Sveučilište u Zagrebu

Prirodoslovno–matematički fakultet

Matematički odsjek

Tomislav Perić

GEOMETRIJSKE VALNE JEDNADŽBE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, 22. rujna 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Predgovor

U ovom radu izložit će se pregled lokalne teorije linearnih geometrijskih valnih jednadžbi, koje se često se pojavljuju u fizici. Napoznatiji primjeri su sustavi Maxwellovih jednadžbi u elektromagnetizmu, Einsteinove jednadžbe polja u teoriji relativnosti i Klein-Gordonova jednadžba u kvantnoj teoriji polja.

U prvom poglavlju razvijamo osnovnu teoriju diferencijalne geometrije koja nam je potrebna za razvoj teorije geometrijskih valnih jednadžbi s posebnim naglaskom na polu-riemannove mnogostrukosti. Dodatno, uvodimo osnovne pojmove Lorentzove geometrije te navodimo osnovne rezultate vezane za njih.

U drugom poglavlju uvodimo pojam linearnog diferencijalnog operatora koji djeluje na glatkim prerezima vektorskog svežnja. Navodimo osnovne primjere diferencijalnih operatora kao što su gradijent, divergencija i d'Alembertov operator. Uvodimo pojam glavnog simbola preko kojeg definiramo posebnu vrstu linearnog diferencijalnog operatora preko kojeg se definira geometrijska valna jednadžba. Takve operatore nazivamo normalno hiperboličnim operatorima. Također, u drugom poglavlju uvodimo pojam distribucije na mnogostrukosti te pokazujemo osnovna svojstva. Posebno, uvodimo i pojam Rieszovih distribucija preko kojih se konstruira elementarno rješenje geometrijske valne jednadžbe.

U trećem poglavlju konstruiramo lokalno elementarno rješenje linearne geometrijske valne jednadžbe te pokazujemo lokalno postojanje rješenja Cauchyjeve zadaće.

U dodatku uvodimo pojam tenzorskog produkta koji se koristi tijekom cijelog rada.

Sadržaj

Predgovor **i**

Sadržaj **iii**

1 Pregled diferencijalne geometrije **1**
1.1 Glatke mnogostrukosti 1
1.2 Poluriemannove mnogostrukosti 11
1.3 Lorentzova geometrija 24

2 Linearni diferencijalni operatori i distribucije na mnogostrukostima **31**
2.1 Linearni diferencijalni operatori na mnogostrukostima 31
2.2 Distribucije na mnogostrukostima 41
2.3 Rieszove distribucije 46

3 Lokalna teorija linearnih valnih jednadžbi **55**
3.1 Elementarna rješenja 55
3.2 Rješavanje nehomogene jednadžbe na malom području 64
3.3 Cauchyjeva zadaća 67

A Tenzorska analiza **71**
A.1 Multilinearna algebra 71
A.2 Tenzorski produkt vektorskih prostora 73

Literatura **75**

Poglavlje 1

Pregled diferencijalne geometrije

1.1 Glatke mnogostrukosti

Definicija 1.1.1. Topološki prostor M je *topološka* n*-mnogostrukost* (za $n \in \mathbb{N}$) ako vrijedi:

i) M je Hausdorffov

ii) M ima prebrojivu bazu topologije

iii) M je lokalno n-euklidski tj. za svaki $p \in M$ postoji otvoren skup $U \subseteq M$, $p \in U$ i homeomorfizam $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Par (U, φ) nazivamo *kartom* za M, dok je *atlas* mnogostrukosti M familija karata mnogostrukosti M čije domene pokrivaju M. Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ je gladak ako su $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ glatke funkcije (kad su definirane tj. kad je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$). Atlas $\mathcal{A}$ je maksimalan ako za svaki drugi glatki atlas $\mathcal{B}$ mnogostrukosti M vrijedi da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ povlači $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Iskažimo lemu koju ćemo koristiti kasnije; dokaz se može naći u [8, Prop. 1.17.].

Lema 1.1.2. Neka je M topološka n-mnogostrukost i neka je $\mathcal{A}$ pripadni glatki atlas. Tada postoji jedinstven maksimalni atlas mnogostrukosti M koji sadrži $\mathcal{A}$.

Definicija 1.1.3. Kažemo da je $(M, \mathcal{A})$ *glatka* n*-mnogostrukost*, ako je M topološka n-mnogostrukost i $\mathcal{A}$ maksimalni glatki atlas za M.

Ubuduće ćemo glatke mnogostrukosti označavati samo s M umjesto $(M, \mathcal{A})$.

Primjer 1.1.4. i) Svaki otvoren neprazan skup u $\mathbb{R}^n$ je glatka n-mnogostrukost.

ii) Plohe su primjer glatkih 2-mnogostrukosti.

iii) Ukoliko je M glatka m-mnogostrukost i N glatka n-mnogostrukost tada je $M \times N$ glatka $(m+n)$-mnogostrukost, pri čemu na $M \times N$ gledamo produktnu topologiju. Pojedina karta na $M \times N$ je oblika $(\varphi, \psi) : U \times V \to \varphi(U) \times \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, gdje su φ i ψ karte na M i N.

Definicija 1.1.5. Neka su M i N glatke mnogostrukosti i $p \in M$. Kažemo da je $f : M \to N$ glatka u p, ako postoje karte (U, φ) i (V, ψ) iz odgovarajućih maksimalnih atlasa takve da je za $p \in U$, $f(p) \in V$, $f(U) \subseteq V$ i $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ glatka u p. Posebno, ako je $N = \mathbb{R}^n$, f je glatka u p, ako postoji karta (U, φ) za M takva da je $f \circ \varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ glatka u p. Kažemo da je f glatka, ako je glatka u svakoj točki.

Lagano se vidi da ako je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ glatka u p za neke karte (U, φ) i (V, ψ) iz prethodne definicije tada je $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ glatka u p za proizvoljne karte (U', φ') i (V', ψ'), za koje je $p \in U'$, $f(p) \in V'$ i $f(U') \subseteq V'$. Iz toga se lako zaključuje da je kompozicija glatkih funkcija glatka. Slično zaključivanje vrijedi i za glatke funkcije $M \to \mathbb{R}^k$.

Napomena 1.1.6. Analogno definiramo C^k-glatkoću funkcija između mnogostrukosti.

Definicija 1.1.7. Neka je M glatka mnogostrukost i $\mathcal{X} = (X_\alpha, \alpha \in A)$ otvoren pokrivač. *Particija jedinice* upisana u $\mathcal{X}$ je familija neprekidnih funkcija $\psi_\alpha : M \to [0,1]$ koje zadovoljavaju:

i) $\operatorname{supp} \psi_\alpha \subseteq X_\alpha$ za svaki $\alpha \in A$

ii) $\sum\limits_{\alpha \in A} \psi_\alpha = 1$ na M i konačno mnogo $\varphi_\alpha(x) \neq 0$ za svaki $x \in X$.

Particiju jedinice ćemo posebno koristiti kasnije za definiciju integrala na mnogostrukostima. Stoga će nam biti koristan sljedeći rezultat. Dokaz se može naći u [8, Thm. 2.23.].

Teorem 1.1.8 (Egzistencija particije jedinice)**.** Neka je M glatka mnogostrukost i $X = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ otvoren pokrivač mnogostrukosti M. Tada postoji glatka particija jedinice upisana u $\mathcal{X}$.

Neka je M glatka mnogostrukost, $A \subseteq M$ zatvoren i $U \subseteq M$ otvoren takav da $\emptyset \neq A \subseteq U$. Glatka funkcija $\psi : M \to \mathbb{R}$ je funkcija rezanja za A s nosačem u U ako je $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ na A i $\operatorname{supp} \psi \subseteq U$.

Korolar 1.1.9 (Egzistencija funkcije rezanja)**.** Neka je M glatka mnogostrukost, $A \subseteq M$ zatvoren, $A \neq \emptyset$ i $U \subseteq M$ otvoren takav da je $A \subseteq U$. Tada postoji funkcija rezanja za A s nosačem u U.

Dokaz. Neka je $U_1 = U$ i $U_2 = M \setminus A$. Tada je $\{U_1, U_2\}$ otvoreni pokrivač mnogostrukosti M. Neka je $\{\psi_1, \psi_2\}$ pripadna particija jedinice. Tada je ψ_1 funkcija rezanja za A s nosačem u U. $\square$

Tangencijalni prostor

Definicija 1.1.10. Neka je M glatka mnogostrukost i $p \in M$. Linearan funkcional $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ je *derivacija* u p ako za proizvoljne $f, g \in C^\infty(M)$ vrijedi

$$v(fg) = f(p)vg + g(p)vf.$$

Skup svih derivacija u p označavamo s T_pM i nazivamo *tangencijalnim prostorom* mnogostrukosti M u p. Elemente T_pM nazivamo *tangencijalnim vektorima.*

Očito je T_pM vektorski prostor uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja skalarom. Neka je M glatka n-mnogostrukost, $p \in M$ i $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta mnogostrukosti M takva da je $p \in U$ i $i \in \{1, ..., n\}$. Definirajmo $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ za proizvoljni $f \in C^\infty(M)$ formulom,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi^{-1}(p)).$$

Lako se vidi da je $\frac{\partial}{\partial u^i}(p)$ derivacija u p. Tangencijalni vektori su lokalni; zaista, precizan rezultat je dan sljedećom lemom.

Lema 1.1.11. Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$, $v \in T_pM$ i $f, g \in C^\infty(M)$.

i) Ako su f i g jednake na nekoj okolini p, onda je $vf = vg$.

ii) Ako je f konstantna na nekoj okolini p, onda je $vf = 0$.

Dokaz. i) Po linearnosti dovoljno je pokazati da ako je $f = 0$ na nekoj otvorenoj okolini U točke p, onda je $vf = 0$. Neka je $A \subseteq U$ zatvorena okolina točke p i g funkcija rezanja za A s nosačem u U. Iz toga slijedi da je $fg = 0$. Zaista,

$$0 = v(fg) = f(p)vg + g(p)vf = vf,$$

jer $f(p) = 0$ i $g(p) = 1$.

ii) Iz (i) možemo pretpostaviti da je f konstantna na cijelom M, recimo $f = c$, $c \in \mathbb{R}$. Kako je

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1),$$

onda je $v(1) = 0$, pa je $vf = cv(1) = 0$.

□

Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$ i $U \subset M$ otvoren, $U \neq \emptyset$. Tada je U glatka podmnogostrukost mnogostrukosti M i $v \in T_pU$. Za proizvoljni $f \in C^\infty(M)$ definiramo

$$\tilde{v}(f) = v(f_{|_U}).$$

Iz 1.1.11.(i) slijedi da je $\tilde{v} \in T_pM$ dobro definiran. Pokažimo da je $h : v \mapsto \tilde{v}$ linearan izomorfizam. Očito je h linearno preslikavanje. Uzmimo $v \in T_pU$ takav da je $\tilde{v}(f) = 0$ za svaki $f \in C^\infty(M)$, pa je i $v(f_{|_U}) = 0$ za svaki $f \in C^\infty(M)$. Ako je $g \in C^\infty(U)$ i $A \subseteq U$ zatvoren takav da je $p \in A$, onda postoji $\tilde{g} : M \to \mathbb{R}$ takav da je $\tilde{g}_{|_A} = g_{|_A}$. Iz 1.1.11.(i) slijedi

$$v(g) = w(\tilde{g}_{|_U}) = 0,$$

pa je h injekcija. Za $w \in T_pM$ definiramo za svaki $f \in C^\infty(U)$

$$v(f) = w(\tilde{f}),$$

gdje je $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ takav da je $\tilde{f}|_A = f|_A$. Neka je $f \in C^\infty(M)$. Sada imamo

$$\tilde{v}f = v(f_{|_U}) = w(f),$$

pa je h surjekcija. U nastavku ćemo izostaviti pisanje izomorfizma h te ćemo pisati $T_pU = T_pM$.

Lema 1.1.12. Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $0 \in U$ i $f : U \to R$ klase C^∞. Tada za svaki $x \in U$ vrijedi

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} x^i h_i(x),$$

gdje je $h_i \in C^\infty(U)$, $i = 1, .., n$.

Dokaz. Zaista,

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \sum_{i=1}^{n} x^i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\, dt.$$

□

Teorem 1.1.13. Neka je M glatka n-mnogostrukost, $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta za M oko $p \in U$. Tada tangencijalni vektori

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x^n}(p)$$

čine bazu za T_pU.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\varphi(p) = 0$. Uzmimo $f \in C^\infty(U)$ i $v \in T_pU$, pa je $g := f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U))$. Po prethodnoj lemi slijedi

$$g = f(p) + \sum_{i=1}^{n} u^i h_i,$$

što povlačenjem s φ daje

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} x^i (h_i \circ \varphi).$$

Primjenom v dobivamo

$$vf = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

što zbog proizvoljnosti f znači da je

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}(p).$$

Preostaje pokazati da je $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\}$ linearno nezavisan skup. Zaista, ako je $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = 0$, onda je za $j \in \{1, ..., n\}$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \alpha_j.$$

□

Definicija 1.1.14. Za glatko preslikavanje $F : M \to N$ glatkih mnogostrukosti i $p \in M$, *diferencijal* $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ definiramo za proizvoljnu $f \in C^\infty(M)$ formulom:

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F).$$

Globalni diferencijal $dF : TM \to TN$ definiramo kao $dF|_{T_pM} = dF_p$.

Lako se vidi da je dF_p linearno preslikavanje.

Definicija 1.1.15. Neka je M glatka mnogostrukost i $f \in C^\infty(M)$. Diferencijal $df_p \in T_p^*M$ funkcije f u točki $p \in M$ definirajmo za proizvoljni $v \in T_pM$ formulom

$$df_p(v) = vf.$$

Globalni diferencijal df defiramo formulom $df|_{T_pM} = df_p$ za svaki $p \in M$.

Lema 1.1.16. Neka su $F : M \to N$ i $G : N \to K$ glatka preslikavanja između glatkih mnogostrukosti i $p \in M$. Tada je $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.

Dokaz. Neka je $v \in T_pM$ i $f \in C^\infty(K)$. Sada imamo:

$$d(G \circ F)_p(v)(f) = v(f \circ G \circ F) = dF_p(v)(f \circ G) = (dG_{F(p)} \circ dF_p)(v)(f).$$

□

Definicija 1.1.17. Neka je M glatka n-mnogostrukost.

i) *Tangencijalni svežanj* mnogostrukosti M je disjunktna unija $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.

ii) *Kotangencijalni svežanj* mnogostrukosti M je disjunktna unija $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$, gdje je T_p^*M dualni prostor T_pM, za $p \in M$.

Elementi TM su zapravo oblika (p, v), gdje je $p \in M$ i $v \in T_pM$. Često ćemo pisati samo v umjesto (p, v). Analogno, elementi T^*M su oblika (p, ω), gdje je $p \in M$ i $\omega \in T_p^*M$ te ćemo često pisati samo ω.

Propozicija 1.1.18. Za svaku glatku n-mnogostrukost, tangencijalni svežanj TM ima prirodnu topologiju i glatku strukturu što ga čini glatkom $2n$-mnogostrukosti.

Dokaz. Neka je $(p, v) \in TM$ i $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta za koju je $p \in U$. Neka je $v = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Definiramo $\tilde{\varphi} : TM \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{\varphi}(v) = (\varphi(p), \alpha^1, ..., \alpha^n)$. $\tilde{\varphi}$ je očito bijekcija.
M zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, pa postoje karte $(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ pri čemu je $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ prebrojiva baza topologije na M. Definiramo $\mathcal{B} = \{\pi^{-1}(U_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Lako se vidi da je $\mathcal{B}$ prebrojiva baza topologije za TM. Iz toga slijedi da je φ_i homeomorfizam za svaki $i \in N$. Očito TM s definiranom topologijom zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti. Iz toga što je M Hausdorffov lagano slijedi da je i TM Hausdorffov. Dakle, dobili smo da je TM topološka $2n$-mnogostrukost.

Neka su $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ i $(V, \psi = (y^1, ..., y^n))$ karte za M te $U \cap V \neq \emptyset$. Sada imamo $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$. Neka je $(\bar{p}, a) \in \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$, $\bar{p} = \varphi(p)$ i $v \in T_pM$ takav da je $\tilde{\varphi}^{-1}(\bar{p}, a) = (p, v)$. Dakle, $v = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\bar{p}, a) = (\psi \circ \varphi^{-1}(\bar{p}), y^1, ..., y^n)$, gdje je $v = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial y^i}(p)$. Iz 1.1.13 slijedi

$$b^j = v(y^j) = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p),\ j = 1, ..., n.$$

Stoga,

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\bar{p}, a) = ((\psi \circ \varphi^{-1})(\bar{p}), \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial y^1}{\partial x^i}(\varphi^{-1}(\bar{p})), ..., \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial y^n}{\partial x^i}(\varphi^{-1}(\bar{p}))),$$

pa je $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ glatka. Dakle, dobili smo glatki atlas na TM. Iz 1.1.2 slijedi da smo odredili glatku strukturu na TM, pa je TM glatka $2n$-mnogostrukost. □

Definicija 1.1.19. Neka je M glatka mnogostrukost. *Krivulja* je svako glatko preslikavanje $\gamma : I \to M$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval.

Neka je M glatka n-mnogostrukost, $\gamma : I \to M$ krivulja i $t_0 \in I$. *Brzina* krivulje γ u t_0 je $\gamma'(t_0) = d\gamma(\frac{d}{dt}|_{t_0}) \in T_{\gamma(t_0)}M$, gdje $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ čini bazu za $T_{t_0}\mathbb{R}$. Neka je $f \in C^\infty(M)$. Po definiciji diferencijala imamo

$$\gamma'(t_0)f = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0).$$

Uočimo da za proizvoljni $p \in M$ i $v \in T_pM$ možemo konstruirati krivulju $\gamma : I \to M$ takvu da je $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$. Neka je $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta za M takva da je $\varphi(p) = 0$ i $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je $\gamma : \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \to U$, $\gamma(t) = \varphi^{-1}(tv^1, ..., tv^n)$ dobro definirana krivulja. Očito je $\gamma(0) = p$ i

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n} \gamma'(0)(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} (x^i \circ \gamma)'(0) \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) = v.$$

Vektorski svežanj

Definicija 1.1.20. Neka je M glatka m-mnogostrukost, E glatka n-mnogostrukost i $\pi : E \to M$ surjektivno glatko preslikavanje. (E, M, π) je *vektorski svežanj* ranga k ako za proizvoljni $p \in M$ vrijedi:

i) vlakno $E_p := \pi^{-1}(p)$ ima strukturu vektorskog prostora

ii) postoji $p \in U \subseteq M$ otvoren i difeomorfizam $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ takav da je $\pi = \pi_U \circ \phi$, gdje je $\pi_U : U \times \mathbb{R}^k \to U$ projekcija na prvih n koordinata

iii) $\phi|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ je izomorfizam vektorskih prostora.

Preslikavanje ϕ nazivamo *lokalnom trivijalizacijom*, a π *projekcijom*.

Propozicija 1.1.21. Neka je M glatka n-mnogostrukost. (TM, M, π) je vektorski svežanj ranga n, gdje je $\pi : TM \to M$, $\pi(p, v) = p$.

Dokaz. Iz 1.1.18 znamo da je TM glatka $2n$-mnogostrukost. Neka je $p \in M$ i $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta za M td. $p \in U$. Dokažimo da je preslikavanje $\pi : TM \to M$ glatko. Neka je $v \in T_pM$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Tada je $\tilde{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), \alpha^1, ..., \alpha^n)$. $(\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\varphi(p), \alpha^1, ..., \alpha^n) = \varphi(p)$, pa je π glatko u (p, v). Zbog proizvoljnosti $(p, v) \in TM$ slijedi da je π glatko preslikavanje. Očito je π i surjektivno preslikavanje. $\pi^{-1}(p) = T_pM$, pa je $\pi^{-1}(p)$ vektorski prostor za svaki $p \in M$.

Definiramo $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, $\phi(\alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)) = (\varphi(p), \alpha^1, ..., \alpha^n)$. ϕ je bijekcija, linearna je na vlaknima i vrijedi $\pi = \pi_U \circ \phi$. Kompozicija $\phi \circ (\varphi, id_{\mathbb{R}^n})$ je jednaka $\tilde{\varphi}$, gdje je $\tilde{\varphi}$ preslikavanje iz propozicije 1.1.18. $\tilde{\varphi}$ i $(\varphi, id_{\mathbb{R}^n})$ su difeomorfizmi, pa je i ϕ difeomorfizam. □

Primjer 1.1.22. Neka je M glatka n-mnogostrukost.

i) Za $\pi : T^*M \to M$, $T_p^*M \ni v \mapsto p$, sličnom argumentacijom kao u 1.1.21 može se pokazati da je (T^*M, M, π) vektorski svežanj ranga n.

ii) $M \times \mathbb{R}^k$ je vektorski svežanj ranga k. Iz 1.1.4 znamo da je $M \times \mathbb{R}^k$ glatka $(n + k)$-mnogostrukost. Za lokalnu trivijalizaciju može se uzeti identiteta.

Primjer 1.1.23. Neka su E i F vektorski svežnjevi nad glatkom mnogostrukošću M.

i) Dualni vektorski svežanj E^* nad M definiramo tako da je $E_p^* = (E_p)^*$ za svaki $p \in M$.

ii) Tenzorski produkt vektorskih svežnjeva $E \otimes F$ definiramo tako da je $(E \otimes F)_p = E_p \otimes F_p$ za svaki $p \in M$.

iii) $E \boxtimes F$ je vektorski svežanj nad $M \times M$ takav da je $(E \boxtimes F)_{(x,y)} = E_x \otimes F_y$.

Za detalje konstrukcije čitatelja se upućuje na [5, str. 72-73].

Definicija 1.1.24. Neka je (E, M, π) vektorski svežanj. *Prerez* vektorskog svežnja E je neprekidno preslikavanje $s : M \to E$ takvo da je $\pi \circ s = id_M$ tj. $s(p) \in E_p$ za svaki $p \in M$.

Skup svih prereza u E ćemo označavati s $C(M, E)$, a skup svih glatkih prereza s $C^\infty(M, E)$.

Definicija 1.1.25. Neka je (E, M, π) vektorski svežanj, $U \subseteq M$ otvoren i neprazan. Skup $\{E_1, ..., E_k\}$ glatkih prereza u E definiranih na U je *glatki lokalni okvir* ako je $\{E_1(p), ..., E_k(p)\}$ baza za E_p za svaki $p \in U$.

Lema 1.1.26. Neka je (E, M, π) vektorski svežanj ranga k i $p \in M$. Tada postoji glatki lokalni okvir definiran na nekoj otvorenoj okolini točke p.

Dokaz. Iz definicije vektorskog svežnja slijedi da postoji otvorena okolina U točke p i lokalna trivijalizacija $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$. Za $j \in \{1, ..., k\}$ definirajmo preslikavanje $\sigma_j : U \to E$ formulom $\sigma_j(x) = \phi^{-1}(x, e_j)$. Tada je σ_j glatka, jer je ϕ difeomorfizam. Za proizvoljni $x \in U$ direktnim računom dobivamo

$$(\pi \circ \sigma_j)(x) = \pi \circ \phi^{-1}(x, e_j) = \pi_U(x, e_j) = x,$$

pa je $\pi_U \circ \phi = \pi$. Dakle, σ_j je glatki prerez. Podsjetimo se da je za proizvoljni $x \in U$ $\phi|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$ izomorfizam. $\phi(\sigma_j(x)) = (x, e_j)$, pa ϕ preslikava $\{\sigma_1(x), ..., \sigma_k(x)\}$ u standardnu bazu $\mathbb{R}^n$. Stoga je $\{\sigma_1(x), ..., \sigma_k(x)\}$ baza za E_x za svaki $x \in U$. $\square$

Definicija 1.1.27. Neka je M glatka mnogostrukost. *Vektorsko polje* je prerez u tangencijalnom svežnju TM.

Primjer 1.1.28. Neka je $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta mnogostrukosti M i $p \in U$. Tada je $\frac{\partial}{\partial x^j} : U \mapsto TU$, $p \to \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$ glatko vektorsko polje na U za $j = 1, ..., n$ tj. $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ je glatki lokalni okvir u TM.

Neka je M glatka mnogostrukost, $X \in C^\infty(M, TM)$ i $f \in C^\infty(M)$. Djelovanjem X na f dobivamo funkciju $Xf \in C^\infty(M)$, $Xf : p \mapsto X(p)f$. Iz pravila za djelovanje derivacije u p na produkt funkcija dobivamo:

$$X(fg) = fXg + gXf, \text{ za svaki } f, g \in C^\infty(M). \tag{1.1}$$

Preslikavanje $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ je derivacija ako je linearno i zadovoljava (1.1). Time smo dobili da je svako vektorsko polje derivacija. Međutim, vrijedi i obrat.

Lema 1.1.29. Neka je M glatka n-mnogostrukost. Preslikavanje $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ je derivacija ako i samo ako je oblika $Df = Xf$, gdje je $X \in C^\infty(M, TM)$.

Dokaz. Pokazali smo da svako vektorsko polje inducira derivaciju. Dokažimo obrat. Neka je $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ derivacija. Definiramo $X : M \to TM$, $X(p)f = (Df)(p)$, $f \in C^\infty(M)$. Lako se vidi da je $X(p)$ derivacija u p. Dokažimo da je X glatko. Neka je $p \in M$ i $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta mnogostrukosti M takva da je $p \in U$. Neka je $\varphi(p) = x$ i $X(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dobivamo:

$$(\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1})(x) = (x, X^1(\varphi^{-1}(x)), ..., X^n(\varphi^{-1}(x))).$$

$$Xx^i = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = X^i, \; i = 1, ..., n,$$

pa iz toga slijedi da su sve komponentne funkcije glatke u p. Dakle, X je glatko vektorsko polje. $\square$

Definicija 1.1.30. Neka je M glatka mnogostrukost i neka su $X, Y \in C^\infty(M, TM)$. Definiramo preslikavanje $[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.

Direktnim računom se vidi da je $[X, Y]$ derivacija na $C^\infty(M)$, pa iz 1.1.29 slijedi da je $[X, Y] \in C^\infty(M, TM)$. Sada ćemo koristiti terminologiju uvedenu u A.1.

Definicija 1.1.31. Neka je M glatka mnogostrukost i $k \in \mathbb{N}$.

i) *k-kovarijantni tenzorski svežanj* $T^k(T^*M)$ je disjunktna unija $\bigcup_{p\in M} T^k(T_pM)$.

ii) *k-alternirajući tenzorski svežanj* $\Lambda^k(T^*M)$ je disjunktna unija $\bigcup_{p\in M} T^k(T_p^*M)$.

Slično kao u 1.1.21, $T^k(T^*(M))$ i $\Lambda^k(T^*M)$ mogu se opskrbiti strukturom glatkih mnogostrukosti. Stoga ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 1.1.32. Neka je M glatka mnogostrukost i $k \in \mathbb{N}$.

i) *k-kovarijantno tenzorsko polje* na M je prerez u $T^k(T^*M)$.

ii) *k-alternirajuće tenzorsko polje* na M je prerez u $\Lambda^k(T^*M)$.

Prostor svih k-kovarijantnih tenzorskih polja na M označavamo s $T^k(M)$, a k-alternirajućih tenzorskih polja na M s $\Lambda^k(M)$.

Definicija 1.1.33. Neka je M glatka mnogostrukost. *Diferencijalna k-forma* ili kraće k forma na M, je glatki prerez u $\Lambda^k(T^*M)$.

Vanjski produkt dvije diferencijalne forme je definiran po točkama: $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$. Stoga je vanjski produkt k-forme i l-forme $(k + l)$-forma. Iz svojstava vanjskog produkta na $\Lambda^k(T^*M)$ slijedi da je vanjski produkt diferencijalnih formi bilinearan, asocijativan te antikomutativan.

Neka je $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta mnogostrukosti M i ω k-forma na M. Tada iz A.1.8 slijedi da ω možemo prikazati na U kao

$$\omega = \sum_{I=(i_1,...,i_k)} \omega_I \, dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k},$$

gdje je $T_p^*(M) \ni dx^{i_j}(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = v^j$, $p \in U$, $j = 1, ..., k$ i $\omega_I : U \to \mathbb{R}$ glatka za svaki I. Iz A.1.7 slijedi da su funkcije ω_I određene sa

$$\omega_I = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}).$$

1.2 Poluriemannove mnogostrukosti

Definicija 1.2.1. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i q bilinearna forma na V. q je *nedegenerirana* ako vrijedi: $q(v, V) = \{0\}$ implicira da je $v = 0$. Simetrična nedegenerirana bilinearna forma je *skalarni produkt*.

Definicija 1.2.2. Neka je V konačnodimenzionalnan vektorski prostor i q bilinearna forma na V. *Indeks* forme q definiramo kao $\max\{\dim W : W \leq V, q|_{W\times W}$ je negativno definitna$\}$.

Definicija 1.2.3. Metrički tenzor, ili kraće metrika na glatkoj mnogostrukosti M je glatko simetrično 2-kovarijantno tenzorsko polje $g \in T^2(M)$ s konstantnim indeksom koje je nedegenerirano u svakoj točki iz M .

Ponekad ćemo umjesto metričkog tenzora koristiti naziv skalarni produkt.

Definicija 1.2.4. Neka je M glatka mnogostrukost i g metrički tenzor na M. *Poluriemannova mnogostrukost* je par (M, g). Ako je g indeksa 1, onda je (M, g) *Lorentzova mnogostrukost*, a g *Lorentzova metrika*.

Neka je (M, g) poluriemannova mnogostrukost i $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta na M. Tada po A.1.4 g na U možemo prikazati kao

$$g = \sum_{ij=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j,$$

gdje su g_{ij} glatke funkcije na U za svaki i i j. Uočimo da je $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ za svaki i, j. S (g_{ij}) označavamo matričnu funkciju na U takvu da je $(g_{ij})(p)$ $n \times n$ matrica čiji je element na ij-tom mjestu $g_{ij}(p)$. Matrica je očito simetrična za svaki $p \in U$. Neka je $p \in U$, $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pM$ takav da je $(g_{ij})v = 0$ i $w = \sum_{i=1}^{n} w^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pM$ proizvoljan. Pretpostavimo da je $(g_{ij})(p)v = 0$. Tada je

$$g(v, w) = g(w, v) = \sum_{i=1}^{n} w^i \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(p)v^j = 0.$$

Iz toga slijedi da je $v = 0$, pa je $(g_{ij})(p)$ regularna matrica za svaki $p \in U$ te njezin inverz označavamo s $(g^{ij})(p)$ i pripadnu matričnu funkciju s (g^{ij}).

Neka je (M, g) poluriemannova mnogostrukost i $\{E_1, ..., E_n\}$ lokalni glatki okvir. Tada Gram-Schmidtovim postupkom možemo konstruirati ortonormirani glatki lokalni okvir $\{F_1, ..., F_n\}$ tj. $g(F_i, F_j) = 0$ za svaki $i \neq j$ i $g(F_i, F_i) = 1$ za svaki i.

Ponekad ćemo metrički tenzor $g(\cdot, \cdot)$ označavati s $\langle\cdot, \cdot\rangle$ te $g(p)$ s g_p.

Spuštanje i podizanje indeksa

Neka je (M, g) poluriemannova mnogostrukost. Definirajmo preslikavanje $\hat{g} : TM \to T^*M$ formulom

$$\hat{g}(v)(w) = g(v, w)$$

za svaki $p \in M$ i $v, w \in T_pM$. Dakle, za vektorska polja X i Y vrijedi

$$\hat{g}(X)(Y) = g(X, Y).$$

Neka je $\{E_1, ..., E_n\}$ glatki lokalni okvir za TM, $\{e^1, ..., e^n\}$ pripadni glatki dualni okvir i $g = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\, e^i \otimes e^j$ lokalni prikaz metričkog tenzora g. Za vektorsko polje $X = \sum_{i=1}^{n} X^i E_i$ u lokalnim koordinatama, preslikavanje $\hat{g}$ ima lokalni prikaz

$$\hat{g}(X) = \sum_{i,j=1}^{n} (g_{ij} X^i) e^j. \tag{1.2}$$

Stoga je matrica preslikavanja $\hat{g}|_{T_pM}$ u paru baza $\{E^1(p), ..., E^n(p)\}$ i $\{e^1(p), ..., e^n(p)\}$ jednaka matrici preslikavanja g_p u istom paru baza. Za dano vektorsko polje X kažemo da je $\hat{g}(X)$ dobiven *spuštanjem indeksa* te ga označavamo s $X^\flat$.

Matrica (g_{ij}) je regularna u svakoj točki, pa je preslikavanje $\hat{g}$ invertibilno te je matrica $\hat{g}^{-1}$ u istom paru baza kao prije jednaka $(g^{ij})(p)$. Neka je $\omega \in T^*M$ prikazana lokalno kao

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e^i.$$

Iz prijašnjeg zaključivanja slijedi da je $\hat{g}^{-1}(\omega)$ prikazano lokalno kao

$$\hat{g}^{-1}(\omega) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \omega_j E_i. \tag{1.3}$$

Kažemo da je $\hat{g}^{-1}(\omega)$ dobiven *podizanjem indeksa* te ga označavamo s $\omega^\sharp$. Uočimo da smo konstruirali izomorfizam između $C^\infty(M, TM)$ i $C^\infty(M, T^*M)$.

Definicija 1.2.5. Neka je (M, g) poluriemannova mnogostrukost i $f \in C^\infty(M)$. *Gradijent* funkcije f je glatko vektorsko polje definirano formulom

$$\operatorname{grad} f = (df)^\sharp.$$

Iz (1.3) slijedi da je $\operatorname{grad} f$ u lokalnim koordinatama oblika

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Dodatno, uočimo da za proizvoljni $X \in C^\infty(M, TM)$ vrijedi

$$df(X) = \langle \operatorname{grad} f, X\rangle. \tag{1.4}$$

Još jedna važna primjena dizanja indeksa je proširenje operatora traga na kovarijantne tenzore. Neka je $k \geq 2$ i h kovarijantni k-tenzor. Dizanjem zadnjeg indeksa dobivamo $(1, k-1)$-tenzor $h^\sharp$. Stoga je trag tenzora $h^\sharp$ $(k-2)$-kovarijantno tenzorsko polje. Definiramo *trag tenzora h s obzirom na g* formulom

$$\operatorname{tr}_g(h) = \operatorname{tr}(h^\sharp).$$

Trag ćemo uglavnom koristiti za kovarijantne 2-tenzore. Stoga izvedimo formulu koristeći lokalne koordinate. Neka je h kovarijantan 2-tenzor koji je u lokalnim koordinatama oblika

$$h = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Tada je

$$\begin{aligned} h^\sharp &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dx^i \otimes \Big(\sum_{l=1}^{n} g^{lj} \frac{\partial}{\partial x^l}\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} \sum_{l=1}^{n} g^{lj} dx^i \otimes dx^l, \end{aligned}$$

pa je

$$\operatorname{tr}_g(h) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} g^{ij}. \tag{1.5}$$

Definicija 1.2.6. Neka je (M, g) poluriemannova mnogostrukost i $p \in M$. Definirajmo za proizvoljne $\omega, \eta \in T_x^*M$ skalarni produkt na T_p^*M formulom

$$\langle \omega, \eta\rangle := \langle \omega^\sharp, \eta^\sharp\rangle.$$

Za $p \in M$, $\omega, \eta \in T_p^*M$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i(p)$, $\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i dx^i(p)$ koristeći 1.3 dobivamo

$$\begin{aligned} \langle \omega, \eta\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} g^{ij} g^{kl} \omega_j \eta_l \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \omega_j \sum_{l=1}^{n} \eta_l \underbrace{\sum_{k=1}^{n} g_{ik} g^{kl}}_{\delta_i^l} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \omega_j \eta_i = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \omega_i \eta_j. \end{aligned}$$

Koristeći (1.5) lako se vidi da za proizvoljne $\omega, \eta \in T_p^*M$ vrijedi

$$\mathrm{tr}_g(\omega \otimes \eta) = \langle \omega, \eta \rangle. \tag{1.6}$$

Sveze

Definirali smo pojam diferencijabilnosti prereza s u vektorskom svežnju. Htjeli bismo definirati derivaciju s. Pokazuje se da nam je za definiciju derivacije prereza potrebna dodatna struktura. Zato uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 1.2.7. Neka je (E, M, π) vektorski svežanj. *Sveza* u E je linearno preslikavanje

$$\nabla : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$$

koje zadovoljava

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

za proizvoljne $f \in C^\infty(M)$ i $s \in C^\infty(M, E)$.

Može se pokazati da je $C^\infty(M, T^*M \otimes E) = C^\infty(M, T^*M) \otimes C^\infty(M, E)$ te stoga imamo

$$C^\infty(M, T^*M \otimes E) \cong \{\alpha : C^\infty(M, TM) \to C^\infty(M, E) \mid \alpha \text{ linearno preslikavanje}\}.$$

Linearni izomorfizam za proizvoljne $\varphi \in C^\infty(M, T^*M)$, $e \in C^\infty(M, E)$ dan je formulom

$$\varphi \otimes e \mapsto \langle \varphi \otimes e, \cdot \rangle \in C^\infty(M, E),$$

gdje je $\langle \varphi \otimes e, X \rangle = \varphi(X)e$ za proizvoljni $X \in C^\infty(M, TM)$. Neka je $X \in C^\infty(M, TM)$ i $s \in C^\infty(M, E)$. Definirajmo

$$\nabla_X s := \langle \nabla s, X \rangle. \tag{1.7}$$

Uočimo da iz (1.7) slijedi da smo svezu mogli definirati kao preslikavanje $\nabla : C^\infty(M, TM) \times C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, koje zadovoljava sljedeća svojstva:

i) $\nabla_X Y$ je $C^\infty(M)$-linearno u X: za $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ i $X_1, X_2 \in C^\infty(M, TM)$,

$$\nabla_{f_1X_1 + f_2X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y,$$

ii) $\nabla_X Y$ je linearno u Y: za $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ i $Y_1, Y_2 \in C^\infty(M, E)$,

$$\nabla_X(a_1Y_1 + a_2Y_2) = a_1\nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2,$$

iii) ∇ zadovoljava pravilo produkta: za $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y.$$

Koristit ćemo obje definicije. Uočimo da je sveza zapravo pravilo za deriviranje prereza u vektorskom svežnju.

Propozicija 1.2.8. Neka je M glatka mnogostrukost i E vektorski svežanj nad M. Za svaki $X \in C^\infty(M, TM)$, $Y \in C^\infty(M, E)$ i $p \in M$ kovarijantna derivacija $\nabla_X Y$ ovisi samo o vrijednostima X i Y na proizvoljno maloj okolini točke p. Preciznije, ako je $X = \tilde{X}$ i $Y = \tilde{Y}$ na nekoj otvorenoj okolini točke p, onda je $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$.

Dokaz. Promotrimo prvo Y. Dovoljno je dokazati da ako je $Y = 0$ na nekoj otvorenoj okolini točke p, onda je $\nabla_X Y|_p = 0$ za proizvoljni $X \in C^\infty(M, E)$. Neka je $Y \in C^\infty(M, E)$ takav da je $Y = 0$ na nekoj otvorenoj okolini U točke p. Dodatno, neka je $\varphi \in C^\infty(M)$ funkcija rezanja s nosačem u U takva da je $\varphi(p) = 1$. Iz toga što je $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U$ slijedi da je $\varphi Y = 0$ na cijelom M. Direktnim računom dobivamo

$$0 = \nabla_X(0 \cdot \varphi Y) = \nabla_X(\varphi Y) = \varphi \nabla_X Y + (X\varphi)Y. \tag{1.8}$$

Kako je $Y \equiv 0$ na nosaču funkcije φ slijedi da je drugi član s desne strane jednak 0. Primjenom (1.8) u točki p dobivamo da je $\nabla_X Y|_p = 0$. Argument za X je sličan. □

Slično se pokazuje da ako je $C^\infty(M, E) \ni Y \equiv 0$ na nekoj otvorenoj okolini točke p, onda je $\nabla Y(p) = 0$. Stoga, možemo definirati djelovanje sveze na lokalnim prerezima. Naime, za lokalni prerez uzmemo bilo koje njegovo proširenje na cijeli M (proširenje možemo dobiti korištenjem funkcije rezanja). Zbog prijašnjeg razmatranja preslikavanje će biti dobro definirano.

Prikažimo svezu ∇ u vektorskom svežnju E u lokalnim koordinatama. Neka je $\{E_1, ..., E_n\}$ glatki lokalni okvir vektorskog svežnja E definiran na otvorenom skupu $U \subseteq M$. Kako je $\nabla E_j \in C^\infty(M, T^*M \otimes E)$, $\nabla E_j(p)$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora oblika $dx^i(p) \otimes E_k(p)$ za svaki $p \in U$. Stoga možemo definirati n^3 glatkih funkcija $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$ takvih da je

$$\nabla E_j = \sum_{i,k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} dx^i \otimes E_k. \tag{1.9}$$

Funkcije Γ^k_{ij}, $i, j, k \in 1, ..., n$ nazivamo Christoffelovim simbolima sveze ∇. Neka je $s \in$

$C^\infty(M, E)$ takav da je $s = \sum_{i=1}^{n} s^i E_i$ u lokalnim koordinatama. Tada je

$$\begin{aligned}
\nabla s &= \sum_{i=1}^{n} \nabla(s^i E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (ds^i \otimes E_i + s^i \nabla E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(ds^i \otimes E_i + \sum_{j,k=1}^{n} s^i \Gamma^k_{ji} dx^j \otimes E_k \right).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Nama će od posebnog interesa biti sveze u tangencijalnom svežnju. Neka je (E_i) lokalni glatki okvir za TM definiran na U, $U \subseteq M$ otvoren. Uočimo da iz (1.9) slijedi da je

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} E_k.$$

Iz (1.10) slijedi da je

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} (X(Y^k) + \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j \Gamma^k_{ij}) E_k. \tag{1.11}$$

Za svaku glatku mnogostrukost M, postoji sveza u TM. Naime, svezu možemo konstruirati na sljedeći način. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ otvoreni pokrivač od M takav da je svaki U_α domena karte φ_α. Neka je $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ pripadna particija jedinice. Na svakom U_α možemo definirati svezu ∇^α preko (1.11). Tada možemo konstruirati svezu u TM:

$$\nabla_X Y = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla^\alpha_X Y, \, X, Y \in C^\infty(M, TM).$$

Definicija 1.2.9. Neka je M poluriemannova mnogostrukost i ∇ sveza u TM. *Divergenciju* glatkog vektorskog polja X definiramo formulom

$$\operatorname{div} X := \operatorname{tr}(\nabla X).$$

Neka je $Y \in C^\infty(M, TM)$ u lokalnim kordinatama oblika

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Izračunajmo div Y u lokalnim koordinatama. Iz (1.10) slijedi da je

$$\begin{aligned}\operatorname{div} Y = \operatorname{tr}(\nabla Y) &= \sum_{i=1}^{n} \left(dY^i(\frac{\partial}{\partial x^i}) + \sum_{j,k=1}^{n} Y^i \Gamma^k_{ji} dx^j(\frac{\partial}{\partial x^k}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y^i}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^{n} Y^j \Gamma^i_{ij}.\end{aligned}$$

Lema 1.2.10. Neka je M poluriemannova mnogostrukost, $f \in C^\infty(M)$ i $Y \in C^\infty(M, TM)$. Tada je

$$\operatorname{div}(fY) = f \operatorname{div} Y + \langle \operatorname{grad} f, Y \rangle. \tag{1.12}$$

Dokaz. Neka je $Y \in C^\infty(M, TM)$ u lokalnim kordinatama oblika

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Računom dobivamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fY) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (fY^i)}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^i_{ij} f Y^j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} + f \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y^i}{\partial x^i} + f \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^i_{ij} f Y^j \\ &= df(Y) + f \operatorname{div} Y \\ &= f \operatorname{div} Y + \langle \operatorname{grad} f, Y \rangle.\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti smo iskoristili (1.4). □

Definicija 1.2.11. Neka je M glatka mnogostrukost. Dodatno, neka su E i F vektorski svežnjevi nad M, ∇^E sveza u E i ∇^F sveza u F. Definirajmo svezu ∇ na $E \otimes F$ formulom

$$\nabla(s_1 \otimes s_2) = \nabla^E s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^F s_2 \tag{1.13}$$

za proizvoljne $s_1 \in C^\infty(M, E)$ i $s_2 \in C^\infty(M, F)$.

Definicija 1.2.12. Neka je M glatka mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M i ∇^E sveza u E. Definirajmo svezu ∇^{E^*} u E^* formulom

$$d(\varphi(\xi)) = (\nabla^{E^*} \varphi)(\xi) + \varphi(\nabla^E \xi), \tag{1.14}$$

gdje su $\varphi \in C^\infty(M, E^*)$, $\xi \in C^\infty(M, E)$ proizvoljni.

Neka je M glatka mnogostrukost i E vektorski svežanj nad M. Ako imamo definiranu svezu ∇^E u E i svezu ∇^{TM} u TM, onda iz prethodnih dviju definicija slijedi da imamo definiranu i svezu ∇^k na $C^\infty(M, \underbrace{T^*M \otimes ... \otimes T^*M}_{k puta} \otimes E)$ za $k \in \mathbb{N}$. Stoga *kovarijantnu derivaciju drugog reda* možemo definirati kao kompoziciju

$$C^\infty(M, E) \xrightarrow{\nabla^E} C^\infty(M, T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla^1} C^\infty(M, T^*M \otimes E).$$

Analogno definiramo *kovarijantnu derivaciju višeg reda.*

Neka je ∇ sveza u TM. Izračunajmo Christoffelove simbole inducirane sveze u T^*M. Induciranu svezu ćemo isto označiti s ∇. Neka su $X, Y \in C^\infty(M, TM)$ i $\varphi \in C^\infty(M, T^*M)$. Iz 1.14 slijedi da je

$$X(\varphi(Y)) = (\nabla_X \varphi)(Y) + \varphi \nabla_X Y.$$

Za $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^l}$ i $\varphi = dx^j$ u lokalnim koordinatama dobivamo

$$0 = d(\delta_{ij}) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j)(\frac{\partial}{\partial x^l}) + dx^j(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}}),$$

pa je

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j)(\frac{\partial}{\partial x^l}) = -\Gamma^j_{il}.$$

Iz toga slijedi da je

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j)(\frac{\partial}{\partial x^l}) = -\sum_{l=1}^{n} \Gamma^j_{il} dx^l, \tag{1.15}$$

pa su Christoffelovi simboli $\tilde{\Gamma}^l_{ij}$ sveze u T^*M jednaki $-\Gamma^j_{il}$ za svaki i, l, j.

Iskažimo sljedeći teorem koji se često naziva osnovnim teoremom poluriemannove geometrije. Dokaz teorema može se pronaći u [9, Thm. 5.10]

Teorem 1.2.13. Neka je (M, g) poluriemannova mnogostrukost. Tada postoji jedinstvena sveza u TM takva da je $\nabla g = 0$ i $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ za svaki $X, Y \in C^\infty(M, TM)$.

Definicija 1.2.14. Svezu iz prethodnog teorema nazivamo *Levi-Civitinovom* svezom.

Paralelni prijenos i geodetske krivulje

Definicija 1.2.15. Neka je M glatka mnogostrukost, $\gamma : I \to M$ glatka krivulja i E vektorski svežanj nad M. *Prerez u E duž γ* je neprekidno preslikavanje $V : I \to E$ takvo da je $V(t) \in E_{\gamma(t)}$ za svaki $t \in I$.

U slučaju $E = TM$ govorit ćemo o vektorskom polju duž γ.

Definicija 1.2.16. Neka je M glatka mnogostrukost, $\gamma : I \to M$ glatka krivulja i $V : I \to M$ glatki prerez u E duž γ. Za V kažemo da je *proširiv*, ako postoji glatki prerez $\tilde{V}$ u E definiran na nekoj otvorenoj okolini slike γ takav da je $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$ za svaki $t \in I$.

Skup svih glatkih prereza u E duž krivulje γ ćemo označavati s $C^\infty_\gamma(E)$.

Primjer 1.2.17. Neka je M glatka mnogostrukost i $\gamma : I \to M$ glatka krivulja. Tada je $I \ni t \mapsto \gamma'(t)$ glatko vektorsko polje duž γ.

Teorem 1.2.18 (Kovarijantna derivacija duž krivulje)**.** Neka je M glatka mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M, $\gamma : I \to M$ glatka krivulja i ∇ sveza u E. Tada postoji jedinstven operator $D_t : C^\infty_\gamma(E) \to C^\infty_\gamma(E)$ koji ima sljedeća svojstva:

i) D_t je linearan

ii) $D_t(fV) = f'V + fD_tV$ za proizvoljne $f \in C^\infty(I)$ i $V \in C^\infty_\gamma(E)$

iii) Ako je $V \in C^\infty(\gamma)$ proširiva, onda za svako proširenje $\tilde{V}$ prereza V vrijedi

$$D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}|_{\gamma(t)}.$$

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost. Pretpostavimo da je D_t takav operator i neka je $t_0 \in I$ proizvoljan. Neka je $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta mnogostrukosti M takva da je $\gamma(t_0) \in U$ i $\{E_1, ..., E_n\}$ gladak lokalni okvir vektorskog svežnja E koji je definiran na U. Tada $V \in C^\infty_\gamma(E)$ možemo prikazati za t blizu t_0 kao

$$V(t) = V^j(t)E_j|_{\gamma(t)},$$

gdje su V^j glatke funkcije definirane na nekoj otvorenoj okolini točke t_0. Uočimo da je E_j proširiv za svaki j, pa iz svojstava D_t slijedi da je

$$\begin{aligned} D_tV(t) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{V}^j E_j|_{\gamma(t)} + V^j(t)\nabla_{\gamma'(t)}E_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{V}^k + \sum_{i,j=1}^{n} \dot{\gamma}^i(t)V^j(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\right) E_k|_{\gamma(t)}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

gdje je $\gamma^i = (x^i \circ \gamma)$ za svaki i, pa je takav operator jedinstven. Dokažimo egzistenciju. Sliku krivulje Γ možemo prekriti s domenama karata te na domeni svake karte D_t možemo definirati pomoću (1.16). Jedinstvenost garantira da je operator dobro definiran. □

Definicija 1.2.19. Neka je M glatka mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M, ∇ sveza u E i $\gamma : I \to M$ krivulja. Ako za $V \in C^\infty_\gamma(E)$ vrijedi

$$D_t V = 0$$

za svaki $t \in I$, onda za V kažemo da je *paralelan* duž γ.

Iz (1.16) slijedi da je V paralelan duž γ ako i samo ako

$$\dot{V}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{n} V^j \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t) = 0 \tag{1.17}$$

za $k = 1, ..., n$. Koristeći teoriju običnih diferencijalnih jednadžbi može se pokazati sljedeći teorem.

Teorem 1.2.20. Neka je M glatka mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M i ∇ sveza u E. Za danu krivulju $\gamma : I \to M$, $t_0 \in I$ i $v \in E_{\gamma(t_0)}$ postoji jedinstven glatki prerez V u E duž γ takav da je $V(t_0) = v$.

Prerez iz prethodnog teorema nazivamo *paralelnim prijenosom* vektora v duž γ.

Definicija 1.2.21. Neka je M glatka mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M, ∇ sveza u E i $\gamma : I \to M$ krivulja i $t_0 \in I$. Definirajmo preslikavanje $P_{t_0 \to t_1} : E_{t_0} \to E_{t_1}$ formulom $P_{t_0 \to t_1}(v) = V(t_1)$, gdje je V paralelan prijenos vektora $v \in E_{\gamma(t_0)}$ duž γ.

Lako se vidi da je preslikavanje $P_{t_0 \to t_1}$ linearno. Zapravo, $P_{t_0 \to t_1}$ je izomorfizam, jer je $P_{t_1 \to t_0}$ njegov inverz.

Neka je $\{b_1, ..., b_n\}$ baza za $T_{\gamma(t_0)}$. Tada svaki b_i možemo paralelno prenijeti duž krivulje γ. Na taj način dobivamo paralelne glatke prereze $E_1, ..., E_n$ u E duž γ. Preslikavanje $P_{t_0 \to t_1}$ je izomorfizam za svaki $t_0, t_1 \in I$, pa vektori $E_1(t), ..., E_n(t)$ čine bazu za $E_{\gamma(t)}$ za svaki $t \in I$. Skup $\{E_1, ..., E_n\}$ nazivamo paralelni okvir duž γ. Svaki glatki prerez V u E duž γ možemo prikazati kao

$$V = \sum_{i=1}^{n} V^i E_i,$$

pa iz svojstava operatora D_t dobivamo

$$D_t V(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{V}^i(t) E_i(t).$$

Teorem 1.2.22. Neka je M glatka mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M, ∇ sveza u E, $\gamma : I \to M$ krivulja i V glatki prerez u E duž γ. Tada za svaki $t_0 \in I$ vrijedi

$$D_t V(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{P_{t_1 \to t_0} V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{1.18}$$

Dokaz. Neka je $\{E_1, ..., E_n\}$ paralelni okvir duž γ i neka je $V = \sum_{i=1}^{n} \dot{V}^i E_i$. Za svaki $t_1 \in I$ paralelni prijenos vektora $V(t_1)$ duž γ je prerez $W(t) = \sum_{i=1}^{n} V^i(t_1)E_i(t)$ duž γ, pa je

$$P_{t_1 \to t_0} V(t_1) = \sum_{i=1}^{n} V^i(t_1)E_i(t_0).$$

Uvrštavanjem u desnu stranu (1.18) i puštanjem limesa dobivamo da je desna strana jednaka

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{V}^i(t_0)E_i(t_0) = D_t V(t_0).$$

□

Korolar 1.2.23. Neka je M glatka mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M, ∇ sveza u E, $X \in C^\infty(M, TM)$ i $Y \in C^\infty(M, E)$. Tada je

$$\nabla_X Y|_p = \lim_{h \to 0} \frac{P_{h \to 0} Y(\gamma(h)) - Y(p)}{h},$$

gdje je γ bilo koja krivulja takva da je $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X(p)$.

Definicija 1.2.24. Neka je M glatka mnogostrukost i ∇ sveza u TM. Za krivulju $\gamma : I \to M$ kažemo da je *geodetska*, ako je $D_t\gamma' = 0$.

Iz (1.16) slijedi da je γ geodetska krivulja ako i samo ako

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0$$

Kao i prije koristeći teoriju običnih diferencijalnih jednadžbi može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.2.25. Neka je M glatka mnogostrukost i ∇ sveza u TM. Za svaki $p \in M$, $w \in T_pM$ i $t_0 \in \mathbb{R}$ postoji otvoren interval $I \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži t_0 i geodetska krivulja $\gamma : I \to M$ takva da je $\gamma(t_0) = p$ i $\gamma'(t_0) = w$. Svake dvije takve geodetske krivulje su jednake na presjeku svojih domena.

Za geodetsku krivulju kažemo da je *maksimalna* ako se ne može proširiti do geodetske krivulje definirane na većem intervalu.

Korolar 1.2.26. Neka je M glatka mnogostrukost i ∇ sveza u TM. Za svaki $p \in M$ i $v \in T_pM$ postoji jedinstvena maksimalna geodetska krivulja $\gamma : I \to M$ takva da je $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$.

Neka je M poluriemannova mnogostrukost. Napomenimo da se može pokazati da je preslikavanje $I \ni t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$ konstantno ukoliko je ∇ Levi-Civitina sveza.

Neka je M poluriemannova mnogostrukost i ∇ Levi-Civitina sveza. Za $p \in M$ i $v \in T_pM$ označimo s γ_v maksimalnu geodetsku krivulju takvu da je $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$. Nije teško pokazati sljedeću lemu. Za detalje čitatelja se upućuje na [9, Lemma 5.18].

Lema 1.2.27. Neka je M poluriemannova mnogostrukost i ∇ Levi-Civitina sveza. Za svaki $p \in M$, $v \in T_pM$ i $c, t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$$

kad god je bilo koja strana dobro definirana.

Za $p \in M$ definirajmo skup

$$\mathcal{E} = \{v \in TM \mid \gamma_v \text{ je definiran na intervalu koji sadrži } [\,0, 1]\,\}.$$

Uočimo da je $0 \in \mathcal{E}$. Iz prethodne leme slijedi da je $\mathcal{E}$ zvjezdast s obzirom na 0. *Eksponencijalno preslikavanje* $\exp_p : \mathcal{E} \to M$ definirano je formulom

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1),$$

gdje je $v \in \mathcal{E}$ proizvoljan. Iskažimo sljedeću lemu koju ćemo koristiti više puta. Za dokaz čitatelja se upućuje na [9, Prop. 5.19].

Lema 1.2.28. Neka je M poluriemannova mnogostrukost. Za svaku točku $p \in M$ postoji otvorena okolina U točke 0 u T_pM i otvorena okolina V točke p u M takva da je $\exp_p : U \to V$ difeomorfizam.

Integracija

U ovom pododjeljku iskazujemo osnovne pojmove i rezultate vezane za integraciju gustoća i funkcija na mnogostrukostima. Za detalje čitatelja se upućuje na [8, Chapter 16] ili [9, str. 30].

Definicija 1.2.29. Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor. *Gustoća* na V je preslikavanje

$$\mu : \underbrace{V \times ... \times V}_{n \text{ puta}} \to \mathbb{R}$$

takvo da za svaki linearan operator $T : V \to V$ vrijedi

$$\mu(Tv_1, ..., Tv_n) = |\det T| \mu(v_1, ..., v_n),$$

gdje su $v_1, ..., v_n \in V$ proizvoljni.

Za gustoću μ kažemo da je pozitivna ako je $\mu(v_1, ..., v_n) > 0$ kad god je $\{v_1, ..., v_n\}$ baza za V. Pomoću svakog alternirajućeg n-tenzora $\mu \neq 0$ možemo definirati pozitivnu gustoću $|\mu|$ formulom

$$|\mu|(v_1, ..., v_n) = |\mu(v_1, ..., v_n)|,$$

gdje su $v_1, ..., v_n \in V$ proizvoljni. Skup $\mathcal{D}(V)$ svih gustoća na V je 1-dimenzionalan vektorski prostor razapet s $|\mu|$ za svaki n-alternirajući tenzor $\mu \neq 0$. Za glatku mnogostrukost M definirajmo skup

$$\mathcal{D}M = \bigcup_{p \in M} \mathcal{D}(T_pM),$$

gdje je unija disjunktna. Skup $\mathcal{D}M$ nazivamo *svežanj gustoće*. Može se pokazati da je $\mathcal{D}M$ vektorski svežanj ranga 1 s lokalnim okvirom $|dx^1 \wedge ... \wedge dx^n|$ uz danu kartu na M.

Definicija 1.2.30. Neka je M glatka mnogostrukost. *Gustoća* na M je prerez u $\mathcal{D}M$.

Gustoću $d\mu$ na M u lokalnim koordinatama možemo prikazati formulom

$$d\mu = \mu|dx^1 \wedge ... \wedge dx^n|$$

za neku lokalno definiranu neprekidnu funkciju μ.

Definicija 1.2.31. Neka je $F : M \to N$ glatko preslikavanje između mnogostrukosti M i N i neka je $d\mu$ gustoća na N.*Povlak* gustoće $d\mu$ je gustoća $F^*d\mu$ na M definirana formulom

$$(F^*d\mu)(p)(v_1, ..., v_n) = d\mu(F(p))(dF_p(v_1), ..., dF_p(v_n)),$$

gdje su $p \in M$ i $v_1, ..., v_n \in T_pM$ proizvoljni.

Definirajmo prvo integral gustoće na podskupu $\mathbb{R}^n$. Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $d\mu$ gustoća definirana na $\overline{D}$. Tada je $d\mu = \mu|dx^1 \wedge ... \wedge dx^n|$ za neku neprekidnu funkciju $\mu : \overline{D} \to \mathbb{R}$. Integral gustoće $d\mu$ nad D definiramo formulom

$$\int_D \mu|dx^1 \wedge ... \wedge dx^n| = \int_D \mu dx^1 ... dx^n.$$

Neka je M glatka mnogostrukost i $d\mu$ gustoća na M čiji je nosač sadržan u U za neku kartu (U, φ). Integral gustoće $d\mu$ nad M definiramo formulom

$$\int_M d\mu = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* d\mu.$$

Korištenjem particije jedinice definiciju možemo proširiti na proizvoljnu gustoću $d\eta$ na M formulom

$$\int_M d\eta = \sum_{i \in A} \int_M \psi_i d\eta,$$

gdje je $(\psi_i, i \in A)$ particija jedinice upisana u otvoreni pokrivač mnogostrukosti koji se sastoji od domena karata mnogostrukosti M. Može se pokazati da je integral dobro definiran tj. da ne ovisi o odabiru karata i particiji jedinice.

Neka je M glatka mnogostrukost, $d\mu$ pozitivna gustoća na M i $f : M \to \mathbb{R}$ neprekidna s kompaktnim nosačem. *Integral funkcije f na M* definiramo kao $\int_M f d\mu < +\infty$.

Ukoliko pretpostavimo da je M poluriemannova (Riemannova) mnogostrukost dimenzije n, može se pokazati da postoji jedinstvena glatka pozitivna gustoća dV na M takva da je za svaki lokalni ortonormirani okvir $\{E_1, ..., E_n\}$ vrijedi $dV(E_1, ..., E_n) = 1$. Tada za dV kažemo da je poluriemannova (Riemannova) gustoća.

1.3 Lorentzova geometrija

U ovom odjeljku predstavit ćemo osnovne pojmove i rezultate vezane uz Lorentzove mnogostrukosti koje ćemo koristiti kasnije. Navedimo prvo nekoliko primjera.

Primjer 1.3.1. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljne $x = (x^i), y = (y^i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ definirajmo skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ formulom

$$\langle x, y \rangle = -x^0 y^0 + \sum_{i=1}^{n} x^i y^i.$$

Lako se vidi da je $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentzova mnogostrukost dimenzije $n + 1$. $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazivamo *prostorom Minkowskog*.

Primjer 1.3.2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt iz prethodnog primjera. Definirajmo glatko preslikavanje $\gamma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ formulom

$$\gamma(x) = \langle x, x \rangle,$$

gdje je $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ proizvoljan. Definirajmo za $r > 0$

$$S_1^n(r) := \gamma^{-1}(r^2).$$

Može se pokazati da je $(S_1^n(r), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Lorentzova mnogostrukost dimenzije n. $(S_1^n(r), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazivamo *de Sitterovim prostorom*.

Primjer 1.3.3. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $g := \sum_{i=0}^{1} dx^i \otimes dx^i + \sum_{i=2}^{n} dx^i \otimes dx^i$ skalarni produkt indeksa 2 na R^{n+1} i $x \mapsto g(x, x) =: \tilde{\gamma}(x)$ glatka funkcija na $\mathbb{R}^{n+1}$. Za $r > 0$ definirajmo

$$H_1^n(r) := \tilde{\gamma}^{-1}(-r^2).$$

Može se pokazati da je $(H_1^n(r), g)$ Lorentzova mnogostrukost dimenzije n. $(H_1^n(r), g)$ nazivamo *anti-de Sittereovim prostorom*.

Primjer 1.3.4. Neka je (M, g) Lorentzova mnogostrukost i $U \subseteq M$ neprazan otvoren skup. Tada je $(U, g|_{U\times U})$ Lorentzova mnogostrukost.

Definicija 1.3.5. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor sa skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indeksa 1. Za $v \in V$ kažemo da je *vremenski* ako je $\langle x, x\rangle < 0$, *svjetlosni* ako je $\langle x, x\rangle = 0$ ili $v = 0$, *kauzalni* ako je svjetlosni ili vremenski, svemirski ako je $\langle x, x\rangle > 0$ i $v \neq 0$.

Prethodnu definiciju ćemo pretežno koristiti za tangencijalne vektore, odnosno V će biti tangencijalni prostor Lorentzove mnogostrukosti u nekoj točki.

Skup svih vremenskih vektora iz V je unija dva disjunktna povezana skupa. Vektore iz jednog od ta dva povezana skupa ćemo nazvati *buduće orijetiranima* ili *orijentiranima prema budućnosti*, dok iz drugog *orijentiranima prema prošlosti*. Sami ćemo morati odabrati koji će skup biti orijentiran prema budućnosti. Time smo direktno odredili i koji će skup biti orijentiran prema prošlosti. Na Lorentzovoj mnogostrukosti ovaj odabir moramo napraviti na svakom tangencijalnom prostoru te taj odabir mora ovisiti neprekidno o točki Lorentzove mnogostrukosti. Time smo motivirali definiciju vremenske orijentiranosti.

Definicija 1.3.6. Neka je M Lorentzova mnogostrukost. Za vektorsko polje X kažemo da je *vremensko* ako je $X(p)$ vremenski za svaki $p \in M$, a *kauzalno* ako je $X(p)$ kauzalan za svaki $p \in M$.

Vremenska orijentacija je dana s neprekidnim vremenskim vektorskim poljem τ na M, koje poprima vrijednosti u odabranim povezanim skupovima.

Definicija 1.3.7. Za Lorentzovu mnogostrukost M kažemo da je *vremenski orijentirana*, ako postoji vremensko vektorsko polje τ na M. Lorentzovu mnogostrukost zajedno s takvim vektorskim poljem τ nazivamo *vremenski orijentiranom Lorentzovom mnogostrukošću*.

Ubuduće ćemo vremenski orijentiranu Lorentzovu mnogostrukost označavati samo s M, umjesto (M, τ).

Definicija 1.3.8. C^1-krivulja je buduće orijentirana, ako su svi tangencijalni vektori krivulje buduće orijentirani. Analogno definiramo pojam da je C^1-krivulja orijentirana prema prošlosti. Za C^1-krivulju kažemo da je vremenska ako su svi tangencijalni vektori krivulje vremenski, kauzalna ako su svi tangencijalni vektori krivulje kauzalni.

Definicija 1.3.9. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Neprekidna krivulja $c : I \to \mathbb{R}$ je *neproširiva*, ako ne postoji reparametrizacija krivulje koja ima neprekidno proširenje.

Primjer 1.3.10. Neprekidna krivulja $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = (\operatorname{arctg} t, 0, ..., 0)$ nije neproširiva, jer se može reparametrizirati kao $\tilde{c} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{c}(t) = (t, 0, ..., 0)$, koja ima neprekidno proširenje. Neprekidna krivulja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (t, 0, ..., 0)$ je neproširiva.

Definicija 1.3.11. Neka je M vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost. Za $x \in M$ definirajmo skup

$$I_+^M(x) := \{y \in M \mid \text{postoji buduće orijentirana vremenska } C^1\text{-krivulja koja spaja } x \text{ i } y\},$$

kojeg nazivamo *kronološka budućnost* točke x u M.

Definicija 1.3.12. Neka je M vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost. Za $x \in M$ definirajmo skup

$$J_+^M(x) := \{y \in M \mid \text{postoji buduće orijentirana kauzalna } C^1\text{-krivulja koja spaja } x \text{ i } y\},$$

kojeg nazivamo *kauzalna budućnost* točke x u M.

Definicija 1.3.13. Neka je M vremenski orijentirana Lorentzovu mnogostrukost. Kronološku budućnost skupa $A \subseteq M$ definiramo kao

$$I_+^M(A) := \bigcup_{x \in A} I_+^M(x).$$

Slično, kauzalna budućnost skupa $A \subseteq M$ je

$$J_+^M(A) := \bigcup_{x \in A} J_+^M(x).$$

Napomena 1.3.14. Na sličan način definiramo kronološku i kauzalnu prošlost točke $x \in M$ ili podskupa $A \subseteq M$. Označavamo ih redom $I_-^M(x)$, $I_-^M(A)$, $J_-^M(x)$ i $J_-^M(A)$.

Definicija 1.3.15. Neka je M Lorentzova mnogostrukost. Za područje $\Omega \subseteq M$ kažemo da je *geodetski zvjezdasto* s obzirom na neku točku $x \in M$, ako postoji otvoren podskup $\Omega' \subseteq T_x M$ koji je zvjezdast s obzirom na 0 takav da je Riemannovo eksponencijalno preslikavanje $\exp_x : \Omega' \to \Omega$ difeomorfizam.

Definicija 1.3.16. Neka je M Lorentzova mnogostrukost. Za područje $\Omega \subseteq M$ kažemo da je *geodetski konveksno*, ili kraće *konveksno*, ako je geodetski zvjezdasto s obzirom na svaku točku $x \in \Omega$.

Napomena 1.3.17. Za geodetski zvjezdasto područje Ω s obzirom na x vrijedi da je $\exp_x(J_\pm(0) \cap \Omega') = J_\pm^\Omega(x)$ i $\exp_x(I_\pm(0) \cap \Omega') = I_\pm^\Omega(x)$ (za detalje pogledati [2, Cor. 2.13.]).

Definicija 1.3.18. Neka je M Lorentzova mnogostrukost i $\Omega \subseteq M$ područje koje je geodetski konveksno. Definirajmo pozitivnu glatku funkciju $\mu_x : \Omega \to \mathbb{R}$ formulom

$$dV = \mu_x \cdot (\exp_x^{-1})^*(dz),$$

gdje je dV Lorentzova volumna forma i dz standardna euklidska volumna forma na $T_x\Omega$.

Definicija 1.3.19. Neka je M Lorentzova mnogostrukost. Za područje $\Omega \subseteq M$ kažemo da je kauzalno, ako je $\bar{\Omega}$ sadržano u nekom konveksnom području Ω' i ako je za svaki $x, y \in \bar{\Omega}$ presjek $J_+^{\Omega'}(x) \cap J_-^{\Omega'}(y)$ kompaktan i sadržan u $\bar{\Omega}$.

Definicija 1.3.20. Neka je M povezana vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost. Podskup $S \subseteq M$ je *Cauchyjeva hiperravnina* ako svaka neproširiva vremenska C^1-krivulja u M dodiruje ili siječe S u točno jednoj točki.

Definicija 1.3.21. Za Lorentzovu mnogostrukost kažemo da zadovoljava *uvjet kauzalnosti*, ako ne sadrži nijednu zatvorenu kauzalnu krivulju.

Definicija 1.3.22. Za vremenski orijentiranu Lorentzova mnogostrukost M kažemo da je *globalno hiperbolična*, ako zadovoljava uvjet kauzalnosti i za svaki $p, q \in M$ presjek $J_+^M(p) \cap J_-^M(q)$ je kompaktan.

Iskažimo bitan teorem koji će nam biti koristan kasnije, čiji se dokaz može pronaći u [3, Thm. 1.2.45.].

Teorem 1.3.23. Neka je M povezana vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

i) M je globalno hiperboličan

ii) postoji Cauchyjeva hiperravnina u M

iii) M i $\mathbb{R} \times S$ s metrikom $-N^2 dt \otimes dt + g_t$ su izometrični (postoji glatko preslikavanje $F : M \to \mathbb{R} \times S$ takvo da dF_p čuva udaljenost za svaki $p \in \Omega$), gdje je $N : M \to \mathbb{R}$ glatka pozitivna funkcija, g_t je Riemannova metrika na S koja ovisi glatko o $t \in \mathbb{R}$ i svi skupovi $\{t\} \times S$ su Cauchyjeve hiperravnine u M.

Primjer 1.3.24. Može se pokazati da je prostor Minkowskog globalno hiperboličan te da prostor Minkowskog bez jedne točke nije.

Primjer 1.3.25. Može se pokazati da je anti-de Sitterov prostor globalno hiperboličan.

Dokaz sljedeće leme se nalazi u [4, Lemma 1.3.17.].

Lema 1.3.26. Neka je M Lorentzova mnogostrukost i $\Omega \subseteq M$ geodetski zvjezdasto područje s obzirom na $x \in M$. Tada je $\mu_x(x) = 1$.

Definicija 1.3.27. Neka je M Lorentzova mnogostrukost i $\Omega \subseteq M$ geodetski zvjezdasto područje s obzirom na $x \in \Omega$. Definirajmo preslikavanje

$$\Gamma_x := \gamma \circ \exp_x^{-1} : \Omega \to \mathbb{R},$$

gdje je $\gamma : T_xM \to \mathbb{R}$ definirano formulom $\gamma(X) = -g(X, X)$.

Lema 1.3.28. Neka je M Lorentzova mnogostrukost i $\Omega \subseteq M$ geodetski zvjezdasto područje s obzirom na $x \in \Omega$. Sljedeće tvrdnje vrijede na cijelom Ω:

i) za $y \in \Omega$ i $\eta = \exp_x^{-1}(y)$ vrijedi $\operatorname{grad} \Gamma_x|_y = -2d(\exp_x)_\eta(\eta)$

ii) $g(\operatorname{grad} \Gamma_x, \operatorname{grad} \Gamma_x) = -4\Gamma_x$

iii) $\Box\Gamma_x = 2n - g(\operatorname{grad} \Gamma_x, \operatorname{grad}(\log(\mu_x)))$.

Dokaz. Općeniti dokaz može se naći u [4, Lemma 1.3.19.]. Mi ćemo dokazat da u slučaju da je M prostor Minkowskog vrijedi $g(\operatorname{grad} \gamma, \operatorname{grad} \gamma) = -4\gamma$ i $\Box\gamma = 2n$. U standardnim lokalnim koordinatama za prostor Minkowskog imamo

$$g = -dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + ... + dx^n \otimes dx^n$$

i

$$\gamma = -(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2.$$

Dodatno, tada vrijedi

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, i = j > 1 \\ -1, i = j = 1 \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

pa je $(g_{ij}) = (g^{ij})$. Stoga,

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \gamma &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= g^{11} \cdot 2x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - g^{22} \cdot 2x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} - ... - g^{nn} \cdot 2x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \\
&= -2 \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

Dakle, dobivamo

$$\begin{aligned} g(\operatorname{grad}\gamma, \operatorname{grad}\gamma) &= g(-2\sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, -2\sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= 4\left(-(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2\right) \\ &= -4\gamma. \end{aligned}$$

Direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} \Box\gamma &= \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} - ... - \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2}\right)((x^1)^2 - (x^2)^2 - ... - (x^n)^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n. \end{aligned}$$

□

Poglavlje 2

Linearni diferencijalni operatori i distribucije na mnogostrukostima

2.1 Linearni diferencijalni operatori na mnogostrukostima

Definicija 2.1.1. Neka su (E, M, π_1) i (F, M, π_2) vektorski svežnjevi ranga l i q, a $k \in \mathbb{N}$. *Linearan diferencijalni operator* reda najviše k je svako linearno preslikavanje $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ za koje vrijedi da za proizvoljnu kartu $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ i proizvoljne lokalne trivijalizacije $\pi_1^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^p$ i $\pi_2^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^q$ postoje glatke funkcije $A^\alpha : U \to M_{ql}(\mathbb{R})$ takve da za proizvoljne $v \in C^\infty(M, E)$ i $x \in U$

$$Pv|_U = \sum_{|\alpha| \leq k} A^\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} v}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}}.$$

Skup svih linearnih diferencijalnih operatora $C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ reda najviše k označavamo s $\mathrm{Diff}_k(E, F)$. Navedimo nekoliko primjera linearnih diferencijalnih operatora.

Primjer 2.1.2. Neka je M poluriemannova mnogostrukost, $E = M \times \mathbb{R}$ i $F = TM$. Uočimo da možemo poistovijetiti $C^\infty(M)$ s $C^\infty(M, E)$. Stoga je gradijent diferencijalni operator reda 1 s E u F. Podsjećamo, u lokalnim koordinatama imamo

$$\operatorname{grad} v = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j},$$

pa je

$$A^{(0,...,\overset{i}{1},...,0)} = (g^{i1}, ..., g^{in})^\top, A^{(0,...,0)} = (0, ..., 0)^\top.$$

Primjer 2.1.3. Neka je M poluriemannova mnogostrukost, $E = TM$ i $F = M \times \mathbb{R}$. Divergencija je diferencijalni operator reda 1 s E u F. U lokalnim koordinatama za $Y = \sum_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ imamo

$$\operatorname{div}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^i_{ij} y^j,$$

pa je

$$A^{(0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0)} = e^i,\ A^{(0,\dots,0)} = (\sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{in})^\top.$$

Primjer 2.1.4. Neka je (E, M, π) vektorski svežanj, ∇ sveza u E i $F = T^*M \otimes E$. Tvrdimo da je ∇ diferencijalni operator reda 1 s E u F. Neka je $\{E_1, \dots, E_n\}$, glatki lokalni okvir svežnja E i neka je $s \in C^\infty(M, E)$ prikazan lokalno kao $\sum_{i=1}^{n} s^i E_i$. Tada, iz (1.10) slijedi

$$\begin{aligned} \nabla s &= \sum_{i=1}^{n} \left(ds^i \otimes E_i + \sum_{j,k=1}^{n} s^i \Gamma^k_{ji} dx^j \otimes E_k \right) \\ &= \sum_{i=1,j}^{n} \frac{\partial s^i}{\partial x^j} dx^j \otimes E_i + \sum_{i,j,k=1}^{n} s^i \Gamma^k_{ji}\, dx^j \otimes E_k, \end{aligned}$$

pa je ∇ diferencijalni operator reda 1 s E u F.

Uočimo da je kompozicija linearnih diferencijalnih operatora opet linearan diferencijalni operator. Preciznije, za vektorske svežnjeve (E, M, π_1), (F, M, π_2), (G, M, π_3), $P \in \mathrm{Diff}_k(E, F)$ i $Q \in \mathrm{Diff}_l(F, G)$, $Q \circ P \in \mathrm{Diff}_{k+l}(E, G)$.

Primjer 2.1.5. Neka je M poluriemannova mnogostrukost, $E = G = M \times \mathbb{R}$ i $F = TM$. Tada je $-div \circ grad \in \mathrm{Diff}_2(E, G)$. U Lorentzovom slučaju operator označavamo s $\Box$ i nazivamo ga *d'Alembertovim operatorom*, dok ga u *Riemannovom* označavamo s $\triangle$ i nazivamo *Laplace-Beltramijevim operatorom*. Može se pokazati da je za proizvoljni $f \in C^\infty(M, M \times \mathbb{R})$

$$\Box f = -\operatorname{tr}_g(\nabla df), \tag{2.1}$$

pa onda iz (1.15) i (1.5) slijedi da je d'Alembertov operator u lokalnim koordinatama dan formulom

$$\Box f = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} \right).$$

Lema 2.1.6. Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$ i $\xi \in T^*_p(M)$. Tada postoji $f \in C^\infty(M)$ takva da je $df_p = \xi$ i $f(p) = 0$.

Dokaz. Neka je $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta za M takva da je $\varphi(p) = 0$, $A \subseteq U$ zatvoren takav da je $p \in A$ i h funkcija rezanja za A s nosačem u U. Za $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx^i$ definiramo funkciju $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$g(u^1, ..., u^n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u^i.$$

Funkciju $f : M \to \mathbb{R}$ možemo definirati formulom

$$f(x) = \begin{cases} (g \circ \varphi)(x)h(x), x \in U \\ 0, \text{inače} \end{cases}.$$

Lako se vidi da f zadovoljava sva svojstva iz iskaza leme. □

Definicija 2.1.7. Neka su E i F vektorski svežnjevi nad M, $P \in \mathrm{Diff}_k(E, F)$, $p \in M$ i $\xi \in T_p^*(M)$. *Glavni simbol* linearnog diferencijalnog operatora P je linearno preslikavanje $\sigma_k(P, \xi) : E_p \to F_p$ definirano na sljedeći način. Neka je $f \in C^\infty(M)$ takva da je $f(p) = 0$ i $df_p = \xi$. Za $e \in E_p$ definiramo:

$$\sigma_k(P, \xi) \cdot e := \frac{1}{k!} P(f^k \tilde{e})|_p,$$

gdje je $\tilde{e} \in C^\infty(M, E)$, $\tilde{e}(p) = e$.

Dokažimo da prethodna definicija ne ovisi o odabiru $\tilde{e}$ i f. Koristeći kartu i lokalne trivijalizacije dobivamo:

$$\begin{aligned} \sigma_k(P, \xi) \cdot e &= \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha| \le k} A^\alpha(p) \frac{\partial^{|\alpha|}(f^k \tilde{e})}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}}(p) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha| = k} A^\alpha(p) \frac{\partial^{|\alpha|}(f^k)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}}(p) \cdot \tilde{e}(p) \\ &= \sum_{|\alpha| = k} A^\alpha(p) \cdot \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n} \cdot e. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Druga i treća jednakost slijede iz pretpostavke da je $f(p) = 0$. Glavni simbol je dobro definiran, jer desna strana u (2.2) ne ovisi o $\tilde{e}$ i f.

Primjer 2.1.8 (Glavni simbol gradijenta)**.** Neka je $\xi \in T_pM$. Kako je $E_x = \mathbb{R}$, primjenjujemo $\sigma_1(\mathrm{grad}, \xi)$ na $c \in \mathbb{R}$. Sada za $\tilde{e}$ možemo uzeti konstantnu funkciju $x \mapsto c$. Neka je $f \in C^\infty(M)$ takva da je $f(p) = 0$ i $df_p = \xi$. Računamo:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\mathrm{grad}, \xi) &= \mathrm{grad}(f \cdot c)(p) \\ &= c \cdot \mathrm{grad}\, f(x) \\ &= c \cdot df(x)^\sharp = c \cdot \xi^\sharp. \end{aligned}$$

Dakle, $\sigma_1(P, \xi) = \xi^\sharp$.

Lema 2.1.9. Neka je M glatka mnogostrukost, $p \in M$ i $Y \in T_pM$. Tada postoji $Y \in C^\infty(M, TM)$ takav da $\tilde{Y}(p) = Y$.

Dokaz. Neka je $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta za M takva da je $\varphi(p) = 0$, $A \subseteq U$ zatvoren takav da je $p \in A$ i h funkcija rezanja za A s nosačem u U. Za $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ definiramo $\tilde{Y} : M \to TM$,

$$\tilde{Y} = \begin{cases} h(x) \sum\limits_{i=1}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x), \ x \in U \\ 0, \text{ inače} \end{cases} .$$

Lako se vidi da $\tilde{Y}$ zadovoljava sva svojstva iz iskaza leme. □

Primjer 2.1.10 (Glavni simbol divergencije)**.** Neka je $\xi \in T_pM$. $E_p = T_pM$, pa $\sigma_1(\text{div}, \xi)$ primjenjujemo na $Y \in T_pM$, a $\tilde{Y}$ glatko vektorsko polje takvo da je $\tilde{Y}(p) = Y$. Nadalje, neka je $f \in C^\infty(M)$ takva da je $f(p) = 0$ i $df_p = \xi$. Iz (1.12) slijedi

$$\begin{aligned} \sigma_1(\text{div}, \xi) \cdot Y &= \text{div}(f \cdot \tilde{Y})(p) \\ &= f(p) \cdot \text{div}(\tilde{Y})(p) + \langle \text{grad} \, f(x), \tilde{Y}(x) \rangle \\ &= \langle \xi^\sharp, Y \rangle \\ &= \xi(Y). \end{aligned}$$

Dakle, $\sigma_1(\text{div}, \xi) = \xi$.

Primjer 2.1.11 (Glavni simbol sveze)**.** Neka je $\xi \in T_p^*M$, $e \in E_x$ i $\tilde{e} \in C^\infty(M, E)$ takav da $\tilde{e}(p) = e$. Računamo:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \nabla, \xi &= \nabla(f \tilde{e})|_p \\ &= (df \otimes \tilde{e} + f \cdot \nabla \tilde{e})|_p \\ &= df_p \otimes e + f(p) \cdot (\nabla \tilde{e})|_p \\ &= \xi \otimes e. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\sigma_1(\nabla, \xi) = \xi \otimes \cdot$.

Lema 2.1.12. Neka su E, F, G vektorski svežnjevi nad M, $Q \in \text{Diff}_l(E, F)$, $P \in \text{Diff}_k(F, G)$, $p \in M$ i $\xi \in T_p^*M$. Tada je

$$\sigma_{k+l}(P \circ Q, \xi) = \sigma_k(P, \xi) \circ \sigma_l(Q, \xi).$$

Dokaz. Neka je $e \in E_p$, $\tilde{e} \in C^\infty(M, E)$ takav da $\tilde{e}(p) = e$ i $f \in C^\infty(M)$ takva da $df_p = \xi$ i $f(p) = 0$. S obzirom na pripadnu kartu i lokalne trivijalizacije dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sigma_{k+l}(P \circ Q) \cdot e &= \frac{1}{(k+l)!}(P \circ Q)(f^{k+l}\tilde{e})|_p \\
&= \frac{1}{(k+l)!} P\Big(\sum_{|\beta| \le l} B^\beta \frac{\partial^{|\beta|}(f^{k+l}\tilde{e})}{(\partial x^1)^{\beta_1} ... (\partial x^n)^{\beta_n}}\Big)\,|_p \\
&= \frac{1}{(k+l)!}\Big(\sum_{|\alpha| \le k} A^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}}\Big(\sum_{|\beta| \le l} B^\beta \frac{\partial^{|\beta|}(f^{k+l}\tilde{e})}{(\partial x^1)^{\beta_1} ... (\partial x^n)^{\beta_n}}\Big)\Big)\,|_p \\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{|\beta| \le l} \sum_{|\alpha| \le k} A^\alpha(p) \sum_{\gamma \le \alpha} \frac{\partial^{|\gamma|} B^\beta}{(\partial x^1)^{\gamma_1} ... (\partial x^n)^{\gamma_n}}(p) \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}(f^{k+l}\tilde{e})}{(\partial x^1)^{\alpha_1+\beta_1-\gamma_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n+\beta_n-\gamma_n}}(p) \\
&= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{|\alpha| = k} \sum_{|\beta| = l} A^\alpha(p)\, B^\beta(p) \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}(f^{k+l})}{(\partial x^1)^{\alpha_1+\beta_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n+\beta_n}}(p) \cdot e \\
&= \sum_{|\alpha| = k} \sum_{|\beta| = l} A^\alpha(p)\, B^\beta(p)\, \xi_1^{\alpha_1+\beta_1} ... \xi_n^{\alpha_n+\beta_n} \cdot e \\
&= \Big(\sum_{|\alpha| = k} A^\alpha(p)\, \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}\Big)\Big(\sum_{|\beta| = l} B^\beta(p)\, \xi_1^{\beta_1} ... \xi_n^{\beta_n} \cdot e\Big) \\
&= (\sigma_k(P, \xi) \circ \sigma_l(Q, \xi)) \cdot e \\
&= \sigma_k(P, \xi) \cdot (\sigma_l(Q, \xi)) \cdot e)
\end{aligned}$$

□

Primjer 2.1.13 (Glavni simbol d'Alembertovog operatora)**.** Koristimo prethodnu lemu i dobivamo:

$$\sigma_2(-\operatorname{div} \circ \operatorname{grad}, \xi) = -\sigma_1(\operatorname{div}) \cdot \sigma_1(\operatorname{grad}) = -\xi(\xi^\sharp) = -\langle \xi^\sharp, \xi^\sharp \rangle = -\langle \xi, \xi \rangle.$$

Normalno hiperbolični operatori

Sada uvodimo posebnu vrstu linearnog diferencijalnog operatora preko kojeg se definiraju linearne geometrijske valne jednadžbe.

Definicija 2.1.14. Neka je M Lorentzova mnogostrukost i E vektorski svežanj nad M. Linearni diferencijalni operator $P \in \mathrm{Diff}_2(E, E)$ je normalno hiperboličan ako je za proizvoljni $\xi \in T^*M$,

$$\sigma_2(P, \xi) = -\langle \xi, \xi \rangle.$$

Napomena 2.1.15. Za $\xi \in T_p^*M$, $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i dx^i(p)$ imamo

$$\langle \xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \xi_i \xi_j.$$

Stoga imamo da je normalno hiperboličan operator $P \in \mathrm{Diff}_2(E, E)$ u lokalnim koordinatama oblika

$$P = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} A_j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} + B_1(x),$$

gdje su A_j i B_1 glatke matrične funkcije.

Primjer 2.1.16. Iz 2.1.13 slijedi da je $P = \Box$ normalno hiperboličan operator. Potaknuti prethodnom napomenom navedimo još nekoliko primjera normalno hiperboličnih operatora. Za $m > 0$ operator $P = \Box + m^2$ je *Klein-Gordonov* operator s masom m. Za $\xi \in \mathbb{R}$ i $m > 0$ operator $P = \Box + m^2 + \xi\,\mathrm{scal}$ je *kovarijantan Klein-Gordonov* operator s masom m, gdje je scal skalarna zakrivljenost. Za definiciju i svojstva skalarne zakrivljenosti čitatelja se upućuje na [9, str. 208].

Primjer 2.1.17. Neka je (M, g) poluriemannova mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M i ∇ sveza u E. Levi-Civitina sveza inducira svezu u T^*M. Ta sveza zajedno s ∇ inducira svezu u $T^*M \otimes E$ koju označavamo isto s ∇. Linearni diferencijalni operator $\Box^\nabla$ definiramo preko sljedećeg komutativnog dijagrama.

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M,E) & \xrightarrow{\nabla} & C^\infty(M, T^*M \otimes E) \\ {\scriptstyle \Box^\nabla}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nabla} \\ C^\infty(M,E) & \xleftarrow[-\mathrm{tr}_g \otimes id_E]{} & C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M \otimes E) \end{array}$$

Neka je $\xi \in T^*M$ i $s \in C^{\infty(M,E)}$. Iz (1.6) slijedi

$$\begin{aligned} \sigma_2(\Box^\nabla, \xi)s &= \sigma_0(-(\mathrm{tr}_g \otimes \mathrm{id}_E, \xi) \circ \sigma_1(\nabla, \xi) \circ \sigma_1(\nabla, \xi))s \\ &= -(\mathrm{tr}_g \otimes id_E)(\xi \otimes \xi \otimes s) \\ &= -\langle \xi, \xi \rangle s, \end{aligned}$$

pa je $\Box^\nabla$ normalno hiperboličan operator.

Lema 2.1.18. Neka je M poluriemannova mnogostrukost, $p \in M$ i $X \in T_pM$. Tada postoji $f \in C^\infty(M)$ takav da $\mathrm{grad}\, f(p) = X$.

Dokaz. Neka je $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta za M takva da je $p \in U$, $A \subseteq U$ zatvoren takav da je $p \in A$ i h funkcija rezanja za A s nosačem u U. Neka je $X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Neka je

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} a^j, \; i = 1, ..., n.$$

Lako se može pokazati da funkcija g iz 2.1.6 zadovoljava sva svojstva iz iskaza leme. □

Lema 2.1.19. Neka je M poluriemannova mnogostrukost, E vektorski svežanj nad M, ∇ sveza u E, $f \in C^\infty(M)$ i $s \in C^\infty(M, E)$. Tada je

$$-(\mathrm{tr}_g \otimes id_E)(df \otimes \nabla s) = \nabla_{\mathrm{grad}\, f} s.$$

Dokaz. Neka je $\{E_1, ..., E_n\}$ glatki lokalni okvir vektorskog svežnja E i s u lokalnim koordinatama oblika

$$\sum_{i=1}^{n} s^i E_i.$$

Tada iz (1.10) slijedi da je u lokalnim koordinatama

$$df \otimes \nabla s = \sum_{i=1}^{n} (df \otimes ds^i \otimes E_i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^k_{ji} s^i df \otimes dx^j \otimes E_k),$$

pa je

$$(\mathrm{tr}_g \otimes id_E)(df \otimes \nabla s) = \sum_{i=1}^{n} (tr_g(df \otimes ds^i) E_i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^k_{ji} s^i tr_g(df \otimes dx^i) E_k).$$

Iz (1.6) slijedi da je

$$\mathrm{tr}_g(df \otimes ds^i) = \langle df, ds^i \rangle = \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, s^i \rangle = ds^i(\mathrm{grad}\, f),$$

pa je

$$\begin{aligned}(tr_g \otimes id_E)(df \otimes \nabla s) &= \sum_{i=1}^{n} (ds^i(\mathrm{grad}\, f) E_i + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^k_{ji} s^i \underbrace{\langle \mathrm{grad}\, f, dx^{i\sharp} \rangle}_{dx^i(\mathrm{grad}\, f)} E_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (ds^i(\mathrm{grad}\, f) E_i + s^i \nabla_{grad f} E_i.\end{aligned}$$

$$\nabla_{\mathrm{grad}\, f} s = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{\mathrm{grad}\, f}(s^i E_i) = \sum_{i=1}^{n} (ds^i(\mathrm{grad}\, f) E_i + s^i \nabla_{\mathrm{grad}\, f} E_i),$$

pa je $(tr_g \otimes id_E)(df \otimes \nabla s) = \nabla_{\mathrm{grad}\, f} s$. □

Sljedeća lema nam govori da je svaki normalno hiperboličan operator jednak $\Box^\nabla$ do na član reda 0.

Lema 2.1.20. Neka je $P \in \mathrm{Diff}_2(E, E)$ normalno hiperboličan operator na Lorentzovoj mnogostrukosti M. Tada postoji jedinstvena sveza ∇ u E i jedinstveni $B \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(E, E))$ takav da je
$$P = \Box^\nabla + B. \tag{2.3}$$

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost takve sveze. Neka je ∇ sveza u E, $s \in C^\infty(M, E)$ i $f \in C^\infty(M)$. Iz prethodne leme i (2.1) dobivamo

$$\begin{aligned}\Box^\nabla(fs) &= -(tr_g \otimes id_E)(\nabla(\nabla(fs)))\\ &= -(tr_g \otimes id_E)(\nabla(df \otimes s + f\nabla s))\\ &= -(tr_g \otimes id_E)(\nabla df \otimes s + 2df \otimes \nabla s + f\nabla\nabla s)\\ &= (\Box f)s - 2\nabla_{\mathrm{grad}\, f}s + f(\Box^\nabla s).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Pretpostavimo da ∇ zadovoljava (2.3). Tada je $B = P - \Box^\nabla \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(E, E))$, pa je

$$f(P(s) - \Box^\nabla s) = P(fs) - \Box^\nabla(fs).$$

Iz (2.4) i slijedi
$$\nabla_{\mathrm{grad}\, f}s = \frac{1}{2}\{fP(s) - P(fs) + (\Box f)s\}. \tag{2.5}$$
Iz 2.1.18 i (2.5) slijedi da je ∇ određena s P i $\Box$ (koji je određen s Lorentzovom metrikom). Iz toga slijedi da je $\Box^\nabla$ određen s P i Lorentzovom metrikom, pa je onda određen i B. Iz toga slijedi da su ∇ i B jedinstveni.

Dokažimo egzistenciju sveze ∇; možemo ju definirati koristeći (2.5). Neka je $X \in C^\infty(M, TM)$, $s \in C^\infty(M, E)$, $p \in M$ i $f \in C^\infty(M, TM)$ takav da $\mathrm{grad}\, f(p) = X(p)$. Definiramo $\nabla : C^\infty(M, TM) \times C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ kao

$$\nabla_X s(p) := \frac{1}{2}\{f(p)P(s)(p) - P(fs)(p) + (\Box f)(p)s(p)\}.$$

Lako se pokaže da je ∇ dobro definirano preslikavanje. Sva svojstva sveze sada slijede direktnim računom. $\Box$

Definicija 2.1.21. Svezu iz 2.1.20 nazivamo *P-kompatibilnom* svezom.

U nastavku također koristit ćemo P-kompatibilnu svezu.

Lema 2.1.22. Neka je $P = \Box^\nabla + B$ normalno hiperboličan. Za $f \in C^\infty(M)$ i $s \in C^\infty(M, E)$ vrijedi
$$P(fs) = fP(s) - 2\nabla_{\mathrm{grad}\, f}s + (\Box f)s.$$

Adjungirani i dualni operator

Neka je M poluriemannova mnogostrukost i $d\mu$ pozitivna glatka gustoća na M. Dodatno, neka su E, F vektorski svežnjevi nad M na čijim vlaknima su definirani skalarni produkti $< \cdot, \cdot >_E$ i $< \cdot, \cdot >_F$.

Lema 2.1.23. Za svaki $P \in \mathrm{Diff}_k(E, F)$ postoji jedinstven operator $P^t \in \mathrm{Diff}_k(F, E)$ takav da za proizvoljne $u \in C^\infty(M, E)$ i $v \in C^\infty(M, F)$ s kompaktnim nosačima vrijedi

$$\int_M \langle Pu, v\rangle_E d\mu = \int_M \langle u, P^t v\rangle d\mu. \tag{2.6}$$

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost. Neka je $(U, \varphi = (x^1, ..., x^n))$ karta za M i fiksirajmo lokalne trivijalizacije E i F za U. Neka su $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ matrične funkcije koje reprezentiraju skalarne produkte od E i F s obzirom na lokalne trivijalizacije. $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ su očito simetrične, invertibilne i glatke. Neka su $u \in C^\infty(M, E)$, $v \in C^\infty(M, F)$ prerezi s nosačima sadržanim u U. Standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ označavamo s $< \cdot, \cdot >$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_M < Pu, v >_E d\mu &= \int_{\varphi(U)} \left\langle \sum_{|\alpha|\leq k} A^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} u}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}}, \mathcal{F} v \right\rangle \mu dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\varphi(U)} \left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} u}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}}, \mu (A^\alpha)^\top \mathcal{F} v \right\rangle dx \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_{\varphi(U)} \left\langle u, \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}} (\mu (A^\alpha)^\top \mathcal{F} v) \right\rangle dx \\
&= \int_{\varphi(U)} \left\langle u, \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} (\mu (A^\alpha)^\top \mathcal{F} v)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}} \right\rangle dx \\
&= \int_U \left\langle u, \mathcal{E}^{-1} \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^{|\alpha|} (\mu (A^\alpha)^\top \mathcal{F} v)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}} \right\rangle_E d\mu
\end{aligned}$$

U trećem koraku smo iskoristili parcijalnu integraciju. Iz računa slijedi

$$P^t v = \frac{1}{\mu} \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{E}^{-1} \frac{\partial^{|\alpha|} (\mu (A^\alpha)^\top \mathcal{F} v)}{(\partial x^1)^{\alpha_1} ... (\partial x^n)^{\alpha_n}}. \tag{2.7}$$

Dakle, $P^t v$ je jedinstveno određen uz pretpostavku da je nosač funkcije v sadržan u U. Neka je sada $v \in C^\infty(M, F)$ proizvoljan s kompaktnim nosačem. Izaberimo otvoreni pokrivač mnogostrukosti M s pripadnim kartama, lokalnim trivijalizacijama i particijom jedinice.

Tada v možemo prikazati kao konačnu sumu prereza oblika kojeg smo koristili iznad. Kako je P^t linearan, jedinstveno je određen s (2.7).

Dokažimo egzistenciju. Neka je $v \in C^\infty(M)$ s kompaktnim nosačem. Fiksirajmo otvoreni pokrivač mnogostrukosti m s pripadnim kartama, lokalnim trivijalizacijama i particijom jedinice. Ako je nosač funkcije v sadržan u domeni neke karte, definiramo $P^t v$ formulom (2.7). Inače, koristimo particiju jedinice kako bismo ga prikazali kao sumu prereza, gdje je nosač svakog prereza iz sume sadržan u domeni neke karte. Lako se provjeri da definicija ne ovisi o karti, lokalnim trivijalizacijama i particiji jedinice. □

Definicija 2.1.24. Operator $P^t \in \mathrm{Diff}_k(F, E)$ koji zadovoljava (2.6) nazivamo *adjungiranim operatorom* operatora P.

Lema 2.1.25. Za svaki $P \in \mathrm{Diff}_k(E, F)$ postoji jedinstveni $P^* \in \mathrm{Diff}_k(F^*, E^*)$ takav da za proizvoljne $u \in C^\infty(M, E)$ i $\eta \in C^\infty(M, F^*)$ s kompaktnim nosačima vrijedi

$$\int_M \eta(Pu)d\mu = \int_M (P^*\eta)(u)d\mu. \tag{2.8}$$

Dokaz. Dokažimo najprije jedinstvenost. Neka su $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ linearni izomorfizmi definirani kao

$$\mathcal{E} : E \to E^*, e \mapsto \langle \cdot, e \rangle,$$
$$\mathcal{F} : F \to F^*, f \mapsto \langle \cdot, f \rangle.$$

Za $u \in C^\infty(M, E)$ i $v \in C^\infty(M, F)$ s kompaktnim nosačima imamo

$$\int_M (\mathcal{F}v)(Pu)d\mu = \int_M \langle Pu, v\rangle_F d\mu = \int_M \langle u, P^t v\rangle_E d\mu = \int_M (\mathcal{E}(P^t v))(u)d\mu. \tag{2.9}$$

Zamjenom $\eta = \mathcal{F}v$ vidimo da je (2.9) ekvivalentno s

$$\int_M \eta(Pu)d\mu = \int_M \left(\mathcal{E}(P^t(\mathcal{F}^{-1}\eta))(u)\right) d\mu.$$

Dakle, usporedbom s (2.8) dobivamo

$$P^* = \mathcal{E} \circ P^t \circ \mathcal{F}^{-1}, \tag{2.10}$$

što dokazuje jedinstvenost.

Dokažimo egzistenciju. Definiramo P^* kao (2.10). Isti račun unatrag pokazuje da je P^* traženi operator. □

Definicija 2.1.26. Operator P^* koji zadovoljava (2.8) nazivamo *dualnim operatorom* operatora P.

2.2 Distribucije na mnogostrukostima

Neka je M glatka mnogostrukost s pozitivnom volumnom gustoćom $d\mu$ i E vektorski svežanj nad M. Prostor svih glatkih prereza u E s kompaktnim nosačem označavamo s $\mathcal{D}(M, E)$. Elemente $\mathcal{D}(M, E)$ nazivamo testnim prerezima u E. S ∇ označimo sveze u T^*M i E. One induciraju svezu u $T^*M \otimes ... \otimes T^*M \otimes E$ koju označavamo također s ∇. Izaberimo Riemannove metrike na T^*M i E. One induciraju Riemannove metrike na $T^*M \otimes ... \otimes T^*M \otimes E$ na sljedeći način. Neka su $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ i $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ Riemannove metrike na T^*M i E. Tada je za proizvoljne $\omega_1 \otimes .. \otimes \omega_k \otimes e, \omega_1' \otimes .. \otimes \omega_k' \otimes e' \in T^*M \otimes ... \otimes T^*M \otimes E$, Riemannova metrika $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definirana formulom $\langle \omega_1 \otimes ... \otimes \omega_k \otimes e, \omega_1' \otimes ... \otimes \omega_k' \otimes e'\rangle = \langle\omega_1, \omega_1'\rangle_1 ... \langle\omega_k, \omega_k'\rangle_1 \langle e, e'\rangle_2$. Stoga je norma $\nabla^k\varphi$ dobro definirana u svim točkama iz M za proizvoljni $\varphi \in C^\infty(M, E)$. Neka je $K \subseteq M$ kompaktan i $k \in \mathbb{N}$. Za $u \in \mathcal{D}(M, E)$ definiramo C^k-*polunormu* kao

$$||u||_{k,\nabla,<\cdot,\cdot>,K} := \max_{j=0,...,k} \max_{x\in K} ||\nabla^j u(x)||.$$

Polunorma $||\cdot||_{k,\nabla,<\cdot,\cdot>,K}$ općenito nije norma, jer u slučaju $\operatorname{supp} u \cap K = \emptyset$ je $||u||_{k,\nabla,<\cdot,\cdot>,K} = 0$. Za fiksne k i K različiti odabiri metrike i sveza dovode do ekvivalentnih polunormi. Stoga ćemo umjesto $||\cdot||_{k,\nabla,<\cdot,\cdot>,K}$ pisati $||\cdot||_{C^k(K)}$.

Definicija 2.2.1. Neka je $(W, |\cdot|)$ konačnodimenzionalan normiran prostor. Za linearno preslikavanje $T : \mathcal{D}(M, E^*) \to W$ kažemo da je *distribucija* u E s vrijednostima u W, ako za svaki $K \subseteq M$ kompaktan postoji $k \in \mathbb{N}_0$ i konstanta $C > 0$ takva da za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ vrijedi

$$|T[\varphi]| \leq C||\varphi||_{C^k(K)}. \tag{2.11}$$

Kažemo da je distribucija F reda $k \in \mathbb{N}_0$, ako je k najmanji cijeli broj takav da za svaki $K \subseteq M$ kompaktan postoji konstanta $C > 0$ takva da

$$|F\varphi| \leq C||\varphi||_{C^k(K)}.$$

Prostor distribucija $\mathcal{D}(M, E^*) \to W$ označavamo s $\mathcal{D}'(M, E; W)$. Ako je $W = \mathbb{R}$, onda koristimo skraćenu oznaku $\mathcal{D}'(M, E)$. Navedimo dva najbitnija primjera distribucija.

Primjer 2.2.2. Neka je E vektorski svežanj nad M i $p \in M$. Delta distribuciju u točki p $\delta_p \in \mathcal{D}'(M, E, E_p^*)$ definiramo za proizvoljni $\varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$ formulom

$$\delta_p[\varphi] = \varphi(p).$$

Distribucija δ_p je reda 0, jer za proizvoljni $K \subseteq M$ kompaktan i proizvoljni $\varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$ takav da je $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ imamo $|\delta_p[\varphi]| = |\varphi(p)| \leq ||\varphi||_{C^0(K)}$.

Primjer 2.2.3. Neka je $f \in L^1_{loc}(M, E)$ lokalno integrabilan grubi prerez (iz definicije prereza izostavimo uvjet neprekidnosti) u E. Za $\varphi \in \mathcal{D}(M, E)$ definiramo

$$T_f[\varphi] = \int_M \varphi(x)(f(x))\, d\mu(x).$$

T_f je distribucija reda 0, jer za proizvoljni $K \subseteq M$ kompaktan i proizvoljni $\varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$ takav da je $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ imamo $|T_f[\varphi]| \leq \int_K ||\varphi||_{C^0(K)}|f(x)|d\mu(x) \leq C_f(K)||\varphi||_{C^0(K)}$.

Iz prethodnog primjera možemo zaključiti da imamo ulaganje L^1_{loc} funkcija u prostor distribucija $\mathcal{D}(M, E)$. Definirajmo pojam konvergencije testnih prereza.

Definicija 2.2.4. Neka su $\varphi, (\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{D}(M, E)$. Kažemo da niz $(\varphi_n)_n$ konvergira prema φ u $\mathcal{D}(M, E)$ ako vrijedi:

i) postoji kompaktan skup $K \subseteq M$ takav da $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$ i $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq K$ za svaki $n \in \mathbb{N}$

ii) niz $(\varphi_n)_n$ konverigira prema φ u svakoj C^k-normi nad K:

$$||\varphi - \varphi_n||_{C^k(K)} \to 0 \text{ kad } n \to \infty.$$

Lema 2.2.5. Linearno preslikavanje $T : \mathcal{D}(M, E^*) \to W$ je distribucija ako i samo ako je *nizovno neprekidan* tj. za svaki konvergentan niz $\varphi_n \to \varphi$ u $\mathcal{D}(M, E^*)$, vrijedi $T[\varphi_n] \to T[\varphi]$.

Dokaz. Neka je $T \in \mathcal{D}(M, E, W)$ i $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{D}(M, E^*)$ niz koji konvergira prema φ u $\mathcal{D}(M, E^*)$. Tada postoji $K \subseteq M$ kompaktan takav da je $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq K$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. T je distribucija, pa postoji $k \in \mathbb{N}_0$ i konstanta $C > 0$ takvi da

$$|T[\varphi_n - \varphi]| \leq C||\varphi - \varphi_n||_{C^k(K)} \to 0.$$

Dakle,

$$T[\varphi_n] \to T[\varphi].$$

Dokažimo obrat. Pretpostavimo suprotno tj. postoji $K \subseteq M$ kompaktan takav da (2.11) ne vrijedi ni za jedan par $k \in \mathbb{N}_0$ i $C > 0$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $\varphi_k \in \mathcal{D}(M, E)$ takav da je $\operatorname{supp}\varphi_k \subseteq K$ i $|T[\varphi_k]| > k||\varphi_k||_{C^k(K)}$. Definirajmo glatke prereze $\psi_k := \frac{1}{|T[\varphi_k]|}\varphi_k$. Očito je $\operatorname{supp}\psi_k \subseteq K$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i

$$||\psi_k||_{C^k(K)} = \frac{1}{|T[\varphi_k]|}||\varphi_k||_{C^k(K)} < \frac{1}{k}.$$

Stoga, za $j \geq k$ vrijedi

$$||\psi_j||_{C^k(K)} \leq ||\psi_j||_{C^j(K)} < \frac{1}{j}.$$

Na ovaj način definirali smo niz $(\psi_j)_j$ koji konvergira prema 0 u $\mathcal{D}(M, E^*)$. Stoga, imamo $T[\psi_j] \to T[0] = 0$. S druge strane, $|T[\psi_j]| = \frac{1}{|T[\varphi_j]|}|T[\varphi_j]| = 1$, što dovodi do kontradikcije. $\square$

Sljedeći nam je cilj proširiti djelovanje diferencijalnog operatora na distribucije. Neka je $P \in \mathrm{Diff}(E, F)$. Kako bi proširenje $P : \mathcal{D}'(M, E) \to \mathcal{D}'(M, F)$ imalo smisla tražimo da je sljedeći dijagram komutativan:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(M,E) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{D}(M,F) \arrow[d, "T"] \\ \mathcal{D}'(M,E) \arrow[r, "P"] & \mathcal{D}'(M,F) \end{tikzcd}$$

gdje $T : f \mapsto T_f$. Koristit ćemo dualni operator P^*. Za proizvoljne $f \in \mathcal{D}(M, E)$ i $\varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$ definiramo

$$(PT_f)[\varphi] := T_f[P^*\varphi].$$

Uočimo da iz definicije dualnog operatora slijedi

$$(PT_f)[\varphi] = \int_M (P^*\varphi)(x)(f()x)d\mu(x) = \int_M \varphi(x)((Pf)(x))d\mu(x) = T_{Pf}[\varphi].$$

Dakle, prethodni dijagram je komutativan. Stoga, $P : \mathcal{D}'(M, E, W) \to \mathcal{D}'(M, F, W)$ definiramo formulom

$$(PT)[\varphi] := T[P^*\varphi],$$

gdje je $\varphi \in \mathcal{D}(M, F^*)$. Preostaje provjeriti da je PT dobro definirana distribucija. Iz definicije linearnog diferencijalnog operatora je jasno da je $P^*\varphi$ testni prerez. Dokažimo da je PT distribucija. Iz 2.2.5 slijedi da treba provjeriti linearnost i nizovnu neprekidnost. Kako su T i P^* nizovno neprekidni i linearni, onda je to i njihova kompozicija. Dakle, PT je distribucija.

Definicija 2.2.6. Neka je $T \in \mathcal{D}'(M, E, W)$ i $f \in \mathcal{D}(M, R)$. Definirajmo $fT \in \mathcal{D}'(M, E, W)$ formulom

$$fT[\varphi] = T[f\varphi],$$

gdje je $\varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$ proizvoljan.

Definicija 2.2.7. *Nosač* distribucije $T \in \mathcal{D}'(M, E, W)$ definiramo kao skup

$$\mathrm{supp}\, T = \{x \in M \mid (\forall U \in \mathcal{U}_x)\,(\exists \varphi \in \mathcal{D}(M, E^*))\ \mathrm{supp}\,\varphi \subset U \text{ i } T[\varphi] \neq 0\},$$

gdje je $\mathcal{U}_x$ skup svih otvorenih okolina točke $x \in M$.

Iz definicije slijedi da je nosač distribucije zatvoren podskup mnogostrukosti M.

Napomena 2.2.8. Neka su $\varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$ i $T \in \mathcal{D}'(M, E, W)$ takvi da je $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} T = \emptyset$. Tada je $T[\varphi] = 0$. Naime, za svaki $x \in \operatorname{supp} \varphi$ postoji otvorena okolina U takva da je za $\psi \in \mathcal{D}(M, E^*)$, $T[\psi] = 0$ kad god je $\operatorname{supp} \psi \subseteq U$. Kako je $\operatorname{supp} \varphi$ kompaktan, možemo ga prekriti s konačno mnogo otvorenih skupova $U_1, ..., U_k$. Koristeći particiju jedinice φ možemo prikazati kao $\varphi = \psi_1 + ... + \psi_k$, gdje je $\psi_j \in \mathcal{D}(M, E^*)$ i $\operatorname{supp} \psi_j \subseteq U_j$ za svaki j. Tada je

$$T[\varphi] = T[\psi_1 + ... + \psi_k] = T[\psi_1] + ... + T[\psi_k] = 0.$$

Definicija 2.2.9. Neka je $T \in \mathcal{D}'(M, E, W)$ i $\Omega \subseteq M$ otvoren i neprazan. Za $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$, proširenje nulom definira testni prerez $\operatorname{ext}_M \varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$. Restrikciju od T na Ω definiramo formulom

$$(T|_\Omega)[\varphi] := T[\operatorname{ext}_M \varphi].$$

Definicija 2.2.10. *Singularni nosač* $\operatorname{sing\,supp} T$ distribucije $T \in \mathcal{D}'(M, E, W)$ je skup točaka koje nemaju otvorenu okolinu na kojoj se T podudara s glatkim prerezom tj.

$$\operatorname{sing\,supp} T := \{x \in M \mid (\forall U \in \mathcal{U}_x)\, T|_\Omega \notin C^\infty(M, E)\}.$$

Kao i za nosač distribucije, direktno iz definicije slijedi da je singularni nosač zatvoren podskup mnogostrukosti M. Također, lako se vidi da je $\operatorname{sing\,supp} T \subseteq \operatorname{supp} T$.

Primjer 2.2.11. Neka je $p \in M$. Lako se vidi da je $\operatorname{supp} \delta_p = \operatorname{sing\,supp} \delta_p = \{p\}$.

Neka su E, F, G vektorski svežnjevi nad M, $\varphi \in C^k(M, E \otimes F)$ i $\psi \in C^k(M, F^* \otimes G)$. Definirajmo $\psi \cdot \varphi \in C^k(M, E \otimes G)$ formulom

$$\varphi \cdot \psi = \operatorname{tr}(\varphi \otimes \psi).$$

Lema 2.2.12. Za proizvoljne $\varphi \in C^k(M, E \otimes F)$, $\psi \in C^k(M, F^* \otimes G)$ i $K \subseteq M$ kompaktan vrijedi

$$||\varphi \cdot \psi||_{C^k(K)} \leq 2^k ||\varphi||_{C^k(K)} ||\psi||_{C^k(K)}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po k. Za $k = 0$ i fiksni $x \in M$ neka je $\{f_1, ..., f_r\}$ ortonirmirana baza za F_x te $\{f_1^*, ..., f_r^*\}$ dualni baza za F_x^*. Za odgovarajuće $e_1, ..., e_r \in E_x$ vrijedi $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} e_i \otimes f_i$. Slično, $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i^* \otimes g_i$, gdje su $g_1, ..., g_r \in G_x$. Dakle, $\varphi(x) \cdot \psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} e_i \otimes g_i$. dvostrukom primjenom Cauchy-Schwartzove nejednakosti dobivamo

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x)\cdot\psi(x)|^2 &= |\sum_{i=1}^{r} e_i\otimes g_i|^2\\
&= \sum_{i,j=1}^{r}\langle e_i\otimes g_i, e_j\otimes g_j\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{r}\langle e_i, e_j\rangle\langle g_i, g_j\rangle\\
&\le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{r}\langle e_i, e_j\rangle^2}\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^{r}\langle g_i, g_j\rangle^2}\\
&\le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{r}|e_i|^2|e_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^{r}|g_i|^2|g_j|^2}\\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{r}|e_i|^2\sum_{j=1}^{r}|e_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{r}|g_i|^2\sum_{j=1}^{r}|g_j|^2}\\
&= \sum_{i=1}^{r}|e_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{r}|g_i|^2\\
&= |\varphi(x)|^2\cdot|\psi(x)|^2,
\end{aligned}
$$

čime je pokazana baza indukcije. Provedimo korak indukcije. Može se pokazati da tr i ∇ komutiraju, pa vrijedi

$$
\begin{aligned}
||\nabla^{k+1}(\varphi\cdot\psi)||_{C^0(K)} &\le ||\nabla^k(\varphi\cdot\psi)||_{C^k(K)}\\
&= ||\nabla(\mathrm{tr}(\varphi\otimes\psi))||_{C^k(K)}\\
&= ||\,\mathrm{tr}(\nabla(\varphi\otimes\psi))||_{C^k(K)}\\
&= ||\,\mathrm{tr}(\nabla\varphi\otimes\psi+\varphi\otimes\nabla\psi)||_{C^k(K)}\\
&= ||(\nabla\varphi)\cdot\psi+\varphi\cdot\nabla(\psi)||_{C^k(K)}\\
&\le ||(\nabla\varphi)\cdot\psi||_{C^k(K)}+||\varphi\cdot\nabla\psi||_{C^k(K)}\\
&\le 2^k||\nabla\varphi||_{C^k(K)}||\psi||_{C^k(K)}+2^k||\varphi||_{C^k(K)}||\nabla\psi||_{C^k(K)}\\
&\le 2^k||\nabla\varphi||_{C^{k+1}(K)}||\psi||_{C^{k+1}(K)}+2^k||\varphi||_{C^{k+1}(K)}||\nabla\psi||_{C^{k+1}(K)}\\
&= 2^{k+1}||\varphi||_{C^{k+1}(K)}||\psi||_{C^{k+1}(K)}.
\end{aligned}
$$

Stoga,

$$\begin{aligned}
||\varphi\cdot\psi||_{C^{k+1}(K)} &= \max\{||\varphi\cdot\psi||_{C^k(K)}, ||\nabla^{k+1}(\varphi\cdot\psi)||_{C^0(K)}\}\\
&\leq \max\{2^k||\varphi||_{C^k(K)}||\psi||_{C^k(K)}, 2^{k+1}||\varphi||_{C^{k+1}(K)}||\psi||_{C^{k+1}(K)}\}\\
&= 2^{k+1}||\varphi||_{C^{k+1}(K)}||\psi||_{C^{k+1}(K)}.
\end{aligned}$$

□

2.3 Rieszove distribucije

Rieszove distribucije na prostoru Minkowskog

Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ dimenzije n i $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt indeksa 1 na V. Stoga su $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ i prostor Minkowskog dimenzije n izometrični. Dodatno, pretpostavimo da je V vremenski orijentiran. Definirajmo preslikavanje $\gamma: V\to\mathbb{R}$ formulom

$$\gamma(X) = -\langle X, X\rangle.$$

Neka je $\{e_1,...,e_n\}$ baza za V takva da je $-\langle e_1,e_1\rangle = \langle e_2,e_2\rangle = ... = \langle e_n,e_n\rangle = 1$. Uočimo da u toj bazi d'Alembertov operator $\Box$ možemo prikazati u obliku $\Box = \partial_1^2 - \partial_2^2 - ... - \partial_n^2$.

Definicija 2.3.1. Za $\alpha\in\mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(\alpha) > n$ definiramo *Rieszove distribucije* $R_+(\alpha): V\to\mathbb{C}$ i $R_-(\alpha): V\to\mathbb{C}$ formulom

$$R_\pm(\alpha)(X) = \begin{cases} C(\alpha,n)\gamma(X)^{\frac{\alpha-n}{2}}, & x\in J_\pm(0)\\ 0, \text{ inače}, \end{cases}$$

gdje je $C(\alpha,n) = \frac{2^{1-\alpha}\pi^{\frac{2-n}{2}}}{(\frac{\alpha}{2}-1)!(\frac{\alpha-n}{2})!}$ i $z\mapsto(z-1)!$ gama funkcija.

Gama funkcija je funkcija definirana kao $\{\alpha\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha)>0\}\to C$, $z\mapsto\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$. Gama funkcija je holomorna te ne iščezava na cijelom $\{\alpha\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha)>0\}$. Dodatno, vrijedi

$$z! = z(z-1)!$$

za proizvoljni $z\in\mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(z)>0$.

Uočimo da su funkcije $R_\pm(\alpha)$ dobro definirane, jer eksponent $\frac{\alpha-n}{2}$ ima pozitivan realni dio i $\mathrm{Re}(\alpha) > n \geq 2$. Također, neprekidne su na V, jer γ iščezava na rubu $J_\pm(0)$. Uočimo da je za $\mathrm{Re}(\alpha) > n+2k$, $R_\pm(\alpha)\in C^k(V,\mathbb{C})$.

Lema 2.3.2. Ako je $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$, onda je

$$\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\alpha) > \mathbb{C}\} \ni \alpha \mapsto R_\pm(\alpha)[\varphi] = \int_V R_\pm(\alpha)(X)\varphi(X)\, dX \tag{2.12}$$

holomorfna funkcija.

Dokaz. Za $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$ imamo

$$R_\pm(\alpha)[\varphi] = \int_{\operatorname{supp}\varphi} R_\pm(\alpha)(X)\varphi(X)\, dX.$$

Neka je $\triangle$ trokut sadržan u $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\alpha) > \mathbb{C}\}$. Tada je

$$\int_\triangle \int_{\operatorname{supp}\varphi} R_\pm(\alpha)(X)\varphi(X)\, dX d\alpha = \int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi(X) \int_\triangle R_\pm(\alpha)(X)\, d\alpha dX = 0,$$

jer je $x \mapsto R_\pm(\alpha)(X)$ holomorfna na $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\alpha) > \mathbb{C}\}$. U prvom koraku iskoristili smo Fubinijev teorem, zbog kompaktnosti $\operatorname{supp}\varphi$. Stoga, iz Morerinog teorema slijedi da je (2.12) holomorfna funkcija. □

Iskažimo općepoznati teorem iz kompleksne analize koji će nam biti izuzeto koristan.

Teorem 2.3.3. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna i

$$N = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}.$$

Ako N ima gomilište u Ω, onda je $f(z) = 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Lema 2.3.4. Za $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\operatorname{Re}(\alpha) > n$ vrijedi:

i) $\gamma \cdot R_\pm(\alpha) = \alpha(\alpha - n + 2)R_\pm(\alpha + 2)$

ii) $(\operatorname{grad}\gamma) \cdot R_\pm(\alpha) = 2\alpha \operatorname{grad} R_\pm(\alpha + 2)$

iii) $\Box R_\pm(\alpha + 2) = R_\pm(\alpha)$

iv) preslikavanje $\alpha \mapsto R_\pm(\alpha)$ možemo jedinstveno proširiti na cijeli $\mathbb{C}$ kao holomorfnu familiju distribucija. Odnosno, za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$ postoji jedinstvena distribucija $R_\pm(\alpha)$ takva da je za svaku testnu funkciju $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$ preslikavanje $\alpha \mapsto R_\pm(\alpha)[\varphi]$ holomorfno.

Dokaz. i) Tvrdnja slijedi iz

$$\frac{C(\alpha, n)}{C(\alpha + 2, n)} = \frac{2^{1-\alpha}(\frac{\alpha+2}{2} - 1)!(\frac{\alpha+2-n}{2})!}{2^{1-\alpha-2}(\frac{\alpha}{2} - 1)!(\frac{\alpha-n}{2})!} = \alpha(\alpha - n + 2).$$

ii) Neka je $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormirana baza vektorskog prostora V takva da je $-\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = ... = \langle e_n, e_n\rangle = 1$ i $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$. Može se pokazati da vrijedi ista formula parcijalne integracije kao i u $\mathbb{R}^n$. Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\begin{aligned}
\partial_i\gamma \cdot R_\pm(\alpha)[\varphi] &= C(\alpha, n)\int_{J_\pm(0)} \gamma(X)^{\frac{\alpha-n}{2}}\partial_i\gamma(X)\varphi(x)\,dX \\
&= \frac{2C(\alpha, n)}{\alpha - n + 2}\int_{J_\pm(0)} \partial_i(\gamma(X)^{\frac{\alpha-n}{2}})\varphi(X)\,dX \\
&= -2\alpha C(\alpha + 2, n)\int_{J_\pm(0)} \gamma(X)^{\frac{\alpha-n}{2}}\partial_i\varphi(X)\,dX \\
&= -2\alpha R_\pm(\alpha + 2, n)[\partial_i\varphi] \\
&= 2\alpha\partial_i R_\pm(\alpha + 2)[\varphi]
\end{aligned}$$

iz čega slijedi (ii).

iii) Iz (i) i (ii) slijedi

$$\begin{aligned}
\partial_i^2 R_\pm(\alpha + 2) &= \partial_i(\frac{1}{2\alpha}\partial_i\gamma \cdot R_\pm(\alpha)) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_i^2\gamma \cdot R_\pm(\alpha) + \partial_i\gamma \cdot \left(\frac{1}{2(\alpha-2)}\partial_i\gamma \cdot R_\pm(\alpha - 2)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial_i^2\gamma \cdot R_\pm(\alpha) + \frac{1}{4\alpha(\alpha-2)}(\partial_i\gamma)^2\frac{(\alpha-2)(\alpha-n)}{\gamma} \cdot R_\pm(\alpha) \\
&= \left(\frac{1}{2\alpha}\partial_i^2\gamma + \frac{\alpha - n}{4\alpha} \cdot \frac{(\partial_i\gamma)^2}{\gamma}\right)R_\pm(\alpha)
\end{aligned}$$

Stoga, iz 1.3.28 slijedi

$$\begin{aligned}
\Box R_\pm(\alpha + 2) &= \left(\frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha - n}{4\alpha} \cdot \frac{4\gamma}{\gamma}\right)R_\pm(\alpha) \\
&= R_\pm(\alpha),
\end{aligned}$$

pa vrijedi (iii).

iv) Uočimo da je za fiksni $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$ preslikavanje $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha) > n\} \to \mathbb{C}$, $\alpha \mapsto R_\pm(\alpha)[\varphi]$ holomorfno. Za $\mathrm{Re}(\alpha) > n - 2$ definiramo

$$\tilde{R}_\pm(\alpha) := \Box R_\pm(\alpha + 2)$$

u smislu distribucija. Time smo definirali distribuciju na V. Za fiksni $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$ preslikavanje $\alpha \mapsto \tilde{R}_\pm(\alpha)[\varphi]$ je holomorfno na $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha) > n - 2\}$. Iz (iii) slijedi da je $\tilde{R} \pm (\alpha) = R_{\pm}(\alpha)$ za $\mathrm{Re}(\alpha) > n$. Dakle, $\alpha \mapsto \tilde{R}_{\pm}(\alpha)[\varphi]$ je holomorfno proširenje preslikavanja $\alpha \mapsto R_{\pm}(\alpha)$ na $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha) > n-2\}$. Induktivno, možemo definirati holomorfno proširenje preslikavanja $\alpha \mapsto R_{\pm}(\alpha)[\varphi]$ na cijeli $\mathbb{C}$, koje je nužno jedinstveno. Dakle, preslikavanje $\alpha \to R_{\pm}(\alpha)$ smo time proširili na cijeli $\mathbb{C}$ kao holomorfnu familiju distribucija.

□

Neka je $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ karta na cijelom V takva da je $\gamma(x) = -(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2$ i x^1-os orijentirana prema budućnosti. Dodatno, neka su $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ i $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{C})$ takvi da je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ definirana formulom

$$\varphi(x) := f(x^1)\psi(x^2, ..., x^n) \tag{2.13}$$

i da vrijedi $\varphi(x) = f(x^1)$ na $J_+(0)$. Dokaz sljedeće leme se može naći u [3, str. 48].

Lema 2.3.5. Za takve testne funkcije i $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 1$ vrijedi

$$R_{\pm}(\alpha)[\varphi] = \frac{1}{(\alpha - 1)!} \int_0^\infty r^{\alpha-1} f(r)\, dr.$$

Lema 2.3.6. Sljedeće tvrdnje vrijede za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$:

i) $(\mathrm{grad}\, \gamma)R_{\pm}(\alpha) = 2\alpha\, \mathrm{grad}(R \pm (\alpha + 2))$

ii) $\Box R_{\pm}(\alpha + 2) = R_{\pm}(\alpha)$

iii) $R_{\pm}(0) = \delta_0$

iv) $\mathrm{supp}\, R_{\pm}(\alpha) \subseteq J_{\pm}(0)$.

Dokaz. Tvrdnje (i) i (ii) slijede direktno iz 2.3.4.(ii), 2.3.4.(iii), 2.3.4.(iv). Dokažimo tvrdnju (iii). Neka je $K \subseteq V$ kompaktan i $\sigma_K \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$ takva da je $\mathrm{supp}\, \sigma_K|_K \equiv 1$. Kao i u 1.1.12 proizvoljni $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$ takav da je $\mathrm{supp}\, \varphi \subseteq K$ možemo prikazati kao

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} x^j \varphi_j(x)$$

za određene glatke funkcije φ_j. Računom dobivamo:

$$\begin{aligned} R_{\pm}(0)[\varphi] &= R_{\pm}(0)[\sigma_K \varphi] \\ &= R_{\pm}(0)[\varphi(0)\sigma_K + \sum_{j=1}^{n} x^j \sigma_K \varphi_j] \\ &= \varphi(0) \underbrace{R_{\pm}[\sigma_K]}_{=:c_K} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(x^j R_{\pm}(0))}_{=0 \text{ iz ii)}}[\sigma_k \varphi_j] \\ &= c_K \varphi(0). \end{aligned}$$

Uočimo da konstanta c_K ne ovisi o K, jer za $K' \supset K$ i $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K \subset K'$ vrijedi

$$c_{K'}\varphi(0) = R_\pm(0)[\varphi] = c_K\varphi(0).$$

Preostaje dokazati da je $c_K = 1$. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$ testna funkcija definirana kao u 2.13. Koristeći (ii) i 2.3.5 dobivamo:

$$\begin{aligned} c\varphi(0) &= R_\pm(0)[\varphi] \\ &= (\Box R_\pm(2))[\Box] \\ &= R_\pm(2)[\Box\varphi] \\ &= \int_0^\infty r f''(r)\, dr \\ &= -\int_0^\infty f'(r)\, dr \\ &= f(0) \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Dokažimo preostalu tvrdnju. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(V, \mathbb{C})$ takva da je $\operatorname{supp}\varphi \cap J_\pm(0) = \emptyset$. Očito je $\operatorname{supp} R_\pm(\alpha) \subseteq J_\pm(0)$ za $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\operatorname{Re}(\alpha) > n$. Iz toga slijedi da je za takve α

$$R_\pm(\alpha)[\varphi] = 0,$$

pa onda i za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$ zbog holomorfnosti. Stoga, $\operatorname{supp} R_\pm(\alpha) \subseteq J_\pm(0)$. □

Rieszove distribucije na području

Rieszove distribucije smo definirali na svim prostorima koji su izometrični prostoru Minkowskog. Stoga smo ih definirali na tangencijalnim prostorima svake točke Lorentzove mnogostrukosti. Sljedeći cilj je definirati Rieszove distribucije na malim otvorenim podskupovima Lorentzove mnogostrukosti M. Prijelaz s tangencijalnog prostora na mnogostrukost će nam osigurati Riemannovo eksponencijalno preslikavanje.

Neka je Ω područje u vremenski orijentiranoj Lorenzovoj mnogostrukosti dimenzije n ($n \geq 2$). Pretpostavimo da je Ω geodetski zvjezdast s obzirom na neki $x \in \Omega$. Dodatno, pretpostavimo da je eksponencijalno preslikavanje $\exp_x : \Omega' \to \Omega$ difeomorfizam, gdje je $\Omega' \subseteq T_xM$ otvoren i zvjezdast s obzirom na 0. Za proizvoljni $\alpha \in \mathbb{C}$ definirajmo $R_\pm^\Omega(\alpha, x) : \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ formulom

$$R_\pm^\Omega(\alpha, x)[\varphi] := R_\pm(\alpha)[(\mu_x\varphi) \circ \exp_x],$$

gdje je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$ proizvoljan. Uočimo da je $\operatorname{supp}((\mu_x\varphi)\circ\exp_x)$ sadržan u Ω'. Proširenjem funkcije $(\mu_x\varphi) \circ \exp_x$ nulom na cijeli $T_x\Omega$ dobivamo funkciju iz $\mathcal{D}(\Omega', \mathbb{C})$ na koju se može primijeniti $R_\pm(\alpha)$. Iz toga što je $R_\pm(\alpha)$ distribucija, slijedi da je i $R_\pm^\Omega(\alpha, x)$ distribucija.

Definicija 2.3.7. $R_+^\Omega(\alpha, x)$ nazivamo *naprednom Rieszovom distribucijom*, a $R_-^\Omega(\alpha, x)$ *retardiranom Rieszovom distribucijom* na Ω u točki x za $\alpha \in \mathbb{C}$.

Lema 2.3.8. Sljedeće tvrdnje vrijede za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$:

i) ako je $\mathrm{Re}(\alpha) > n$, onda je $R_+^\Omega(\alpha, x)$ neprekidna funkcija i vrijedi

$$R_\pm^\Omega(\alpha, x) = \begin{cases} C(\alpha, n)\Gamma_x^{\frac{\alpha-n}{2}} \text{ na } J_\pm^\Omega(x) \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$

ii) za svaku testnu funkciju $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$ preslikavanje $\alpha \mapsto R_\pm^\Omega(\alpha, x)[\varphi]$ je holomorfno na $\mathbb{C}$

iii) $\Gamma_x \cdot R_\pm^\Omega(\alpha, x) = \alpha(\alpha - n + 2)R_\pm^\Omega(\alpha + 2, x)$

iv) $\mathrm{grad}(\Gamma_x) \cdot R_\pm^\Omega(\alpha + 2, x)$

v) ako je $\alpha \neq 0$, onda je $\Box R_\pm^\Omega(\alpha + 2, x) = \left(\frac{\Box\Gamma_x - 2n}{2\alpha} + 1\right) R_\pm^\Omega(\alpha, x)$

vi) $R_\pm^\Omega(0, x) = \delta_x$

vii) $\mathrm{supp}\, R_\pm^\Omega(\alpha, x) \subseteq J_\pm^\Omega(x)$.

Dokaz. i) Neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(\alpha) > n$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$. Iz definicije slijedi

$$\begin{aligned} R_\pm^\Omega(\alpha, x)[\varphi] &= R_\pm(\alpha)[(\mu_x \cdot \varphi) \circ \exp_x] \\ &= C(\alpha, n) \int_{J_\pm(0)} \gamma^{\frac{\alpha-n}{2}} (\mu_x \cdot \varphi) \circ \exp_x \, dX \\ &= C(\alpha, n) \int_{J_\pm^\Omega(x)} \Gamma_x^{\frac{\alpha-n}{2}} \varphi \, dV. \end{aligned}$$

Lako vidi da je $R_\pm^\Omega$ neprekidna funkcija.

ii) Tvrdnja slijedi direktno iz definicije od $R_\pm^\Omega(\alpha, x)$ i 2.3.4.

iii) Tvrdnja očito vrijedi za $\mathrm{Re}(\alpha) > n$, jer je

$$C(\alpha, n) = \alpha(\alpha - n + 2)C(\alpha + 2, n).$$

Iz toga što je $\alpha \mapsto R_\pm^\Omega(\alpha, x)[\varphi]$ holomorfna za proizvoljni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$, slijedi da iii) vrijedi za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$.

iv) Neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(\alpha) > n$. Iz i) slijedi da je $R_\pm^\Omega(\alpha+2,x)$ klase C^1. Računom na $J_\pm^\Omega(x)$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
2\alpha \,\mathrm{grad}\, R_\pm^\Omega(\alpha+2,x) &= 2\alpha C(\alpha+2,n)\,\mathrm{grad}\left(\Gamma_x^{\frac{\alpha+2-n}{2}}\right)\\
&= 2\alpha C(\alpha+2,n)\frac{\alpha+2-n}{2}\Gamma_x^{\frac{\alpha-n}{2}}\,\mathrm{grad}\,\Gamma_x\\
&= R_\pm^\Omega(\alpha,x)\,\mathrm{grad}\,\Gamma_x
\end{aligned}$$

Iz toga što je $\alpha \mapsto R_\pm^\Omega(\alpha,x)[\varphi]$ holomorfna za proizvoljni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{C})$, slijedi da iv) vrijedi za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$.

v) Neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(\alpha) > n+2$. Iz toga slijedi da je $R_\pm^\Omega(\alpha+2,x)$ klase C^2, pa možemo izračunati $\Box R_\pm^\Omega(\alpha+2,x)$ u klasičnom smislu. Računom dobivamo

$$\begin{aligned}
\Box R_\pm^\Omega(\alpha+2,x) &= -\,\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\, R_\pm^\Omega(\alpha+2,x)\right)\\
&= -\frac{1}{2\alpha}\,\mathrm{div}\left(R_\pm^\Omega(\alpha,x)\cdot \mathrm{grad}\,\Gamma_x\right)\\
&= \frac{1}{2\alpha}\Box\Gamma_x \cdot R_\pm^\Omega(\alpha,x) - \frac{1}{2\alpha}\langle \mathrm{grad}\,\Gamma_x, \mathrm{grad}\, R_\pm^\Omega(\alpha,x)\rangle\\
&= \frac{1}{2\alpha}\Box\Gamma_x \cdot R_\pm^\Omega(\alpha,x) - \frac{1}{2\alpha\cdot 2(\alpha-2)}\langle \mathrm{grad}\,\Gamma_x, \mathrm{grad}\,\Gamma_x\cdot R_\pm^\Omega(\alpha-2,x)\rangle\\
&= \frac{1}{2\alpha}\Box\Gamma_x \cdot R_\pm^\Omega(\alpha,x) + \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}\Gamma_x\cdot R_\pm^\Omega(\alpha-2,x)\\
&= \frac{1}{2\alpha}\Box\Gamma_x \cdot R_\pm^\Omega(\alpha,x) + \frac{(\alpha-2)(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-2)}R_\pm^\Omega(\alpha,x)\\
&= \left(\frac{\Box\Gamma_x - 2n}{2\alpha} + 1\right)R_\pm^\Omega(\alpha,x).
\end{aligned}$$

Istim argumentima kao i u (iii) i (iv) slijedi da tvrdnja vrijedi za svaki $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

vi) Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{C})$ testna funkcija. Iz 2.3.6.(iii) slijedi

$$\begin{aligned}
R_\pm^\Omega(0,x)[\varphi] &= R_\pm(0)[(\mu_x\varphi)\circ \exp_x]\\
&= \delta_0[(\mu_x\varphi)\circ \exp_x]\\
&= ((\mu_x\varphi)\circ \exp_x)(0)\\
&= \mu_x(x)\varphi(x)\\
&= \phi(x)\\
&= \delta_x[\varphi]\,.
\end{aligned}$$

vii) Tvrdnja slijedi direktno iz 2.3.6.(iv).

□

Dokaz sljedeće leme nalazi se u [3, str. 55].

Lema 2.3.9. Sljedeće tvrdnje vrijede za svaki $\alpha \in \mathbb{C}$:

i) Ako je $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, onda je red distribucije $R_\pm^\Omega(\alpha, x)$ najviše $n + 1$. Dodatno, postoji otvorena okolina U točke x i konstanta $C > 0$ takva da

$$|R_\pm^\Omega(\alpha, x')[\varphi]| \leq C\|\varphi\|_{C^{n+1}(\Omega)}$$

za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$ i $x' \in U$

ii) ako je $U \subseteq \Omega$ otvorena okolina točke x takva da je Ω geodetski zvjezdast s obzirom na svaki $x' \in U$ i $V \in \mathcal{D}(U \times \Omega, \mathbb{C})$, onda je funkcija $U \to \mathbb{C}$, $x' \mapsto R_\pm^\Omega(\alpha, x')[y \mapsto V(x', y)]$ glatka.

iii) ako je $U \subseteq \Omega$ otvorena okolina točke x takva da je Ω geodetski zvjezdast s obzirom na svaki $x' \in U$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ i $V \in \mathcal{D}(U \times \Omega, \mathbb{C})$, onda je funkcija $U \to \mathbb{C}$, $x' \mapsto R_\pm^\Omega(\alpha, x')[y \mapsto v(x', y)]$ klase C^k

iv) za svaki $\varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, \mathbb{C})$, preslikavanje $\alpha \mapsto R_\pm^\Omega[\varphi]$ je holomorfna funkcija na $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\alpha) > n - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\}$.

Lema 2.3.10. Neka je Ω geodetski konveksna, vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost i $\alpha \in \mathbb{C}$. Tada za proizvoljni $u \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega, \mathbb{C})$ vrijedi

$$\int_\Omega R_+^\Omega(\alpha, x)[y \mapsto u(x, y)]\, dV(x) = \int_\Omega R_-^\Omega(\alpha, y)[x \mapsto u(x, y)]\, dV(y).$$

Dokaz. Geodetska konveksnost skupa Ω osigurava nam da su Rieszove distribucije $R_\pm^\Omega(\alpha, x)$ definirane za svaki $x \in \Omega$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Iz 2.3.9.(ii) slijedi da su funkcije unutar integrala glatke. Iz toga što u ima kompaktan nosač sadržan u $\Omega \times \Omega$, slijedi da $R_+^\Omega(\alpha, x)[y \mapsto u(x, y)]$ ima kompaktan nosač sadržan u Ω. Naime, nosač je sadržan u $\pi_1(\mathrm{supp}\, u)$, gdje je $\pi_1 : \Omega \times \Omega$ projekcija na prvu koordinatu. Kako je π_1 neprekidna i slika po neprekidnoj funkciji kompaktnog skupa je kompaktna, slijedi da je $\mathrm{supp}\, R_+^\Omega(\alpha, x)[y \mapsto u(x, y)]$ kompaktan. Analogno se pokaže da je $\mathrm{supp}\, \Omega(\alpha, y)[x \mapsto u(x, y)]$ kompaktan, pa su integrali iz iskaza teorema dobro definirani.

Iz 2.3.8.(ii) slijedi da su integrali u iskazu teorema holomorfne funkcije u α na cijelom $\mathbb{C}$, pa je dovoljno tvrdnju pokazati za $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(\alpha) > n$. Za takve $\alpha \in \mathbb{C}$ Rieszove distribucije $R_+^\Omega(\alpha, x)$ i $R_-^\Omega(\alpha, y)$ su neprekidne funkcije. Iz 2.3.8.i) slijedi

$$R_+^\Omega(\alpha, x)(y) = R_-^\Omega(\alpha, y)$$

za svaki $x, y \in \Omega$. Naime, treba provjeriti da je $\Gamma_x(y) = \Gamma_y(x)$ za svaki $x, y \in \Omega$. Neka su $x, y \in \Omega$, $X = \exp_y^- 1(x)$ i $Y = exp_x^- 1(y)$. Iz def Γ_x slijedi da je $\Gamma_x(y) = -g(Y, Y)$ i $\Gamma_y(x) = -g(X, X)$. Nadalje, iz definicije eksponencijalnog preslikavanja slijedi da je X jednak vektoru $-Y$, koji je dobiven paralelnim prijenosom $T_y\Omega \to T_x\Omega$ vektora X duž jedinstvene geodetske krivulje koja povezuje y i x. Dakle, g(Y, Y)=g(X, X), pa je $\Gamma_x(y) = \Gamma_y(x)$. Iz Fubinijevog teorema slijedi

$$\begin{aligned}
\int_\Omega R_+^\Omega(\alpha, x)[\, y \mapsto u(x, y)]\, dV(x) &= \int_\Omega \left(\int_\Omega R_+^\Omega(\alpha, x)(y) u(x, y)\, dV(y) \right) dV(x) \\
&= \int_\Omega \left(\int_\Omega R_-^\Omega(\alpha, y)(x) u(x, y)\, dV(x) \right) dV(y) \\
&= \int_\Omega R_-^\Omega(\alpha, y)[\, x \mapsto u(x, y)]\, dV(y).
\end{aligned}$$

□

Poglavlje 3

Lokalna teorija linearnih valnih jednadžbi

U ovom poglavlju počinjemo razvijati teoriju rješenja geometrijskih valnih jednadžbi. Pod geometrijskom valnom jednadžbom mislimo na jednadžbu oblika $Pu = f$, gdje je P normalno hiperboličan operator, $f \in C^\infty(M)$ i u traženi glatki prerez.

3.1 Elementarna rješenja

Definicija 3.1.1. Neka je Ω vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost, $x \in \Omega$, E vektorski svežanj nad M i $P \in \mathrm{Diff}_2(E, E)$ normalno hiperboličan. *Elementarno rješenje* diferencijalnog operatora P u točki x je distribucija $F \in \mathcal{D}'(M, E, E_x^*)$ takva da je

$$PF = \delta_x.$$

Drugim riječima za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$ vrijedi

$$F[\,P^*\varphi] = \varphi(x).$$

Za elementarno rješenje F u točki x kažemo da je *napredno* ako je $\operatorname{supp} F \subseteq J_+^\Omega(x)$, a *retardirano* ako je $\operatorname{supp} F \subseteq J_-^\Omega(x)$.

Primjer 3.1.2. Neka je Ω prostor Minkowskog. Tada iz 2.3.6.(i) i 2.3.6.(iii) slijedi da je $R_+(2)$ napredno, a $R_-(2)$ retardirano elementarno rješenje u točki $x = 0$ za $P = \Box$.

Krenimo s razvojem teorije rješenja linearnih geometrijskih valnih jednadžbi. Neka je Ω geodetski zvjezdasto područje s obzirom na neki $x \in \Omega$ u vremenski orijentiranoj Lorentzovoj mnogostrukosti. Dodatno, neka je E vektorski svežanj nad Ω i $P = \Box^\nabla + B$

normalno hiperboličan diferencijalni operator koji djeluje na $C^\infty(\Omega, E)$. Pretpostavimo da elementarno rješenje u x ima oblik formalnog reda

$$\mathcal{R}_\pm(x) := \sum_{k=0}^{\infty} V_x^k R_\pm^\Omega(2+2k, x),$$

gdje su $V_x^k \in E_x^* \otimes C^\infty(\Omega, E) = C^\infty(\Omega, E_x^* \otimes E)$ nepoznati glatki prerezi. Neka je $y \in \Omega$ i $\varphi \in C^\infty(M, E^*)$. Tada je $V_x^k(y) \in E_x^* \otimes E_y = \mathrm{Hom}(E_x, E_y)$, pa je za proizvoljne $\varphi \in \mathcal{D}(M, E^*)$ i $v \in E_x$ preslikavanje

$$\Omega \ni y \mapsto \varphi(y)(V_x^k(y)v)$$

glatko s kompaktnim nosačem. Stoga preslikavanje $V_x^k \mathcal{R}_\pm^\Omega(2+2k, x) : \mathcal{D}(\Omega, E^*) \to E_x^*$ definiramo formulom

$$V_x^k R_\pm^\Omega(2+2k, x)[\varphi] \cdot v = R_\pm^\Omega(2+2k, x)[\, y \mapsto \varphi(y)(V_x^k(y)v)] \,,$$

gdje su $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$ i $v \in E_x$ proizvoljni. Uočimo da smo time definirali distribuciju iz $\mathcal{D}'(\Omega, E, E_x^*)$. Sljedeći je cilj pronaći uvjete na V_x^k uz koje je $\mathcal{R}_\pm(x)$ formalno elementarno rješenje u x. Diferencijalni operator P primjenjujemo na red član po član. Želimo da je

$$P\mathcal{R}_\pm(x) = \delta_x,$$

pa iz 2.3.8.(vi) slijedi

$$P\mathcal{R}_\pm(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(V_x^k R_\pm^\Omega(2+2k, x)) = R_\pm^\Omega(0, x).$$

Koristeći lemu 2.1.22 i svojstva Rieszovih distribucija 2.3.8.(iv) i 2.3.8.(v) dobivamo

$$\begin{aligned}
R_\pm^\Omega(0, x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(V_x^k R_\pm^\Omega(2+2k, x)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \{V_x^k \cdot \Box R_\pm^\Omega(2+2k, x) - 2\nabla_{\mathrm{grad}\, R_\pm^\Omega(2+2k,x)} V_x^k + PV_x^k \cdot R_\pm^\Omega(2+2k, x)\} \\
&= V_x^0 \cdot \Box R_\pm^\Omega(2, x) - 2\nabla_{\mathrm{grad}\, R_\pm^\Omega(2,x)} V_x^0 \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ V_x^k \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}\Box\Gamma_x - n}{2k} + 1 \right) R_\pm^\Omega(2k, x) - \frac{2}{4k} \nabla_{\mathrm{grad}\, \Gamma_x R_\pm^\Omega(2k,x)} V_x^k + PV_x^{k-1} \cdot R_\pm^\Omega(2k, x) \right\} \\
&= V_x^0 \cdot \Box R_\pm^\Omega(2, x) - 2\nabla_{\mathrm{grad}\, R_\pm^\Omega(2,x)} V_x^0 \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \left\{ \left(\frac{1}{2}\Box\Gamma_x - n + 2k \right) V_x^k - \nabla_{\mathrm{grad}\, \Gamma_x} V_x^k + 2kPV_x^{k-1} \right\} R_\pm^\Omega(2k, x).
\end{aligned}$$

Dakle, usporedbom koeficijenata dobivamo jednadžbe

$$2\nabla_{\operatorname{grad} R_\pm^\Omega(2,x)} V_x^0 - V_x^0 \cdot \Box R_\pm^\Omega(2,x) + R_\pm^\Omega(0,x) = 0 \qquad \text{za } k = 0 \text{ i} \tag{3.1}$$

$$\nabla_{\operatorname{grad}\Gamma_x} V_x^k - \left(\frac{1}{2}\Box\Gamma_x - n + 2k\right) V_x^k = 2kPV_x^{k-1} \qquad \text{za } k \geq 1. \tag{3.2}$$

Uvrstimo u jednadžbu (3.2) $k = 0$ i pomnožimo je s $R_\pm(\alpha, x)$. Time dobivamo

$$\nabla_{\operatorname{grad}\Gamma_x R_\pm^\Omega(\alpha,x)} V_x^0 - \left(\frac{1}{2}\Box\Gamma_x - n + 2k\right) V_x^0 \cdot R_\pm^\Omega(\alpha, x) = 0.$$

Iz 2.3.8.(iv) i 2.3.8.(v) slijedi

$$\nabla_{2\alpha \operatorname{grad}\Gamma_x R_\pm(\alpha+2,x)} V_x^0 - \left(\alpha\Box R_\pm^\Omega(\alpha+2,x) - \alpha R_\pm^\Omega(\alpha,x)\right) V_x^0 = 0.$$

Dijeljenjem s α i puštanjem limesa $\alpha \to 0$ dobivamo

$$2\nabla_{\operatorname{grad}\Gamma_x R_\pm(2,x)} V_x^0 - \left(\Box R_\pm^\Omega(2,x) - R_\pm^\Omega(0,x)\right) V_x^0 = 0.$$

Uočimo da (3.1) vrijedi ako i samo ako je $V_x^0 R_\pm^\Omega(0,x) = R_\pm^\Omega(0,x)$, odnosno

$$V_x^0 \delta_x = \delta_x.$$

Uzimanjem proizvoljne testne funkcije $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$ i $v \in E_x$ dobivamo

$$V_x^0(x)\varphi(x)v = \delta_x[\, y \mapsto (V_x^0(y)\varphi(y))v] = (V_x^0 R_\pm^\Omega)[\,\varphi] \cdot v = \delta_x[\,\varphi] \cdot v = \varphi(x)v,$$

pa iz proizvoljnosti $v \in E_x$ slijedi $V_x^0(x)\varphi(x) = \varphi(x)$, odnosno $V_x^0(x) = \mathrm{id}\,|_{E_x}$. Dakle, $\mathcal{R}_\pm(x)$ je formalno elementarno rješenje ako i samo ako $V_x^k \in C^\infty(\Omega, E_x^* \otimes E)$ zadovoljavaju

$$\nabla_{\operatorname{grad}\Gamma_x} V_x^k - \left(\frac{1}{2}\Box\Gamma_x - n + 2k\right) V_x^k = 2kPV_x^{k-1} \tag{3.3}$$

za sve $k \in \mathbb{N}_0$ s početnim uvjetom $V_x^0(x) = \mathrm{id}\,|_{E_x}$. Jednadžbe (3.3) nazivamo *prijenosnim jednadžbama.*

Definicija 3.1.3. Neka je Ω vremenski orijentirana i geodetski zvjezdasta s obzirom na $x \in \Omega$. Prereze $V_x^k \in E_x^* \otimes C^\infty(\Omega, E)$ nazivamo *Hadamardovim koeficijentima* za diferencijalni operator P u točki x ako zadovoljavaju prijenosne jednadžbe za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ i $V_X^0(x) = \mathrm{id}\,|_{E_x}$.

Za $y \in \Omega$ označimo ∇-paralelni prijenos duž jedinstvene geodetske krivulje koja spaja x i y sa

$$P_{x\to y} : E_x \to E_y.$$

Podsjetimo se da je $P_{x\to x} = \mathrm{id}|_{E_x}$ i $(P_{x\to y})^{-1} = P_{y\to x}$. Definirajmo preslikavanje $\Phi : \Omega \times [\,0,1] \to \Omega$ formulom

$$\Phi(y,s) := \exp_x(s\cdot \exp_x^{-1}(y)).$$

Uočimo da je preslikavanje Φ dobro definirano, jer je Ω geodetski zvjezdast s obzirom na x. Dodatno, Φ je glatko kao kompozicija glatkih funkcija.

Propozicija 3.1.4. Neka je Ω vremenski orijentirana i geodetski zvjezdasta s obzirom na $x \in \Omega$. Dodatno, neka je P normalno hiperboličan operator koji djeluje na $C^\infty(\Omega, E)$.Tada postoje jedinstveni Hadamardovi koeficijenti za P u x koji su dani formulama

$$V_x^0(y) = \mu_x^{-1/2}(y)P_{x\to y} \tag{3.4}$$

i za $k \in \mathbb{N}$

$$V_x^k(x) = -k\mu_x^{-1/2}(y)P_{x\to y}\int_0^1 \mu_x^{1/2}(\Phi(y,s))s^{k-1}P_{\Phi(y,s)\to x}((PV^{k-1})\Phi(y,s))\,ds. \tag{3.5}$$

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost. Neka je $\rho = \sqrt{|\Gamma_x|}$, pa za $y \in \Omega \setminus \left(\partial J_+^\Omega(x) \cup \partial J_-^\Omega(x)\right)$ vrijedi $\Gamma_x(y) = -\epsilon\rho^2(y)$, gdje je $\epsilon = -1$ na $I_\pm^\Omega(x)$ i $\epsilon = 1$ na $\Omega \setminus \left(J_+^\Omega(x) \cup J_-^\Omega(x)\right)$. Formule za V_x^k ćemo dokazati na $\Omega \setminus \left(\partial J_+^\Omega(x) \cup \partial J_-^\Omega(x)\right)$. Uočimo da je na tom skupu ρ glatka. Zbog neprekidnosti formule će vrijediti na cijelom Ω. Koristeći 1.3.28 dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Box\Gamma_x - n &= -\frac{1}{2}\langle \operatorname{grad}\Gamma_x, \operatorname{grad}(\ln\mu_x)\rangle \\
&= -\frac{1}{2}d(\ln(\mu_x))\operatorname{grad}\Gamma_x \\
&= -\frac{1}{2}\operatorname{grad}\Gamma_x(\ln(\mu_x)) \\
&= -\operatorname{grad}\Gamma_x(\ln(\mu_x^{1/2}))
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\Gamma_x(\ln\rho^k) &= \frac{k}{2}\operatorname{grad}\Gamma_x(\ln(-\epsilon\Gamma_x)) \\
&= \frac{k}{2}\langle \operatorname{grad}\Gamma_x, \operatorname{grad}\ln(-\epsilon\Gamma_x)\rangle \\
&= \frac{k}{2}\frac{1}{-\epsilon\Gamma_x}\langle \operatorname{grad}\Gamma_x, \operatorname{grad}(-\epsilon\Gamma_x)\rangle \\
&= \frac{k}{2}\frac{1}{\Gamma_x}\langle \operatorname{grad}\Gamma_x, \operatorname{grad}\Gamma_x\rangle = -2k.
\end{aligned}$$

Koristeći prethodne dvije izvedene formule dobivamo da je (3.3) ekvivalentno s

$$\nabla_{\operatorname{grad}\Gamma_x} V_x^k + \operatorname{grad}\Gamma_x \left(\ln\left(\mu_x^{1/2}\rho^k\right)\right) V_x^k = 2kPV_x^{k-1}.$$

Množenjem prethodne jednadžbe s $\mu_x^{1/2}\rho^k$ dobivamo da je (3.3) ekvivalentno s

$$\nabla_{\operatorname{grad}\Gamma_x}\left(\mu_x^{1/2}\rho^k V_x^k\right) = \mu_x^{1/2}\rho^k 2kPV_x^{k-1}. \tag{3.6}$$

Neka je $y \in \Omega$ i $\eta \in T_x\Omega$ takav da je $\exp_x(\eta) = y$. Definirajmo glatku krivulju $c : \langle 0, 0] \to \Omega$, $c(t) = \exp_x(e^{2t}\eta)$ koja je reparametrizacija geodetske krivulje $\beta : [0, 1] \to \Omega$, $\beta(s) = \exp_x(s\eta)$. Lako se vidi da je

$$\dot{c}(t) = 2d(\exp_x)_{e^{2t}\eta}(e^{2t}\eta),$$

pa iz 1.3.28.(i) slijedi da je $\dot{c}(t) = -\operatorname{grad}\Gamma_x|_{c(t)}$. Za $k = 0$ iz (3.6) slijedi da je $-\nabla_{\dot{c}(t)}\left(\mu_x^{1/2}V_x^0\right) = 0$. Kako je $\mu_x^{1/2}V_x^0$ ∇-paralelni prerez duž c. Kako je $\mu_x(x) = 1$, slijedi da je

$$\begin{aligned}\left(\mu_x^{1/2}V_x^0\right)(y) &= P_{x\to y}\left(\mu_x^{1/2}V_x^0\right)(x)\\ &= P_{x\to y}\operatorname{id}|_{E_x}\\ &= P_{x\to y},\end{aligned}$$

pa smo pokazali (3.4). Sada ćemo odrediti V_x^k za $k \in \mathbb{N}$. Neka je $y \in \Omega \setminus \left(\partial J_+^\Omega(x) \cup \partial J_-^\Omega(x)\right)$. Iz (3.6) slijedi

$$-\nabla_{\dot{c}(t)}\left(\mu_x^{1/2}\rho^k V_x^k\right) = \mu_x^{1/2}\rho^k 2kPV_x^{k-1}.$$

Iz relacije koja povezuje paralelni prijenos i kovarijantnu derivaciju (1.18) slijedi da je

$$-\frac{d}{dt}\left(P_{c(t)\to x}\left(\mu_x^{1/2}\rho^k V_x^k\right)(c(t))\right) = P_{c(t)\to x}\left(\mu_x^{1/2}\rho^k 2kPV_x^{k-1}\right)(c(t)).$$

Stoga dobivamo

$$-P_{y\to x}\left(\mu_x^{1/2}\rho^k V_x^k\right)(y) = \int_{-\infty}^{0} P_{c(t)\to x}\left(\mu_x^{1/2}\rho^k 2kPV_x^{k-1}\right)(c(t))\,dt. \tag{3.7}$$

Računamo

$$\begin{aligned}\rho^k(c(t)) &= |\Gamma_x(c(t))|^{k/2}\\ &= |\gamma(e^{2t}\eta)|^{k/2}\\ &= |e^{4t}\gamma(\eta)|^{k/2}\\ &= e^{2kt}|\gamma(\eta)|^{k/2}.\end{aligned}$$

Kako $y \notin \partial J_+^\Omega(x) \cup \partial J_-^\Omega(x)$, jednadžbu (3.7) možemo podijeliti s $|\gamma(\eta)|^{k/2} \neq 0$ i time dobivamo

$$\begin{aligned}
\left(\mu_x^{1/2} V_x^k\right)(y) &= -2kP_{x\to y} \int_{-\infty}^{0} P_{c(t)\to x}\left(\mu_x^{1/2} e^{2kt} P V_x^{k-1}\right)(c(t))\, dt \\
&= -2kP_{x\to y} \int_{0}^{1} P_{\Phi(y,s)\to x}\left(\mu_x^{1/2} s^k P V_x^{k-1}\right)(\Phi(y,s)) \frac{1}{2s}\, ds \\
&= -kP_{x\to y} \int_{0}^{1} \mu_x^{1/2}(\Phi(y,s)) s^{k-1} P_{\Phi(y,s)\to x}(P V_x^{k-1}(\Phi(y,s))\, ds,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugom koraku iskoristili zamjenu varijabli $s = e^{2t}$. Dakle, dokazali smo (3.5). Dokažimo egzistenciju. Za to koristimo formule (3.4) i (3.5) kao definicije koeficijenata V_x^k. Uočimo da su tada $V_x^k \in E_x^* \otimes C^\infty(\Omega, E)$. Direktnim računom unatrag dobivamo da V_x^k zadovoljava (3.6) za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. □

Pronašli smo formalna elementarna rješenja $\mathcal{R}_\pm(x)$ za P i fiksan $x \in \Omega$. Želimo definirati formalno elementarno rješenje za x koji nije nužno fiksan. Neka je $U \subseteq \Omega$ otvoren takav da je Ω geodetski zvjezdast s obzirom na svaki $x \in U$. Time smo osigurali da su Rieszove distribucije $R_\pm^\Omega(\alpha, x)$ dobro definirane za svaki $x \in U$. Definirajmo $V_k(x,y) := V_x^k(y)$. Iz toga slijedi da je $V_k(x,y) \in E_x^* \otimes E_y = \mathrm{Hom}(E_x, E_y)$. Iz definicija koeficijenata V_x^k slijedi da su glatki u x, pa je

$$V_k \in C^\infty(U \times \Omega, E^* \boxtimes E).$$

Dakle, formalno elementarno rješenje za diferencijalni operator P u točki x je oblika

$$\mathcal{R}_\pm(x) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x,\cdot) R_\pm^\Omega(2+2k, x).$$

Želimo uvesti određene funkcije rezanja kako bi naš red konvergirao. Međutim, red koji dobijemo neće biti elementarno rješenje valne jednadžbe. Stoga, ga nazivamo aproksimativnim elementarnim rješenjem.

Neka je M Lorentzova mnogostrukost i $\Omega' \subseteq M$ geodetski konveksan otvoren skup. Iz prijašnjeg razmatranja slijedi da je za svaki $x \in \Omega'$

$$\mathcal{R}_\pm(x) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x,\cdot) R_\pm^{\Omega'}(2+2k, x)$$

elementarno rješenje za P u x. Neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $N \geq \frac{n}{2}$, gdje je n dimenzija mnogostrukosti M. Tada je za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k \geq N$ distribucija $R_\pm^{\Omega'}(2+2k, x)$

neprekidna funkcija na Ω'. Stoga, formalno elementarno rješenje možemo razdvojiti na dvije sume kao

$$\mathcal{R}_\pm(x) = \sum_{k=0}^{N-1} V_k(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x) + \sum_{k=N}^{\infty} V_k(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x),$$

gdje je $\sum_{k=0}^{N-1} V_k(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x)$ dobro definirana distribucija u E s vrijednostima u E_x^* i $\sum_{k=N}^{\infty} V_k(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x)$ formalni red neprekidnih prereza, $V_k(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x) \in C(\Omega', E_x^* \otimes E)$. Članove ostatka ćemo množiti s određenim funkcijama rezanja kako bismo osigurali da red konvergira.

Definicija 3.1.5. Neka je M vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost. Za $S \subseteq M \times M$ kažemo da je *rastegnut prema budućnosti* s obzirom na M ako je $y \in J_+^M(x)$ kad god je $(x,y) \in S$. Analogno definiramo pojam *rastegnutosti prema prošlosti*.

Nećemo ulaziti u detalje konstrukcije aproksimativnog elementarnog rješenja. Vrijedi sljedeća propozicija čiji se dokaz može pronaći u [3, Prop. 2.2.10]

Propozicija 3.1.6. Neka je M n-dimenzionalna vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost i P normalno hiperboličan operator koji djeluje na prerezima u vektorskom svežnju E nad M. Neka je $\Omega' \subseteq M$ geodetski konveksan i otvoren. Dodatno, neka je $N \geq \frac{n}{2}$ i $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$ glatka funkcija takva da je $\sigma \equiv 1$ izvan $[-1,1]$ i $\sigma \equiv 0$ na $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Tada za svaki relativno kompaktan otvoren podskup $\Omega \subseteq \Omega'$ postoji niz $\varepsilon_k > 0$, $k \geq N$ takav da za svaki $x \in \overline{\Omega}$

$$\tilde{\mathcal{R}}_\pm(x) = \sum_{k=0}^{N-1} V_k(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x) + \sum_{k=N}^{\infty} \sigma(\Gamma(x,\cdot)/\varepsilon_k)V_k(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x)$$

definira distribuciju na Ω koja zadovoljava

i) $\operatorname{supp}\tilde{\mathcal{R}}_\pm(x) \subseteq J_\pm^{\Omega}(x)$

ii) $P\tilde{\mathcal{R}}_\pm(x) = \delta_x + K_\pm(x,\cdot)$, gdje je $K_\pm \in C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}, E^* \boxtimes E)$

iii) $\operatorname{supp} K_+$ je rastegnut prema budućnosti, a $\operatorname{supp} K_-$ rastegnut prema prošlosti s obzirom na Ω'

iv) $\tilde{\mathcal{R}}_\pm(x)[\varphi]$ je glatka u x za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$ fiksan

v) postoji konstanta $C > 0$ takva da je $|\tilde{\mathcal{R}}_\pm(x)[\varphi]| \leq C\|\varphi\|_{C^{n+1}(\Omega)}$ za svaki $x \in \overline{\Omega}$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$.

Definicija 3.1.7. $\tilde{\mathcal{R}}_+(x)$ nazivamo *naprednim*, a $\tilde{\mathcal{R}}_-(x)$ *retardiranim aproksimativnim elementarnim rješenjem.*

Sljedeći cilj je pretvoriti aproksimativno elementarno rješenje u pravo koristeći integralne operatore.

Od sada dodatno pretpostavljamo da je $\Omega \subset\subset \Omega'$ relativno kompaktan i kauzalan. Neka je $x \in \overline{\Omega}$. Tada iz kauzalnosti skupa Ω slijedi da je $J_\pm^{\overline{\Omega}}(x) = J_\pm^{\Omega'}(x) \cap \overline{\Omega}$. Dokažimo tvrdnju za $+$. Druga tvrdnja slijedi analognim zaključivanjem. Neka su $x, y \in \overline{\Omega}$ takvi da je $y \in J_+^{\Omega'}(x)$. Tada iz kauzalnosti skupa Ω slijedi da x i y možemo spojiti s buduće orijentiranom geodetskom krivuljom koja je sadržana u $J_+^{\Omega'}(x) \cap J_-^{\Omega'}(y) \subseteq \overline{\Omega}$. Iz toga slijedi da je cijela krivulja sadržana u $\overline{\Omega}$, pa je $y \in J_+^{\overline{\Omega}}(x)$. Time smo dokazali tvrdnju.

Neka je $x \in \Omega$ i neka su $\tilde{\mathcal{R}}_\pm(x)$ aproksimativna elementarna rješenja. Neka je $K_\pm \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}, E^* \boxtimes E)$ takav da vrijedi 3.1.6.(ii). Konstruirati ćemo integralni operator čija će jezgra biti $K_\pm$. Za $u \in C(\overline{\Omega}, E^*)$ i $x \in \overline{\Omega}$ definirajmo

$$(\mathcal{K}_\pm u)(x) := \int_{\overline{\Omega}} K_\pm(x, y) u(y) dV(y). \tag{3.8}$$

Iz toga što je $K_\pm$ klase C^∞ slijedi da je $\mathcal{K}_\pm u$ klase C^∞ ([13, Lemma 3.4.23]), odnosno $\mathcal{K}_\pm u \in C^\infty(\Omega, E^*)$. Iz definicije je jasno da je $\mathcal{K}_\pm : C(\overline{\Omega}, E^*) \to C^k(\overline{\Omega}, E^*)$ linearan operator za svaki $k \in \mathbb{N}_0$.

Vrijedi sljedeća lema čiji se dokaz nalazi u [4, Lemma 2.4.8.].

Lema 3.1.8. Neka je $\Omega \subseteq \Omega'$ relativno kompaktan i kauzalan takav da je

$$\operatorname{vol}(\overline{\Omega}) \cdot \|K_\pm\|_{C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})} < 1.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

i) Preslikavanje
$$\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm : C^k(\overline{\Omega}, E^*) \to C^k(\overline{\Omega}, E^*)$$
je izomorfizam s neprekidnim inverzom za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Inverz je dan redom
$$(\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathcal{K}_\pm)^k$$
koji konvergira u svakoj C^k-operatorskoj normi.

ii) Linearni operator $(\mathrm{id} + \mathcal{K}_+)^{-1} \circ \mathcal{K}_+$ ima glatku integralnu jezgru s nosačem koji je buduće rastegnut. Linearni operator $(\mathrm{id} + \mathcal{K}_-)^{-1} \circ \mathcal{K}_-$ ima glatku integralnu jezgru s nosačem koji je rastegnut prema prošlosti.

Korolar 3.1.9. Neka je $\Omega \subset\subset \Omega'$ kao u prijašnjoj lemi. Tada je za svaki $u \in C(\overline{\Omega}, E^*)$

$$\operatorname{supp}((\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1} u) \subseteq J_\mp^{\overline{\Omega}}(\operatorname{supp} u).$$

Dokaz. Iz $u = (\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm))u - \mathcal{K}_\pm)u$ slijedi da je

$$(\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1} u = u - (\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1} \mathcal{K}_\pm u.$$

Pretpostavimo da je $(\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1} u(x) \neq 0$. Iz toga slijedi da je $u(x) \neq 0$ ili $(\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1} \mathcal{K}_\pm u(x) \neq 0$. Neka je $S_\pm$ integralna jezgra operatora $(\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1} \mathcal{K}_\pm$ koja ima nosač orijentiran prema budućnosti (prošlosti). Tada je

$$(\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1} \mathcal{K}_\pm u(x) = \int_{\overline{\Omega}} S_\pm(x, y) u(y) dV(y).$$

Iz 3.1.6.(iii) slijedi da ako $S_\pm(x, y)u(y) \neq 0$, onda je $y \in \operatorname{supp} u$ i $y \in J_\pm^{\Omega'}(x)$, pa je $y \in \operatorname{supp} u \cap J_\pm^{\Omega'}(x) = \operatorname{supp} u \cap J_\pm^{\Omega'}(x) \cap \overline{\Omega} = \operatorname{supp} u \cap J_\pm^{\overline{\Omega}}(x)$. Iz toga slijedi da je $x \in J_\mp^{\overline{\Omega}}(\operatorname{supp} u)$. □

Pomoću integralnog operatora $\mathcal{K}_\pm$ konstruirat ćemo prava elementarna rješenja. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$. Tada je preslikavanje $x \mapsto \tilde{\mathcal{R}}_+(x)[\varphi]$ glatki prerez u E^* nad $\overline{\Omega}$, pa je

$$F_\pm^\Omega(\cdot)[\varphi] := (\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}_\pm(\cdot)[\varphi]) \tag{3.9}$$

glatki prerez u E^*.

Lema 3.1.10. Za svaki $x \in \Omega$ preslikavanje $\mathcal{D}(\Omega, E^*) \to E_x^*$, $\varphi \mapsto F_+^\Omega(x)[\varphi]$ je napredno elementarno rješenje u x na Ω i $\varphi \mapsto F_-^\Omega(x)[\varphi]$ retardirano elementarno rješenje u x na Ω.

Dokaz. Dokažimo prvo da je preslikavanje $\varphi \mapsto F_\pm^\Omega(x)[\varphi]$ distribucija za fiksni $x \in \Omega$. Neka $\varphi_n \to \varphi$ u $\mathcal{D}(\Omega, E^*)$. Tada $\varphi_n \to \varphi$ u $C^{n+1}(\Omega, E^*)$, pa iz 3.1.6.(v) slijedi da $\tilde{\mathcal{R}}_+(x)[\varphi_n] \to \tilde{\mathcal{R}}_+(x)[\varphi]$ u $C(\overline{\Omega}, E^*)$. Kako je $(\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1}$ neprekidan na $C(\overline{\Omega}, E^*)$, slijedi da $F_\pm^\Omega(x)[\varphi_n] \to F_\pm^\Omega(x)[\varphi]$, pa je $F_\pm^\Omega(x)$ distribucija.

Dokažimo da su $F_\pm^\Omega(x)$ elementarna rješenja u x. Direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned}
PF_\pm(\cdot)[\varphi] &= F_\pm^\Omega[P^*\varphi] \\
&= (\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}_+(\cdot)[P^*\varphi]) \\
&= (\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1}(P\tilde{\mathcal{R}}_+(\cdot)[\varphi]) \\
&= (\mathrm{id} + \mathcal{K}_\pm)^{-1}(\varphi + \mathcal{K}_\pm \varphi) \\
&= \varphi,
\end{aligned}$$

pa je

$$PF_{\pm}(x)[\varphi] = \varphi(x) = \delta_x[\varphi].$$

Preostaje dokazati da je $\operatorname{supp} F^{\Omega}_{\pm}(x) \subseteq J^{\Omega}_{\pm}(x)$. Dokažimo najprije da je $\operatorname{supp}\big(\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(\cdot)[\varphi]\big) \subseteq J^{\overline{\Omega}}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi)$. Neka je $x \in \overline{\Omega}$ takav da je $\operatorname{supp}\varphi \cap J^{\overline{\Omega}}_{\pm}(x) = \emptyset$. Tada iz 3.1.6.(i) slijedi da je $\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(x)[\varphi] = 0$. Dakle, ako $x \notin J^{\overline{\Omega}}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi)$, onda je $\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(x)[\varphi] = 0$. Odnosno, ako je $\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(x)[\varphi] \neq 0$, onda je $x \in J^{\overline{\Omega}}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi)$, pa je $\operatorname{supp}\big(\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(\cdot)[\varphi]\big) \subseteq \overline{J^{\overline{\Omega}}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi)} = J^{\overline{\Omega}}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi)$ (zadnja jednakost slijedi iz [4, Lemma A.5.5.] i [4, Lemma A.5.1.]). Stoga, koristeći prethodni korolar dobivamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp} F^{\Omega}_{\pm}(\cdot)[\varphi] &= \operatorname{supp}\Big((\mathrm{id} + \mathcal{K}_{\pm})^{-1}(\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(\cdot)[\varphi]\Big) \\
&\subseteq J^{\overline{\Omega}}_{\mp}\Big(\operatorname{supp}\big(\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(\cdot)[\varphi]\big)\Big) \\
&\subseteq J^{\overline{\Omega}}_{\mp}\Big(J^{\overline{\Omega}}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi)\Big) \\
&= J^{\overline{\Omega}}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi).
\end{aligned}$$

Neka je sada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$ takav da je $\operatorname{supp}\varphi \cap J^{\Omega}_{\pm}(x) = \emptyset$. Tada $x \notin J^{\Omega}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi)$, pa je $F_{\pm}(x)[\varphi] = 0$. Odnosno, ako je $F_{\pm}(x)[\varphi] \neq 0$, onda je $x \in J^{\Omega}_{\mp}(\operatorname{supp}\varphi)$, pa je $\operatorname{supp} F_{\pm}(x)[\varphi] \subseteq \overline{J^{\Omega}_{\pm}(x)} = J^{\Omega}_{\pm}(x)$. □

3.2 Rješavanje nehomogene jednadžbe na malom području

Neka je M vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost i $\Omega \subseteq M$ relativno kompaktan i kauzalan skup s malim volumenom kao u 3.1.8. Za takav Ω ćemo reći da je *RCCSV-područje*. Napomenimo da svaka točka u Lorentzovoj mnogostrukosti posjeduje RCCSV okoline. Dodatno, neka je E vektorski svežanj nad Ω, $P \in \mathrm{Diff}_2(E, E)$ normalno hiperboličan i $F^{\Omega}_{\pm}(x)$ elementarno rješenje operatora P u točki $x \in \Omega$. Podsjetimo, ako je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E)$, onda su preslikavanja $x \mapsto F^{\Omega}_{\pm}(x)[\varphi]$ glatki prerezi u E^*. Uočimo da je tada za $v \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ preslikavanje $x \mapsto F^{\Omega}_{\pm}(x)[\varphi] \cdot v(x)$ glatko s kompaktnim nosačem. Definirajmo

$$u_{\pm}[\varphi] := \int_{\Omega} F^{\Omega}_{\pm}(x)[\varphi] \cdot v(x)\, dV(x). \tag{3.10}$$

Uočimo da su $u_{\pm} \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$. Naime, neka $\varphi_n \to \varphi$ u $\mathcal{D}(\Omega, E^*)$. Tada iz 3.1.6.(v) i (3.9) slijedi da $F^{\Omega}_{\pm}(\cdot)[\varphi_n] \to F^{\Omega}_{\pm}(\cdot)[\varphi]$, pa su $u_{\pm}$ distribucije. Želimo pokazati da su $u_{\pm}$ rješenja nehomogene jednadžbe $Pu = v$.

Lema 3.2.1. Distribucije $u_\pm$ definirane u (3.10) zadovoljavaju

$$Pu_\pm = v$$

i vrijedi

$$\operatorname{supp} u_\pm \subseteq J_\pm^\Omega(\operatorname{supp} v).$$

Dokaz. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$. Direktnim računom dobivamo

$$\begin{aligned} Pu_\pm[\varphi] &= u_\pm[P^*\varphi] \\ &= \int_\Omega F_\pm^\Omega(x)[P^*\varphi] \cdot v(x)\, dV(x) \\ &= \int_\Omega \underbrace{PF_\pm^\Omega(x)}_{\delta_x}[\varphi] \cdot v(x)\, dV(x) \\ &= \int_\Omega \varphi(x) \cdot v(x)\, dV(x) \\ &= v[\varphi]. \end{aligned}$$

Dokažimo drugu tvrdnju. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$ takav da je $\operatorname{supp}\varphi \cap J_\pm^\Omega(\operatorname{supp} v) = \emptyset$. Prijašnju jednakost možemo protumačiti u slučaju J_+ kao da ne postoji buduće orijetirana krivulja koja počinje u $\operatorname{supp} v$ i završava u $\operatorname{supp}\varphi$. Odnosno, ne postoji krivulja orijentirana prema prošlosti koja počinje u $\operatorname{supp}\varphi$ i završava u $\operatorname{supp} v$. Stoga je $\operatorname{supp} v \cap J_\mp^\Omega(\operatorname{supp}\varphi) = \emptyset$, pa iz 3.1.10 slijedi da je $\operatorname{supp} v \cap \operatorname{supp}\left(F_\pm^\Omega(\cdot)[\varphi]\right) = \emptyset$. Iz toga slijedi da je podintegralna funkcija u (3.10) jednaka 0, pa je $u_\pm[\varphi] = 0$. Time smo dokazali da je $\operatorname{supp} u_\pm \subseteq J_\pm^\Omega(\operatorname{supp} v)$. □

Želimo pokazati da su distribucije $u_\pm$ zapravo glatki prerezi u E^*. Za to će nam biti potrebna sljedeća lema.

Lema 3.2.2. Neka je $\Omega \subseteq M$ RCCSV-područje, $K \subseteq M$ kompaktan i $V \in C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}, E^*\boxtimes E)$. Dodatno, neka su $\Phi \in C^{n+1}(\overline{\Omega}, E^*)$ i $\Psi \in C^{n+1}(\overline{\Omega}, E)$ takvi da su $\operatorname{supp}\Phi \subseteq J_\mp^\Omega(K)$ i $\operatorname{supp}\Psi \subseteq J_\pm^\Omega(K)$. Tada za svaki $k \geq 0$ vrijedi

$$\int_{\overline{\Omega}} \left(V(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x)\right)[\Phi] \cdot \Psi(x)\, dV(x) = \int_{\overline{\Omega}} \left(V(\cdot,y)R_\mp^{\Omega'}(2+2k,y)\right)[\Psi] \cdot \Phi(y)\, dV(y). \tag{3.11}$$

Dokaz. Ω je kauzalan, pa je globalno hiperboličan ([4, 1.3.9.]). Iz [3, Prop. 1.2.56.] slijedi da je $J_\pm^\Omega(x) \cap J_\mp^\Omega(K)$ kompaktan, pa iz 2.3.8.(vii) slijedi da je $\operatorname{supp}\left(R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x)\right) \cap \operatorname{supp}\Phi \subseteq J_\pm^\Omega(x) \cap J_\mp^\omega(K)$ kompaktan. Kako je red distribucije $R_\pm^{\Omega'}$ manji ili jednak $n+1$ 2.3.9.(i) možemo primijeniti $V(x,\cdot)R_\pm^{\Omega'}(2+2k,x)$ na Φ. Iz 2.3.9.(iii) slijedi da je prerez

$x \mapsto v(x,\cdot)E_{\pm}^{\Omega'}$ neprekidan, pa je lijeva strana u (3.11) dobro definirana. Na sličan način može se pokazati da je i desna strana u (3.11) dobro definirana. Iz 2.3.10 slijedi

$$
\begin{aligned}
\int_{\overline{\Omega}} \Big(V(x,\cdot)R_{\pm}^{\Omega'}(2+2k,x)\Big)[\,\Phi] \cdot \Psi(x)\,dV(x) \\
&= \int_{\overline{\Omega}} R_{\pm}^{\Omega'}(2+2k,x)[\,y \mapsto \Phi(y)V(x,y)\Psi(x)]\; dV(x) \\
&= \int_{\overline{\Omega}} R_{\mp}^{\Omega'}(2+2k,y)[\,x \mapsto \Phi(y)V(x,y)\Psi(x)]\; dV(y) \\
&= \int_{\overline{\Omega}} \Big(V(\cdot,y)R_{\mp}^{\Omega'}(2+2k,y)\Big)[\,\Psi] \cdot \Phi(y)\,dV(y).
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.2.3. Neka je $\Omega \subseteq M$ *RCCS* V-područje. Tada su distribucije $u_{\pm}$ definirane u (3.10) glatki prerezi u E tj. $u_{\pm} \in C^{\infty}(\Omega, E)$.

Dokaz. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, E^*)$, $K := \operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp} v$ i $L_{\pm} \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}, E^* \boxtimes E)$ integralna jezgra operatora $(\mathrm{id} + \mathcal{K}_{\pm})^{-}1 \circ \mathcal{K}_{\pm}$. Tada iz (3.9) slijedi da je

$$F_{\pm}(\cdot)[\,\varphi] = (\mathrm{id} + \mathcal{K}_{\pm})^{-1}\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(\cdot)[\,\varphi] = \tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(\cdot)[\,\varphi] - (\mathrm{id} + \mathcal{K}_{\pm})^{-1}\mathcal{K}_{\pm}(\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(\cdot)[\,\varphi]\,).$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
u_{\pm}[\,\varphi] &= \int_{\Omega} F_{\pm}^{\Omega}[\,\varphi] \cdot v(x)\,dV(x) \\
&= \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(x)[\,\varphi] \cdot v(x)\,dV(x) - \int_{\Omega}\int_{\Omega} L_{\pm}(y,x)\cdot\tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(x)[\,\varphi] \cdot v(y)\,dV(x)\,dV(y) \\
&= \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{R}}_{\pm}(x)[\,\varphi] \cdot w(x)\,dV(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} \tilde{V}_k(x,\cdot)R_{\pm}^{\Omega'}(2+2k,x)[\,\varphi] \cdot w(x)\,dV(x),
\end{aligned}
$$

gdje su $\tilde{V}_k(x,\cdot) = V_k(x,\cdot)$ kad je $k \leq N-1$, $\tilde{V}_k(x,\cdot) = \sigma(\Gamma(x,\cdot)/\varepsilon_k)V_k(x,\cdot)$ kad je $k \geq N$ i $w(x) := v(x) - \int_{\Omega} L_{\pm}(y,x)\cdot v(y)\,dV(y) \in E_x$ za svaki $x \in \Omega$. Uočimo da je $w \in C^{\infty}(\overline{\Omega}, E)$. Iz 3.1.8 slijedi da je $\operatorname{supp} L_{\pm} \subseteq \{(y,x) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \mid x \in J_{\pm}^{\overline{\Omega}}(y)\}$, pa je $\operatorname{supp} w \subseteq J_{\pm}^{\overline{\Omega}}(\operatorname{supp} v) \subseteq J_{\pm}^{\overline{\Omega}}(K)$. Stoga, možemo primijeniti prethodnu lemu za $\Phi = \varphi$ i $\Psi = w$. Tada za k-ti sumand vidimo da vrijedi

$$\int_{\Omega} \tilde{V}_j(x,\cdot)R_{\pm}^{\Omega'}(2+2k,x)[\,\varphi] \cdot w(x)\,dV(x) = \int_{\Omega} \varphi(y)\tilde{V}^j(\cdot,y)R_{\mp}^{\Omega'}(2+2k,y)[w]\cdot\varphi(y)\,dV(y).$$

Sumacijom po k dobivamo

$$\begin{aligned} u_\pm[\varphi] &= \int_\Omega \tilde{\mathcal{R}}_\pm(x)[\varphi] \cdot w(x)\, dV(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_\Omega \varphi(y) \tilde{V}^j(\cdot, y) R_\mp^{\Omega'}(2+2k, y)[w] \cdot \varphi(y)\, dV(y). \end{aligned}$$

Dakle, za $y \in \Omega$ vrijedi

$$u_\pm(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{V}^j(\cdot, y) R_\mp^{\Omega'}(2+2k, y) \right) [w].$$

Iz 2.3.9.(iii) slijedi da su svi sumandi glatke funkcije. Kako red konvergira za odabrane $(\varepsilon_k)_{k \geq N}$ vrijedi da je $u_\pm$ glatka. □

3.3 Cauchyjeva zadaća

Neka je M poluriemannova mnogostrukost i $S \subseteq M$ poluriemannova podmnogostrukost. Tada je $T_pS \subseteq T_pM$ za svaki $p \in S$, pa je $\dim T_pS \leq \dim T_pM$. S N_pS definirajmo ortogonalni komplement T_pS u T_pM. Analogno, kao i prije za tangencijalni svežanj, možemo definirati normalni svežanj $NS = \bigcup_{p \in S} N_pS$ te ga opskrbiti strukturom vektorskog svežnja takvom da je projekcija $\pi|_{NS} : NS \to S$ definirana kao restrikcija projekcije $\pi : TM \to M$. Normalno vektorsko polje je prerez u NS. Za glatku hiperravninu kažemo da je *svemirska* hiperravnina ako je pripadno normalno vektorsko polje vremensko.

Za kraj dokažimo egzistenciju rješenja Cauchyjeve zadaće.

Teorem 3.3.1. Neka je M vremenski orijentirana Lorentzova mnogostrukost i $S \subseteq M$ svemirska glatka hiperravnina. Dodatno, neka je $P \in \mathrm{Diff}_2(M, E)$ normalno hiperboličan, η buduće orijentirano vremensko jedinično normalno glatko vektorsko polje na S i ∇ P-kompatibilna sveza. Tada za svako RCCSV-područje $\Omega \subseteq M$ takvo da je $S \cap \Omega$ Cauchyjeva hiperravnina u Ω vrijedi: za svaki $u_0, u_1 \in \mathcal{D}(S \cap \Omega, E)$ i $f \in \mathcal{D}(\Omega, E)$ postoji rješenje $u \in C^\infty(\Omega, E)$ Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} Pu = f \text{ na } \Omega \\ u = u_0 \text{ na } S \cap \Omega \\ \nabla_\eta u = u_1 \text{ na } S \cap \Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

Dodatno, vrijedi $\operatorname{supp} u \subseteq J^\Omega(K) := J_-^M(K) \cup j_+^M(K)$, gdje je $K = \operatorname{supp} u_0 \cup \operatorname{supp} u_1 \cup \operatorname{supp} f$.

Dokaz. Kako su kauzalna područja globalno hiperbolična možemo primijeniti [3, Thm. 1.2.53] i 1.3.23. Dakle, Ω i $\mathbb{R} \times (S \cap \Omega)$ s metrikom $-N^2 dt \otimes dt + g_t$ su izometrični. Dodatno, N je glatka pozitivna funkcija na Ω, $\{t\} \times (S \cap \Omega)$ je glatka Cauchyjeva hiperravnina i $t^{-1}(0) = S \cap \Omega$. Napomenimo da je buduće orijentirano glatko jedinično normalno vektorsko polje duž $S \cap \Omega$ dano formulom $\eta = -\frac{1}{N} \operatorname{grad} t = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t}$ te da se može pokazati da je vektorski svežanj E ranga k nad Ω trivijalan tj. da je jednak $\Omega \times \mathbb{R}^k$. Stoga identificirajmo prereze u E s funkcijama s vrijednostima u $\mathbb{R}^k$. Pretpostavimo da je rješenje Cauchyjeve zadaće dano formulom

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \tilde{u}_j(x), \tag{3.13}$$

gdje su $t \in \mathbb{R}$ i $x \in S \cap \Omega$ proizvoljni. Uočimo da je na $S \cap \Omega$ $\tilde{u}_0 = u_0$ i $\tilde{u} = -Nu_1$. Neka je $P = \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \tilde{P}$, gdje je P diferencijalni operator koji sadrži najviše derivacije prvog reda po t. Tada je

$$f = Pu = \left(\frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + Y \right) u = \frac{1}{N^2} \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) t^{j-2} \tilde{u}_j + \tilde{P} u, \tag{3.14}$$

pa za $t = 0$ vrijedi

$$2N^{-2}(0,x)\tilde{u}_2(x) = -\tilde{P}(\tilde{u}_0 + t\tilde{u}_1)(0,x) + f(0,x)$$

za svaki $x \in S \cap \Omega$. Stoga je $\tilde{u}_2$ određen s $\tilde{u_0}$, $\tilde{u_1}$ i $f|_S$. Višestrukom primjenom $\frac{\partial}{\partial t}$ na (3.14) vidimo da je svaki $\tilde{u}_j$ rekurzivno određen s $\tilde{u}_0, ..., \tilde{u}_{j-1}$ i $\frac{\partial^j}{\partial t^j} f$.

Maknimo pretpostavku da postoji rješenje (3.12) u obliku reda (3.13). Koristeći rekurzivne relacije za $\tilde{u}_j$ možemo konstruirati red $\sum_{j=0}^{\infty} t^j u_j(x)$ za svaki $x \in \Omega$. Međutim, taj red nužno ne konvergira. Stoga ćemo članove reda množiti funkcijama rezanja kao što smo vidjeli ranije. Neka je $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatka funkcija takva da je $\sigma|_{[-1/2,1/2]} \equiv 1$ i $\sigma|_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \equiv 0$. Tvrdimo da možemo pronaći niz $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \subseteq \langle 0, 1 \rangle$ takav da je

$$\hat{u}(t,x) := \sum_{j=0}^{\infty} \sigma(t/\varepsilon_j) t^j \tilde{u}_j \tag{3.15}$$

glatki prerez. Iz 2.2.12 za $j > k$ vrijedi

$$\|(t,x) \mapsto \sigma(t/\varepsilon_j) t^j \tilde{u}_j(x)\|_{C^k(\Omega)} \le C(k) \cdot \|t \mapsto \sigma(t/\varepsilon_j) t^j\|_{C^k(\mathbb{R})} \cdot \|\tilde{u}_j\|_{C^k(S)}.$$

Iz [3, Lemma 2.2.5.] slijedi da za $l \le k$ i $0 < \varepsilon_j \le 1$ vrijedi

$$\|\frac{d^l}{dt^l}(\sigma(t/\varepsilon_j)t^j)\|_{C(\mathbb{R})} \le \varepsilon_j C(l,j) \|\sigma\|_{C^l(\mathbb{R})},$$

pa uzimanjem maksimuma dobivamo

$$\|(t,x) \mapsto \sigma(t/\varepsilon_j)t^j\tilde{u}_j(x)\|_{C^k(\Omega)} \leq \varepsilon_j C(k,j)\|\sigma\|_{C^k(\mathbb{R})}\|\tilde{u}_j\|_{C^k(S)}.$$

Sada možemo odabrati $0 < \varepsilon_j \leq 1$ takav da je $\varepsilon_j C(k,j)\|\sigma\|_{C^k(\mathbb{R})}\|\tilde{u}_j\|_{C^k(S)} \leq 2^{-j}$ za sve $k < j$. Tada će red (3.15) konvergirati apsolutno u C^k-normi za svaki k. Stoga je $\hat{u}$ glatki prerez s kompaktnim nosačem koji možemo derivirati član po član. Iz konstrukcije je jasno da je $\operatorname{supp}\tilde{u}_j \subseteq \operatorname{supp} u_0 \cup \operatorname{supp}\tilde{u}_1 \cup (\operatorname{supp} f \cap S) \subseteq S \cap K$ za svaki j, pa je $\operatorname{supp}\hat{u} \subseteq \mathbb{R} \times (S \cap K)$. Uočimo da $\hat{u}$ zadovoljava rubne uvjete, jer je $\sigma \equiv 1$ na okolini $t = 0$. Definirajmo preslikavanje

$$w(t,x) := \begin{cases} (P\hat{u} - f)(t,x), \ t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

gdje su $t \in \mathbb{R}$ i $x \in S \cap \Omega$ proizvoljni. Uočimo da je w glatki prerez u E s kompaktnim nosačem. Stoga, možemo riješiti jednadžbu $p\tilde{u} = w$, gdje je $\tilde{u}$ glatki prerez u E takav da je $\operatorname{supp}\tilde{u} \subseteq J_+^\Omega(\operatorname{supp} w) \subseteq J_+^\Omega(\operatorname{supp}\hat{u} \cup \operatorname{supp} f) \subseteq J^\Omega(K)$. Definirajmo $u_+ := \hat{u} - \tilde{u}$. Uočimo da je u_+ glatki prerez koji zadovoljava

$$Pu_+ = P\hat{u} - P\tilde{u} = w + f - w = f$$

na $J_+^\Omega(S \cap \Omega) = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times (S \cap \Omega) \in \ | \ t \geq 0\}$. Kako je $\tilde{u} = 0$ na $J_-^\Omega(S)$, onda je $u_+|_S = \tilde{u}|_S = u_0$ i $\nabla_\eta \tilde{u} = u_1$. Dodatno, $\operatorname{supp} u_+ \subseteq \operatorname{supp}\hat{u} \cup \operatorname{supp}\tilde{u} \subseteq J^\Omega(K)$. Na sličan način se konstruira i glatki prerez u_- takav da je $\operatorname{supp} u_- \subseteq J^\Omega(K)$. Tada je glatki prerez u

$$u(t,x) = \begin{cases} u_+(t,x), \ t \geq 0 \\ u_-(t,x), \ t \leq 0 \end{cases}$$

rješenje (3.12) za koje vrijedi $\operatorname{supp} u \subseteq J_-^M(K) \cup j_+^M(K)$. □

Napomenimo da se može pokazati da je rješenje Cauchyjeve zadaće (3.12) jedinstveno (tu činjenicu smo i koristili na samom kraju dokaza).

Dodatak A

Tenzorska analiza

A.1 Multilinearna algebra

Definicija A.1.1. Neka su $V_1, ..., V_k$, W vektorski prostori. Za preslikavanje $F : V_1 \times ... \times V_k \to W$ kažemo da je *multilinearno*, ako je linearno u svakoj varijabli zasebno.

U ovom odjeljku s V označavamo konačnodimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, a s V^* njegov dualni prostor.

Definicija A.1.2. Neka su $k, l \in \mathbb{N}$. *Kovarijantni k-tenzor* na V je multilinearno preslikavanje $F : \underbrace{V \times ... \times V}_{k \text{ puta}} \to \mathbb{R}$.*Kontravarijantni l-tenzor* na V je multilinearno preslikavanje $G : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{l \text{ puta}} \to \mathbb{R}$. *Tenzor mješovitog tipa* (k, l) na V je multilinearno preslikavanje $H : \underbrace{V \times ... \times V}_{k \text{ puta}} \times \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{l \text{ puta}} \to R$.

Prostor svih kovarijantnih k-tenzora na V označavamo s $T^k(V^*)$, a kontravarijantnih s $T^k(V)$. Prostor mješovitih (k, l) tenzora na V označavamo s $T^{(k,l)}(V)$.
Očito su $T^k(V^*)$, $T^k(V)$, $T^{(k,l)}(V)$ vektorski prostori s obzirom na zbrajanje i množenje skalarom po točkama. Također, jasno je da vrijedi $T^{(0,k)}(V) = T^k(V^*)$, $T^{(k,0)} = T^k(V)$, $T^{(1,0)} = V^{**} = V$ i $T^{(0,1)} = V^*$.

Definicija A.1.3. Neka je $F \in T^{(k,l)}(V)$ i $G \in T^{(p,q)}(V)$. Definirajmo *tenzorski produkt* $F \otimes G \in T^{(k+p,l+q)}(V)$ formulom

$$F \otimes G(\omega_1, ..., \omega_{k+p}, v_1, ..., v_{l+q}) = F(\omega_1, ..., \omega_k, v_1, ..., v_l)G(\omega_{k+1}, ..., \omega_{k+p}, v_{l+1}, ..., v_{l+q}),$$

gdje su $v_1, ..., v_{l+q} \in V$ i $\omega_1, ..., \omega_{k+p} \in V^*$ proizvoljni.

Lako se vidi da je $\otimes$ bilinearna i asocijativna operacija. Stoga analogno možemo definirati tenzorski produkt 3 ili više tenzora. Sljedeću propoziciju nije teško pokazati. Za detalje pogledati [8].

Propozicija A.1.4. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $k \in \mathbb{N}$, $\{E_1, ..., E_n\}$ baza za V i $\{e^1, ..., e^n\}$ pripadna dualna baza. Tada je $\{E_{i_1} \otimes ... \otimes E_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_l} \ : \ 1 \leq j_1, ..., j_k, i_1, ..., i_l \leq n\}$ baza za $T^{(k,l)}(V)$.

Za $k, l \in \mathbb{N}_0$ želimo definirati operator *traga* tr : $T^{(k+1,l+1)}(V) \to T^{(k,l)}(V)$. Definirajmo prvo trag za $(1, 1)$-tenzore. Neka je $h \in T^{(1,1)}$, $h = \sum_{i,j=1}^{n} h_i^j E_i \otimes e^j$. Tada je trag tenzora h definiran formulom

$$\operatorname{tr}(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i^i.$$

Za proizvoljni tenzor $F \in T^{(k+1,l+1)}(V)$ je $\operatorname{tr}(F)(\omega_1, ..., \omega_k, v_1, ..., v_l)$ definiran kao trag $(1, 1)$-tenzora

$$(\omega_1, ..., \omega_k, \cdot, v_1, ..., v_l, \cdot) \in T^{(1,1)}(V),$$

gdje su $\omega_1, ..., \omega_k \in V^*$ i $v_1, ..., v_l \in V$ proizvoljni. Nama su od interesa kovarijantni tenzori, posebice alternirajući tenzori.

Algebra alternirajućih tenzora

Definicija A.1.5. Kovarijantan k-tenzor F na V je *alternirajući*, ako njegova vrijednost promijeni predznak kad god zamijenimo 2 argumenta tj.

$$F(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -F(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k)$$

za proizvoljne $v_1, ..., v_k \in V$.

Skup svih alternirajučih k-tenzora na V označavamo s $\Lambda^k(V^*)$. Očito je $\Lambda^k(V^*)$ potprostor $T^k(V^*)$ i $\Lambda^1(V^*) = T^1(V^*) = V^*$.

Definicija A.1.6. Neka su $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ i $\eta \in \Lambda^l(V^*)$.Njihov *vanjski produkt* $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V^*)$ dan je formulom

$$\omega \wedge \eta(v_1, ..., v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \epsilon_\sigma \omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+l)}),$$

gdje su $v_1, ..., v_{k+l} \in V$ proizvoljni. S_{k+l} je grupa permutacija reda $k + l$ i ϵ_σ predznak permutacije σ .

Vanjski produkt je bilinearan i asocijativan. Dodatno, vanjski produkt je antikomutativan tj. vrijedi: $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$, gdje su $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ i $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ proizvoljni.

Neka su $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^l(V^*)$. Primijetimo da ako je $k+l > \dim V$, onda zbog ponavljanja indeksa imamo $\omega \wedge \eta = 0$. Sljedeću propoziciju nije teško pokazati matematičkom indukcijom.

Propozicija A.1.7. Neka su $\phi^1, ..., \phi^k \in V^*$ i $v_1, ..., v_k \in V$. Tada je

$$(\phi^1 \wedge ... \wedge \phi^k)(v_1, ..., v_k) = \det(\phi^i(v_j)).$$

Propozicija A.1.8. Neka je $\{E_1, ..., E_n\}$ baza za V i $\{e^1, ..., e^n\}$ pripadna dualna baza. Tada je $\{e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_k} : 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n\}$ baza za $\Lambda^k(V^*)$.

Dokaz. Pogledati [8]. □

Iz prethodne propozicije slijedi da je $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$.

A.2 Tenzorski produkt vektorskih prostora

Definicija A.2.1. Neka su $V_1, ..., V_k$ konačnodimenzionalni realni vektorski prostori. Neka je L vektorski prostor kojemu je $V_1 \times ... \times V_k$ baza, a R potprostor vektorskog prostora L koji je razapet elementima oblika: $(v_1, ..., av_i, ..., v_k) - a(v_1, ..., v_i, ..., v_k)$, $(v_1, ..., v_i + v_i', ..., v_k) - (v_1, ..., v_i, ..., v_k) - (v_1, ..., v_i', ..., v_k)$, gdje su $v_j \in V_j$, $j = 1, ..., n$, $v_i' \in V_i$, $a \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tenzorski produkt $V_1 \otimes ... \otimes V_k$ definiramo kao kvocijentni prostor L/R i $v_1 \otimes ... \otimes v_k$ kao $[\,(v_1, ..., v_i, ..., v_k)]$ za proizvoljne $v_j \in V_j$, $j = 1, ..., n$. Definiramo $\pi : V_1 \times ... \times V_k \subset L \to V_1 \otimes ... \otimes V_k$, $\pi(v_1, ..., v_k) = [\,(v_1, ..., v_k)]$.

L možemo definirati kao vektorski prostor funkcija $V_1 \times ... \times V_k \to \mathbb{R}$ koje poprimaju u konačno mnogo točaka vrijednosti različite od 0 identificirajući $(v_1, ..., v_k)$ s funkcijom koja poprima vrijednost 1 u $(v_1, ..., v_k)$, a 0 inače.

Iz definicije slijedi:

$$v_1 \otimes ... \otimes av_i \otimes ... \otimes v_k = a(v_1 \otimes ... \otimes v_i \otimes ... \otimes v_k),$$

$$v_1 \otimes ... \otimes (v_i + v_i') \otimes ... \otimes v_k = v_1 \otimes ... \otimes v_i \otimes ... \otimes v_k + v_1 \otimes ... \otimes v_i' \otimes ... \otimes v_k,$$

gdje su $v_j \in V_j$, $j = 1, ..., n$, $v_i' \in V_i$, $a \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

Propozicija A.2.2. Neka su $V_1, ..., V_k$ konačnodimenzionalni realni vektorski prostori dimenzija $n_1, ..., n_k$. Neka je $\{E_1^j, ..., E_n^j\}$ baza za V_j, $j = 1, ..., k$. Tada je $\{E_{i_1}^1 \times ... \times E_{i_k}^k \ : \ 1 \leq i_1 \leq n_1, ..., 1 \leq i_k \leq n_k\}$ baza za $V_1 \otimes ... \otimes V_k$.

Dokaz. Pogledati [8]. □

Propozicija A.2.3. Neka su $V_1, ..., V_k$ konačnodimenzionalni realni vektorski prostori i $A : V_1 \times ... \times V_k \to X$ multilinearno preslikavanje u vektorski prostor X. Tada postoji jedinstveno linearno preslikavanje $\tilde{A} : V_1 \otimes ... \otimes V_k \to X$ za koje vrijedi $\tilde{A} \circ \pi = A$.

Dokaz. Pogledati [8]. □

Prethodna propozicija nam daje alternativan način kako razmišljati o tenzorskom produktu vektorskih prostora. Naime, multilinearno preslikavanje „pretvara" u linearno.

Literatura

[1] S. Aretakis, *Lecture Notes on General Relativity*, 2013., https://users.math.msu.edu/users/parker/ga/geometryprimer.pdf.

[2] Christian Bär, *Lorentzian Geometry*, 2004., https://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Prof-Geometrie/Dokumente/Lehre/Veranstaltungen/WS0405-SS08/LorentzianGeometryEnglish13Jan2020.pdf.

[3] Christian Bär, *Geometric Wave Equations*, 2017., https://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Prof-Geometrie/Dokumente/Lehre/Lehrmaterialien/Waves.pdf.

[4] Christian Bär, Nicolas Ginoux i Frank Pfäffle, *Wave Equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*, Esi Lectures in Mathematics and Physics, European Mathematical Society, 2007.

[5] Shiing Shen Chern, Wei Huan Chen i K. S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, 2000.

[6] Nicolas Ginoux, *Linear wave equations*, https://nicolas-ginoux.perso.math.cnrs.fr/linearwave.pdf.

[7] P. Günther, *Huygens' Principle and Hyperbolic Equations*, Academic Press, 1988.

[8] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2012.

[9] John M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*, Springer, 2018.

[10] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity*, Academic Press, 1983.

[11] Thomas H. Parker, *Geometry Primer*, https://users.math.msu.edu/users/parker/ga/geometryprimer.pdf.

[12] Jalal M. Ihsan Shatah i Michael Struwe, *Geometric Wave Equations*, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1998.

[13] Stefan Waldmann, *Geometric Wave Equations*, 2012., `https://arxiv.org/pdf/1208.4706`.

Sažetak

U ovom radu obrađuje se lokalna teorija geometrijskih valnih jednadžbi. Nakon uvođenja osnovnih pojmova i rezultata diferencijalne geometrije s naglaskom na poluriemannove mnogostrukosti, posebno se obrađuju Lorentzove mnogostrukosti. Definiramo pojam linearnog parcijalnog diferencijalnog operatora koji djeluje na glatkim prerezima vektorskog svežnja. Uvodimo pojam normalno hiperboličnog operatora pomoću kojeg definiramo linearnu geometrijsku valnu jednadžbu, kao i pojam distribucije na mnogostrukosti s posebnim naglaskom na Rieszove distribucije pomoću kojih konstruiramo lokalno elementarno rješenje geometrijske valne jednadžbe. Rad zaključujemo dokazom lokalnog postojanja rješenja Cauchyjeve zadaće.

Summary

This thesis deals with the local theory of geometric wave equations. First, we introduce basic terms and results from differential geometry with an emphasis on semi-Riemannian manifolds. Lorentzian manifolds are treated in particular. Then we define the concept of a linear differential operator that acts on smooth sections of a vector bundle. We introduce the notion of a normally hyperbolic operator, by means of which we define a linear geometric wave equation. Additionally, the notion of distribution on manifolds is introduced with a special emphasis on Riesz distributions, with which we construct the local fundamental solution of the geometric wave equation. Finally, the local existence of the solution to Cauchy's problem is shown.

Životopis

Rođen sam 13. prosinca 1999. u Zagrebu, gdje sam pohađao Osnovnu školu grofa Janka Draškovića. Upisao sam Gimnaziju Lucijana Vranjanina 2014. godine te sam nakon polaganja državne mature 2018. upisao preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija 2021. upisao sam diplomski studij Primijenjena matematika na istom fakultetu tijekom kojeg sam bio demonstrator iz više kolegija. Nakon položenih svih propisanih ispita, u rujnu 2023. predajem diplomski rad „Geometrijske valne jednadžbe" za obranu. U idućoj akademskoj godini namjeravam upisati Poslijediplomski znanstveni studij matematike na Sveučilištu u Zagrebu.