjer $\tilde{d} = (d_1, ..., d_{j-1}, d_{j+1}, ..., d_q)$ je nesingularan s obzirom na $\tilde{k}$ i vrijedi $S_{k,d}\hat{f} = S_{\tilde{k},\tilde{d}}\hat{f}$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavljamo da su operatori T_j Laplaceovi operatori reda κ_j. Nepostojanje singularnih multismjerova nivoa $j = q$ povlači da je $f_q = S(\hat{T}_q^{-1} \circ ... \circ \hat{T}_1^{-1}\hat{f})$ cijela i eksponencijalnog rasta κ_q u proizvoljnom sektoru beskonačnog radijusa. Odatle proizlazi da je $f_{q-1} = T_q f_q$ holomorfna u ishodištu i time je tvrdnja pokazana za ovaj slučaj.

Neka je $j \leq q - 1$ i neka je d nesingularni multismjer, a funkcije $f_1, ..., f_q$ definirane kao u odjeljku prije propozicije. Budući da nema singularnih multismjerova danog nivoa, postoji sektor S beskonačnog radijusa, smjera d_{j+1} i otvorenja većeg od $\frac{\pi}{\kappa_{j+1}}$ u kojem je f_j holomorfna i eksponencijalnog rasta najviše κ_j. Neka je $f_{j+1} = T_{j+1}^{-1} f_j$. Tada je $f_{j+1}(z)$ eksponencijalnog rasta najviše k, gdje vrijedi $\frac{1}{k} = \frac{1}{\kappa_j} + \frac{1}{\kappa_{j+1}}$, na malom sektoru smjera d_{j+1}. Iz prethodnog slijedi da se operator $T_j * T_{j+1}$ može primijeniti kako bismo povezali funkcije f_j i f_{j+1}. Dobivamo ekvivalenciju činjenici da je $\hat{f}$ $\tilde{k}$- sumabilna u multismjeru $\tilde{d} = (d_1, ..., d_{j-1}, d_{j+1}, ..., d_q)$ i vrijedi $f_0 = S_{\tilde{k},\tilde{d}}\hat{f}$. □

Propozicija 5.6.3. *Neka je $k = (k_1, ..., k_q)$, $q \geq 2$ dopustiv i neka je $\tilde{k} = \pi_j(k) = (k_1, ..., k_{j-1}, k_{j+1}, ..., k_q)$ za neki fiksni j, $1 \leq j \leq q$. Tada je svaki $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{k}}$ također element $\mathbb{E}\{z\}_k$ te $\hat{f}$ nema singularnih multismjerova nivoa j. Drugim riječima, multismjer $d = (d_1, ..., d_q)$ je nesingularan za $\hat{f}$, ako je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_k$, ako i samo ako je $\tilde{d} = (d_1, ..., d_{j-1}, d_{j+1}, ..., d_q)$ nesingularan za $\hat{f}$ u $\mathbb{E}\{z\}_{\tilde{k}}$.*

Dokaz. Dokaz je trivijalan za slučaj $j = q$. Neka je $j \neq q$. Za operatore $T_1, ..., T_q$ s pripadnim redovima $\kappa_1, ..., \kappa_q$, možemo koristiti skup

$$T_1, ..., T_{j-1}, T_j * T_{j+1}, T_{j+2}, ..., T_q$$

kao operatore za $\tilde{k}_0 - sumabilnost$. Prema lemi (5.1.1) $T_j * T_{j+1}$ možemo zamijeniti s $T_J \circ T_{j+1}$ odabirom dopuštenog smjera. □

5.7 Optimalni tipovi sumabilnosti

Naučili smo da je formalni red potencija $\hat{f}$ multisumabilan ako postoji dopustivi k tako da je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_k$. Sljedeći teorem pokazuje da postoji optimalni izbor za k.

Teorem 5.7.1. *Neka su $k = (k_1, ..., k_q)$ i $\tilde{k} = (\tilde{k}_1, ...\tilde{k}_{\tilde{q}})$ dopustivi i neka je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_k \cap \mathbb{E}\{z\}_{\tilde{k}}$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) Ako je $\{k_1, ..., k_q\} \cap \{\tilde{k}_1, ...\tilde{k}_{\tilde{q}}\} = \emptyset$, onda $\hat{f}$ konvergira

(b) U slučaju $\{k_1, ..., k_q\} \cap \{\tilde{k}_1, ...\tilde{k}_{\tilde{q}}\} = \{\hat{k}_1, ..., \hat{k}_{\hat{q}}\} \neq \emptyset$, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\hat{k}_1 > \hat{k}_2 > ... > \hat{k}_{\hat{q}}$ (> 0) kako bi $\hat{k} = (\hat{k}_1, ..., \hat{k}_{\hat{q}})$ bio tip multisumabilnosti. Tada je $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\hat{k}}$.

Dokaz. Neka je $\bar{k} = (\bar{k}_1, ...\bar{k}_{\bar{q}})$ tip multisumabilnosti koji odgovara uniji $\{k_1, ..., k_q\} \cup \{\tilde{k}_1, ...\tilde{k}_{\tilde{q}}\}$. Prema propoziciji (5.6.3) $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_{\bar{k}}$ te $\hat{f}$ nema singularnih smjerova nivoa j kad god $\bar{k}_j \notin \{k_1, ..., k_q\} \cup \{\tilde{k}_1, ...\tilde{k}_{\tilde{q}}\}$. Propozicija (5.6.2) i činjenica da $\hat{f} \in \mathbb{E}\{z\}_k$ koji nema singularnih multismjerova niti jednog nivoa konvergira povlači tvrdnju teorema. □

Neka vrijede pretpostavke prethodnog teorema i neka su $d = (d_1, ..., d_q)$ i $\tilde{d} = (\tilde{d}_1, ..., \tilde{d}_{\tilde{q}})$ dopustivi i nesingularni s obzirom na k, odnosno $\tilde{k}$. U prvom slučaju teorema, (a), $(S_{k,d}\hat{f})(z) = (S_{\tilde{k},\tilde{d}}\hat{f})(z) = (S\hat{f})(z)$ za svaki z kada su prva dva izraza definirana. U slučaju (b), uz dodatnu pretpostavku $k_j = \tilde{k}_\nu$, dobivamo $d_j = \tilde{d}_\nu$ za sve j, ν, $1 \leq j \leq q$, $1 \leq \nu \leq \tilde{q}$. Definirajmo $\hat{d}$ tako da $\hat{k}_j = \tilde{k}_\nu$ $(\tilde{k}_{\tilde{\nu}})$ povlači $\hat{d}_j = d_\nu$ $(= \tilde{d}_{\tilde{\nu}})$. To povlači $(S_{k,d}\hat{f})(z) = (S_{\tilde{k},\tilde{d}}\hat{f})(z) = (S_{\hat{k},\hat{d}}\hat{f})(z)$ za svaki z kad god su sva tri izraza definirana. Time smo pokazali da različiti izbori multismjerova općenito daju različite funkcije $(S_{\hat{k},\hat{d}}\hat{f})(z)$, ali nije moguće izborom različitog tipa sumabilnosti k dati još više funkcija kao pripadajućih suma.

Neka je $k_1 > k_2 > ... > k_q > 0$ i neka su κ_j definirane kao do sada. Kažemo da podskup $\mathbb{R}^n$ sadrži gotovo sve multismjerove $d = (d_1, ..., d_q)$, gdje je d_q bilo koja vrijednost u poluotvorenom intervalu $[0, 2\pi)$, osim konačno mnogo njih. Dok za $d_j, ..., d_q$, vrijednost d_{j-1} može biti bilo koji broj sa svojstvom $2\kappa_j|d_j - d_{j-1}| \leq \pi$, $2 \leq j \leq q$, osim konačno mnogo. Uz ovu terminologiju, dobivamo teorem koji je analogan glavnom teoremu dekompozicije:

Teorem 5.7.2. *Neka je $\hat{f}$ multisumabilna. Tada postoje $k_1 > ... > k_q > 0$ tako da za gotovo sve multismjerove $d = (d_1, ..., d_q)$ vrijedi $\hat{f} = \hat{f}_1 + ... + \hat{f}_q$, gdje je $\hat{f}_j \in \mathbb{E}\{z\}_{k_j, d_j}$.*

Bibliografija

[1] Werner Balser, *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*, Springer, 2000

[2] Francesco Giacomo Tricomi, *Differential eqations*, Blackie & Son Limited, 1961

[3] Šime Ungar, *Kompleksna analiza*, PMF - Matematički odsjek, Zagreb, 2009

[4] Wolfgang Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Dover, 1987

[5] Kosaku Yoshida, *Lectures on Differential and Integral Equations*, Dover, 1991

Sažetak

Cilj ovog rada bio je upoznati se s običnim diferencijalnim jednadžbama u kompleksnom prostoru, posebice onima čija su rješenja formalni redovi potencija.

Na početku rada navodimo nekoliko primjera ODJ-a i njihova rješenja, koji nam služe kao motivacijski primjeri, a nakon toga detaljnije gradimo teoriju za formalne redove potencija. Nakon obrade važnih pojmova, kao što su sektor, sektorsko područje, Gevreyeove asimptote, integralni operatori (posebnu važnost imali su Laplaceov i Borelov operator), funkcija jezgre i njihove konvolucije, pozabavili smo se najprije sumabilnošću redova potencija, a kasnije i multisumabilnošću. Upoznali smo se za nekoliko metoda za ispitivanje sumabilnsoti redova, kao što su metode momenata ili faktorijelni redovi. Naučili smo odnos konvolucije i iteracija operatora, glavni teorem dekompozicije te neka pravila za multisumabilnost.

Summary

In this master's thesis we discuss ordinary differential equations in complex space, especially those which solution is formal power series.

In the begining, we introduce a few examples of the ODEs with their solutions, which actually serve as motivation. Afterwards, we introduce important terms like a sector, a sectorial region, a Gevrey asimptotics, integral operators, a kernel function, and then we start to build theory of summability and multisummability. We have seen summability in a direction and a few methods for investigation of summability (moment methods, factorial series). Also, we derive theory for multisummability in direction, Main Decomposition Theorem and some rules for multisummable power series.

Životopis

Viktor Grantverger rođen je 10. kolovoza 1988. godine u Zagrebu. Sin je Branke i Mladena. Pohađao je osnovnu školu Matija Gubec u Zagrebu i završio je s odličnim uspjehom 2003. godine. Upisao se je u X. gimnaziju Ivan Supek u Zagrebu iste godine, a maturirao je 2007. godine ponovno s odličnim uspjehom. Upisao je Preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu i završio ga 2011. godine vrlo dobrim uspjehom. Odlučuje upisati diplomski studij Primijenjena matematika na istom fakultetu i diplomira 2013. godine. Tijekom diplomskog studija dobiva certifikate *Applications of the calculus of variations and optimal control the smooth and nonsmooth cases* u gradu Struga u Makedoniji, a koordinator je bio Donco Dimovski, te *Industrial mathematics* s koordinatorom Andreyom Andreevim.

Do sada, radio je kao profesor matematike i fizike u OŠ Ivana Perkovca u Sutli, a nakon toga kao profesor matematike u OŠ Miroslava Krleže u Zagrebu.

Stolnim tenisom uspješno se bavi od 2003. godine. Osvojio je brojne medalje kako u Hrvatskoj, tako i u susjednim zemljama. U slobodno vrijeme voli trčati i igrati košarku sa prijateljima.