Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Rudolf Markulin

KARAKTERIZACIJA FUNKCIJSKIH PROSTORA PREKO VALIĆA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, prosinac 2003.

Diplomski rad
Karakterizacija funkcijskih prostora preko valića

(prvo izdanje)

Rudolf Markulin

20.11.2003

Predgovor

Ne bi ovdje htio iznositi nikakve dodatne upute oko čitanja ovog rada, jer nije takvog opsega, a povijesne činjenice sam ionako izbjegavao tokom teksta, tako da bih samo napomenuo da za razumijevanje 3 glavnog poglavlja je dovoljno da se pročitaju poglavlja 2.1 i 2.2.

Htio bih se naravno zahvaliti i svom mentoru dr.sc. Nenadu Antoniću na svesrdnoj podršci i volji za ispravljanjem pogrešaka, koje sam i ja mogao ispraviti. Pomagao mi je i kolega dipl.ing. Boris Golub, koji je davao korisne tex savjete, kako bi tekst izgledao čim normalnije. To bi bilo više manje to.
Jedino se nadam da ovo neće biti zadnji predgovor u životu koji ću napisati.

U Samoboru, prosinca 2003.

Rudolf Markulin

Sadržaj

1 Uvod

1.1 L^p prostori

Definirajmo prvo $\mathcal{L}(M, \mathcal{M}, \mu)$ kao prostor svih kompleksnih (realnih) izmjerivih funkcija na prostoru mjere $(M, \mathcal{M}, \mu)$. Ako je $(M, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere i $g \in \mathcal{L}(\mu)$, tada funkciju $\lambda_g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definiranu sa $\lambda_g(s) = \mu\{x \in M : |g(x)| > s\}$ zovemo *distribucijska funkcija* funkcije g. Često ćemo u tekstu izostavljat g u oznaci λ_g.

Za $p \in [1, \infty]$ Lebesgueov prostor $L^p(M)$ definiramo kao prostor svih (klasa skoro svuda jednakih) funkcija iz $\mathcal{L}(M, \mathcal{M}, \mu)$, s normom

$$\|f\|_{L^p(M)} := \Big(\int_M |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty\rangle$$

$$\|f\|_{L^\infty(M)} := \text{vrai sup}_M |f| := \inf\{s \in \mathbb{R}^+ : \lambda_f(s) = 0\}$$

manjom od ∞. Također znamo da su L^p prostori Banachovi, te da je samo prostor L^2 Hilbertov.

Izmjerive funkcije oblika $\sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$, $a_k \in \mathbb{R}$, gdje su $A_k \in \mathcal{M}$, nazivamo *jednostavnima*. U ovom radu ćemo ih označavati sa $\varphi(M)$ odnosno sa $\varphi(\mu)$. Ako za skupove A_k vrijedi da su i konačne mjere tada takve funkcije zovemo *elementarnima* i označavamo ih sa $\mathcal{E}$. Napomenimo još da je skup elementarnih (jednostavnih) funkcija gust u L^p prostoru, za $p \in [1, \infty\rangle$. One će nam biti posebno važne, jer će standardni dokazi najprije pokazati tvrdnje na elementarnim (jednostavnim) funkcijama, a potom će ih preko limesa proširiti na tražene funkcije.

Ako je M topološki prostor, tada također imamo prostor $L^p_{loc}(M)$ kojeg sačinjavaju sve funkcije f sa svojstvom da se za svaki kompaktan skup $K \subseteq M$, njihova restrikcija na K, nalazi u $L^p(K)$.

Za eksponent p definiramo njegov *konjugirani eksponent* p' preko relacije:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

(formalno, $\frac{1}{\infty} = 0$, pa je $1' = \infty$).

Lema 1 (Hölderova nejednakost) *Neka je $p \in [1, \infty]$, a p' njegov konjugirani eksponent. Ako su f i g izmjerive funkcije na M, onda vrijedi*

$$\|fg\|_{L^1(M)} \leq \|f\|_{L^p(M)} \|g\|_{L^{p'}(M)}.$$

Teorem 1 (Rieszov teorem o reprezentaciji) *Neka je $(M, \mathcal{M}, \mu)$ prostor σ-konačne mjere, $p \in [1, \infty\rangle$ i neka su p i q međusobno konjugirani eksponenti. Ako je G ograničen linearan funkcional na L^p, tada postoji jedinstven $g \in L^q$ tako da vrijedi:*

$$\forall f \in L^p \quad G(f) = \int_M fgd\mu.$$

Dual E' Banachovog prostora E je skup svih ograničenih linearnih funkcionala na E. E' je Banachov prostor uz normu $\|u\| = \sup_{\|v\|=1} |(u, v)|$, gdje (u, v) nije skalarni produkt, već vrijednost funkcionala u u točki v. Iz Rieszovog teorema sljedi da je $(L^p)' = L^q$. Neka su E_1, E_2 dva Banachova prostora, tada je *adjungirani operator* $A^T : E_2' \to E_1'$ operatora $A : E_1 \to E_2$ definiran kao $(A^T l_2)(v_1) = l_2(Av_1)$, odnosno $(A^T l_2, v_1) = (l_2, Av_1)$.

Neka je E separabilan Banachov prostor. Tada (e_n) tvori *Schauderovu bazu* tog prostora, ako

$$(\forall v \in E)(\exists (\mu_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \quad v = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_n e_n.$$

U Schauderovoj bazi poredak e_n je važan, ako želimo da nam poredak ne igra nikakvu ulogu, tada uvodimo *bezuvjetnu bazu* koja se razlikuje od Schauderove dodavanjem jednog od uvjeta: $\sum_n \mu_n e_n \in E \Rightarrow \sum_n |\mu_n| e_n \in E$ ili ako je $\sum_n \mu_n e_n \in E$ i $\epsilon_n = \pm 1$ proizvoljno odabrani, da je tada i $\sum_n \mu_n \epsilon_n e_n \in E$. Nemaju svi Banachovi prostori bezuvjetne baze, npr. $L^1(\mathbb{R})$ i $L^\infty(\mathbb{R})$. U Hilbertovom prostoru bezuvjetna baza se zove Rieszova baza.

Definicija 1 *Funkcija $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je konveksna ako vrijedi:*

$$(\forall s, t \in \langle a, b\rangle)(\forall \lambda \in \langle 0, 1\rangle) \quad \varphi(\lambda s + (1-\lambda)t) \le \lambda\varphi(s) + (1-\lambda)\varphi(t).$$

Lema 2 (Jensenova nejednakost) *Ako je $(M, \mathcal{M}, \mu)$ prostor konačne mjere, $g \in L^1(M, \langle a, b\rangle)$ i φ konveksna na $\langle a, b\rangle$. Tada je*

$$\varphi\Big(\frac{1}{\mu(M)} \int_M gd\mu\Big) \le \frac{1}{\mu(M)} \int_M (\varphi \circ g) d\mu.$$

Definicija 2 *Niz (f_n) izmjerivih funkcija je Cauchyjev u mjeri μ ako vrijedi*

$$(\forall \epsilon > 0) \quad \lim_{m,n} \mu(|f_n - f_m|^{\leftarrow}[\epsilon, \infty]) = 0,$$

odnosno takav niz konvergira u mjeri μ prema funkciji f ako vrijedi:

$$(\forall \epsilon > 0) \quad \lim_n (|f_n - f|^{\leftarrow}[\epsilon, \infty]) = 0.$$

Teorem 2 *Ako je (f_n) Cauchyjev niz u mjeri, onda postoji izmjeriva funkcija f takva da $f_n \to f$ u mjeri. Štoviše, postoji podniz (f_{n_k}) koji skoro svuda konvergira toj funkciji f, koja je jedinstvena do na razliku na skupu mjere nula.*

1.2 Soboljevljevi prostori

Uvedimo najprije Schwartzov prostor $\mathcal{S}$ brzoopadajućih funkcija. Za ograničenu neprekinutu funkciju φ na $\mathbb{R}^d$ je njezina norma $\|\varphi\|_C := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$. U zapisu Schwartzovih oznaka definirajmo familije polunormi na sljedeći način

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_C,$$
$$\|\varphi\|_k := \sup_{|\alpha+\beta|\leq k} \|\varphi\|_{\alpha,\beta}.$$

Schwartzov prostor $\mathcal{S}$ je prostor svih C^∞ funkcija φ za koje je $\|\varphi\|_k < \infty$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Na njemu možemo definirati prirodnu topologiju kao najslabiju topologiju u kojoj su sve polunorme $\|\varphi\|_k$ neprekidne. Vrijedi da je Schwartzov prostor $\mathcal{S}$, zajedno s prirodnom topologijom, Fréchetov prostor, odnosno potpun metrizabilan lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor. Metrika na $\mathcal{S}$ se može zadati s

$$d(\varphi,\psi) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|\varphi-\psi\|_k}{1+\|\varphi-\psi\|_k}.$$

Nadalje, za svaki $p \in [1,\infty]$ je $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dual prostora $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ se sastoji od takozvanih *temperiranih distribucija.* To su linearni funkcionali na $\mathcal{S}$ neprekinuti u sljedećem smislu

$$(\exists C \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall \varphi \in \mathcal{S}) \quad |\langle u,\varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_N.$$

Za proizvoljnu funkciju $u \in \mathcal{S}$ možemo definirati *Fourierovu pretvorbu* $\mathcal{F}u := \hat{u}$ formulom:

$$\hat{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} u(x)dx,$$

a *inverznu Fourierovu pretvorbu* formulom

$$\check{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} u(x)dx.$$

Pretvorba $\hat{u}$ je ograničena i neprekinuta funkcija iz $\mathcal{S}$.

Teorem 3 (Plancherel) *Fourierova se pretvorba na jedinstven način proširuje sa $\mathcal{S}$ do unitarnog operatora s $L^2(\mathbb{R}^d)$ na samog sebe.*

Fourierova pretvorba se može definirati i na prostoru temperiranih distribucija na sljedeći način:

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle \quad (u \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S})$$
$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, \hat{\varphi} \rangle \quad (u \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}),$$

gdje je $\tilde{u}(x) = u(-x)$. Poznavajući Fourierovu pretvorbu možemo definirati *Soboljevljev prostor* H^s, $s \in \mathbb{R}^+$ kao skup

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \lambda^s \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

gdje je funkcija $\lambda(\xi) := \sqrt{1 + |\xi|^2}$.

2 Marcinkiewiczev teorem interpolacije i Lorentzovi prostori

2.1 Rieszov teorem interpolacije

Interpolacijskim teoremima za linearne operatore smatramo teoreme sljedećeg tipa: neka je linearni operator $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ takav da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ vektorski prostori. Pretpostavimo da su A_0 i A_1 Banachovi potprostori prostora $\mathcal{A}$, a B_0 i B_1 Banachovi potprostori prostora $\mathcal{B}$ takvi da je $T|_{A_i}$ neprekidan s A_i u B_i za $i = 0, 1$. U tom slučaju obično možemo pokazati da postoji beskonačno mnogo međuprostora (A, B) gdje su $A \subseteq \mathcal{A}$ i $B \subseteq \mathcal{B}$ takvi da je operator $T|_A : A \to B$ ograničen.

Definicija 3 *Rezanje izmjerive funkcije f je bilo koja funkcija g takva da je*
$g(x) = \begin{cases} f(x) & , r_1 < |f(x)| \leq r_2 \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases}$ *za $r_1, r_2 \geq 0$.*

U cijelom ovom poglavlju ćemo imati operatore kojima će domena biti neki vektorski prostor D izmjerivih funkcija, takav da sadrži sve elementarne funkcije i ima svojstvo da je svako rezanje funkcije iz D ponovno u D.

Definicija 4 *Kažemo da je operator $T : D \to \mathcal{L}(\nu)$ jakog tipa (p, q), ako postoji konstanta k neovisna o $f \in L^p(M) \cap D$, takva da je $\|Tf\|_q \leq k\|f\|_p$ za svaki $f \in L^p(M) \cap D$. Najmanji k za koji vrijedi nejednakost zovemo (p, q) normom operatora T.*

Teorem 4 (Riesz-Thorin) *Neka je T linearan operator tipa (p_i, q_i), s (p_i, q_i) normom jednakom k_i za $i = 0, 1$. Tada je za svaki $t \in [0, 1]$ operator T tipa (p_t, q_t) s (p_t, q_t) normom $k_t \leq k_0^{1-t} k_1^t$, gdje je $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ i $\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$.*

Dokaz teorema može se naći u [1].

2.2 Marcinkiewiczev teorem interpolacije

Marcinkiewiczev teorem je analogon Riesz-Thorinovog teorema u smislu da slabi uvjeti na rubu još uvijek garantiraju da je operator jakog tipa za konveksnu kombinaciju rubova, i to za operatore koji ne moraju biti linearni.

Definicija 5 *Za operator $T : \mathcal{L}(\mu) \to \mathcal{L}(\nu)$ kažemo da je subaditivan ako je $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |T(f_1)(x)| + |T(f_2)(x)|$ (ss $x \in N$), za $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$.*

Definicija 6 *Kažemo da je operator $T : D \to \mathcal{L}(\nu)$ slabog tipa (p,q), ako postoji konstanta k neovisna o $f \in L^p(M) \cap D$ takva da je*

$$\lambda(s) \leq \left(\frac{k\|f\|_p}{s}\right)^q, \tag{1}$$

gdje je λ distribucijska funkcija funkcije $T(f)$, za $p \in [1, \infty]$ i $q \in [1, \infty\rangle$. Kada je $q = \infty$ imamo uvjet $\|Tf\|_q \leq k\|f\|_p$. Najmanji k za koji vrijede ove nejednakosti zovemo slabom (p,q) normom operatora T.

Teorem 5 *Ako je operator T tipa (p,q), onda je i slabog (p,q) tipa, za $p \in [1, \infty]$ i $q \in [1, \infty]$.*

Dokaz: Za $q = \infty$ definicije se podudaraju. Uzmimo da je $q < \infty$ i neka su $f \in L^p(M) \cap D$, $s > 0$ i $\lambda(s) = \mu\{x \in M : |T(f)(x)| > s\} = \mu(E_s)$. Tada je $s^q\lambda(s) = s^q \int_{E_s} d\mu \leq \int_{E_s} |T(f)|^q d\mu \leq \|T(f)\|_q^q \leq (k\|f\|_p)^q$. Nejednakost podijelimo sa s^q i dobit ćemo nejednakost (1). ■

Teorem 6 (Marcinkiewicz) *Ako je T subaditivan operator slabog tipa (p_j, q_j), gdje je $1 \leq p_j \leq q_j \leq \infty$ za $j = 0, 1$ i $g_0 \neq q_1$, tada je T tipa (p_t, q_t) uz $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ i $\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$, za $t \in \langle 0, 1\rangle$.*

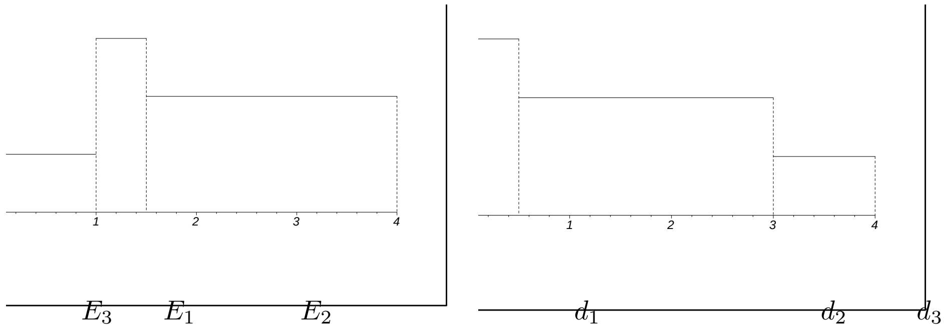
Ovaj teorem je direktna posljedica teorema 9 na stranici 13. Uvjet $p_j \leq q_j$ za $j = 0, 1$ i nije tako ograničavajući, jer je većina nama zanimljivih operatora tog tipa.

Definicija 7 *Prostor $L^{p\infty} = \{f \in \mathcal{L}(\mu) : [f]_p = (\sup_{s>o} s^p\lambda_f(s))^{\frac{1}{p}} < \infty\}$ zovemo Marcinkiewiczevim prostorom, odnosno slabim L^p prostorom.*

Operator $T : L^p \cap D \to \mathcal{L}(\nu)$ slabog tipa (p, q) je zapravo operator s kodomenom $L^{p\infty}$, jer zaista iz $\lambda(s) \leq (\frac{k\|f\|_p}{s})^q$ sljedi $(s^q\lambda(s))^{\frac{1}{q}} \leq k\|f\|_p$, odnosno $(\sup_{s>o} s^q\lambda_f(s))^{\frac{1}{q}} \leq k\|f\|_p \leq \infty$.

Zgodno je odmah uočiti primjer neke funkcije iz novodefiniranih prostora, tako naprimjer funkcija $f(x) = \frac{1}{|x|}$ nije ni u jednom L^p prostoru, ali je u $L^{1\infty}$. Kako je $\lambda(s) = \mu\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x|} \leq s\} = \mu\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \frac{1}{s}\} = \frac{2}{s}$, odmah dobivamo $[f]_1 = \sup_{s>0} s\lambda(s) = \sup_{s>0} s\frac{2}{s} = 2$.

Lema 3 *Za funkciju $f \in L^p(M)$ vrijedi jednakost $\|f\|_p^p = -\int_0^\infty s^p d\lambda(s) = p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda(s)ds$.*



Slika 1: Preslog jednostavne funkcije.

Sada ćemo dati kratku motivaciju za uvođenje Lorentzovih prostora. Uzmimo $\phi(s) = s(\lambda(s))^{\frac{1}{p}}$, tada je $[f]_p < \infty \Leftrightarrow \|\phi\|_{L^\infty} < \infty$. Iz leme 3 dobivamo da je $\|f\|_p = (\int_0^\infty [\phi(s)]^p \frac{d(-\lambda(s))}{\lambda(s)})^{\frac{1}{p}}$, odnosno $\|f\|_p < \infty \Leftrightarrow \|\phi\|_{L^p(0,\infty)} < \infty$, gdje je $L^p(0,\infty)$ uz mjeru $\nu(s) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda(s)} d(-\lambda(s))$. Iz svojstava funkcije (sljedeće poglavlje) λ vidi se da je ν zapravo mjera. Gledajmo sad uvjete $[f]_p < \infty$ i $\|\phi\|_{L^p(0,\infty)} < \infty$ na funkciju ϕ, ali za neke druge norme osim $\| \quad \|_p$ i $\| \quad \|_\infty$. Tada za proizvoljni $g \in [1, \infty\rangle$ imamo uvjet

$$\Big(\int_0^\infty [\phi(s)]^q d\nu(s) \Big)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{2}$$

Funkcije iz Lorentzovih prostora L^{pq} koje ćemo definirati u sljedećim poglavljima zadovoljavat će (2).

2.3 Nerastući preslog

Definicija 8 *Nerastući preslog f^* funkcije $f \in \mathcal{L}(\mu)$ je funkcija $f^* : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definirana kao $f^*(t) = \inf\{s : \lambda_f(s) \leq t\}$, za $t > 0$.*

U narednih nekoliko lema uvijek ćemo imati $\lim_{s\to\infty} \lambda(s) = 0$, odnosno da je preslog realna funkcija. U njima ćemo pokazati neka osnovna svojstva nerastućeg presloga f^* i distribucijske funkcije funkcije f.

Lema 4 *i) Funkcije λ i f^* su nerastuće i neprekidne zdesna.*
ii) $(\forall t > 0) \quad \lambda(f^*(t)) \leq t$.
iii) Funkcije f i f^* imaju istu distribucijsku funkciju.

Dokaz: Da je λ nerastuća slijedi iz monotonosti mjere, a tada iz definicije presloga odmah slijedi da je f^* nerastuća. Kako je

$$\bigcup_{s>s_0} \{x \in M : |f(x)| > s\} = \{x \in M : |f(x)| > s_0\}$$

i iz neprekinutosti odozdo mjere μ slijedi da je $\lim_{s \searrow s_0} \lambda(s) = \lambda(s_0)$, odnosno λ je neprekidna zdesna.

Za nejednakost (ii) gledamo sljedeće. Iz definicije f^* imamo da postoji niz $s_n \searrow f^*$ i $\lambda(s_n) \leq t$. Sada iz neprekidnosti zdesna funkcije λ vidimo da je $\lim_{s_n \searrow f^*} \lambda(s_n) \leq t$, odnosno $\lambda(f^*(t)) \leq t$.

Lako je vidjeti da je f^* neprekidna zdesna u t_0, ako je $f^*(t_0) = 0$, jer je onda $(\forall t > t_0) \quad f^*(t) = 0$ zbog nenegativnosti i monotonosti funkcije f. Gledamo slučaj kada je $f^*(t_0) > 0$, uzmimo tada $\alpha \in \langle 0, f^*(t_0) \rangle$ i niz $\epsilon_n \searrow 0$. Iz definicije f^* mora vrijediti $\lambda(f^*(t_0) - \alpha) > t_0$. Dakle imamo:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad \lambda(f^*(t_0) - \alpha) > t_0 + \epsilon_n,$$

iz čega slijedi $(\forall n \geq n_0) \quad f^*(t_0) - \alpha < f^*(t_0 + \epsilon_n)$, jer u suprotnom za neki $n \geq n_0 : \quad f^*(t_0) - \alpha \geq f^*(t_0 + \epsilon_n)$ i uz opadanje funkcije λ i tvrdnju (ii) imali bismo kontradikciju $\lambda(f^*(t_0) - \alpha) \leq \lambda(f^*(t_0 + \epsilon_n)) \leq t_0 + \epsilon_n$. Budući da je f^* nerastuća imamo $f^*(t_0) - \alpha < f^*(t_0 + \epsilon_n) \leq f^*(t_0)$ za svaki $n \geq n_0$. Odnosno iz proizvoljnosti α i ϵ_n dobivamo neprekidnost zdesna.

iii) Iz definicije presloga f^* imamo da je $f^*(t) > s \Leftrightarrow \lambda(s) > t$, odnosno $E^*_s = \{t > 0 : f^*(t) > s\} = \langle 0, \lambda(s) \rangle$. Uzmemo Lebesgueovu mjeru tih skupova i dobili smo tvrdnju iii). ■

Lema 5 *Neka je $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija na prostoru mjere $(M, \mathcal{M}, \mu)$ i f izmjeriva funkcija tako da $|f_m| \nearrow |f|$ po točkama, onda vrijedi:*
i) $(\forall s > 0) \quad \lambda_m(s) \nearrow \lambda(s)$
ii) $(\forall t > 0) \quad f^*_m(t) \nearrow f^*(t)$

Dokaz: i) Očito je da

$$E^m_s = \{x \in M : |f_m(x)| > s\} \subseteq E_s = \{x \in M : |f(x)| > s\} \text{ i } \bigcup_{m=1}^{\infty} E^m_s = E_s.$$

Tada iz monotonosti i neprekinutosti na rastuće unije mjere μ imamo

$$\lambda_m(s) = \mu(E^m_s) \leq \mu(E_s) = \lambda(s) \text{ i } \lim_{m \to \infty} \lambda_m(s) = \lambda(s).$$

ii) Iz definicije f^* imamo $f^*_m(t) \leq f^*_{m+1}(t) \leq f^*(t)$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Uzmimo $l = \lim_{m \to \infty} f^*_m(t)$. Kako je $f^*_m(t) \leq l$ dobivamo $\lambda_m(l) \leq \lambda_m(f^*_m(t)) \leq t$. Dakle $\lambda(l) = \lim_{m \to \infty} \lambda_m(l) \leq t$ povlači $f^*(t) \leq l$. Ali i iz $f^*_m(t) \leq f^*(t)$ imamo $l \leq f^*(t)$. Odnosno $l = f^*(t)$. ■

Primjer 1 (Pozitivna jednostavna funkcija.)

Uzmimo funkciju f oblika $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}$ tako da $E_j \in \mathcal{M}$, $\mu(E_j) > 0$ i $E_j \cap E_k = \emptyset$ za sve $j \neq k$, te takvu da je $c_1 > c_2 > c_3 \dots c_n > c_{n+1} = 0$ (posložimo tako ako treba). Označimo $d_j = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_j)$ za $j = 1 \dots n$ i $d_0 := 0$. Tada je

$$\lambda(s) = \begin{cases} d_j & , s \in [c_{j+1}, c_j\rangle, 1 \leq j \leq n \\ 0 & , c_1 \leq s \end{cases}$$

i

$$f^*(t) = \begin{cases} c_j & , t \in [d_{j-1}, d_j\rangle, 1 \leq j \leq n \\ 0 & , d_n \leq t \end{cases} .$$

Preslog jedne takve funkcije se vidi na slici 1.

Lema 6 *Ako je f izmjeriva funkcija, λ njena distribucijska funkcija i $p > 0$, tada je $[f]_p = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$.*

Dokaz: Ako je f jednostavna funkcija lako vidimo $\sup\limits_{s>0} s[\lambda(s)]^{\frac{1}{p}} = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} d_j^{\frac{1}{p}} c_j = \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$. U slučaju da je f izmjeriva postoji (f_m) niz jednostavnih pozitivnih funkcija tako da $f_m \nearrow |f|$ po točkama. Iz leme 5 odmah slijedi $\sup\limits_{s>0} s[\lambda(s)]^{\frac{1}{p}} = \sup\limits_{s>0} \sup\limits_{m} s[\lambda_m(s)]^{\frac{1}{p}} = \sup\limits_{m} \sup\limits_{s>0} s[\lambda_m(s)]^{\frac{1}{p}} = \sup\limits_{m} \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_m^*(t) = \sup\limits_{t>0} \sup\limits_{m} t^{\frac{1}{p}} f_m^*(t) = \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$ ∎

Iz prethodne leme je očito da Marcinkiewicev prostor možemo definirati kao $L^{p\infty} = \{f \in \mathcal{L}(\mu) : \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty\}$.

2.4 Lorentzovi prostori

U skladu s nejednakosti (2) i lemom 6 definiramo *Lorentzove L^{pq} prostore* na sljedeći način. Za $p \in [1, \infty\rangle$ i $q \in [1, \infty\rangle$ je $\|f\|_{pq}^* = (\frac{q}{p} \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$, dok za $p \in [1, \infty]$ i $q = \infty$ je $\|f\|_{p\infty}^* = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$. Pripadni Lorentzovi prostori su $L^{pq} := \{f \in \mathcal{L}(\mu) : \|f\|_{pq}^* < \infty\}$.

Lema 7 $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ *za svaki $f \in L^p(M)$ i za svaki $p \in [1, \infty]$.*

Dokaz: Za $p > \infty$ iz leme 3, na stranici 6 imamo

$$\|f\|_p = \left(p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_f(s) ds\right)^{\frac{1}{p}} = \left(p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_{f^*}(s) ds\right)^{\frac{1}{p}} = \|f^*\|_p,$$

a za $p = \infty$ je

$\|f\|_\infty = \inf\{s : \lambda_f(s) = 0\} = \inf\{s : \lambda_{f^*}(s) = 0\} = \|f^*\|_\infty$. ■

Lako se vidi da je $L^{pp} = L^p$ normiran prostor, a iz nejednakosti

$$\||x-1|^{-1} + |x+1|^{-1}\|^*_{1\infty} > \|(x-1)^{-1}\|^*_{1\infty} + \|(x+1)^{-1}\|^*_{1\infty}$$

sljedi da $\| \quad \|^*_{pq}$ općenito ne mora biti norma.

U definiciji kvazinorme $\| \quad \|^*_{pq}$ smo uveli konstantu $\frac{p}{q}$, kako bismo dobili neovisnost izraza $\|\chi_E\|^*_{pq}$ o konstanti q, za $E \in \mathcal{M}$ i $\mu(E) < \infty$. Zapravo je $\|\chi_E\|^*_{pq} = (\mu(E))^{\frac{1}{p}}$ za svaki $q \in [1, \infty]$. To je zato što je L^{pq} u vezi sa L^p prostorima. U smislu da je L^{p1} *najmanji* normirani prostor tako da $\|\chi_E\|^*_{pq} = (\mu(E))^{\frac{1}{p}}$ vrijedi, a $L^{p\infty}$je *najveći* takav.

Teorem 7 *Ako je $f \in L^{pq_1}$ i $q_1 \leq q_2$, tada imamo:*
i) $\|f\|^*_{pq_2} \leq \|f\|^*_{pq_1}$,
ii) $L^{pq_1} \subseteq L^{pq_2}$.
Nadalje pretpostavimo da je $\| \quad \|$ norma koja čuva poredak ($\|g\| \leq \|f\|$ za $|g| \leq |f|$ (ss)) definirana na $\varphi(M)$. Tada je:
iii) $(\forall E \in \mathcal{M}) \quad \|\chi_E\| \leq (\mu(E))^{\frac{1}{p}} \Rightarrow (\forall f \in \varphi(M)) \quad \|f\| \leq \|f\|^*_{p1}$,
iv) $(\forall E \in \mathcal{M}) \quad \|\chi_E\| \geq (\mu(E))^{\frac{1}{p}} \Rightarrow (\forall f \in \varphi(M)) \quad \|f\| \geq \|f\|^*_{p1}$.

Dokaz: i) U slučaju $q_2 = \infty$, kako je f^* nerastuća slijedi

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = f^*(t)\Big(\frac{q_1}{p}\int_0^t u^{\frac{q_1}{p}-1} du\Big)^{\frac{1}{q_1}} \leq \Big(\frac{q_1}{p}\int_0^t [u^{\frac{1}{p}} f^*(u)]^{q_1} \frac{du}{u}\Big)^{\frac{1}{q_1}} \leq \|f\|^*_{pq_1}.$$

Tražena nejednakost slijedi uzimanjem supremuma po svim $t > 0$. Za slučaj kada je $q_2 < \infty$, iz Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenicji i za f_m jednostavne funkcije kao iz leme 5 vrijedi $\lim_{m\to\infty} \|f_m\|^*_{pq} = \|f\|^*_{pq}$. Ako dakle tvrdnja i) vrijedi za f_m jednostavne onda iz teorema o sendviču i prethodne jednakosti tvrdnja vrijedi za $f \in L^{pq_1}$. Znači ostaje nam pokazati tvrdnju i) za f_m jednostavne. Uočimo prvo da je

$$\begin{aligned} \|f\|^*_{pq} = \Big(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} &= \Big(\frac{q}{p}\sum_{j=1}^n c_j^q \int_{d_{j-1}}^{d_j} t^{\frac{q}{p-1}} dt\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^n (c_j^q d_j^{\frac{q}{p}} - c_j^q d_{j-1}^{\frac{q}{p}})\Big)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Definirajmo $a_j = c_j^{q_2}$, $b_j = a_j^{\frac{q_2}{p}}$ i $\theta = \frac{q_1}{q_2}$. Tražena tvrdnja je ekvivalentna sa $\sum_{j=1}^n a_j(b_j - b_{j-1}) \leq (\sum_{j=1}^n a_j^\theta(b_j^\theta - b_{j-1}^\theta))^{\frac{1}{\theta}}$, gdje su $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$,

$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_n$ i $\theta \in \langle 0, 1]$. Dokaz ćemo provesti indukcijom po n. Kada je $n = 1$ očito je $a_1 b_1 \leq (a_1^\theta b_1^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$. Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za $n = N$. Definirajmo funkcije

$$\varphi(x) = (\sum_{j=1}^{N} a_j^\theta (b_j^\theta - b_{j-1}^\theta) + x^\theta (b_{N+1}^\theta - b_N^\theta))^{\frac{1}{\theta}} = (A + x^\theta B)^{\frac{1}{\theta}}$$

i

$$l(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j (b_j - b_{j-1}) + x(b_{N+1} - b_N) = A_1 + x B_1$$

za $x \in [0, a_N]$. Naša zadaća je onda pokazati da je $\varphi(a_{N+1}) \geq l(a_{N+1})$ kad god je $0 < a_{N+1} < a_N$. Iz baze i pretpostavke indukcije imamo $\varphi(0) \geq l(0)$ i $\varphi(a_N) \geq l(a_N)$, gdje smo drugu nejednakost dobili iz (a) zamjenom b_N s b_{N+1}. S druge strane, budući da je derivacija $\varphi'(x) = B(Ax^{-\theta} + B)^{\frac{1}{\theta}-1}$ funkcije φ padajuća na $\mathbb{R}^+$, funkcija φ je konkavna. To zajedno sa činjenicom da dominira linernu funkciju l na krajnjim točkama 0 i a_N povlači da je $\varphi(x) \geq l(x)$ za $x \in [0, a_N]$. Time smo dokazali tvrdnju i).

Tvrdnja ii) je direktna posljedica tvrdnje i).

Uočimo prvo da je dovoljno pokazat tvrdnju iii) za jednostavne pozitivne funkcije, jer je $\|f\| \leq |||f||| \leq |||f|||_{p1}^* = \|f\|_{p1}^*$. Sada za $f = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}$ kao i prije, možemo definirati $f_k = b_k \chi_{F_k}$, gdje su $F_k = \cup_{j=1}^{k} E_j$ i $b_k = c_k - c_{k+1}$, za $k = 1, \ldots, n$. Tada je očito $f^*(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k^*(t)$ za $t > 0, f = \sum_{k=1}^{n} f_k$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \|f\| &\leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\| = \sum_{k=1}^{n} b_k \|\chi_{F_k}\| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k (\mu(F_k))^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f_k^*(t) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{p} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{n} f_k^*(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{p} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \frac{dt}{t} = \|f\|_{p1}^*. \end{aligned}$$

Time smo pokazali tvrdnju iii).

Za pokazati iv), zamijetimo da je $\|f\|_{p\infty}^* = \sup_{1 \leq j \leq n} d_j^{\frac{1}{p}} c_j$, ako koristimo formule iz primjera 1 Neka se supremum postiže za $j = k$, tada je $\|f\|_{p\infty}^* = d_k^{\frac{1}{p}}$. Uz $g = c_k \chi_{F_k}$ je $0 \leq g \leq f$ i vrijedi $\|f\|_{p\infty}^* = d_k^{\frac{1}{p}} c_k = c_k (\mu(F_k))^{\frac{1}{p}} \leq c_k \|\chi_{F_k}\| = \|g\| \leq \|f\|$, čime je teorem dokazan. ■

Definicija 9 *Subaditivan operator* $T : D \cap L^{r1} \to L^{p\infty}$ *je* (r, p) *restringiranog slabog tipa ako zadovoljava nejednakost* $\|Tf\|_{p\infty}^* \leq k \|f\|_{r1}^*$, *gdje je* $k > 0$.

Korolar 1 *Subaditivan operator* T *slabog tipa* (r, p) *je i restringiranog slabog tipa* (r, p).

Dokaz: Iz leme 6 vidimo da je (1) ekvivalentno sa $\|Tf\|^*_{p\infty} \leq k\|f\|_r$. Otprije znamo da je $\|f\|_r = \|f\|^*_{rr}$ i iz teorema 7 je $\|f\|_r \leq \|f\|^*_{r1}$. To zajedno daje da operator T zadovoljava i nejednakost iz prethodne defnicije. ■

Teorem 8 *Neka je B normiran prostor s normom koja čuva poredak, a $T : \varphi(\mu) \to B$ linearan operator. Ako je $\|T\chi_E\| \leq C\|\chi_E\|^*_{r1} = C(\mu(E))^{\frac{1}{r}}$ gdje je $\mu(E) < \infty$ i C neovisan o E, tada postoji konstanta A tako da $\|Tf\| \leq A\|f\|^*_{r1}$ za svaki $f \in \varphi(\mu)$.*

Dokaz: Kako je $f \in \varphi(\mu)$ tada je $f = \sum_{k=1}^n f_k$ i $f^* = \sum_{k=1}^n f^*_k$ kao u dokazu teorema 7. Nadalje je $\|Tf\| = \|\sum_{k=1}^n Tf_k\| \leq \sum_{k=1}^n \|Tf_k\| \leq \sum_{k=1}^n Cb_k\|\chi_{E_k}\|^*_{r1}$. Jednako kao i u teoremu 7 je $\sum_{k=1}^n Cb_k\|\chi_{E_k}\|^*_{r1} = C\|f\|^*_{r1}$, odnosno $\|Tf\| \leq C\|f\|^*_{r1}$. Ako je f s kompleksnim vrijednostima, tada je $\|Tf\| \leq 4C\|f\|^*_{r1}$ ■

Napomena 1 *Iz prethodnog teorema imamo da je (sub)linearni operator T slabog tipa, ako je takav na karakterističnim funkcijama skupova konačne mjere.*

Lema 8 (Hardyeve nejednakosti) *Ako je $q \geq 1$, $r > 0$ i $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ izmjeriva funkcija, tada je:*
i) $(\int_0^\infty [\int_0^t g(u)du]^q t^{-r-1}dt)^{\frac{1}{q}} \leq (\frac{q}{r})(\int_0^\infty [ug(u)]^q u^{-r-1}du)^{\frac{1}{q}}$
ii) $(\int_0^\infty [\int_t^\infty g(u)du]^q t^{r-1}dt)^{\frac{1}{q}} \leq (\frac{q}{r})(\int_0^\infty [ug(u)]^q u^{r-1}du)^{\frac{1}{q}}$

Dokaz: Pokažimo prvo da tvrdnja (i) povlači tvrdnju (ii). Uvrstimo $g_1(u) = \frac{1}{u^2}g(\frac{1}{u})$ u prvu nejednakost, i tada je

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Big[\int_0^t g_1(u)du\Big]^q t^{-r-1}dt &= \int_0^\infty \Big[\int_{\frac{1}{t}}^\infty g(v)dv\Big]^q t^{-r-1} \\ &= \int_0^\infty \Big[\int_s^\infty g(v)dv\Big]^q s^{-r-1}dt. \end{aligned}$$

Međutim lijeva strana jednakosti je manja od

$$\Big(\frac{q}{r}\Big)^q \int_0^\infty \Big[ug_1(u)\Big]^q u^{-r-1}du = \Big(\frac{q}{r}\Big)^q \int_0^\infty \Big[vg(v)\Big]^q v^{r-1}dv,$$

to jest vrijedi nejednakost ii).

Dokaz prve nejednakosti slijedit će iz Jensenove nejednakosti za $\varphi(x) = |x|^q$ i $d\mu(u) = u^{\frac{r}{q}-1}du$. Dakle, računamo

$$\Big[\int_0^t g(u)du\Big]^q = \Big[\int_0^t g(u)u^{1-\frac{r}{q}}u^{\frac{r}{q}-1}du\Big]^q \leq \Big(\frac{q}{r}\Big)^{q-1} t^{r(1-\frac{1}{q})} \int_0^t [g(u)]^q u^{q-r-1+\frac{r}{q}}du.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \Big[\int_0^t g(u)du\Big]^q t^{-r-1}dt &\leq \Big(\frac{q}{r}\Big)^{q-1}\int_0^\infty t^{-1-\frac{r}{q}}\Big[\int_0^t [g(u)]^q u^{q-r-1+\frac{r}{q}}\Big]dt \\
&= \Big(\frac{q}{r}\Big)^{q-1}\int_0^\infty [g(u)u]^q u^{-r-1+\frac{r}{q}}\Big(\int_u^\infty t^{-1-\frac{r}{q}}dt\Big)du \\
&= \Big(\frac{q}{r}\Big)^{q}\int_0^\infty [g(u)u]^q u^{-r-1}du,
\end{aligned}$$

i time je pokazana Hardyeva nejednakost (i). ■

Teorem 9 (Marcinkiewicz) *Ako je $T : D \to \mathcal{L}(\nu)$ subaditivan operator restringiranog slabog tipa (r_j, p_j), $j = 1, 2$, uz $r_0 < r_1$ i $p_0 \neq p_1$, tada postoji konstanta $B = B_\theta$ tako da:*

$$(\forall f \in D \cap L^{rq}) \quad \|Tf\|^*_{pq} \leq B\|f\|^*_{rq},$$

za $q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$ i $\theta \in \langle 0, 1\rangle$.

Dokaz: Za $f \in D \bigcap L^{rq}$ definiramo

$$f^t(x) = f(x)\chi_{f^{\leftarrow}\langle f^*(t^\gamma),\infty]}$$

i $f_t(x) = f(x) - f^t(x)$, gdje je $\gamma = \frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}} = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}}$. Tada imamo dvije nejednakosti:

$$(f^t)^*(s) \leq f^*(s)\chi_{\langle 0,t^\gamma\rangle} \tag{3}$$

i

$$f_t^*(s) \leq \begin{cases} f^*(t^\gamma) & ,0 < s < t^\gamma \\ f^*(s) & ,t^\gamma \leq s \end{cases} \tag{4}$$

Lako se uvjeriti da formule vrijede kada je f jednostavna funkcija, iz formula sličnih kao u primjeru 1, ostali slučajevi se dobivaju preko limesa. Budući da je operator T subaditivan imamo formulu $|[Tf](y)| = |[T(f^t + f_t)(y)]| \leq |[Tf^t](y)| + |[Tf_t](y)| \quad (ss\, y \in N)$, a imamo i sljedeću inkluziju

$$\begin{aligned}
&\{y \in N : |[Tf](y)| > (Tf^t)^*(s) + (Tf_t)^*(s)\} \\
&\quad\subseteq \{y \in N : |[Tf^t](y)| > (Tf^t)^*(s)\} \cup \{y \in N : |[Tf_t](y)| > (Tf_t)^*(s)\}.
\end{aligned}$$

Ako su λ, λ^t i λ_t distribucijske funkcije funkcija Tf, Tf^t i Tf_t redom, tada iz prethodne inkluzije i leme 4 (ii) vrijedi formula:

$$\lambda((Tf^t)^*(s) + (Tf_t)^*(s)) \leq \lambda^t((Tf^t)^*(s)) + \lambda_t((Tf_t)^*(s)) \leq s + s = 2s.$$

Iz definicije $(Tf)^*$ je dakle

$$(s>0)(Tf^t)^*(s)+(Tf_t)^*(s)\geq (Tf)^*(2s) \tag{5}$$

Uzmimo da su $r_1<\infty$ i $q<\infty$. Tada iz (5) uz zamjenu varijabli i nejednakost Minkowskog znamo da je:

$$\begin{aligned}\|Tf\|^*_{pq} &= \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big[\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}(Tf)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\Big]^{\frac{1}{q}} = \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}}2^{\frac{1}{p}}\Big[\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}(Tf)^*(2t)]^q\frac{dt}{t}\Big]^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \Big(\frac{q}{p}\Big)^{\frac{1}{q}}2^{\frac{1}{p}}\Big[\Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}(Tf^t)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}+\Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}(Tf_t)^*(t)]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big].\end{aligned}$$

Kako je operator T restringiranog slabog tipa (r_0,p_0) i (r_1,p_1), to imamo $t^{\frac{1}{p_0}}(Tf^t)^*(t)\leq k_0\|f^t\|^*_{r_01}$ i $t^{\frac{1}{p_1}}(Tf_t)^*(t)\leq k_1\|f_t\|^*_{r_11}$ za $t>0$. Dakle suma unutar velikih uglatih zagrada nije veća od

$$k_0\Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\|f^t\|^*_{r_01}]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}+k_1\Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\|f_t\|^*_{r_11}]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Iz nejednakosti (3), zamjene varijabli i prve Hardyeve nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\|f^t\|^*_{r_01}]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} &\leq \Big(\int_0^\infty \Big[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\Big(\frac{1}{r_0}\int_0^{t^\gamma} f^*(s)s^{\frac{1}{r_0}-1}ds\Big)\Big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &= |\gamma|^{-\frac{1}{q}}\frac{1}{r_0}\Big(\int_0^\infty \Big[u^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}}\Big(\int_0^u f^*(s)s^{\frac{1}{r_0}-1}ds\Big)\Big]^q\frac{du}{u}\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \frac{|\gamma|^{-\frac{1}{q}}}{1-\frac{r_0}{r}}\Big(\int_0^\infty [u^{\frac{1}{r_0}}f^*(u)]^q u^{\frac{q}{r}-\frac{q}{r_0}}\frac{du}{u}\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &= \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}\Big(\frac{r}{|\gamma|q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|f\|^*_{rq}.\end{aligned}$$

Na sličan način, ali pomoću nejednakosti (4) i druge Hardyeve nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\|f_t\|^*_{r_11}]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}} &\leq \Big(\int_0^\infty \Big[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\Big(\frac{1}{r_1}\int_0^{t^\gamma} f^*(t^\gamma)s^{\frac{1}{r_1}-1}ds+\\ &\quad+\frac{1}{r_1}\int_{t^\gamma}^\infty f^*(s)s^{\frac{1}{r_1}-1}ds\Big)\Big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \Big(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}f^*(t^\gamma)t^{\frac{\gamma}{r_1}}]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}+\\ &\quad+\frac{1}{r_1}\Big(\int_0^\infty \Big[t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\int_{t^\gamma}^\infty f^*(s)s^{\frac{1}{r_1}-1}ds\Big]^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |\gamma|^{-\frac{1}{q}}\Big[\Big(\int_0^\infty [u^{\frac{1}{r}} f^*(u)]^q \frac{du}{u}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{1}{r_1}\Big(\int_0^\infty \Big[u^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}} \int_u^\infty f^*(s) s^{\frac{1}{r_1}-1} ds\Big]^q \frac{du}{u}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big] \\
&\le \Big(\frac{r}{|\gamma| q}\Big)^{\frac{1}{q}} \|f\|^*_{rq} + \frac{|\gamma|^{-\frac{1}{q}}}{\frac{r_1}{r}-1}\Big(\int_0^\infty [f^*(u) u^{\frac{1}{r_1}}]^q u^{\frac{q}{r}-\frac{q}{r_1}} \frac{du}{u}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \Big(\frac{r}{|\gamma| q}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{r_1}{r_1 - r}\Big) \|f\|^*_{rq}.
\end{aligned}
$$

Pokazali smo nejednakost $\|Tf\|^*_{pq} \le B\|f\|^*_{rq}$, gdje je $B = (\frac{r}{|\gamma| p})^{\frac{1}{q}} 2^{\frac{1}{p}} (\frac{rk_0}{r-r_0} + \frac{r_1 k_1}{r_1 - r})$.

Kada imamo $r_1 < \infty$ i $q = \infty$, ocjenjujemo $t^{\frac{1}{p}}(Tf)^*(t)$ za $t > 0$ pomoću nejednakosti (3),(4) i (5) kao u prethodnom slučaju. Računom dobivamo pozitivne konstante c_1, c_2 i c_3 (koje ovise samo o p, q,r, r_0 i r_1) takve da je:

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{1}{p}}(Tf^*)(t) &\le c_1 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \int_0^{t^\gamma} f^*(s) s^{\frac{1}{r_0}-1} ds \\
&\quad + c_2 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \int_0^{t^\gamma} f^*(t^\gamma) s^{\frac{1}{r_1}-1} ds + c_3 t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \int_{t^\gamma}^\infty f^*(s) s^{\frac{1}{r_1}-1} ds.
\end{aligned}
$$

Koristeći činjenicu da je $f^*(s)s^{\frac{1}{r}} \le \|f\|^*_{r\infty}$, dobivamo sljedeće

$$
t^{\frac{1}{p}}(Tf^*)(t) \le \Big(\frac{c_1}{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}} + \frac{c_2}{r_1} + \frac{c_3}{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}}\Big)\|f\|^*_{r\infty} = B\|f\|^*_{r\infty},
$$

odnosno $\|Tf\|^*_{p\infty} \le B\|f\|^*_{r\infty}$.

U slučaju kad je $r_1 = \infty$ i $q = \infty$ dokaz ide slično kao i prije , ali uz upotrebu ocjene $\|f_t\|^*_{\infty\infty} \le f^*(t^\gamma)$. ■

2.5 Topologija Lorentzovih prostora

Definicija 10 *Ako je $(M, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere, tada za skup $A \in \mathcal{M}$ kažemo da je atom ako je $\mu(A) > 0$ i ako za svaki izmjeriv skup $B \subset A$ vrijedi $\mu(B) = 0$ ili $\mu(A \setminus B) = 0$.*

Teorem 10 (Darbouxovo svojstvo) *Neka je $(M, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere. Ako μ nema atoma, onda je $\{\mu(A) : A \in \mathcal{M}\} = [0, \mu(M)]$.*

Za skicu dokaza vidi [4].

Lema 9 *Neka je $E \in \mathcal{M}$ i $F_s = \{x \in M : |f(x)| > s \geq 0\}$, gdje je $(M, \mathcal{M}, \mu)$ prostor mjere bez atoma, tada je:*
i) $\int_E |f| d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} f^*(t) dt$
ii) $\int_{F_s} |f| d\mu = \int_0^{\lambda(s)} f^*(t) dt$
iii) Ako je $\mu(M) \geq t > 0$ tada postoji $E_t \in \mathcal{M}$ takav da je $\mu(E_t) = t$ i $\int_{E_t} |f| d\mu = \int_0^t f^*(u) du$.

Dokaz: i) Jasno je da je $f_1^* \leq f^*$ za $|f_1| \leq |f|$. Dakle za $f_1 = f\chi_E$ imamo

$$\int_0^{\mu(E)} f_1^*(t) dt \leq \int_0^{\mu(E)} f^*(t) dt. \tag{6}$$

Kako je λ_{f_1} je ograničena s $\mu(E)$, vrijedi da je $f_1^*(t) = 0$ za svaki $t > \mu(E)$. Lema 7 uz p=1 daje

$$\int_E |f| d\mu = \int_M |f_1| d\mu = \int_0^\infty f_1^*(t) dt = \int_0^{\mu(E)} f_1^*(t) dt,$$

a to zajedno s (6) povlači nejednakost i).

ii) Definirajmo funkciju $g = f^* \chi_{<0,\lambda(s)>}$. Želimo pokazati da g i $h = f\chi_{F_s}$ imaju istu distribucijsku funkciju. Kada je f jednostavna funkcija, tada je $d_z = \lambda(s)$ i $g(t) = \begin{cases} c_j & t \in [d_{j-1}, d_j\rangle, j = 1, \ldots, z \\ 0 & d_z \leq t \end{cases}$, odnosno po lemi 4 h i $h^* = g$ imaju istu distribucijsku funkciju. Kada f nije jednostavna postoji niz (f_m) jednostavnih funkcija tako da $f_m \nearrow f$, i nizovi (h_m) i (g_m) definirani kao $h_m = f_m \chi_{F_s}$ i $g_m = f_m^* \chi_{<0,\lambda_{f_m}(s)>}$. Očito $|h_m| \nearrow |h|$, dok iz $|f_m| \nearrow |f|$ sljedi $f_m^* \nearrow f^*$ i $|g_m| \nearrow |g|$. Dakle po lemi 5 je $\lambda_h^m \nearrow \lambda_h$ i $\lambda_g^m \nearrow \lambda_g$, to jest $\lambda_h = \lambda_g$. Na kraju uz pomoć leme 7 dobivamo traženu tvrdnju

$$\int_{F_s} |f| d\mu = \int_M |h| d\mu = \int_0^\infty g(u) du = \int_0^{\lambda(s)} f^*(u) du.$$

iii) Uzmimo $t \in \langle 0, \mu(M)]$ i definirajmo skupove G i H s

$$G = \{x \in M : |f(x)| > f^*(t)\}, H = \{x \in M : |f(x)| \geq f^*(t)\}.$$

Tada je $\mu(G) \leq t \leq \mu(H)$. Prva nejednakost sljedi iz $\lambda(f^*(t)) \leq t$ i $\mu(G) = \lambda(f^*(t))$. Za izmjerivu funkciju f uzmimo (f_m) niz jednostavnih funkcija tako da $|f_m| \nearrow |f|$ i definirajmo niz skupova (H_m) kao i H za pripadne f_m. Tada je $\cup_{m \in \mathbb{N}} H_m = H$ i $H_m \subseteq H_{m+1}$ za $m \in \mathbb{N}$. Iz neprekidnosti na rastuće unije vrijedi $\mu(H) = \lim_{m\to\infty} \mu(H_m) \geq t$, zato jer je $\mu(H_m) > t$ za svaki $m \in \mathbb{N}$. Nadalje iz Darbouxova svojstva znamo da postoji skup E_t

tako da $G \subset E_t \subset H$ i $\mu(E_t) = t$. Sada za $h = f\chi_{E_t}$ je $h^* = f^*$ na $(0,t)$ i $h^*(u) = 0$ za svaki $u \geq t$. Tvrdnja dakle sljedi iz $\int_{E_t} |f|d\mu = \int_M |h|d\mu = \int_0^\infty h^*(u)du = \int_0^t f^*(u)du$ ∎

Neposredna posljedica tvrdnji i) i iii) prethodne leme je formula

$$\sup_{E\in\mathcal{M},\mu(E)\leq t} \int_E |f|d\mu = \int_0^t f^*(u)du. \tag{7}$$

Iz te tvrdnje imamo da je preslikavanje $f \to \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du$ norma na $L^p(M)$ za svaki $p \in [1,\infty]$ i $t > 0$. Da je norma konačne vrijednosti sljedi iz Hölderove nejednakosti, to jest iz $\int_E |f|d\mu = \int_M \chi_E|f| \leq \|f\|_p\|\chi_E\|_{p'} \leq t^{\frac{1}{p'}}\|f\|_p$ gdje su p i p' konjugirani.

Nesimetrična maksimalna funkcija m_f funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ se definira kao

$$m = m_f = \sup_{h+k>0} \frac{1}{h+k}\int_{x-h}^{x+k} |f(u)|du.$$

Lema 10 *Neka je $f \in \mathcal{L}(\mu)$, tada vrijedi $m_{f^*}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du$.*

Dokaz: Očito je da $m_{f^*}(t) = \sup_{t-h\geq 0,h+k>0} \frac{1}{h+k}\int_{t-h}^{t+k} f^*(u)du$. Budući da je f^* nerastuća ,odmah slijedi tvrdnja, jer je $\frac{1}{h+k}\int_{t-h}^{t+k} f^*(u)du \leq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du$∎

Za funkciju $f \in \mathcal{L}(\mu)$ definirajmo $\|f\|_{pq} = (\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}m(t)]^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$ za $q, p \in [1,\infty\rangle$ i $\|f\|_{p\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}m(t)$ za $p \in [1,\infty]$.

Iz sljedećih nejednakosti se odmah vidi da je $\| \;\; \|_{pq}$ norma. $\|f+g\|_{pq} = (\frac{q}{p}\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}m_{f+g}(t))^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}} = (\frac{q}{p})^{\frac{1}{q}}\|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}m_{f+g}\|_q \leq (\frac{q}{p})^{\frac{1}{q}}\|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(m_f + m_g)\|_q \leq \dots \leq \|f\|_{pq} + \|g\|_{pq}$.

Teorem 11 *Ako je $f \in L^{pq}$ za $p \in \langle 1,\infty]$, tada je $\|f\|^*_{pq} \leq \|f\|_{pq} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{pq}$.*

Dokaz: Zato što je f^* nerastuća vrijedi $m(t) \geq f^*(t)$ za $t > 0$, odnosno $\|f\|^*_{pq} \leq \|f\|_{pq}$. Za $q \in [1,\infty\rangle$ drugu nejednakost dobivamo iz prve Hardyeve nejednakosti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{pq} &= \Big(\frac{q}{p}\int_0^\infty \int_0^t [f^*(u)du]^q t^{-q\frac{1}{\frac{1}{p}}-1} dt\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{p}{p-1}\Big(\frac{q}{p}\int_0^\infty [uf^*(u)]^q u^{-q(1-\frac{1}{p})-1} du\Big)^{\frac{1}{q}} = \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{pq}.
\end{aligned}$$

Za preostali slučaj $p \in \langle 1, \infty]$ i $q = \infty$ imamo

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}} m(t) &= t^{\frac{1}{p-1}} \int_0^t f^*(u) du = t^{\frac{1}{p-1}} \int_0^t u^{-\frac{1}{p}} u^{\frac{1}{p}} f^*(u) du \\ &\leq \|f\|^*_{p\infty} t^{\frac{1}{p-1}} \int_0^t u^{-\frac{1}{p}} du = \frac{p}{p-1} t^{-\frac{1}{p+1}} \|f\|_{p\infty} t^{\frac{1}{p-1}} = \frac{p}{p-1} \|f\|^*_{p\infty}. \blacksquare \end{aligned}$$

Napomenimo još da je važno upotrebljavati i $\| \quad \|_{pq}$ i $\| \quad \|^*_{pq}$. Prednost $\| \quad \|_{pq}$ je to što je norma, no nedostatak je da nemožemo dobiti zadovoljavajuće proširenje za L^1. To se vidi iz sljedećeg računa:

$$\|f\|_{1\infty} = \sup_{t>0} tm(t) = \sup_{t>0} \int_0^t f^*(s) ds = \int_0^\infty f(s) ds = \|f^*\|_1 = \|f\|_1.$$

Teorem 12 *Lorentzov prostor L^{pq} za $p \in \langle 1, \infty]$ i $q \in [1, \infty]$ i sa normom $\| \quad \|_{pq}$ je Banachov.*

Dokaz: Trebamo pokazati samo potpunost prostora L^{pq}. U slučaju $p = \infty$ odmah vidimo da je $L^{\infty\infty} = L^\infty$ Banachov prostor, dok za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ uzmimo (f_n) C-niz u normi $\| \quad \|_{pq}$. Kako je $q \leq \infty$, iz teorema 7 i teorema 11 sljedi da je (f_n) C-niz i u normi $\| \quad \|^*_{p\infty}$. Iz leme 6 to je ekvivalentno sa

$$\sup_{s>0} \mu(\{x \in M : |f_n(x) - f_m(x)| > s\}) \to 0 \text{ kad } n, m \to 0,$$

a to je upravo definicija da je (f_n) C-niz u mjeri. Nadalje iz teorema 2 u poglavlju 1.1 znamo da postoji podniz (f_{n_k}) i funkcija f tako da $f_{n_k}(x) \to f(x)$ (ss). Tada za dani $\delta > 0$ postoji $j_0 = j_0(\delta)$ tako da $\|f_n - f_j\|_{pq} < \delta$ za svaki $j, n \geq j_0$. Uz $g_k = f_{n_k} - f$ i $g = f - f_j$, iz Fatouove leme sljedi $\int_E |g| d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int |g_k| d\mu$ za bilo koji $E \in \mathcal{M}$, a iz (7) i još jedne upotrebe Fatouove leme imamo $\|f - f_j\|_{pq} = \|g\|_{pq} \leq \delta$ za svaki $j \geq j_0$. $\blacksquare$

Napomena 2 *Lorentzov prostor L^{1q}, za $q \in \langle 1, \infty]$ nije normabilan.*

Rješenje: Pokazat ćemo samo slučaj kada je $q = \infty$. Uzmimo niz funkcija $f_k = \frac{1}{|x+k|}$. To je niz u $L^{1\infty}$, jer je

$$\lambda_k(s) = \mu(\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x+k|} > s\}) = \mu(\{x \in \mathbb{R} : |x+k| < \frac{1}{s}\}) = 2s,$$

odnosno $\|\frac{1}{|x+k|}\|^*_\infty = \sup_{s>0} s\frac{2}{s} = 2$. Uzmimo funkciju $f = \sum_{k=1}^n f_k$. Ako je $\| \quad \|$ norma ekvivalentna sa $\| \quad \|^*_{1\infty}$ odnosno ($\| \quad \| \leq d \| \quad \|^*_{1\infty}$), tada $\|f\| \leq \|\sum_{k=1}^n f_k\| \leq n\|f_k\| \leq nd\|f_k\|^*_{1\infty} = nC_1$. Kako je $f(x) \geq C_2 \log n$ za $x \in [0, n]$, znamo da $\|f\|^*_{1\infty} \geq C_2 \log n \lambda(C_2 \log n) \geq C_2 n \log n$, a to je u kontradikciji sa prethodnom ocjenom.

3 Karakterizacija funkcijskih prostora preko valića

3.1 Osnovno o valićima

Priču o valićima ćemo započeti komentiranjem njenih prednosti u analizi signala. Signal je na primjer funkcija koja opisuje zvuk. Jedno od pitanja koje se proučava je frekvencijska analiza signala u nekom trenutku. Odnosno što je čovjek odsvirao na klaviru u datom trenutku. Fourierovom transformacijom se može dobiti frekvencijska analiza signala. Međutim, kod nje je problem to što nam je teško dobiti tu analizu za dati trenutak, to jest imamo samo jedan parametar ω kojim određujemo koje frekvencije ćemo analizirati u tom signalu:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Ono što želimo dobiti kod valić-transformacije jest dobra analiza frekvencija u danom trenutku. Zato kod nje imamo dva parametra kojim je reguliramo, jedan za odabir frekvencija (a), a drugi za odabir trenutka (b). Zapišimo je sada kao

$$(T^{wav} f)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int f(t) \psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big).$$

Velikim vrijednostima parametra a tada odgovaraju niske frekvencije, odnosno malim vrijednostima visoke frekvencije. Nama će u ovom poglavlju biti najvažnije ortonormirane baze valića za $L^p(\mathbb{R})$, po kojima ćemo raditi razvoj funkcija. I neće nas zanimati frekvencijska analiza, već analiza singulariteta u funkcijama. Međutim, za baze nam trebaju prebrojive familije valića, i zato trebamo dobro odabrati familije parametara a i b tako da pokrivaju cijeli vremensko-frekvencijski opseg, odnosno

$$T^{wav}_{m,n}(f) = a_0^{-\frac{m}{2}} \int f(t) \psi(a_0^{-m} t - n b_0), \text{ za } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Haarova baza je prvi primjer ortonormirane baze valića za $L^2(\mathbb{R})$. Definirana je s odabirom parametara $a_0 = 2, b_0 = 1$ i funkcije

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}\rangle \\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1\rangle \\ 0 & \text{inače} \end{cases},$$

odnosno $\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m} x - n)$.

3.2 Višerezolucijska analiza

Višerezolucijska analiza se sastoji od niza aproksimirajućih prostora V_j, takvih da zadovoljavaju

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \tag{8}$$

i

$$\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \tag{9}$$

$$\cap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}. \tag{10}$$

Ako je P_j ortogonalni projektor na prostor V_j, tada (9) osigurava da je $\lim_{j\to-\infty} P_j f = f$ za svaki $f \in L^2(\mathbb{R})$. Međutim, postoje mnogi primjeri niza prostora koji zadovoljavaju uvjete (8) do (10), a koji nemaju nikakve veze s višerezolucijskom analizom. Kako bismo dobili višerezolucijsku analizu morat ćemo dodati još neke zahtjeve. Prvi od njih je

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j\cdot) \in V_0. \tag{11}$$

S tim zahtjevom imamo da su svi prostori V_j zapravo skalirane verzije prostora V_0. Sada ćemo dati primjere prostora koji zadovoljavaju uvjete (8) do (11):

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f|_{[2^j k, 2^j(k+1)]} = konst., \text{ za svaki } k \in \mathbb{Z}\}, \tag{12}$$

kojeg ćemo zvati Haarova višerezolucijska analiza, a ona je povezana s Haarovom bazom iz poglavlja 3.1. Slika 2 nam pokazuje kako izgledaju projekcije neke funkcije na prostore V_0 i V_1. Ovaj primjer nam jasno izlaže još jedno svojstvo koje tražimo od višerezolucijske analize, a to je invarijantnost na translaciju za neki prirodni broj,

$$f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - n) \in V_0, n \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

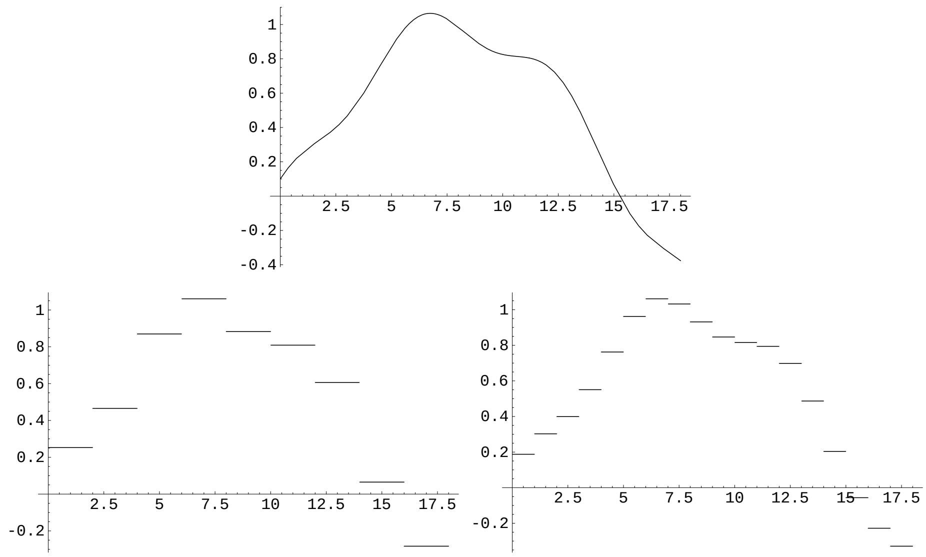
Zbog uvjeta (11) i (13) znamo da vrijedi

$$f \in V_j \Rightarrow f(\cdot - 2^j n) \in V_j, n \in \mathbb{Z}.$$

Zadnji uvjet koji tražimo je da postoji funkcija $\phi \in V_0$ tako da je

$$\{\phi_{0,n} : n \in \mathbb{Z}\} \text{ ortonormirana baza za } V_0, \tag{14}$$

gdje je za svaki $j, n \in \mathbb{Z}, \phi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}x - n)$. Uvjeti (14) i (11) nam daju da je $\{\phi_{j,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za V_j i to za svaki $j \in \mathbb{Z}$. U



Slika 2: Funkcija f i njene projekcije na V_1 i V_0.

Haarovom primjeru jedan od mogućih izbora za funkciju ϕ je $\chi_{[0,1]}$. Funkciju ϕ ćemo zvati skalirajuća funkcija ili tata-valić.

Glavno načelo višerezolucijske analize je da kad god familija zatvorenih potprostora zadovoljava uvjete (8) do (14), da tada postoji ortonormirana baza $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ prostora $L^2(\mathbb{R})$, gdje su $\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k)$, tako da za svaki $f \in L^2(\mathbb{R})$ je

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, \psi_{j,k})\psi_{j,k}. \tag{15}$$

Valić ψ se može eksplicitno konstruirati, a dio te konstrukcije ćemo pokazati u nastavku teksta. Funkcija ψ se još naziva i mama-valić.

Za svaki $j \in \mathbb{Z}$ definirajmo W_j kao ortogonalni komplement potprostora V_j u V_{j-1}. Zapišimo to kao

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j. \tag{16}$$

Vrijedi i

$$W_j \perp W_{j'} \text{ ako } j \neq j', \tag{17}$$

jer ako je $j > j'$ tada $W_j \subset V_{j'} \perp W_{j'}$. Nadalje vrijedi, za svaki $j < J$

$$V_j = V_J \oplus \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{J-k}, \tag{18}$$

gdje su svi ti potprostori ortogonalni. To zajedno s uvjetima (9) i (10) povlači

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j, \tag{19}$$

dekompoziciju prostora $L^2(\mathbb{R})$ u međusobno ortogonalne potprostore. Uz to prostori W_j nasljeđuju svojstvo (11) prostora V_j:

$$f \in W_j \Leftrightarrow f(2^j\cdot) \in W_0. \tag{20}$$

Formula (15) je ekvivalentna tome da za neki j, $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ tvori ortonormalnu bazu za W_j. Zbog uvjeta (19),(9) i (10), to povlači da $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ tvori ortonormalnu bazu za $L^2(\mathbb{R})$. S druge strane svojstvo (20) osigurava da ako je $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$, da su tada i $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirane baze za W_j i to za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Stoga se naš zadatak sveo na pronalaženje funkcije $\psi \in W_0$ takve da je $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza za W_0. Nećemo dalje opisivati konstrukciju funkcije ψ, već ćemo samo navesti nekoliko svojstava koja su nam potrebna kako bismo mogli eksplicitno zapisati funkciju, odnosno izreći teorem. Kako je $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$ i $\phi_{-1,n}$ je ortonormirana baza u V_{-1}, znamo da je

$$\phi = \sum_n h_n \phi_{-1,n}, \text{ gdje je } h_n = (\phi, \phi_{-1,n}), \sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1. \tag{21}$$

Teorem 13 *Ako familija zatvorenih potprostora $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ u $L^2(\mathbb{R})$, zadovoljava uvjete (8)-(14), tada postoji njima pridružena ortonormirana baza valića $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ za $L^2(\mathbb{R})$ tako da vrijedi (15). Jedna od mogućih konstrukcija za ψ je $\psi = \sum_n (-1)^{n-1}\overline{h_{-n-1}}\phi_{-1,n}$, gdje red konvergira u L^2 smislu.*

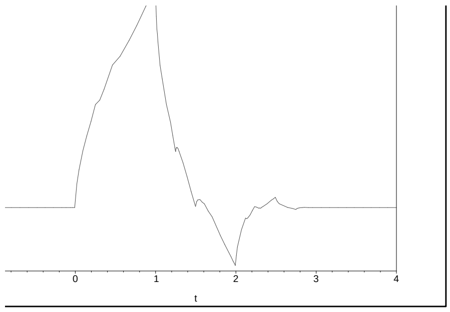
Zapišimo funkciju ϕ kao $\phi = \sum_n c_n \phi(2x - n)$, a to možemo jer valići $\phi_{-1,n}$ čine bazu za V_{-1}. Tada imamo sljedeću lemu:

Lema 11 *Ako je $|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1-\epsilon}$ i ϕ je neprekidna, tada vrijedi*

$$\sum_n c_{2n} = 1 = \sum_n c_{2n+1} \Rightarrow \sum_l \phi(x - l) = const \neq 0.$$

3.3 Daubechiesin valić

Prvi netrivijalni primjer valića kojeg ćemo navesti je konstruirala Ingrid Daubechies. Naime, pokazano je da je moguće konstruirati familiju valića za koju skalirajuća funkcija ϕ ima sljedeća svojstva:
1) $\operatorname{supp}\phi = [0,3]$,
2) Usrednjenje: $\int_0^3 \phi(t)dt = 1$,
3) Ortogonalnost: $\phi(t-m_2)$ i $\phi(t-m_1)$ su ortogonalni za $m,n \in \mathbb{Z}$,
4) Regularnost: Konstantne i linearne funkcije mogu biti zapisane kao suma funkcije ϕ i njezinih translacija.



Slika 3: Graf funkcije D_4.

Međutim, i njena praktična konstrukcija se provodi preko tih svojstava, odnosno iz rekurzije, koja koristi svojstvo da skalirajuća funkcija zadovoljava jednadžbu rastezanja:

$$\phi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \phi(2t-k).$$

Koeficijenti c_k tada iznose

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

Budući da su samo 4 koeficijenta različita od 0, skalirajuća funkcija se označava sa D_4. Na slici 3 se vidi njen graf.

3.4 Bezuvjetne baze za $L^p(\mathbb{R}), p \in \langle 1, \infty \rangle$

Teorem 14 (Calderón-Zygmund) *Neka je f pozitivna funkcija iz $L^1(\mathbb{R})$ i $\alpha > 0$. Tada postoji dekompozicija skupa $\mathbb{R}$ na skupove G i B, to jest $\mathbb{R} = G \cup B, G \cap B = \emptyset$ i to takve da vrijedi:*
i) $f(x) \leq \alpha$ za skoro svaki $x \in G$
ii) $B = \cup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$,
gdje su Q_k intervali s međusobno disjunktnim unutrašnjostima, takvi da je

$$\alpha \leq |Q_k|^{-1} \int_{Q_k} f(x)dx \leq 2\alpha, \ k \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Dokaz: Odaberimo $L = 2^l$ tako da je $2^{-l} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \leq \alpha$. Iz toga imamo $L^{-1} \int_{kL}^{(k+1)L} f(x)dx \leq \alpha$ za $k \in \mathbb{Z}$.

Uzmimo interval $Q = [kL, (k+1)L]$ i podijelimo ga na dva jednaka dijela, $[kL, (k+\frac{1}{2})L]$ i $[(k+\frac{1}{2})L, (k+1)L]$. Također odaberimo bilo koji od ta dva intervala i nazovimo ga Q', te neka je $I_{Q'} = |Q'|^{-1} \int_{Q'} f(x)dx$. Ako je sada $I_{Q'} > \alpha$, stavimo Q' u familiju intervala koji će sačinjavati skup B, jer je uistinu

$$\alpha < I_{Q'} \leq |Q'|^{-1} \int_Q f(x)dx = 2|Q|^{-1} \int_Q f(x)dx \leq 2\alpha.$$

U suprotnom, ako je $I_{Q'} < \alpha$, ponavljam dijeljenje, ako treba do ad infinitum. Učinimo to isto i za drugu polovicu intervala Q i za sve druge intervale $[kL, (k+1)L]$. Na kraju ćemo imati prebrojivu familiju intervala koji zadovoljavaju jednadžbu (22). Označimo njihovu uniju s B, a komplement s G.

Iz konstrukcije skupa B znamo da za $x \notin B$ postoji opadajući niz intervala $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ takvih da je $x \in Q_n$ za svaki n i $|Q_n|^{-1} \int_{Q_n} f(y)dy \leq \alpha$. Zapravo, $|Q_j| = \frac{1}{2}|Q_{j-1}|$ i $Q_j \subset Q_{j-1}$ za svaki $j > 1$. Kako je funkcija $f \in L^1$, vrijedi da je skoro svuda ekivalentna s nekom neprekidnom funkcijom g, pa imamo da skoro svuda vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} f(y)dy - f(x)\Big| &\leq \Big|\frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} f(y)dy - f(x)\frac{1}{Q_n}\int_{Q_n} dy\Big| \\
&\leq \Big|\frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} f(y) - f(x)dy\Big| \\
&\leq \frac{1}{Q_n}\int_{Q_n} |f(y) - f(x)|dy \\
&\leq \frac{1}{Q_{n_0}}\int_{Q_{n_0}} |f(y) - f(x)|dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{Q_{n_0}} \int_{Q_{n_0}} |g(y) - g(x)| dy \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}
$$

gdje je zbog neprekidnosti funkcije g i zbog toga što se Q_n *steže* do x, n_0 takav da $|g(x) - g(y)| \leq \epsilon$. Time smo pokazali da vrijedi

$$|Q_n|^{-1} \int_{Q_n} f(y)dy \to f(x)(ss).$$

Kako je lijeva strana manja od α to slijedi da je $f(x) \leq \alpha(ss\ x \in G)$. ■

Uočimo da nam izbor $L = 2^l$ daje da su svi intervali iz dokaza dijadski, odnosno oblika $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ za $k, j \in \mathbb{Z}$.

Definicija 11 *Integralni operator* $(Tf)(x) = \int K(x,y)f(y)dy$ *je Calderón-Zygmundov ako integralna jezgra zadovoljava* $|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|}$ *i* $|\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)| + |\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^2}$*, te definira ograničeni operator na* $L^2(\mathbb{R})$*.*

U dokazu sljedećeg teorema ćemo koristiti malo izmijenjenu definiciju distribucijske funkcije λ, to jest $\lambda_f(s) = \mu\{x \in M : |f(x)| \geq s\}$.

Teorem 15 *Calderón-Zygmundov operator je ograničen s* $L^1(\mathbb{R})$ *u* $L^{1\infty}(\mathbb{R})$*.*

Dokaz: Želimo ocijeniti $\lambda_{Tf}(\alpha)$. Napravimo prvo Calderón-Zygmund dekompoziciju za funkciju $|f|$ i α, i definirajmo funkcije g i b

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in G \\ |Q_k|^{-1} \int_{Q_k} f(y)dy & , x \in Int(Q_k) \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} 0 & , x \in G \\ f(x) - |Q_k|^{-1} \int_{Q_k} f(y)dy & , x \in Int(Q_k) \end{cases}.$$

Stoga vrijedi $f(x) = g(x) + b(x)(ss)$ odnosno $Tf = Tg + Tb$. Slijedi dakle da je $|Tf(x)| \geq \alpha$ moguće samo ako je $|Tg(x)| \geq \frac{\alpha}{2}$ ili $|Tb(x)| \geq \frac{\alpha}{2}$. Tada je

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \lambda_{Tg}\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) + \lambda_{Tb}\Big(\frac{\alpha}{2}\Big). \tag{23}$$

Tvrdnja će dakle biti pokazana ako su oba člana s desne strane jednadžbe (23) ograničena s $\frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1}$.

Iz činjenice da je T ograničen operator na L^2 znamo da je

$$(\frac{\alpha}{2})^2 \lambda_{Tg}(\frac{\alpha}{2}) \leq \int_{\{x\in\mathbb{R}:|Tg(x)|\geq\frac{\alpha}{2}\}} |Tg(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |Tg(x)|^2 = \|Tg\|_{L^2}^2 \leq C\|g\|_{L^2}^2. \tag{24}$$

Vrijedi i slijedeća nejednakost, gdje je u drugom retku korištena formula (22)

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^2}^2 &= \int_G |g(x)|^2 dx + \int_B |g(x)|^2 dx \\
&\leq \alpha \int_G |f(x)| dx + \sum_k |Q_k| \Big| \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(y) dy \Big|^2 \\
&\leq \alpha \int_G |f(x)| dx + \sum_k 2\alpha \int_{Q_k} |f(y)| dy \\
&\leq 2\alpha \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 2\alpha \|f\|_{L^1},
\end{aligned}$$

koja zajedno s nejednakosti (24) daje

$$\lambda_{Tg}\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) \leq \frac{8}{\alpha} C \|f\|_{L^1}. \tag{25}$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirajmo intervale Q_k^* tako da imaju isto središte kao i Q_k i dvostruko veću duljinu, to jest $Q_k = [y_k - R_k, y_k + R_k]$ i $Q_k^* = [y_k - 2R_k, y_k + 2R_k]$. Definirajmo nadalje i skupove $B^* = \cup_k Q_k^*$ i $G^* = \mathbb{R} \setminus B^*$, tako da imamo

$$|B^*| \leq \sum_k |Q_k^*| = 2 \sum_k |Q_k| \leq \frac{2}{\alpha} \sum_k \int_{Q_k} |f(x)| dx \leq \frac{2}{\alpha} \|f\|_{L^1},$$

odnosno da vrijedi

$$|\{x \in B^* : |Tb(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}| \leq |B^*| \leq \frac{2}{\alpha} \|f\|_{L^1}. \tag{26}$$

Preostaje nam ocijeniti član $|\{x \in G^* : |Tb(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}|$:

$$\frac{\alpha}{2} \Big| \{x \in G^* : |Tb(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \Big| \leq \int_{\{x \in G^* : |Tb(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}} |Tb(x)| dx \leq \int_{G^*} |Tb(x)| dx. \tag{27}$$

Kako bismo ocijenili zadnji integral, moramo razdvojiti različite doprinose funkciji b. Definirajmo b_k sa

$$b_k(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin Q_k \\ f(x) - |Q_k|^{-1} \int f(y) dy & , x \in Int(Q_k). \end{cases}$$

Tada je $b(x) = \sum_k b_k(x)(ss)$, zato što se Q_k ne preklapaju. Odmah slijedi $Tb = \sum_k Tb_k$ i

$$\begin{aligned}
\int_{G^*} |Tb(x)|dx &\leq \sum_k \int_{G^*} |Tb_k(x)|dx \leq \sum_k \int_{\mathbb{R}\setminus Q_k^*} |Tb_k(x)|dx \\
&= \sum_k \int_{\mathbb{R}\setminus Q_k^*} \Big| \int_{Q_k} K(x,y)b_k(y)dy \Big| dx \\
&= \sum_k \int_{\mathbb{R}\setminus Q_k^*} \Big| \int_{Q_k} [K(x,y) - K(x,y_k)]b_k(y)dy \Big| dx \\
&\leq \sum_k \int_{\mathbb{R}\setminus Q_k^*} \int_{Q_k} |K(x,y) - K(x,y_k)||b_k(y)|dydx,
\end{aligned} \tag{28}$$

gdje smo u predzadnjem retku slobodno mogli dodati član $K(x, y_k)$, jer je $y_k \in Q_k$ i $\int_{Q_k} b_k(y)dy = 0$.

Razliku $K(x,y)-K(x,y_k)$ možemo ocijeniti koristeći ogradu na parcijalnu derivaciju $\partial_2 K$ funkcije K s obzirom na drugu varijablu i zamjenu varijabli $x = y_k + R_k u, y = y_k + R_k v, |u| > 2, |v| \leq 1$ u trećem retku računa:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}\setminus Q_k^*} |K(x,y) - K(x,y_k)|dx \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{R}\setminus Q_k^*} \int_0^1 |\partial_2 K(x, y_k + t(y-y_k))||y-y_k|dtdx \\
&\quad \leq \int_{|x-y_k|\geq 2R_k} \int_0^1 C|y-y_k||(x-y_k) - t(y-y_k)|^{-2}dtdx \\
&\quad = R_k^2|v| \int_{|u|>2} \int_0^1 \frac{C}{R_k^2|u-tv|^2}dtdu \leq C'.
\end{aligned}$$

Dobivena konstanta C' je neovisna o k, pa dobivena ocjena zajedno s nejednakosti (28) daje sljedeću nejednakost:

$$\begin{aligned}
\int_{G^*} |Tb(x)|dx &\leq C' \sum_k \int_{Q_k} |b_k(y)|dy \\
&\leq C' \sum_k \int_{Q_k} \Big[|f(y)| + \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(x)|dx \Big] dy \\
&\leq 2C' \sum_k \int_{Q_k} |f(y)|dy \leq 2C' \|f\|_{L^1},
\end{aligned}$$

koja zajedno s nejednakostima (25), (26) i (27) dokazuje teorem. ■

Teorem 16 *Calderón-Zygmundov operator je ograničen s $L^p(\mathbb{R})$ u $L^p(\mathbb{R})$, za $p \in \langle 1, \infty \rangle$.*

Dokaz: U prethodnom teoremu smo pokazali da je T ograničen s L^1 u $L^{1,\infty}$, a preko Marcinkiewiczevog teorema T se proširuje do ograničenog operatora s L^p u L^p, za $1 < p \leq 2$. Želimo pokazati tvrdnju teorema i za $2 \leq p < \infty$, pa u tu svrhu koristimo adjungirani operator $\tilde{T}$ operatora T definiran sa

$$\int (\tilde{T}f)(x)\overline{g(x)}dx = \int f(x)\overline{(Tg)(x)}dx.$$

Adjungiranom operatoru je pridružena integralna jezgra $\tilde{K}(x, y) = \overline{K(y, x)}$, koja također zadovoljava uvjete definicije Calderón-Zygmundovog operatora. Na $L^2(\mathbb{R})$, $\tilde{T}$ je adjungiran u L^2 smislu, pa slijedi da je ograničen, odnosno $\tilde{T}$ je Calderón-Zygmundov operator. Iz prethodnog teorema sada imamo da je $\tilde{T}$ ograničen s L^1 u $L^{1,\infty}$, a onda iz Marcinkiewiczevog teorema slijedi da je ograničen s L^p u L^p, za $1 < p \leq 2$. Budući, da je za $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, operator $\tilde{T} : L^p \to L^p$ adjungiran operatoru $T : L^q \to L^q$, vrijedi da je T ograničen za $2 \leq q < \infty$. ∎

Teorem 17 *Ako je ψ klase C^1,*

$$|\psi(x)|, |\psi'(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1-\epsilon} \tag{29}$$

i $\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x - k)$ je ortonormirana baza za $L^2(\mathbb{R})$, tada je $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ i bezuvjetna baza za svaki L^p prostor, $p \in \langle 1, \infty \rangle$.

Dokaz: Trebamo pokazati da ako je $f = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k} \in L^p$, da je onda i $\sum_{j,k} \omega_{j,k}c_{j,k}\psi_{j,k} \in L^p$ za svaki izbor $\omega_{j,k} = \pm 1$. Iz svojstava (29) funkcije ψ lako slijedi da je $\psi \in L^p$ za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $f = \sum_{j,k} c_{j,k}\psi_{j,k}$ povlači da je $c_{j,k} = \int f(x)\psi_{j,k}(x)dx$ zbog ortonormalnosti familije $(\psi_{j,k})$. Moramo dakle pokazati da je za svaki izbor $\omega_{j,k} = \pm 1$ operator T_ω definiran s

$$T_\omega f = \sum_{j,k} \omega_{j,k}(f, \psi_{j,k})\psi_{j,k}$$

ograničen operator s L^p u L^p. Nije teško vidjeti da je T_ω ograničen s L^2 u L^2, jer je

$$\|T_\omega f\|_{L^2}^2 = \sum_{j,k} |\omega_{j,k}(f, \psi_{j,k})|^2 = \sum_{j,k} |(f, \psi_{j,k})|^2 = \|f\|^2.$$

Sada će L^p ograničenost slijediti iz teorema 16, ako uspijemo pokazati da je T_ω Calderón-Zygmundov operator, a to slijedi iz slijedeće leme. ∎

Lema 12 *Odaberimo* $\omega_{j,k} = \pm 1$ *i definirajmo* $K(x,y) = \sum_{j,k} \omega_{j,k} \psi_{j,k}(x) \overline{\psi_{j,k}(y)}$. *Tada postoji* $C < \infty$ *tako da*

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|}$$

i

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x} K(x,y)\Big| + \Big|\frac{\partial}{\partial y} K(x,y)\Big| \leq \frac{C}{|x-y|^2}.$$

Dokaz: Najprije iz (29) vrijedi

$$\begin{aligned} |K(x,y)| &\leq \sum_{j,k} |\psi_{j,k}(x)||\psi_{j,k}(y)| \\ &\leq C \sum_{j,k} 2^{-j} (1 + |2^{-j}x - k|)^{-1-\epsilon} (1 + |2^{-j}y - k|)^{-1-\epsilon}. \end{aligned}$$

Odaberimo $j_0 \in \mathbb{Z}$ tako da je $2^{j_0} \leq |x-y| \leq 2^{j_0+1}$ i podijelimo sumu na dva dijela: $j < j_0$ i $j \geq j_0$. Možemo uočiti da je $\sum_k (1+|a-k|)^{-1-\epsilon}(1+|b-k|)^{-1-\epsilon}$ uniformno ograničeno za sve a, b, jer je

$$\begin{aligned} \sum_k (1+|a-k|)^{-1-\epsilon}(1+|b-k|)^{-1-\epsilon} &\leq \sum_k (1+|a-k|)^{-1-\epsilon} \\ &\leq \sup_{0 \leq a' \leq 1} \sum_k (1+|a'-k|)^{-1-\epsilon} \\ &\leq 2 \sum_{l=0}^{\infty} (1+l)^{-1-\epsilon} < \infty, \end{aligned}$$

i onda to iskoristimo da ocijenimo gornji dio sume:

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k 2^{-j} (1 + |2^{-j}x - k|)^{-1-\epsilon} (1 + |2^{-j}y - k|)^{-1-\epsilon} &\leq C \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \\ &\leq C 2^{j_0+1} \\ &\leq \frac{4C}{|x-y|}. \end{aligned}$$

Za donji dio sume vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=-\infty}^{j_0-1} 2^{-j} \sum_k [(1 + |2^{-j}x - k|)(1 + |2^{-j}y - k|)]^{-1-\epsilon} \\ &= \sum_{j=-j_0+1}^{\infty} 2^{j} \sum_k [(1 + |2^{j}x - k|)(1 + |2^{j}y - k|)]^{-1-\epsilon} \\ &\leq 4^{1-\epsilon} \sum_{j=-j_0+1}^{\infty} 2^{j} \sum_k [(2 + |2^{j}x - k|)(2 + |2^{j}y - k|)]^{-1-\epsilon}. \qquad (30) \end{aligned}$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{Z}$ tako da $k_0 \leq 2^j \frac{x+y}{2} \leq k_0 + 1$ i neka je $l = k - k_0$. Tada je

$$2 + |2^j x - k| = 2 + \left|2^j \frac{x-y}{2} - l + \left(2^j \frac{x+y}{2} - k_0\right)\right| \geq 1 + \left|2^j \frac{x-y}{2} - l\right|,$$

i na sličan način $2 + |2^j y - k| \geq 1 + |2^j \frac{y-x}{2} - l|$. Zadnje dvije nejednakosti nam uz $a = 2^j \frac{x-y}{2}$, gdje je bez smanjenja općenitosti $a \geq 0$ i za $m \in \mathbb{N}, m \leq a \leq m+1$ daju:

$$\begin{aligned}
&\sum_k [(2 + |2^j x - k|)(2 + |2^j y - k|)]^{-1-\epsilon} \\
&\leq \sum_l [(1 + |a + l|)(1 + |a - l|)]^{-1-\epsilon} \\
&\leq \sum_{l=-\infty}^{-m-1} [(1 + (m + |l|))(1 + (|l| - m - 1))]^{-1-\epsilon} \\
&\quad + \sum_{l=-m}^{m} [(1 + (m - l))(1 + (m + l))]^{-1-\epsilon} \\
&\quad + \sum_{l=m+1}^{\infty} [(1 + (l - m - 1))(1 + (l + m))]^{-1-\epsilon} \\
&\leq 2 \sum_{l=0}^{m} [1 + (m - l)]^{-1-\epsilon} (1 + m)^{-1-\epsilon} \\
&\quad + 2 \sum_{l=m+1}^{\infty} [1 + (l - m - 1)]^{-1-\epsilon} (1 + 2m)^{-1-\epsilon} \\
&\leq C(1 + |a|)^{-1-\epsilon}.
\end{aligned}$$

Dobivena nejednakost uz $|x - y| \leq 2^{j_0+1}$ daje da je desna strana nejednakosti (30) manja ili jednaka:

$$\begin{aligned}
C \sum_{j=-j_0+1}^{\infty} 2^j \left(1 + 2^j \left|\frac{x-y}{2}\right|\right)^{-1-\epsilon} &\leq C \sum_{j'=1}^{\infty} 2^{j'-j_0} (1 + 2^{j'-j_0} \frac{1}{2} 2^{j_0})^{-1-\epsilon} \\
&\leq C 2^{-j_0} \sum_{j'=1}^{\infty} 2^{j'} (1 + 2^{j'-1})^{-1-\epsilon} \\
&\leq C' 2^{-j_0} \leq 2C' |x - y|^{-1},
\end{aligned}$$

čime je dokazano $|K(x, y)| \leq C|x - y|^{-1}$.

Koristeći istu tehniku iz

$$\begin{aligned} |\partial_x K(x,y)| &\leq \sum_{j,k} 2^{-j}|\psi'(2^{-j}x-k)||\psi(2^{-j}y-k)| \\ &\leq C\sum_{j,k} 2^{-2j}[(1+|2^{-j}x-k|)(1+|2^{-j}y-k|)]^{-1-\epsilon} \end{aligned}$$

lako dobivamo $|\partial_x K(x,y)| \leq C|x-y|^{-2}$, i na sličan način $|\partial_y K(x,y)| \leq C|x-y|^{-2}$. Kada zbrojimo te dvije nejednakosti imamo traženu tvrdnju. ■

3.5 Karakterizacija funkcijskih prostora preko valića

Budući da $\psi_{j,k}$ tvori bezuvjetnu bazu za $L^p(\mathbb{R})$ to postoji karakterizacija za funkcije $f \in L^p(\mathbb{R})$ koja koristi samo apsolutne vrijednosti koeficijenata iz rastava funkcije u našoj bazi. Točnije, za $1 < p < \infty$ imamo

$$\begin{aligned} f \in L^p(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \Big[\sum_{j,k} |(f,\psi_{j,k})|^2|\psi_{j,k}(x)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \Big[\sum_{j,k} |(f,\psi_{j,k})|^2 2^{-j}\chi_{[2^j k, 2^j(k+1)]}(x)\Big]^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Za dokaz tih ekvivalencija vidi Meyer [2]. Na sličan način možemo dobiti karakterizacije i za druge funkcijske prostore.
Soboljevljevi prostori $H^s(\mathbb{R})$ su primjer gdje imamo potpunu karakterizaciju:

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \lambda^s \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Njihova karakterizacija je tada

$$f \in H^s(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{j,k} |(f,\psi_{j,k})|^2(1+2^{-2js}) < \infty.$$

Drugi primjer koji ćemo ovdje obraditi su Hölderovi prostori $C^s(\mathbb{R})$, a definirat ćemo ih na sljedeći način. Za $s \in \langle 0,1\rangle$ neka je

$$C^s(\mathbb{R}) = \Big\{f \in L^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x,h} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^s} < \infty\Big\},$$

a za $s = n + s', s' \in \langle 0,1\rangle, n \in \mathbb{N}$ neka je

$$C^s(\mathbb{R}) = \Big\{f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R}) : \frac{d^n}{dx^n} f \in C^{s'}\Big\}.$$

U slučaju da je s prirodan broj nećemo imati klasične C^n prostore funkcija koje su n puta neprekidno diferencijabilne, niti Lipshitzove prostore, već malo veće prostore. Umjesto prostora C^1 imamo prostor Λ_* kojeg ćemo zvati Zygmundova klasa, a definiran je kao

$$\Lambda_* = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}) : \sup_{x,h} \frac{|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|}{|h|} < \infty \right\},$$

dok umjesto prostora C^n imamo prostore

$$\Lambda_*^n = \{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^{n-1}(\mathbb{R}) : \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f \in \Lambda_* \}.$$

Za Hölderove prostore imamo sljedeću karakterizaciju: Funkcija $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ je u prostoru $C^s(\mathbb{R})$(za $s \notin \mathbb{N}$) ili u prostoru Λ_*^n(za $s = n \in \mathbb{N}$) ako i samo ako postoji $C < \infty$ tako da

$$\begin{aligned} |(f, \phi_{0,k})| &\leq C, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ |(f, \psi_{-j,k})| &\leq C 2^{-j(s+\frac{1}{2})}, \quad j \geq 0, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{31}$$

Ovdje smo implicitno pretpostavili da je $\psi \in C^r$, gdje je $r > s$, dok su uvjeti (31) karakterizirali globalnu regularnost. Za karakterizaciju lokalne regularnosti ćemo se poslužiti teoremom iz Jafard [3]. Radi jednostavnosti mi ćemo iskazati teorem za slučaj kada ψ ima kompaktan nosač i kada je klase C^1.

Teorem 18 *Ako je funkcija f Hölder neprekinuta u x_0 s eksponentom $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, odnosno*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha, \tag{32}$$

tada je[1]

$$\max_k [|(f, \psi_{-j,k})| d(x_0, supp\,(\psi_{-j,k}))^{-\alpha}] = O(2^{-(\frac{1}{2}+\alpha)j}) \tag{33}$$

za $j \to \infty$. Obratno, ako znamo da je $f \in C^\epsilon$ za neki $\epsilon > 0$ i da vrijedi uvjet (33), tada je

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha \log \frac{2}{|x - x_0|}. \tag{34}$$

U teoremu nemamo ekvivalenciju uvjeta (33) i (32). Ocjena (34) je optimalna kao i uvjet $f \in C^\epsilon$. Ako je funkcija f samo neprekidna ili ako je izostavljen član sa logaritmom u (34) tada postoje kontraprimjeri, koji se mogu naći

[1] Ako $a \to 0$(ili ∞), tada sa $O(a)$ označavamo vrijednost koja je ograničena sa Ca, gdje je C konstanta.

u [3]. Uzrok neekvivalencije uvjeta (32) i (33) može biti postojanje manje regularne točke blizu točke x_0 ili jake oscilacije funkcije f blizu točke x_0. Za primjere vidi [10]. Ako malo promijenimo uvjet (33) tada možemo zaobići navedene probleme, sa sljedećim teoremom u kojem ćemo opet imat funkciju $\psi \in C^1$ s kompaktnim nosačem.

Teorem 19 *Definirajmo za $\epsilon > 0$*

$$S(x_0, j; \epsilon) = \{k \in \mathbb{Z} : \mathit{supp}\,(\psi_{j,k}) \cap [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \neq \emptyset\}.$$

Ako je za neki $\epsilon > 0$ i $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$

$$\max_{k \in S(x_0, -j; \epsilon)} |(f, \psi_{-j,k})| = O(2^{-j(\frac{1}{2}+\alpha)}), \tag{35}$$

tada je funkcija f Hölder neprekinuta u x_0 s eksponentom α.

Dokaz: Odaberimo bilo koji $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$. Budući da bilo koji od uvjeta $\psi_{j,k}(x) \neq 0$ i $\psi_{j,k}(x_0) \neq$ povlači da je $k \in S(x_0, j; \epsilon)$, imamo sljedeće

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \sum_{j,k} (f, \psi_{j,k})[\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)] \\ &= \sum_j \sum_{k \in S(x_0, j; \epsilon)} (f, \psi_{j,k})[\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)]. \end{aligned}$$

Iz pretpostavke (35) slijedi da je

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sum_j C_1 2^{j(\frac{1}{2}+\alpha)} \sum_{k \in S(x_0, j; \epsilon)} |\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)|.$$

Kako ψ ima kompaktan nosač znamo da broj k-ova za koje je $\psi_{j,k}(x) \neq 0$ ili $\psi_{j,k}(x_0) \neq 0$, uniformno ograničen po j sa $2 \operatorname{supp} \psi + 1$. Ta tvrdnja ima za posljedicu da je

$$\begin{aligned} \sum_{k \in S(x_0, j; \epsilon)} |\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)| &\leq C_2 \max_k |\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)| \\ &\leq C_2 2^{-\frac{j}{2}} \max_k |\psi(2^{-j}x - k) - \psi(2^{-j}x_0 - k)|. \end{aligned}$$

Iz toga što je ψ ograničena i klase C^1 imamo

$$|\psi(2^{-j}x - k) - \psi(2^{-j}x_0 - k)| \leq C_3 \min(1, 2^{-j}|x - x_0|).$$

Odaberimo sada j_0 tako da je $2^{j_0} \leq |x - x_0| \leq 2^{j_0+1}$. Tada je

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq C_1 C_2 C_3 [\sum_{j=-\infty}^{j_0} 2^{\alpha j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{\alpha j - j} |x - x_0|] \\ &\leq C_4 [2^{\alpha j_0} + 2^{(\alpha-1) j_0} |x - x_0|] \leq C_5 |x - x_0|^{\alpha}, \end{aligned}$$

čime je pokazan teorem. ■

Napomenimo još da postoje slični teoremi i za prostore C^{α}, gdje je $\alpha > 1$. Nadalje, ako je $\alpha = 1$(ili općenitije $\alpha \in \mathbb{N}$) tada zadnji korak prethodnog teorema propada, jer drugi red ne konvergira. Možemo izbjeći divergenciju ako upotrijebimo ocjenu $|(f, \psi_{j,k})| \leq C$ za $j \geq 0$. Kraj računa će izgledati ovako:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq C_1 C_2 C_3 \Big[\sum_{j=-\infty}^{j_0} 2^{\alpha_j} + \sum_{j=j_0}^{0} 2^{\alpha j - j} |x - x_0| + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{3j}{2}} |x - x_0| \Big] \\ &\leq C_4 [2^{\alpha j_0} + |j_0| |x - x_0| + \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}} - 1} |x - x_0|] \\ &\leq C_5 |x - x_0| |\ln |x - x_0||. \end{aligned}$$

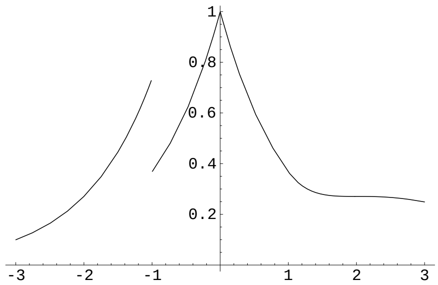
To je razlog zašto moramo biti pažljiviji kad imamo $\alpha \in \mathbb{N}$ i zbog čega uvodimo Zygmundovu klasu.

U ostatku ovog poglavlja ćemo ilustrirati teorem na primjeru, gdje ćemo vidjeti da katkad trebamo testirati za velike j kako bismo dobili zadovoljavajući rezultat. Funkcija koju ćemo proučavati je sljedeća:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-|x-a|} & x \leq a - 1 \\ e^{-|x-a|} & a - 1 \leq x \leq a + 1 \\ e^{-(x-a)}[(x - a - 1)^2 + 1] & x \geq a + 1. \end{cases}$$

Graf funkcije f je prikazan na slici 4, uz koeficijent $a = 0$. Funkcija f ima Hölderove eksponente $0, 1, 2$ u točkama $x = a - 1, a, a + 1$ tim redosljedom, dok je na ostatku domene klase C^{∞}.

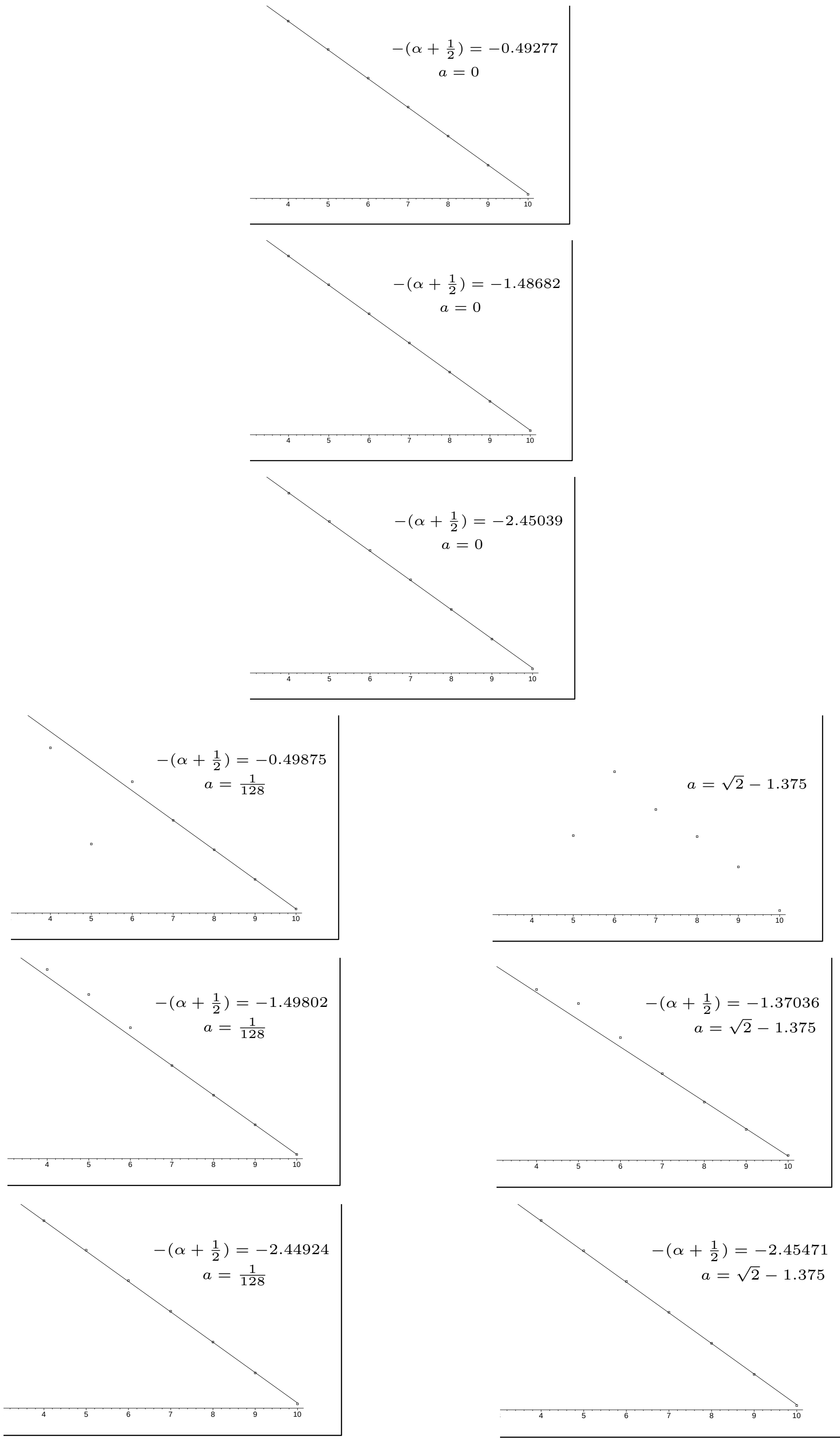
Program kojim ćemo implementirati naše rješenje će računati A_j malo drugačije definirane, to jest $A_j = \max\{|(f, \psi_{-j,k})| : x_0 \in \operatorname{supp}(\psi_{-j,k})\}$. Također će crtati točke $(j, \frac{\log A_j}{\log 2})$ za $j = 3, ..., 10$. Tako dobivene točke bi trebale ležati na istom pravcu, pa ćemo taj pravac aproksimirati metodom najmanjih kvadrata. Iz tako dobivenog nagiba pravca, možemo izračunati Hölderov eksponent α u točki x. Ako je $a = 0$ tada dobivene točke leže na istom pravcu s prilično velikom točnosti. Koeficijenti nagiba tih pravaca će biti približno $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, ovisno o točki u kojoj se računa. Razvoj u ortonormiranoj



Slika 4: Funkcija je klase C^∞ osim u točkama $x = -1, 0, 1$, gdje funkcije f, f', f'' tim redosljedom imaju prekide.

bazi valića nije invarijantan na translacije, pa dijadski razlomci, a pogotovo 0, igraju važnu ulogu u odnosu na dijadsku mrežu $\{2^{-j}k : j, k \in \mathbb{Z}\}$ centara naših valića. Ilustrirat ćemo to odabirom različitih vrijednosti parametra a. Za $a = \frac{1}{128}$ imamo drugačije vrijednosti A_j, ali su još uvijek dobro poredani na pravcu i s dobrom aproksimacijom eksponenta α. Odabirom koeficijenta a tako da je iracionalan broj, dobivamo najlošije rezultate. Sve je to pokazano na slici 5, za točke $x_0 = a - 1, a, a + 1$ i koeficijente $a = 0, \frac{1}{128}, \sqrt{2} - \frac{11}{8}$. Za $a = 0$ je pogreška aproksimacije koeficijenta $\alpha + \frac{1}{2}$ u sve tri točke manja od $1,98\%$. Za $a = \frac{1}{128}$ prve 4 točke, ne leže baš najbolje na pravcu. Metodu najmanjih kvadrata smo stoga radili samo kroz zadnje 4 točke, i tako dobivene aproksimacije su unutar $2,03\%$, dok bi inače bile puno veće. Za odabir $a = \sqrt{2} - \frac{11}{8}$ ne može se vidjeti poravnanje točaka u točki prekida $a - 1$. U njoj bismo trebali računati za drugi raspon j-ova. Uz isti a, ali za točku $a-1$, metoda najmanjih kvadarata za zadnje 4 točke daje aprosimaciju unutar $8,64\%$. Moguća je i još bolja aprokismacija, ali tada bismo izbacili i točku $j = 10$. U $x_0 = a + 1$, gdje je funkcija f' Lipshitzova aproksimacija je unutar $1,81\%$. Sve to ilustrira činjenicu da je za određivanje lokalne regularnosti funkcije puno korisnije koristiti preobilne familije valića, jer je tu neinvarijantnost na translacije puno manje izražena, ili je uopće nema kao na primjer kod neprebrojivih familija (vidi [9] i [10]).

Program kojim sam računao tražene koeficijente je napisan u Maple 7.0. Samu konstrukciju Daubechiesovog valića nisam izvodio, već sam se poslužio gotovim paketom koji se može naći na web stranici `http://www.mapleapps.com/categories/engineering/engmathematics/worksheets/`. Kod programa se nalazi u dodatku A.



Slika 5: Grafovi ocjena Hölderovih koeficijenata funkcije sa slike 4 u točkama $a-1$(gornji), a(srednji), $a+1$(donji). Za različite vrijednosti koeficijenta a.

3.6 Valići za $L^1([0,1])$

Budući da L^1 prostori nemaju bezuvjetne baze, niti valići je ne mogu tvoriti. Međutim, u ovom poglavlju ćemo ipak konstruirati bazu koja će u nekim elementima biti bolja od Fourierove.

Prvo ćemo uvesti *periodizirane valiće.* Uz zadanu višerezolucijsku analizu zajedno sa skalirajućom funkcijom ϕ i valićem ψ koji imaju dobar pad (recimo $|\phi(x)|, |\psi(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$) možemo definirati *periodizirane* valiće s

$$\phi_{j,k}^{per}(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi_{j,k}(x+l), \quad \psi_{j,k}^{per}(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi_{j,k}(x+l),$$

i pripadne prostore s

$$V_j^{per} = \overline{Span\{\phi_{j,k}^{per} : k \in \mathbb{Z}\}}, \quad W_j^{per} = \overline{Span\{\psi_{j,k}^{per} : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Kako $\phi(\cdot - k)$ čini ortonormiranu bazu vrijedi

$$\sum_n c_{2n} = 1 = \sum_n c_{2n+1}, \tag{36}$$

i $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$, dok iz leme 11 vidimo da je $\sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi(x+l) = C$, a to nam dalje daje

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \sum_l \int_l^{l+1} \phi(x)dx = \sum_l \int_0^1 \phi(x+l)dx \\ &= \int_0^1 \sum_l \phi(x+l)dx = \int_0^1 Cdx = C, \end{aligned}$$

odnosno $\sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi(x+l) = 1$. Nadalje, slijedi da za $j \geq 0$ je $\phi_{j,k}^{per}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}x - k + 2^{-j}l) = 2^{\frac{j}{2}}$, odnosno prostori V_j^{per} su identični jednodimenzionalni prostori koji sadrže samo konstantne funkcije. Također, pokažimo sljedeće uz zamjenu varijabli $k = l - n, m = -n+1$ i upotrebu identiteta $\sum h_{2m} = \sum h_{2m+1}$ (kojeg imamo iz uvjeta (36) i toga što je $h_n = \sqrt{2}c_n$):

$$\begin{aligned} \sum_l \psi(x + \frac{l}{2}) &= \sum_l \sum_n (-1)^n h_{-n+1} \phi(2x + l - n) \\ &= \sum_{k,m} (-1)^{m+1} h_m \phi(2x+k) = 0. \end{aligned}$$

Stoga imamo $W_j^{per} = \{0\}$ za $j \leq 0$. Očito je i da je $V_j^{per}, W_j^{per} \subseteq V_{j-1}^{per}$, što je naslijeđeno iz neperiodiziranih prostora. Štoviše, W_j^{per} je ortogonalan na

V_j^{per}, jer je

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_{j,k}^{per}(x)\phi_{j,k'}^{per}(x)dx &= \sum_{l,l'\in\mathbb{Z}} 2^{-j}\int_0^1 \psi(2^{-j}x+2^{-j}l-k)\overline{\phi(2^{-j}x+2^{-j}l'-k')}dx \\ &= \sum_{l,l'\in\mathbb{Z}} 2^{|j|}\int_{l'}^{l'+1} \psi(2^{|j|}y+2^{|j|}(l-l')-k)\overline{\phi(2^{|j|}y-k')}dy \\ &= \sum_{r\in\mathbb{Z}}(\psi_{j,k+2^{|j|}r},\phi_{j,k'}) = 0,\end{aligned}$$

pa kao i u neperiodiziranom slučaju imamo $V_{j-1}^{per} = V_j^{per}\bigoplus W_j^{per}$. Prostori V_j^{per} i W_j^{per} su konačno dimenzionalni, zato što je $\phi_{j,k+m2^{|j|}}^{per} = \phi_{j,k}^{per}$ za $m\in\mathbb{Z}$ i slično za ψ^{per}. Oba prostora su razapeta sa $2^{|j|}$ funkcija, i te funkcije su ortonormirane. Pokažimo to za W_j^{per}. Neka su k i k' takvi da $0\le k,k'\le 2^{|j|}-1$, tada je

$$(\psi_{j,k}^{per},\psi_{j,k'}^{per}) = \sum_{r\in\mathbb{Z}}(\psi_{j,k+2^{|j|}r},\psi_{j,k'}) = \delta_{k,k'}.$$

Budući da je $\overline{\cup_{-j\in\mathbb{N}}V_j^{per}} = L^2([0,1])$(što se vidi iz neperiodiziranog slučaja) očito je da funkcije iz $\{\phi_{0,0}^{per}\}\cup\{\psi_{j,k}^{per} : -j\in\mathbb{N}, k=0,\ldots,2^{|j|}-1\}$ tvore ortonormalnu bazu za $L^2([0,1])$. Prenumerirajmo tu bazu na sljedeći način:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 = \phi_{0,0}^{per}(x) \\ g_1(x) &= \psi_{0,0}^{per}(x) \\ g_2(x) &= \psi_{-1,0}^{per}(x) \\ g_3(x) &= \psi_{-1,1}^{per}(x) = \psi_{-1,0}^{per}(x-\frac{1}{2}) = g_2(x-\frac{1}{2}) \\ g_4(x) &= \psi_{-2,0}^{per}(x) \\ &\vdots \\ g_{2^j}(x) &= \psi_{-j,0}^{per}(x) \\ &\vdots \\ g_{2^j+k}(x) &= \psi_{-j,k}^{per}(x) = g_{2^j}(x-k2^{-j}) \text{ za } 0\le k\le 2^j-1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Teorem 20 *Ako je f neprekidna periodična funkcija s periodom 1, tada postoji niz (α_n) kompleksnih brojeva tako da pri $N\to\infty$*

$$\Big\| f - \sum_{n=0}^{N}\alpha_n g_n\Big\|_{L^\infty} \to 0.$$

Dokaz: S obzirom da je $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormirana baza, nužno je $\alpha_n = (f, g_n)$. Definirajmo S_N kao

$$S_N f = \sum_{n=0}^{N-1} (f, g_n) g_n.$$

Prvo ćemo pokazati da je S_N uniformno ograničen, to jest

$$\|S_N f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}, \tag{37}$$

gdje je konstanta C neovisna o f i N.
Ako je $N = 2^j$, tada je $S_{2^j} = Proj_{V_{-j}^{per}}$, a otuda je

$$(S_{2^j} f)(x) = \sum_{k=0}^{2^{|j|}-1} (f, \phi_{-j,k}^{per}) \phi_{-j,k}^{per}(x) = \int_0^1 K_j(x,y) f(y) dy,$$

gdje je $K_j(x,y) = \sum_{k=0}^{2^{|j|}-1} \phi_{-j,k}^{per}(x) \overline{\phi_{-j,k}^{per}(y)}$. Na kraju imamo

$$\|S_{2^j} f\|_{L^\infty} \leq \Big[\sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K_j(x,y)| dy \Big] \|f\|_{L^\infty}.$$

Preostaje nam, dakle, ocijeniti sljedeće

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K_j(x,y)| dy &\leq \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \sum_{k=0}^{2^{|j|}-1} \sum_{l,l' \in \mathbb{Z}} |\phi_{-j,k}(x+l)| |\phi_{-j,k}(y+l')| \\
&\leq \sup_x \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^{|j|}-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^j |\phi(2^j(x+l)-k)| |\phi(2^j y - k)| \\
&\leq C \sup_{x'} \sum_{k=0}^{2^{|j|}-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\phi(x' + 2^j l - k)| \\
&\leq C \sup_{x'} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\phi(x'+m)|,
\end{aligned}$$

a to je uniformno ograničeno, jer je $|\phi(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$, što je bio uvjet da bismo uopće imali bazu $\{g_{2^j+k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$. Time smo pokazali nejednakost (37) za $N = 2^j$.

Promatrajmo slučaj kada je $N = 2^j + m, 0 \leq m \leq 2^j - 1$. Imamo:

$$(S_N f)(x) = (S_{2^j} f)(x) + \sum_{k=0}^{m} (f, \psi_{-j,k}^{per}) \psi_{-j,k}^{per}(x).$$

Na sličan način kao i za prethodnu ocjenu možemo pokazati da je L^∞ norma druge sume također ograničena sa $C\|f\|_{L^\infty}$, i to uniformno po j, čime smo pokazali da nejednakost (37) vrijedi za svaki N.

Uzmimo sada $f \in E = \cup_{j\in -\mathbb{N}} V_j^{per}$. Tada je $f \in V_{-J}^{per}$ za neki $J > 0$, tako da $(f, \psi_{-j',k}^{per}) = 0$ za $j' \geq J$, odnosno $(f, g_l) = 0$ za $l \geq 2^J$. I sve to sa posljedicom da je $f = S_N f$ ako je $N \geq 2^J$, pa zato imamo da tvrdnja teorema vrijedi za funkcije iz prostora E. Kako je E gust u prostoru[2] $C(\mathbb{T})$ neprekidnih periodičkih funkcija sa normom $\|\ \ \|_\infty$ (za dokaz vidi [2]), imamo dokazan teorem. ■

Teorem 21 *Ako je $f \in L^1([0,1])$, tada je*

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} (f, g_n) g_n \right\|_{L^1} \to 0, \ \textit{kad } N \to \infty.$$

Dokaz: Uočimo najprije da je $L^1([0,1])$ sadržan u dualu prostora $C(\mathbb{T})$, odnosno

$$\|f\|_{L^1} = \sup\{|(f,g)| : g \text{ je neprekidna s periodom 1 i } \|g\|_{L^\infty} \leq 1\}.$$

To odmah dovodi do

$$\begin{aligned} \|S_N f\|_{L^1} &= \sup\{|(S_N f, g)| : g \text{ je neprekidna sa periodom 1 i } \|g\|_{L^\infty} \leq 1\} \\ &= \sup\{|(f, S_N g)| : g \text{ je neprekidna sa periodom 1 i } \|g\|_{L^\infty} \leq 1\} \\ &\leq C\|f\|_{L^1}, \end{aligned} \tag{38}$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili ocjenu (37) i Cauchy-evu nejednakost $|(f,h)| \leq \|f\|_{L^1}\|h\|_{L^\infty}$. Kako je prostor $E = \cup_{-j\in\mathbb{N}} V_j^{per}$ također gust i u $L^1([0,1])$, što vrijedi, jer je $L^2([0,1])$ gust u $L^1([0,1])$. Imamo završetak dokaza sličan, kao i u prethodnom teoremu. ■

Zamijetimo sada i razliku ovih teorema i sličnih teorema kod Fourierovih redova. Naime, ovdje nam je bila dovoljna samo neprekidnost funkcije f i odmah smo dobili uniformnu konvergenciju, dok kod Fourierove analize je potrebno da je funkcija f klase C^1. Napomenimo još da je poredak funkcija g_n važan jer imamo Schauderovu bazu, a ne bezuvjetnu bazu.

[2] $\mathbb{T}$ je oznaka za jediničnu kružnicu.

A Maple program

```
> restart;
> libname:="c:/MapleLib", libname;
> with(D4wavelets); with(student);
> ip:= (f,g,a,b) -> evalf(simpson(f*g, t=a..b, 3072));
> psiD4:= t ->
> -(1+sqrt(3))/4*D4(2*t-1)+(3+sqrt(3))/4*D4(2*t)-(3-sqrt(3))
> /4*D4(2*t+1) + (1-sqrt(3))/4*D4(2*t+2);
> plot(psiD4(t), t=-2..3, axes=boxed);
> ff:= (t,a)-> piecewise
> (t<=a-1,2*exp(-abs(t-a)),a-1<=t and
> t<=a+1,exp(-abs(t-a)),t>=a+1,exp(-abs(t-a))*((t-a-1)^2+1));

> plot(ff(t,0),t=-3..3,axes=boxed);
> NpsiD4:=(j,k,t)->(2^(-j/2)*psiD4(2^(-j)*t-k));

> plot(NpsiD4(-3,1,t),t=-1..2,axes=boxed);
> aa:=0;x:=aa-1;A:=array(3..10);for j from
> 3 to 10 do A[j]:=0 end
> do;
> for j from 3 to 10 do for k from
> ceil((x)*2^(j)-2) to floor((x)*2^(j)+1) do
> A[j]:=max(abs(ip(ff(t,aa),NpsiD4(-j,k,t),2^(-j)*(k-1),
> 2^(-j)*(k+2))),A[j]); od; A[j]; od;
> b:=array(1..8);
> for f from 1 to 8 do b[f]:=log(A[f+2])/log(2.0);
> C:=array([[1,3],[1,4],[1,5],[1,6],[1,7],[1,8],[1,9],[1,10]]);
> with(linalg);tup:=array(1..2);
> tup:=leastsqrs(C, b);
> l:=(t)->tup[2]*t+tup[1];l(10);
> PLOT(POINTS([3,b[1]],[4,b[2]],[5,b[3]],[6,b[4]],[7,b[5]],
> [8,b[6]],[9,b[7]],[10,b[8]]),CURVES([[3,l(3)],
> [10,l(10)]]),AXESSTYLE(BOX));
```

Literatura

[1] Elias M. Stein, Guido Weiss: Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton, 1971.

[2] Yves Meyer: Ondelettes et Opérateurs, I: Ondelettes, II: Opérateurs de Calderón-Zygmund, III: Opérateurs multilinéaires, Herman, 1990.

[3] S. Jaffard: Exposants de Hölder en des points donnés et coéfficientes d'ondelettes, C. R. Acad. Sci. Paris 1989, 308, Série 1, pp. 79-81.

[4] Nenad Antonić, Marko Vrdoljak: Mjera i integral, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[5] Ingrid Daubechies: Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992.

[6] Gerald B. Folland: Real Analysis, Wiley, 1984.

[7] Paul L. Butzer, Hubert Berens: Semi-Groups of Operators and Approximation, Springer, 1967.

[8] Iva Franjić: Ulaganje Soboljevih prostora u Lorentzove, rukopis

[9] M. Holschneider, Ph. Tchamitchian: Régularité locale de la fonction "non-différentiable" de Riemann, pp.102-124 in Lemarié, 1990.

[10] S. Mallat, W. L. Hwang: Singularity detection and processing with wavelets, IEEE Trans. Inform. Theory, 38, pp. 617-643.,1992.