Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Neven Balenović

Globalna rješenja valnih jednadžbi

Diplomski rad

Zagreb, 1995.

Predgovor

U ovom Radu se proučavaju tri važne *valne* jednadžbe iz matematičke fizike; Schrödingerova, Klein-Gordonova, te klasična valna jednadžba. Tematski, Rad se sastoji iz dva dijela. U prvom se razvija *aparat* iz funkcionalne analize; Fourierova transformacija i teorija interpolacije Banachovih prostora (I. i II. poglavlje). Ovo se pak koristi u drugom dijelu, gdje se dokazuje egzistencija rješenja linearnih jednadžbi i odgovarajuće ocjene (III. i IV. poglavlje). Na kraju se daju neki teoremi egzistencije za nelinearne jednadžbe, kao smjernica mog daljnjeg proučavanja. Rezultati su numerirani po poglavljima, tako da npr. teorem II.3 ukazuje na teorem 3 iz drugog poglavlja.

Osobito mi je zadovoljstvo na ovom mjestu zahvaliti mom mentoru dr. sc. Nenadu Antoniću. Svojim živim i nadasve zanimljivim diskusijama pobudio je u meni interes za ovo područje matematike. Bez njegove velike pomoći ovaj Rad ne bi imao sadašnju razinu kvalitete. Ugodna mi je dužnost zahvaliti i apsolventici fizike, Ani Babac, na pomoći oko razjašnjenja nekih kvantnomehaničkih pojmova, vezanih uz Schrödingerovu i Klein-Gordonovu jednadžbu.

U Zagrebu, prosinca 1995.

Neven Balenović

Majci s ljubavlju

Sadržaj

I. Fourierova transformacija i distribucije

1. Uvod

Pri proučavanju kompleksnih funkcija definiranih na $\mathbf{R}^n$, $u : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$, osobito je pogodna notacija koju je uveo Laurent Schwartz. *Multiindeks* je n-torka cijelih brojeva, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}_0^n$, za koju definiramo *duljinu*

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

i *faktorijel*

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n! \,.$$

Na multiindeksima imamo parcijalan uređaj: $\alpha \leq \beta$ ako je $\alpha_1 \leq \beta_1, \ldots, \alpha_n \leq \beta_n$.

Za vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ i $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ definiramo potenciranje $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Općenito, polinom m-tog stupnja u varijablama $x_1, \ldots, x_n$ zapisujemo u obliku

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha \,,$$

pri čemu su c_α koeficijenti. Binomne koeficijente definiramo formulom:

$$\binom{\alpha}{\beta} := \begin{cases} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} & \text{za } \beta \leq \alpha \\ 0 & \text{inače} \,. \end{cases}$$

Multiindeksi su zgodni najviše zbog toga što uz njih uobičajene formule iz jedne dimenzije u istom obliku vrijede i u $\mathbf{R}^n$. Tako vrijedi npr. *Binomna formula*

$$(\forall\, \alpha \in \mathbf{N}_0^n)\, (\forall\, x, y \in \mathbf{R}^n) \quad (x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta} \,.$$

Za $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ i prirodan broj m vrijedi tzv. *multinomna formula*:

$$(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha \,.$$

Definirajmo derivaciju reda α s

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \,.$$

Često ćemo, umjesto gornje, koristiti sljedeću derivaciju:

(1) $$D_j := \frac{1}{2\pi i} \partial_j \,, \; D^\alpha := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|} \partial^\alpha \,.$$

Ovako definirana derivacija bit će osobito pogodna pri izučavanju Fourierove transformacije.

Prema Schwarzovu pravilu, ako je $|\alpha| \leq k$, za funkciju u klase C^k, $\partial^\alpha u$ je neprekinuta funkcija i derivacija ne ovisi o redoslijedu ako je $|\alpha| \leq k$. Lako se dokazuju sljedeće dobro poznate formule iz jednodimenzionalne analize:

Taylorova formula: *Ako je $u \in \mathrm{C}^k(\mathbf{R}^n;\mathbf{C})$, onda vrijedi*

$$(\forall\, x, y \in \mathbf{R}^n) \quad u(x+y) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{y^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha u(x) + \sum_{|\alpha|=k} k\frac{y^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)^{k-1}\partial^\alpha u(x+ty)\, dt \;.$$

Leibnitzova formula:

$$(\forall\, \alpha \in \mathbf{N}_0^n)\, (\forall\, u, v \in \mathrm{C}^{|\alpha|}(\mathbf{R}^n;\mathbf{C}))\; \partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v) \;.$$

Redovito ćemo koristiti sljedeću oznaku: Ako je φ funkcija definirana na $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}$, stavljamo $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Ova će pokrata biti vrlo korisna u *dualnim produktima*.

Na kraju ovog uvoda, dokažimo i jednu jednostavnu lemu koju ćemo koristiti u sljedećem odjeljku.

Lema 1. *Integrali*

$$\int_{\mathbf{R}^n} (1+|x|)^{-s}\, dx \qquad i \qquad \int_{\mathbf{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-s/2} dx$$

su konvergentni ako i samo ako je $s > n$. Posebno, $\int_{\mathbf{R}^n}\left(1+|x|^2\right)^{-n} dx \le \pi^n$.

Dokaz. Označimo s I_1 i I_2 redom gornje integrale. Za $s > 0$ i $x \in \mathbf{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}(1+|x|)^{-s} &= \left(1+2|x|+|x|^2\right)^{-s/2} \le \left(1+|x|^2\right)^{-s/2} \\ &\le \left(1+|x_1|^2\right)^{-s/2n}\left(1+|x_2|^2\right)^{-s/2n}\ldots\left(1+|x_n|^2\right)^{-s/2n} \quad ,\end{aligned}$$

pa se problem svodi na konvergenciju integrala $I = \int_{\mathbf{R}}\left(1+t^2\right)^{-s/2n} dt$, u jednoj dimenziji. Neposrednom integracijom zaključujemo da $s > n$ povlači njegovu konvergenciju, pa time i konvergenciju integrala I_2, jer očito vrijedi $I_2 \le I^n$. Kako je $I_1 \le I_2$, to $s > n$ povlači da i I_1 konvergira.

S druge pak strane, prijelazom u polarne koordinate zaključujemo da, ukoliko je $s < n$, integral I_1 (pa stoga i I_2) divergira. Posljednja je tvrdnja trivijalna.

Q.E.D.

2. Schwartzov prostor $\mathcal{S}$. Distribucije

Pretpostavimo da na vektorskom prostoru X umjesto jedne norme imamo čitavu familiju normi $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$, pri čemu je A neki skup indeksa. Željeli bismo na prirodan način definirati topologiju na X. Nameće se analogija s uobičajenim; reći ćemo da niz, odnosno mreža, (x_β) konvergira k x ukoliko

(2) $$\rho_\alpha(x_\beta - x) \longrightarrow 0 \text{ za svaki čvrsti } \alpha \in A \;.$$

Željeli bismo oslabiti gornju definiciju u smislu da oslabimo uvjete na familiju $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$. Podsjetimo se da je u normiranom prostoru uvjet $\|x\| = 0 \implies x = 0$ nužan da bi limesi bili jedinstveni, drugim riječima, da bi inducirana topologija bila Hausdorffova.

Pretpostavimo da je $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ familija funkcija koje zadovoljavaju sva svojstva norme, osim da je $x = 0$ čim je $\rho_\alpha(x) = 0$ za neki α. Umjesto toga pretpostavimo da je $x = 0$ samo ako je $\rho_\alpha(x) = 0$ za svaki α. Pokazuje se da su i u tom slučaju limesi jedinstveni u topologiji gdje je konvergencija opisana kao u (2).

Definicija. *Polunorma* na vektorskom prostoru X, nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva, je funkcija $\rho : X \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$ koja ima sljedeća svojstva

(i) $(\forall\, x, y \in X)\ \rho(x + y) \le \rho(x) + \rho(y)$

(ii) $(\forall\, x \in X)(\forall\, \lambda \in \Phi)\ \rho(\lambda x) \le |\lambda|\rho(x)$.

Kažemo da familija polunormi $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ *razlikuje točke* ukoliko vrijedi

(iii) $\rho_\alpha(x) = 0$ za svaki $\alpha \in A$ povlači $x = 0$.

Definicija. *Lokalno konveksan prostor* je kompleksan ili realan vektorski prostor X, zajedno s familijom polunormi $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ koja razlikuje točke. *Prirodna topologija* na lokalno konveksnom prostoru je najslabija topologija u kojoj su sve polunorme ρ_α neprekinute.

U toj su topologijiji operacije zbrajanja i množenja skalarom također neprekinute.

Pojam Cauchyjevog niza (Cauchyjeve mreže) prirodno se prenosi i na lokalno konveksne prostore. Kažemo da je niz (mreža) u lokalno konveksnom prostoru Cauchyjev(a) ukoliko za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $\alpha \in A$ postoji indeks niza (mreže) β_0 takav je $\rho_\alpha(x_\beta - x_\gamma) < \varepsilon$ čim je $\beta, \gamma > \beta_0$. Prostor X je *potpun* ako svaka njegova Cauchyjeva mreža konvergira.

Linearan operator među normiranim prostorima X i Y je neprekinut ako i samo ako je ograničen. Sličan rezultat vrijedi i u slučaju lokalno konveksnih prostora:

Propozicija 1. *Neka su X i Y lokalno konveksni prostori s familijama polunormi $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ i $(p_\beta)_{\beta\in B}$. Tada je linearno preslikavanje $T : X \longrightarrow Y$ neprekinuto ako i samo ako za svaki $\beta \in B$ postoje $n \in \mathbf{N}$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, te konstanta $C > 0$ tako da vrijedi*

$$p_\beta(Tx) \le C\left(\rho_{\alpha_1}(x) + \ldots + \rho_{\alpha_n}(x)\right) . \tag{3}$$

Ako je pak familija $(\rho_\alpha)_{\alpha\in A}$ usmjerena (drugim riječima, za svaki par indeksa $\alpha, \beta \in A$, postoji $\gamma \in A$ i $C > 0$, tako da vrijedi $\rho_\alpha(x) + \rho_\beta(x) \le C\rho_\gamma(x)$, za svaki $x \in X$), onda je linearno preslikavanje $T : X \longrightarrow Y$ neprekinuto ako i samo ako za svaki $\beta \in B$ postoji $\alpha \in A$ tako da vrijedi

$$p_\beta(Tx) \le C\rho_\alpha(x) . \tag{4}$$

∎

Lokalno konveksni prostori ne moraju biti metrizabilni; stoga je od interesa identificirati one koji jesu. Sljedeći teorem daje jednu karakterizaciju metrizabilnih prostora u klasi svih lokalno konveksnih topoloških vektorskih prostora ([R-S], str. 131):

Teorem 1. *Neka je X lokalno konveksan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) X je metrizabilan.

(b) 0 ima prebrojivu bazu okolina.

(c) Topologija na X je generirana nekom prebrojivom familijom polunormi. ∎

Definicija. Potpun metrizabilan lokalno konveksan topološki vektorski prostor naziva se *Fréchetov* prostor.

Cilj ovog odjeljka jest uvođenje jednog posebnog prostora funkcija, tzv. *brzo opadajućih funkcija* $\mathcal{S}$ i njegovog topološkog duala, *temperiranih distribucija*. Za ograničenu neprekinutu funkciju φ na $\mathbf{R}^n$ je $\|\varphi\|_{\mathrm{C}} := \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\varphi(x)|$. Definirajmo familije polunormi na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\alpha,\beta} &:= \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{\mathrm{C}} ,\\
\|\varphi\|_k &:= \sup_{|\alpha+\beta|\le k} \|\varphi\|_{\alpha,\beta} .
\end{aligned} \tag{5}
$$

Lako se vidi da je familija $(\|\cdot\|_k, k \in \mathbf{N}_0)$ zaista familija polunormi koja razlikuje točke. *Schwartzov prostor* $\mathcal{S}$ je prostor svih C^∞ funkcija φ za koje je $\|\varphi\|_k < \infty$, za svaki $k \in \mathbf{N}_0$. Prema teoremu 1, $\mathcal{S}$ je metrizabilan; na primjer, udaljenost možemo zadati s

$$
d(\varphi,\psi) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|\varphi-\psi\|_k}{1+\|\varphi-\psi\|_k} .
$$

Kako je $0 < a/(a+1) < 1$, za svaki $a > 0$, slijedi da za svaki par funkcija φ i ψ iz $\mathcal{S}$ gornji red apsolutno konvergira i suma mu je manja ili jednaka 1. Da je d zaista metrika slijedi iz činjenice da familija $\|\cdot\|_k$ razlikuje točke pa je tada $d(\varphi,\psi) = 0$ ekvivalentno s $\varphi = \psi$. Preostala svojstva metrike su očito zadovoljena, stoga je uz gornju razdaljinsku funkciju $\mathcal{S}$ ograničen metrički prostor.

Štoviše, prostor $\mathcal{S}$ je potpun; naime, vrijedi sljedeća

Propozicija 2. *Schwartzov prostor $\mathcal{S}$, zajedno s prirodnom topologijom danom s pomoću familije polunormi $(\|\cdot\|_k, k \in \mathbf{N}_0)$, je Fréchetov prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (f_m) Cauchyjev niz u svakoj polunormi $\|\cdot\|_k$. Tada je on Cauchyjev i u svakoj polunormi $\|\varphi\|_{\alpha,\beta}$, pa stoga $x^\alpha \partial^\beta f_m \longrightarrow g_{\alpha,\beta}$ uniformno kada $m \longrightarrow \infty$, budući da je $\mathrm{C}(\overline{\mathbf{R}^n})$ potpun. Dovoljno je dokazati da je $g := g_{0,0}$ C^∞ funkcija, te da je $g_{\alpha,\beta} = x^\alpha \partial^\beta g$, jer je tada $g \in \mathcal{S}$ i $\lim_m f_m = g$ u topologiji na $\mathcal{S}$. Dokažimo to u slučaju prve derivacije, u jednoj dimenziji (opći slučaj ide potpuno analogno). Znamo da za f_m vrijedi

$$
f_m(x) := f_m(0) + \int_0^x f_m'(t)\, dt .
$$

Budući da $f_m' \longrightarrow g_{0,1}$ uniformno, to za g vrijedi

$$
g(x) := g(0) + \int_0^x g_{0,1}(t)\, dt ,
$$

pa je g klase C^1 i vrijedi $g' = g_{0,1}$.

Q.E.D.

Prostor $\mathcal{S}$ je očito zatvoren na operacije deriviranja i množenja polinomom. Međutim, vrijedi i više: $\mathcal{S}$ je zatvoren i na množenje s C^∞ funkcijama najviše polinomijalnog rasta u beskonačnosti, koje označujemo s $\mathcal{O}$. Točnije, *skup* $\mathcal{O}$ definiramo na sljedeći način: $\varphi \in \mathcal{O} \subseteq \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ ako

$$
(\forall\, \alpha \in \mathbf{N}_0^n)(\exists\, C \in \mathbf{R}_0^+)(\exists\, N \in \mathbf{N})(\forall\, x \in \mathbf{R}^n) \quad |\partial^\alpha \varphi(x)| \le C(1+|x|^2)^N .
$$

Propozicija 3. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*
(a) neprekinutost deriviranja:

$$
(\forall\, \alpha \in \mathbf{N}_0^n)(\forall\, \varphi \in \mathcal{S})(\forall\, k \in \mathbf{N}_0)\ \|\partial^\alpha \varphi\|_k \le \|\varphi\|_{k+|\alpha|} .
$$

(b) neprekinutost množenja s $\psi \in \mathcal{O}$:

$$(\forall\, \psi \in \mathcal{O})(\forall\, k \in \mathbf{N}_0)(\exists\, C_k \in \mathbf{R}^+)(\exists\, N_k \in \mathbf{N})(\forall\, \varphi \in \mathcal{S})\ \|\psi\varphi\|_k \le C_k \|\varphi\|_{k+2N_k}\ .$$

Posebno, za $\psi(x) = x^\alpha$ vrijedi $\|x^\alpha \varphi\|_k \le 2^k \alpha! \|\varphi\|_{k+|\alpha|}$.

Dokaz. Jedina netrivijalna tvrdnja jest neprekinutost množenja funkcijom polinomijalnog rasta, drugim riječima, nejednakost u (b). Neka su $\psi \in \mathcal{O}$ i $\varphi \in \mathcal{S}$. Za multiindekse α i β, koristeći Leibnitzovu formulu, imamo sljedeće:

$$\|\psi\varphi\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha \partial^\beta(\psi\varphi)\|_{\mathrm{C}} \le \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} \|x^\alpha (\partial^\gamma \psi)(\partial^{\beta-\gamma}\varphi)\|_{\mathrm{C}}\ . \tag{6}$$

Ako vrijedi $|\alpha+\beta| \le k$ onda je i $|\gamma| \le k$, pa možemo odabrati konstantu $A_k > 0$ i $N_k \in \mathbf{N}_0$ tako da vrijedi ocjena

$$(\forall\, \gamma \le \beta) \quad |\partial^\gamma \psi| \le A_k \left(1 + |x|^2\right)^{N_k}\ .$$

Raspišemo li desnu stranu ove nejednakosti po binomnoj formuli, te uvrstimo u (6) i iskoristimo nejednakost mnogokuta za polunorme, dobijamo

$$\|\psi\varphi\|_{\alpha,\beta} \le A_k \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} \sum_{j=0}^{N_k} \binom{N_k}{j} \|x^\alpha |x|^{2j} (\partial^{\beta-\gamma}\varphi)\|_{\mathrm{C}}\ .$$

Iskoristimo li pak multinomnu formulu za $|x|^{2j} = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^j$ imamo

$$\|\psi\varphi\|_{\alpha,\beta} \le A_k \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} \sum_{j=0}^{N_k} \binom{N_k}{j} \sum_{|\kappa|=j} \frac{j!}{\kappa!} \|x^{\alpha+2\kappa} (\partial^{\beta-\gamma}\varphi)\|_{\mathrm{C}}\ .$$

Kako vrijedi $|\gamma| \le k$ i $|\kappa| \le N_k$, to je

$$\|x^{\alpha+2\kappa}(\partial^{\beta-\gamma}\varphi)\|_{\mathrm{C}} = \|\varphi\|_{\alpha+2\kappa,\beta-\gamma} \le \|\varphi\|_{k+2N_k}\ ,$$

pa slijedi tražena neprekinutost, uz konstantu $C_k = 2^k (n+1)^{N_k} A_k$.

Q.E.D.

Primjer 1.

(a) Promotrimo funkciju $\varphi_a(x) := e^{-a|x|^2}, a \in \mathbf{C}$. Lagano se dobije da za polinom $P_{\alpha,\beta}$ stupnja $|\alpha+\beta|$ vrijedi $\|\varphi_a\|_{P_{\alpha,\beta}} = \|P_{\alpha,\beta}\varphi_a\|_{\mathrm{C}}$. Odatle slijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a = 0 &\Longrightarrow \varphi_a \in \mathcal{O},\ \varphi_a \notin \mathcal{S}\ , \\ \operatorname{Re} a > 0 &\Longrightarrow \varphi_a \notin \mathcal{O},\ \varphi_a \in \mathcal{S}\ , \\ \operatorname{Re} a < 0 &\Longrightarrow \varphi_a \notin \mathcal{O},\ \varphi_a \notin \mathcal{S}\ . \end{aligned}$$

(b) Funkcija $\varphi_\xi(x) := e^{2\pi i x\cdot\xi}, \xi \in \mathbf{R}^n$ očito nije iz $\mathcal{S}$, ali je iz $\mathcal{O}$, jer je uniformno, pa stoga i polinomijalno, ograničena.

∎

Definicija. *Nosač* neprekinute funkcije φ definiramo preko komplementa: $x \notin \operatorname{supp}\varphi$ ako je $\varphi = 0$ na nekoj okolini točke x.

Nosač je stoga uvijek zatvoren skup, pa je kompaktan ako je ograničen. Definirajmo $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ kao skup svih C^∞ kompleksnih funkcija na skupu Ω čiji je nosač kompaktan. Posebno, ukoliko je $\Omega = \mathbf{R}^n$ pišemo $\mathcal{D} = \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Očigledno je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$, međutim manje je očito da je $\mathcal{D} \ne \emptyset$.

Primjer 2. Zadana je funkcija $\varphi(x) := f(|x|^2 - 1)$, gdje je

$$f(t) := \begin{cases} e^{1/t} & , \text{ za } t < 0 \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases} .$$

Očigledno je $\varphi \in \mathcal{D}$ (naime, $\operatorname{supp} \varphi = \mathsf{Cl}\, \mathrm{K}(0,1)$).

Dijeljenjem funkcije φ pozitivnom konstantom $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, dx$ dobivamo nenegativnu funkciju $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ kojoj je nosač također $\mathsf{Cl}\, \mathrm{K}(0,1)$, a $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_0(x)\, dx = 1$. Svaka funkcija s gornjim svojstvima se zove *jediničnom* test funkcijom. ∎

Nizovna konvergencija na $\mathcal{D}$ je relativno jednostavna. Reći ćemo da niz funkcija (φ_k) iz $\mathcal{D}$ konvergira k funkciji $\varphi \in \mathcal{D}$ ukoliko

(i) Nosači funkcija φ_k sadržani su u istom ograničenom skupu neovisno o j.

(ii) Derivacije svakog danog reda α funkcija φ_k konvergiraju uniformno k odgovarajućoj derivaciji funkcije φ.

Valja primijetiti da u gornjoj definiciji ne zahtijevamo da derivacije svakog reda *istodobno* konvergiraju uniformno, već da svaka derivacija zasebno uniformno konvergira.

Osnovna motivacija za uvođenje Schwartzovog prostora $\mathcal{S}$ je činjenica da su za takve funkcije operacije parcijalne integracije i deriviranja pod znakom integrala očigledno dopuštene.

Podsjetimo se da je za $p \in [1, \infty]$ *Lebesgueov prostor* $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ definiran kao Banachov prostor svih (klasa skoro svuda jednakih) izmjerivih funkcija na $\mathbf{R}^n$, s normom

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathrm{L}^p} &:= \left(\int_{\mathbf{R}^n} |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} , p \in [1, \infty\rangle \\ \|u\|_{\mathrm{L}^\infty} &:= \inf\{M \in \mathbf{R} : |u(x)| \leq M (ss\, x)\} . \end{aligned}$$

Uočimo da su za ograničenu neprekinutu funkciju φ norme u L^∞ i prostoru C jednake: $\|\varphi\|_{\mathrm{C}} = \|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty}$.

Ako su u i v izmjerive funkcije takve da je $u\bar{v} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$, onda pišemo $\langle u, v\rangle := \int_{\mathbf{R}^n} u(x)\bar{v}(x)\, dx$. Ovaj produkt je polulinearan (seskvilinearan, tj. linearan po u i antilinearan po v). Posebno, za $u, v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ gornji produkt je skalaran produkt u Hilbertovom prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$.

Teorem 2. *Vrijedi:*

(a) $\mathcal{S} \subseteq \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$

(b) $(\forall\, \varphi \in \mathcal{S})\, (\forall\, p \in [1, \infty])\ \|\varphi\|_{\mathrm{L}^p} \leq (2\pi)^n \|\varphi\|_{2n}$

(c) $(\forall\, \varphi \in \mathcal{S})\, (\forall\, p \in [1, \infty])\, (\forall\, u \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n))\ u\bar{\varphi} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \& |\langle u, v\rangle| \leq (2\pi)^n \|u\|_{\mathrm{L}^p} \|\varphi\|_{2n}$

(d) *Za svaku izmjerivu funkciju u, takvu da je za svaku $\varphi \in \mathcal{S}$ produkt $u\bar{\varphi} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$, vrijedi sljedeće: ako je $\langle u, \mathcal{S}\rangle = 0$, onda je nužno i $u = 0\, (ss)$.*

(e) *Ako je $\varphi \mapsto U(\varphi)$ antilinearan funkcional na $\mathcal{S}$ takav da vrijedi $|U(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}$, onda postoji jedinstven $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ takav da je $U(\varphi) = \langle u, \varphi\rangle$ za svaki $\varphi \in \mathcal{S}$. Tada vrijedi i ocjena $\|u\|_{\mathrm{L}^2} \leq C$.*

Dokaz. Neka je $1 \leq p < \infty$, te neka je $\varphi \in \mathcal{S}$. Tada vrijedi (propozicija 3, ocjena za množenje monomom):

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^p &\leq \left(\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left| \varphi(x) \prod_{j=1}^n \left(1 + x_j^2\right) \right| \right)^p \prod_{j=1}^n \left(1 + x_j^2\right)^{-1} \\ &\leq (2^n \|\varphi\|_{2n})^p \prod_{j=1}^n \left(1 + x_j^2\right)^{-1} . \end{aligned}$$

Odavdje, integracijom i korištenjem leme 1, dobijamo ocjenu (b). U slučaju $p = \infty$ tvrdnja je očita. Tvrdnja (a) je jednostavna posljedica (b), dok (c) slijedi iz (b) i Hölderove nejednakosti (propozicija II.1).

Da bismo pokazali (d) dovoljno je dokazati da za svaki omeđen izmjeriv skup $E \subseteq \mathbf{R}^n$ vrijedi $\langle u, \chi_E \rangle = 0$.

Neka je E i otvoren skup. Definirajmo niz podskupova (K_j) od E na sljedeći način:

$$K_j := \left\{ x \in \mathbf{R}^n : d(x, E^c) \geq \frac{1}{j} \right\} .$$

Skupovi K_j su očito kompaktni za svaki $j \in \mathbf{N}$, pa po teoremu o particiji jedinice postoje $\varphi_j \in \mathrm{C}_c^\infty(E)$ takve da je $\varphi_j|_{K_j} = 1$. Niz (φ_j) po točkama konvergira k χ_E, stoga po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da $\langle u, \varphi_j \rangle \longrightarrow \langle u, \chi_E \rangle$. Kako je $\langle u, \varphi_j \rangle = 0$, za svaki j, to je tvrdnja dokazana u ovom posebnom slučaju.

Za općenit ograničen i izmjeriv skup $E \in \mathbf{R}^n$ postoji niz otvorenih skupova (U_j) takvih da je E, do na skup mjere nula, limes tog niza. Točnije, označimo li s χ_j karakterističnu funkciju skupa U_j, onda $\chi_j \longrightarrow \chi_E$ skoro svuda. Za svaki j, po prethodnom, vrijedi $\langle u, \chi_j \rangle = 0$ pa nanovo, iz teorema o dominiranoj konvergenciji, slijedi tvrdnja.

Za (e) uočimo da iz (d) slijedi kako je $\mathcal{S}$ gust potprostor od $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ (zapravo vrijedi i više: $\mathcal{S}$ gust u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$, za svaki p) , odakle slijedi jedinstvenost i ocjena norme za u. Egzistencija slijedi iz Rieszovog teorema reprezentacije.

Q.E.D.

Definicija. Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren skup. *Distribucija* ili *poopćena funkcija* u na Ω je antilinearan funkcional na $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ koji je neprekinut (ograničen) u sljedećem smislu (s $\mathcal{K}_\Omega$ označujemo množinu svih kompaktnih podskupova skupa Ω):

$$(\forall K \in \mathcal{K}_\Omega)(\exists C \in \mathbf{R}^+)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)) \operatorname{supp} \varphi \subseteq K \Longrightarrow |\langle u, \varphi \rangle| \leq C |\varphi|_N .$$

Prostor distribucija na Ω je topološki dual prostora $\mathcal{D}(\Omega) = \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ i označujemo ga s $\mathcal{D}'(\Omega)$ (posebno je $\mathcal{D}' := \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$). Gornja neprekinutost linearnih funkcionala na $\mathcal{D}(\Omega)$ je neprekinutost u topologiji koja nije metrizabilna (radi se o tzv. topologiji induktivnog limesa na $\mathcal{D}(\Omega)$).

Primjer 3. Neka je f lokalno integrabilna funkcija, drugim riječima, integrabilna na svakom ograničenom skupu. Tada je T_f, definirana s

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \bar{\varphi}(x) \, dx ,$$

distribucija. Zaista, budući da je područje integracije zapravo ograničen skup (φ ima kompaktan nosač!), to gornji integral postoji. Nadalje, neka je K kompaktan skup, te $\varphi \in \mathcal{D}$ takva da je $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$. Tada je

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \left(\int_K |f(x)| \, dx \right) \|\varphi\|_0 .$$

Za distribuciju T_f kažemo da je generirana funkcijom f. Očito je da dvije lokalno integrabilne funkcije, koje se podudaraju skoro svuda, generiraju istu distribuciju. ∎

Distribucije možemo množiti glatkim funkcijama. Naime za $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ možemo definirati njihov produkt ψu za svaku test funkciju $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ formulom $\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \bar{\psi}\varphi \rangle$. Lako se vidi da je i ψu distribucija.

Definicija. *Temperirana distribucija* je antilinearan funkcional na $\mathcal{S}$ koji je neprekinut, tj. vrijedi

$$(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\exists\, N \in \mathbf{N})(\forall\, \varphi \in \mathcal{S})\ |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_N \ .$$

Prostor svih temperiranih distribucija, kao dual prostora $\mathcal{S}$, označavamo sa $\mathcal{S}'$.

Primjer 4. Neka je $g \in \mathcal{S}$. Definirajmo funkcional $\langle g, \cdot \rangle$ na $\mathcal{S}$ formulom

$$\langle g, \varphi \rangle := \int_{\mathbf{R}^n} g(x)\bar{\varphi}(x)\, dx \ .$$

On je očito antilinearan, ali i ograničen:

$$|\langle g, \varphi \rangle| \leq \|g\|_{\mathrm{L}^1} \|\varphi\|_0 \ .$$

Štoviše, ako su $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$ takve da je $g_1 \neq g_2$, onda su i pripadajući funkcionali također različiti. Očito dakle možemo identificirati $g \in \mathcal{S}$ s $\langle g, \cdot \rangle \in \mathcal{S}'$. Budući da je $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^1}$ neprekinuta polunorma na $\mathcal{S}$, gornjom je identifikacijom $\mathcal{S}$ prirodno uložen u $\mathcal{S}'$. ∎

Primjer 5. **Distribucije x_+^z i x_-^z**

Neka je $\mathsf{Re}\, z > -1$ i $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Tada definiramo temperiranu distribuciju x_+^z formulom:

(7)
$$\langle x_+^z, \varphi \rangle := \int_0^\infty x^z \bar{\varphi}(x)\, dx \ .$$

Ovako definirana, x_+^z dolazi od funkcije koja je jednaka x^z, za $x > 0$, odnosno 0, za $x < 0$.

Zaista je riječ o temperiranoj distribuciji. Naime vrijedi

$$|\langle x_+^z, \varphi \rangle| \leq \int_0^\infty |x^z|\, |\varphi(x)|\, dx \leq \|x^z \varphi\|_{\mathrm{L}^1} \ ,$$

pa tvrdnja slijedi iz činjenice da je $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^1}$ neprekinuta polunorma na $\mathcal{S}$.

Distribucija x_-^z definira se potpuno analogno:

(8)
$$\langle x_-^z, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^0 |x|^z \bar{\varphi}(x)\, dx \ .$$

Budući da vrijedi

$$\langle x_-^z, \varphi \rangle = \langle x_+^z, \tilde{\varphi} \rangle \ ,$$

odmah se vidi da je i x_-^z temperirana distribucija.

S pomoću x_+^z i x_-^z definiraju se i neki drugi važni primjeri temperiranih distribucija:

$$\begin{aligned} |x|^z &:= x_+^z + x_-^z \ , \\ |x|^z \operatorname{sign} x &:= x_+^z - x_-^z \ , \\ (x + i0)^z &:= x_+^z + e^{iz\pi} x_-^z \ , \\ (x - i0)^z &:= x_+^z + e^{-iz\pi} x_-^z \ . \end{aligned}$$

Ako je P polinom u n varijabli, tada se potpuno analogno definiraju distribucije P_+^z, P_-^z, $(P+i0)^z$ i $(P-i0)^z$. Primjerice

$$\langle P_+^z, \varphi \rangle := \int_{\{x \in \mathbf{R}^n : P(x) > 0\}} P^z(x) \bar{\varphi}(x)\, dx \ .$$

∎

Temperirane distribucije mogu se množiti funkcijama ψ iz $\mathcal{O}$:

$$\langle \psi u, \varphi\rangle = \langle u, \bar{\psi}\varphi\rangle \ .$$

Gornja formula definira temperiranu distribuciju ψu, i definicija je u skladu s množenjem funkcija.

Konvergencija na $\mathcal{D}'$ je *slaba* konvergencija, definirana na sljedeći način: Kažemo da niz (mreža) distribucija (u_k) konvergira k distribuciji $u \in \mathcal{D}'$ ako

$$(\forall\, \varphi \in \mathcal{D}) \quad \langle u_k, \varphi\rangle \longrightarrow \langle u, \varphi\rangle \ .$$

Na prostor $\mathcal{D}'$ može se proširiti i operacija deriviranja, formulom:

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = \langle u, D^\alpha \varphi\rangle \ .$$

Ovako definirana derivacija distribucije je očito ponovo distribucija. Ako je $u \in \mathcal{S}'$, onda je dovoljno definirati $D^\alpha u$ gornjom formulom za $\varphi \in \mathcal{D}$. Zbog neprekinutosti derivacije (v. propoziciju 1.), antilinearan funkcional $\varphi \mapsto \langle u, D^\alpha\varphi\rangle$ je i u prostoru $\mathcal{S}'$. Korektnost definicije derivacije temperirane distribucije tada vrijedi zbog sljedeće:

Propozicija 4. *Ako su u i v temperirane distribucije, te* $(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n))\langle u, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle$, *onda vrijedi i* $(\forall\, \varphi \in \mathcal{S})\langle u, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle$.

Dokaz. Neka je $\varphi \in \mathcal{S}$. Odaberimo funkciju $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, takvu da je $\psi = 1$ na $\mathrm{K}(0,1)$. Za $\varepsilon \in (0,1)$ definirajmo $\varphi_\varepsilon := \psi_\varepsilon\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, pri čemu je $\psi_\varepsilon(x) := \psi(\varepsilon x)$. Ocijenimo razliku $\varphi - \varphi_\varepsilon$:

$$x^\alpha\partial^\beta(\varphi - \varphi_\varepsilon) = (1-\psi_\varepsilon)x^\alpha\partial^\beta\varphi + \sum_{\gamma\neq 0}\binom{\beta}{\gamma}\partial^\gamma\psi_\varepsilon x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\varphi \ . \tag{9}$$

Za $\gamma \neq 0$, $\partial^\gamma\psi_\varepsilon = O(\varepsilon)$, stoga je drugi član s desne strane u (9) ocijenjen s $\varepsilon\|\varphi\|_{|\alpha+\beta|}$. S druge pak strane, prvi član očito zadovoljava $|1-\psi_\varepsilon| \leq \varepsilon^2|x|^2$, budući da na nosaču funkcije ψ_ε vrijedi $0 \leq 1-\varphi_\varepsilon \leq 1$ i $|\varepsilon x| \geq 1$. Dakle, vrijedi ocjena

$$\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_k \leq n\varepsilon^2\|\varphi\|_{k+2} + C_k\varepsilon\|\varphi\|_k \ .$$

Kako je za $u, v \in \mathcal{S}$ zadovoljeno $\langle u - v, \varphi_\varepsilon\rangle = 0$, zbog gornje nejednakosti vrijedi

$$|\langle u - v, \varphi\rangle| = |\langle u - v, \varphi - \varphi_\varepsilon\rangle| \leq C_0\varepsilon\|\varphi\|_{N+2} \ ,$$

pri čemu je indeks N određen s pomoću ocjene $|\langle u - v, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_N$. Konačno, prijelazom na limes $\varepsilon \longrightarrow 0$ slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Prostor $\mathcal{D}'$ (odnosno $\mathcal{S}'$) je zatvoren na deriviranje, te k tome uvijek vrijedi Schwarzovo pravilo $D_iD_j = D_jD_i$.

Ako su $U \subseteq \Omega$ otvoreni skupovi, za $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ možemo definirati restrikciju $u_{|_U} := u_{|_{\mathrm{C}_c^\infty(U)}}$. Kažemo da se distribucije u i v podudaraju na otvorenom skupu U ako vrijedi $u_{|_U} = v_{|_U}$.

Propozicija 5. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren skup. Ukoliko su u i v dvije distribucije na Ω koje se za proizvoljnu točku x iz Ω podudaraju na nekoj okolini te točke, onda su te dvije distribucije jednake.*

Dokaz. Za svaki $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, $K = \operatorname{supp}\varphi$ je po pretpostavci pokriven otvorenim skupovima Ω_k, na kojima je $u = v$. Uzmimo particiju jedinice (φ_j), podređenu konačnom otvorenom podpokrivaču (Ω_j). Budući da $\varphi_j\varphi$ ima nosač sadržan u Ω_j vrijedi

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \varphi \sum_j \varphi_j\rangle &= \sum_j \langle u, \varphi_j\varphi\rangle \\ &= \sum_j \langle v, \varphi_j\varphi\rangle = \langle v, \varphi \sum_j \varphi_j\rangle = \langle v, \varphi\rangle \ .\end{aligned}$$

Q.E.D.

Predhodna propozicija nam omogućuje da definiramo nosač distribucije. Kažemo da je distribucija $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *nula* na otvorenom skupu $U \subseteq \Omega$ ako vrijedi

$$(\forall\, \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)) \quad \operatorname{supp}\varphi \subseteq U \Longrightarrow \langle u, \varphi\rangle = 0 \ .$$

Komplement unije svih otvorenih skupova (dakle, zatvoren skup) na kojima je u nula je *nosač* distribucije u (u oznaci $\operatorname{supp} u$). Drugim riječima, za $x \in \Omega$ vrijedi $x \notin \operatorname{supp} u$ ako postoji okolina točke x na kojoj je u nula.

Slično definiramo i *singularan nosač* (franc. *support singulier*): $x \notin \operatorname{supp\,sing} u$ ako postoji okolina točke x na kojoj je u glatka funkcija (tj. $x \in U$, a $u_{|U} \in \mathrm{C}^\infty(U)$); točnije

$$(\exists\, \psi \in \mathrm{C}^\infty(U))(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(U))\langle u, \varphi\rangle = \langle \psi, \varphi\rangle \ .$$

I singularan nosač distribucije je zatvoren skup.

Za produkt $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ i $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vrijede inkluzije:

$$\operatorname{supp}\psi u \subseteq \operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u \qquad \text{i} \qquad \operatorname{supp\,sing}\psi u \subseteq \operatorname{supp\,sing} u \ .$$

Radi jednostavnosti zapisa označimo s $\mathcal{T}_\Omega$ množinu svih otvorenih podskupova skupa Ω, a s $\mathcal{F}_\Omega$ svih zatvorenih. Za točku $x \in \Omega$ s $\mathcal{U}_x$ označujemo familiju (filtar) svih okolina točke x.

Teorem 3. *Vrijede sljedeće karakterizacije:*
(a) $x \notin \operatorname{supp} u \Longleftrightarrow (\exists\, U \in \mathcal{U}_x)(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(U))\varphi u = 0$
(b) $x \notin \operatorname{supp\,sing} u \Longleftrightarrow (\exists\, U \in \mathcal{U}_x)(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(U))\varphi u \in \mathrm{C}^\infty(U)$
(c) $(\forall\, F \in \mathcal{F}_\Omega)\ \operatorname{supp} u \subseteq F \Longleftrightarrow \Big((\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega))\operatorname{supp}\varphi \cap F = \emptyset \Longrightarrow \langle u, \varphi\rangle = 0\Big)$. ∎

Prostor $\mathcal{D}'(\Omega)$ sadrži distribucije koje nisu definirane na čitavom $\mathbf{R}^n$. Čak i u slučaju prostora $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ nema kontrole nad rastom takvih distribucija u beskonačnosti. Međutim, lokalno su takve distribucije *temperirane*; svaka distribucija definirana na ograničenom skupu Ω može se proširiti do temperirane distribucije na $\mathbf{R}^n$:

Neka je $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, te $K := \operatorname{supp} u \in \mathcal{K}_\Omega$; izaberimo funkciju $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ takvu da je $\psi = 1$ oko K (isp. razdiobu jedinice). Budući da je $\langle u, (1-\psi)\varphi\rangle = 0$, to je i $\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \psi\varphi\rangle$ za $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, pa antilinearan funkcional u možemo proširiti na $\mathcal{S}$ (pa čak i na $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$) definiravši $\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \psi\varphi\rangle$ za svaki $\varphi \in \mathcal{S}$. Štoviše, tako proširen funkcional zadovoljava nejednakost:

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C'\|\psi\varphi\|_N \ \leq C\|\varphi\|_N \ ,$$

pa je $u \in \mathcal{S}'$. (Ovo se proširenje sastoji u tome da je u nula van $\mathrm{Cl}\,\Omega$.)

Prostor $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$, uz odgovarajuću topologiju (uniformne konvergencije na kompaktima), označavamo s $\mathcal{E}(\Omega)$; posebno, $\mathcal{E} := \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. $\mathcal{E}(\Omega)$ je Fréchetov prostor. Njegov dual, $\mathcal{E}'(\Omega)$ (odnosno posebno $\mathcal{E}' := \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$), sastoji se od distribucija s kompaktnim nosačem.

Primjer 6. (**Diracova δ „funkcija“**) Osobito popularan primjer distribucije i tipičan primjer distribucije s kompaktnim nosačem je Diracova mjera (masa), definirana na sljedeći način:

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0) \ .$$

Odavdje je očito da je nosač Diracove mjere jedna jedina točka, ishodište. Fizikalno, δ ima interpretaciju koncentriranog djelovanja u jednoj točki (koncentrirana vanjska sila, gustoća mase materijalne točke, gustoća naboja elektrona u elektrostatici, četverofermionska interakcija kao model β–raspada u nuklearnoj fizici i fizici čestica...).

Analogno možemo definirati Diracovu masu koncentriranu u bilo kojoj točki:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a) \ .$$

Diracovu mjeru možemo dobiti kao derivaciju Heavisideove funkcije $H := \chi_{(0,\infty)}$ u smislu distribucija (preciznije, u $\mathcal{S}'$):

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \ .$$

∎

Za prostore test funkcija vrijede inkluzije

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E} \ ,$$

dok za prostore pripadnih distribucija imamo:

$$\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}' \ .$$

3. Fourierova transformacija na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$. Konvolucija

Za proizvoljnu funkciju $u \in \mathcal{S}$ možemo definirati Fourierovu transformaciju $\mathcal{F}u := \hat{u}$ formulom:

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} u(x)\, dx \ . \tag{10}$$

Transformacija $\hat{u}$ je ograničena i neprekinuta funkcija, jer je očigledno $|\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ (zbog $|e^{-2\pi i x\cdot\xi}| = 1$); dok neprekinutost slijedi primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji.

Primjer 7. Za $\varphi(x) := e^{-|x|^2/2}$ je $\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} e^{-|2\pi\xi|^2/2}$. ∎

Namjera nam je proširiti Fourierovu transformaciju $\mathcal{F}$ na širu klasu *funkcija*, koja bi sadržavala L^2, pa i mjere poput Diracove mjere δ. Dokažimo sljedeći

Teorem 4. *Ako je $\varphi \in \mathcal{S}$, onda je i $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, te je $\mathcal{F}$ neprekinuta. Drugim riječima, za svaki $k \in \mathbf{N}$ vrijedi $\|\hat{\varphi}\|_k \leq 4^n(2\pi)^{n+k}(k+1)!\|\varphi\|_{2n+k}$.*

Štoviše, za $\hat{\varphi}$ vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $(\forall\, \alpha \in \mathbf{N}_0^n)\ (D^\alpha\varphi)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)\ \&\ D^\alpha\hat{\varphi}(\xi) = (-1)^{|\alpha|}(x^\alpha\varphi)^\wedge(\xi)$

(b) $(\forall\, u \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n))\ \langle\hat{u}, \varphi\rangle = \langle\tilde{u}, \hat{\varphi}\rangle$

(c) formula inverzije: $\hat{\hat{\varphi}} = \tilde{\varphi}$ *(tj.* $\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$

(d) Parsevalova formula $(\forall\, \psi \in \mathcal{S})\ \langle\hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle$.

Dokaz. Budući da je za $\varphi \in \mathcal{S}$ i $e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi \in \mathcal{S}$, to možemo derivirati pod znakom integrala, stoga je (a) trivijalno zadovoljeno. Posebno, $\hat{\varphi}$ ima derivacije svakog reda i sve su neprekinute.

U slučaju kad je $k = 0$, neprekinutost Fourierove transformacije i pripadajuća ocjena su očite. Za $|\alpha+\beta| = k \neq 0$, sličnim trikom kao u dokazu teorema 2(b), te s pomoću leme 1 i propozicije 3 dobijemo neprekinutost i pripadajuću ocjenu u proizvoljnoj polunormi $\|\cdot\|_k$.

Ako je $u \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$, onda je i $u \otimes \bar{\varphi} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ pa iz Fubinijevog teorema slijedi tvrdnja (b). Dokaz tvrdnje (c) je nešto složeniji. Naime, funkcija $f(y,\xi) := e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}\varphi(y)$ nije u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, stoga nije moguće izravno primijeniti Fubinijev teorem. Da bismo postigli apsolutnu konvergenciju uvodimo faktor $\psi(\xi) := e^{-|\xi|^2/2}$, te zamjenu varijabli $y := x + \varepsilon z$ i $\xi := \zeta/\varepsilon$. Računajmo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} \psi(\varepsilon\xi)\hat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi &= \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \psi(\varepsilon\xi)\varphi(y)e^{2\pi i z\cdot\zeta}\, dy d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \psi(\zeta)\varphi(x+\varepsilon z)e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\, dz d\zeta \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\psi}(z)\varphi(x+\varepsilon z)\, dz\ .
\end{aligned}
$$

Sada tvrdnja slijedi uzimanjem limesa po $\varepsilon \longrightarrow 0$ i primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji.

Na koncu, tvrdnja (d) slijedi iz (b) i (c):

$$
\langle\hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle = \langle\tilde{\varphi}, \hat{\hat{\psi}}\rangle = \langle\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle\ .
$$

Q.E.D.

Prethodni nam teorem daje pregršt informacija o Fourierovoj transformaciji. Osobito je zanimljiva formula inverzije, jer iz nje slijedi da je Fourierova transformacija neprekinuta bijekcija sa $\mathcal{S}$ na samog sebe, a daje nam i eksplicitnu formulu za operator $\mathcal{F}^{-1} : u \mapsto \check{u}$:

$$
\check{u}(\xi) := \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}u(x)\, dx\ . \tag{11}
$$

Teorem 5. *(**Plancherel**) Fourierova se transformacija na jedinstven način proširuje sa $\mathcal{S}$ do unitarnog operatora s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ na samog sebe i vrijedi Parsevalova formula $\langle\, \hat{u} \mid \hat{v}\,\rangle = \langle\, u \mid v\,\rangle$. (Slična formula $\langle\hat{u}, \hat{v}\rangle = \langle u, v\rangle$ slijedi neposredno iz formule inverzije.)*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu, tvrdnja (d), za $u \in \mathcal{S}$, vrijedi $\|\hat{u}\|_{\mathrm{L}^2} = \|u\|_{\mathrm{L}^2}$. Kako je $\mathcal{F}$ surjektivna izometrija na $\mathcal{S}$, tvrdnja slijedi iz činjenice da je Schwartzov prostor gust u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$.

Q.E.D.

Teorem 6. (**Riemann–Lebesgueova lema**) *Fourierova se transformacija na jedinstven način proširuje do ograničenog linearnog operatora s* $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ *u* $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$*, prostora svih* C^∞ *funkcija koje trnu u beskonačnosti.*

Dokaz. Prema teoremu 4, ako je $u \in \mathcal{S}$, onda je i $\hat{u} \in \mathcal{S}$, pa stoga i trne u beskonačnosti. Nadalje, iz (10) slijedi ocjena

$$\|\hat{u}\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \|u\|_{\mathrm{L}^1} ,$$

pa tvrdnja teorema vrijedi zbog gustoće.

Q.E.D.

Iz Hölderove nejednakosti (propozicija II.1) slijedi da, ukoliko je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, svaku (klasu) $g \in \mathrm{L}^q(\mathbf{R}^n)$ možemo identificirati s neprekinutim antilinearnim funkcionalom na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$. Međutim, vrijedi i obrat ([Rudin], str. 127): Svaki se neprekinuti antilinearan funkcional na $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, reprezentira jedinstvenim $g \in \mathrm{L}^q(\mathbf{R}^n)$ i norme je jednake $\|g\|_{\mathrm{L}^q}$.

Za indeks q, za koji vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, kažemo da je *konjugiran* indeksu p, te ga u daljnjem označavamo s p'.

Teorem 7. (**Hausdorff–Youngova nejednakost**) *Ako je* $1 \leq p \leq 2$*, onda se Fourierova transformacija proširuje do ograničenog linearnog operatora s* $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ *u* $\mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^n)$*, norme manje ili jednake 1.* ∎

Ovaj teorem dokazujemo u sljedećem poglavlju (primjer II.3), koristeći kompleksnu metodu interpolacije.

Formula inverzije nam omogućuje proširenje Fourierove transformacije na veći prostor. Po teoremu 3, svaki L^p prostor možemo identificirati s potprostorom prostora antilinearnih funkcionala na $\mathcal{S}$. Po teoremu 4 vrijedi $\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, \hat{\varphi} \rangle$; s druge strane, zamjenom varijabli $y := -x$ neposredno dobivamo $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle$. Posljednje dvije jednakosti imaju smisla i za općenite antilinearne funkcionale $\varphi \mapsto U(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$ na $\mathcal{S}$ i u slučaju kada u nije funkcija, pa se gornje formule mogu uzeti kao definicije za $\tilde{u}$ i $\hat{u}$.

Budući da je svaka Lebesgueova funkcija (iz prostora L^p) ujedno i temperirana distribucija, to gornja definicija Fourierove transformacije posebno daje i proširenje Fourierove transformacije na svaki Lebesgueov prostor L^p.

Iz teorema 4 po dualnosti slijedi sljedeći

Teorem 8. *Ako je* $u \in \mathcal{S}'$*, onda su formulama (koje vrijede za svaki* $\varphi \in \mathcal{S}$*):*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}, \varphi \rangle &= \langle u, \tilde{\varphi} \rangle \\ \langle \hat{u}, \varphi \rangle &= \langle \tilde{u}, \hat{\varphi} \rangle , \end{aligned}$$

definirane temperirane distribucije $\tilde{u}$ *i* $\hat{u}$*. Štoviše, vrijedi formula inverzije* $\hat{\hat{u}} = \tilde{u}$*.* ∎

Drugim riječima, Fourierova transformacija je linearna bijekcija sa $\mathcal{S}'$ u samog sebe. Za integrabilnu funkciju u i $\psi \in \mathcal{S}$ vrijede i formule:

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \varphi \rangle &= \overline{\langle u, \bar{\varphi} \rangle} , \\ \langle \tau_y u, \varphi \rangle &= \langle u, \tau_{-y} \varphi \rangle , \end{aligned}$$

gdje je $\tau_y u(x) := u(x+y)$ translacija argumenta. Uz ove oznake, jednostavno se dokazuje sljedeći teorem (pa dokaz ovdje ispuštamo):

Teorem 9. *Neka je $u \in \mathcal{S}'$, $\psi \in \mathcal{O}$, $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, a $y, \eta \in \mathbf{R}^n$. Tada vrijede sljedeće formule:*

$$D^\alpha(\psi u) = \sum_\beta \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta \psi)(D^{\alpha-\beta} u) ,$$

$$(D_x^\alpha u)^\wedge = \xi^\alpha \hat{u} , \qquad (x^\alpha u)^\wedge = (-D_\xi)^\alpha \hat{u} ,$$

$$(\tau_y u)\wedge = e^{2\pi i y\cdot\xi} \hat{u} , \qquad \hat{\hat{u}} = \bar{\hat{\bar{u}}} = \tilde{\hat{u}} , \qquad (e^{2\pi i x\cdot\eta} u)^\wedge = \tau_{-\eta}\hat{u} .$$

∎

Ograničivši se na antilinearne funkcionale na Schwartzovom prostoru $\mathcal{S}$, koji sadrži i funkcije s neograničenom nosačem, postavili smo kontrolu na *ponašanje* temperiranih distribucija u beskonačnosti, što je nužno za definiciju Fourierove transformacije.

Propozicija 6. (**Heisenbergova nejednakost**) *Neka je $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Tada vrijedi*

$$\|xf\|_{\mathrm{L}^2} \|\xi \hat{f}\|_{\mathrm{L}^2} \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 . \tag{12}$$

Dokaz. Polazimo od identiteta

$$(xf(x))' = xf'(x) + f(x) .$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \int_{\mathbf{R}} \bar{f}(x) f(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} \bar{f}(x) \left((xf(x))' - xf'(x) \right) dx \\
&= -\int_{\mathbf{R}} xf(x) \bar{f}'(x)\, dx - \int_{\mathbf{R}} x\bar{f}(x) f'(x)\, dx \\
&= -2\mathsf{Re} \int_{\mathbf{R}} xf(x) \bar{f}'(x)\, dx .
\end{aligned}$$

Odavdje, koristeći Cauchy–Schwarzovu nejednakost, dobivamo

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq 2\|xf\|_{\mathrm{L}^2} \|f'\|_{\mathrm{L}^2} .$$

Na koncu, iz Plancherelovog teorema i $(f')^\wedge(\xi) = 2\pi i \hat{f}(\xi)$, slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Analogno se dobija za proizvoljne $a, b \in \mathbf{R}$:

$$\|(x-a)f\|_{\mathrm{L}^2} \|(\xi - b)\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2} \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 . \tag{13}$$

Primijetimo sljedeće: Ukoliko je f takva da je $\|f\|_{\mathrm{L}^2} = 1$ i *malena* je izvan neke ε-okoline točke a, onda je $\|xf\|_{\mathrm{L}^2}$ malo, što znači da lijevi faktor u (13) mora biti velik da bi nejednakost i dalje vrijedila. Drugim riječima, ako je *masa* funkcije f koncentrirana u okolini neke točke, onda masa njene Fourierove transformacije ne može biti koncentrirana u okolini neke točke. Ukoliko uzmemo

$$a := \int_{\mathbf{R}} x|f(x)|^2\, dx \,, b := \int_{\mathbf{R}} \xi |f(\xi)|^2\, d\xi ,$$

onda (13) daje matematičku formulaciju Heisenbergovog principa neodređenosti za impuls i koordinatu u kvantnoj mehanici.

Za $f, g \in \mathcal{S}$ definiramo *konvoluciju* $f * g$ formulom

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\ .$$

Uočimo da vrijedi sljedeće

(i) $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$

(ii) Za svaki $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ vrijedi $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$.

Teorem 10. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) Za svaku funkciju $f \in \mathcal{S}$, preslikavanje $g \mapsto f*g$ je neprekinuto preslikavanje prostora $\mathcal{S}$ na samog sebe.

(b) Vrijedi $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.

(c) Konvolucija funkcija je komutativna i asocijativna.

Dokaz. Tvrdnja (b) se dobija izravnim računom, dok su preostale dvije njene jednostavne posljedice. Na primjer, iz $f * g = (\check{f}\check{g})^\wedge$ slijedi da je konvolucija neprekinuta, kao kompozicija množenja s $\check{f}$ i inverzne transformacije.

Q.E.D.

Iz gornjeg je teorema vidljivo da su konvolucija i Fourierova transformacija usko povezane; transformacija konvolucije dviju funkcija jednaka je produktu njihovih transformacija. Kao i ranije, željeli bismo proširiti konvoluciju na čim veću klasu objekata.

Definicija. Za $T \in \mathcal{S}'$ i $f \in \mathcal{S}$ definiramo njihovu konvoluciju, u oznaci $T * f$, kao temperiranu distribuciju

$$\langle T * f, \varphi\rangle := \langle T, \tilde{f} * \varphi\rangle\ , \tag{14}$$

za svaki $\varphi \in \mathcal{S}$.

Primijetimo da je gornja definicija dobra. Naime, zbog neprekinutosti preslikavanja $\varphi \mapsto \tilde{f} * \varphi$, ovako definirana konvolucija temperirane distribucije i funkcije iz $\mathcal{S}$ ponovno temperirana distribucija. Drugim riječima, za svaki $f \in \mathcal{S}$, preslikavanje $f \mapsto T * f$ je funkcija sa $\mathcal{S}'$ u sebe samog. Međutim, vrijedi i više:

Teorem 11. *Neka je $T \in \mathcal{S}'$, te $f, g \in \mathcal{S}$. Tada vrijedi*

(a) $T * f \in \mathcal{O}$, $(T * f)(y) = \langle T, \widetilde{\tau_{-y} f}\rangle$ i vrijedi

$$D^\alpha(T * f) = (D^\alpha T) * f = T * (D^\alpha f)\ . \tag{15}$$

(b) $(T * f) * g = T * (f * g)$.

(c) $(T * f)^\wedge = \hat{T}\hat{f}$.

∎

Posve analogno se definira konvolucija i na *većem* prostoru $\mathcal{D}'$: Za $T \in \mathcal{D}'$ i $f \in \mathcal{D}$ definira se konvolucija formulom $(T * f)(y) = \langle T, \widetilde{\tau_{-y} f}\rangle$ (ili, ekvivalentno, formulom (14)). Konvolucija $T * f$ je C^∞ funkcija, odnosno C_c^∞ funkcija ukoliko je $T \in \mathcal{E}'$.

Preslikavanje $* : \mathcal{D}' \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{C}^\infty$ može se proširiti do preslikavanja s $\mathcal{D}' \times \mathcal{E}'$ u $\mathcal{D}'$. Naime, ako su $S \in \mathcal{D}'$ i $T \in \mathcal{E}'$, onda definiramo za svaku test funkciju $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle S * T, \varphi\rangle := \langle S, \tilde{T} * \varphi\rangle\ .$$

Asocijativnost $R*(S*T) = (R*S)*T)$, pri čemu su $R, S, T \in \mathcal{S}'$ je i dalje zadovoljena, ako najviše jedna od njih nema kompaktan nosač.

U sljedećem poglavlju ćemo pokazati kako se konvolucija može proširiti na Lebesgueove prostore (primjeri 4 i 5), te dati neke važnije L^p ocjene za konvoluciju.

4. Soboljevljevi prostori

Važno je svojstvo Fourierove transformacije da za temperiranu distribuciju u, $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ je ekvivalentno s $\hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$. Budući da operacija deriviranja Fourierovom transformacijom prelazi u množenje $\hat{u}$ polinomom, to se glatkoća distribucije u može mjeriti rastom $\hat{u}$ u beskonačnosti.

Najprije označimo $\lambda(\xi) := \sqrt{1+|\xi|^2}$. Za svaki $s \in \mathbf{R}$ definiramo Soboljevljev prostor H^s (koji se još označuje i s $\mathrm{W}^{s,2}(\mathbf{R}^n)$) kao skup svih temperiranih distribucija za koje je $\lambda^s\hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$; tj. da vrijedi:

$$\|u\|_{\mathrm{H}^s}^2 := \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \, .$$

Budući da je $\mathrm{H}^s \subseteq \mathrm{H}^t$ za $s \geq t$, to posebno definiramo $\mathrm{H}^{-\infty} := \cup_{s\in\mathbf{R}} \mathrm{H}^s$ i $\mathrm{H}^{\infty} := \cap_{s\in\mathbf{R}} \mathrm{H}^s$. Očigledno vrijede inkluzije:

$$\mathcal{S} \subset \mathrm{H}^{\infty} \subset \mathrm{H}^{-\infty} \subset \mathcal{S}' \, .$$

Primijetimo da smo prostore Soboljeva definirali na čitavom $\mathbf{R}^n$, što je zahtijevalo korištenje Fourierove transformacije. Moguće je definirati te prostore i na otvorenom skupu Ω, ali ovdje se nećemo u to upuštati.

Teorem 12. *Za proizvoljan $s \in \mathbf{R}$, $u \in \mathrm{H}^{s+1}$ ako i samo ako je $u, D_1 u, \ldots, D_n u \in \mathrm{H}^s$. Vrijedi i izraz za normu:*

$$\|u\|_{\mathrm{H}^{s+1}}^2 = \|u\|_{\mathrm{H}^s}^2 + \sum_{j=1}^{n} \|D_j u\|_{\mathrm{H}^s}^2 \, .$$

Štoviše, za svaki $k \in \mathbf{N}_0$ vrijedi

(a) $u \in \mathrm{H}^k \iff \Big((\forall\, \alpha \in \mathbf{N}_0^n) |\alpha| \leq k \Longrightarrow D^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \Big)$

(b) *Ako je $s > n/2 + k$ i $u \in \mathrm{H}^s$, onda su za svaki $|\alpha| \leq k$ funkcije $D^\alpha u$ ograničene i neprekinute.*

∎

Iz teorema 12 vidimo da se H^k može ekvivalentno definirati kao skup svih temperiranih distribucija kojima su derivacije do reda k u L^2.

Navedimo nekoliko jednostavnih, a važnih svojstava prostora H^k.

(i) H^k je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $\langle\, u \mid v \,\rangle_{\mathrm{H}^k} := \langle \lambda^k u, \lambda^k v \rangle$. Fourierova je transformacija unitaran izomorfizam prostora H^k i $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n, \mu)$, pri čemu je mjera μ dana s $d\mu(\xi) := \big(1+|\xi|^2\big)^k \, d\xi$.

(ii) Za svaki $s \in \mathbf{R}$, $\mathcal{S}$ je gust u H^s.

(iii) Za svaki $s \in \mathbf{R}$ i svaki $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, takav da je $|\alpha| \leq s$ vrijedi da je D^α ograničen operator s H^s u $\mathrm{H}^{s-|\alpha|}$.

(iv) Norma $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^s}$ je translacijski invarijantna. Zaista, ako je $g(x) = f(x - x_0)$, onda je $\hat{g}(\xi) = e^{2\pi i x_0 \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$, odakle slijedi $\|g\|_{\mathrm{H}^s} = \|f\|_{\mathrm{H}^s}$.

Analogno prostoru H^s, Soboljevljeve prostore možemo definirati i nad drugim L^p prostorima. Naime, prostor $\mathrm{W}^{s,p}$ definiramo kao skup svih temperiranih distribucija, kojima su derivacije do reda s u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$. Mi ćemo koristiti samo $s \in \mathbf{N}$. Zbog energetskih ocjena za rješenja *valnih* jednadžbi, koje ćemo izvoditi u četvrtom poglavlju, od posebne je važnosti prostor H^1, odnosno $\mathrm{W}^{1,p}$. Na $\mathrm{W}^{1,p}$ definiramo normu

$$\|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}} := \|u\|_{\mathrm{L}^p} + \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{\mathrm{L}^p} \,.$$

Uz ovo normu je $\mathrm{W}^{1,p}$ Banachov prostor, za svaki $1 \le p \le \infty$. U slučaju $p = 2$, već smo komentirali da je H^1 Hilbertov prostor.

Prema teoremu 12(b), ako je $s > n/2 + k$, onda je H^s uložen u $\mathrm{C}^k(\mathbf{R}^n)$. Također je od značaja znati kad je $\mathrm{W}^{1,p}$ uložen u neki Lebesgueov prostor.

Definicija. Za prostor $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ definiramo *Soboljevljev konjugat* indeksa p, u oznaci p^*, formulom $1/p^* := 1/p - 1/n$.

Teorem 13. *(***Soboljev–Gagliardo–Nirenberg***) Neka je $1 \le p < n$. Tada je $W^{1,p}$ uložen u $\mathrm{L}^{p^*}(\mathbf{R}^n)$ i vrijedi sljedeća Soboljevljeva nejednakost:*

$$(\forall\, u \in \mathrm{W}^{1,p}) \quad \|u\|_{\mathrm{L}^{p^*}} \le C \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^p} \,, \tag{16}$$

pri čemu konstanta C ovisi samo o p i dimenziji prostora n. ∎

II. Interpolacija Banachovih prostora

1. Kompleksna metoda interpolacije

Kompleksna metoda interpolacije zasniva se na Hadamardovom teoremu o tri pravca. On spada u širu klasu teorema koji se često nazivaju Phragmén-Lindelöfovi teoremi i u suštini daju razna poopćenja principa maksimuma na nekim neograničenim domenama. Ukoliko je X vektorski prostor s normama $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ koje zadovoljavaju određeni uvjet konzistencije, onda možemo na prirodan način definirati familiju Banachovih prostora $(X_t; 0 \leq t \leq 1)$ koja *interpolira* prostore X_0 i X_1, upotpunjenja prostora X u normama $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ redom. To vodi na sljedeću ideju za interpolaciju: Ako familija $(X_t)_{0\leq t\leq 1}$ interpolira prostore X_0 i X_1, a $(Y_t)_{0\leq t\leq 1}$ prostore Y_0 i Y_1, onda se bilo koje preslikavanje T, koje je i u $\mathcal{L}(X_0, Y_0)$ i u $\mathcal{L}(X_1, Y_1)$, na jedinstven način proširuje do ograničenog linearnog preslikavanja iz X_t u Y_t, za svaki t. To je sadržaj apstraktnog Calderón-Lionsovog teorema interpolacije kojeg dokazujemo na kraju ovog odjeljka.

U daljnjem će S označavati zatvorenu prugu $\{z \in \mathbf{C} : 0 \leq \mathsf{Re}\, z \leq 1\}$, a X kompleksan vektorski prostor.

Teorem 1. (**Hadamardov o tri pravca**) *Neka je φ kompleksna funkcija, ograničena i neprekinuta na S, analitička na unutrašnjosti od S, za koju postoje pozitivne konstante M_0 i M_1 tako da vrijede ocjene:*

$$
\begin{aligned}
|\varphi(z)| &\leq M_0, \quad \mathsf{Re}\, z = 0 \quad i \\
|\varphi(z)| &\leq M_1, \quad \mathsf{Re}\, z = 1\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Tada na čitavoj pruzi vrijedi

$$
|\varphi(z)| \leq M_0^{1-\mathsf{Re}\, z} M_1^{\mathsf{Re}\, z}\,. \tag{2}
$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $M_0 = M_1 = 1$.

Zaista, ukoliko definiramo funkciju ψ formulom:

$$
\psi(z) := \varphi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z},
$$

onda se lagano vidi da ψ zadovoljava sljedeću ocjenu:

$$
|\psi(z)| \leq 1, \quad z \in \mathsf{Fr}\, S\,. \tag{3}
$$

Obrnuto, ako funkcija ψ, koja je ograničena i neprekinuta na S, te analitička na unutrašnjosti od S, zadovoljava ocjenu (3), onda funkcija φ definirana s

$$
\varphi(z) := \psi(z) M_0^{1-z} M_1^{z}.
$$

zadovoljava ocjenu (1). Dokažimo, stoga, teorem u slučaju funkcije φ ograničene jedinicom na rubu pruge S.

Ako $\varphi(z) \longrightarrow 0$ za $|z| \longrightarrow \infty$, onda je $|\varphi(z)| \leq 1$ po principu maksimuma modula. U suprotnom, za $n \in \mathbf{N}$ definiramo niz funkcija φ_n formulom:

$$
\varphi_n(z) := \varphi(z) e^{(z^2-1)/n}.
$$

Uz ovakve φ_n, zbog $\mathsf{Re}\, z \leq 1$ imamo

$$
|\varphi_n(z)| = |\varphi(z)| e^{(\mathsf{Re}\, z^2 - 1)/n} \leq |\varphi(z)| e^{-(\mathsf{Im}\, z)^2/n}, \tag{4}
$$

pa zbog ograničenosti funkcije φ na S vrijedi

$$(\forall\, n \in \mathbf{N}) \qquad \lim_{|z|\to\infty} \varphi_n(z) \longrightarrow 0 \,.$$

No, sada je φ_n, za svaki n, funkcija iz prvog slučaja, pa zadovoljava ocjenu $|\varphi_n(z)| \leq 1, z \in S$. Međutim, $\varphi_n(z) \longrightarrow \varphi(z)$, za $z \in S$ pa prijelazom na limes dobivamo željeni rezultat.

Q.E.D.

Napomena 1. Analogno, ili koristeći teorem 1, može se dokazati i sljedeća generalizacija Hadamardovog teorema:

Neka je φ kompleksna funkcija, ograničena i neprekinuta na pruzi $S_1 := \{z \in \mathbf{C} : a \leq \mathsf{Re}\, z \leq b\}$, analitička na unutrašnjosti od S_1, za koju postoje pozitivne konstante M_0 i M_1 tako da vrijede ocjene:

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &\leq M_0, \quad \mathsf{Re}\, z = a \quad \text{i} \\ |\varphi(z)| &\leq M_1, \quad \mathsf{Re}\, z = b \,. \end{aligned}$$

Tada na čitavom S_1 vrijedi

$$|\varphi(z)| \leq M_0^{(b-\mathsf{Re}\, z)/(b-a)} M_1^{(\mathsf{Re}\, z - a)/(b-a)} \,. \tag{5}$$

∎

Napomena 2. Prethodni teorem možemo poopćiti i na situaciju gdje φ poprima vrijednosti u kompleksnom konačno dimenzionalnom normiranom prostoru. Ako je X kompleksan Banachov prostor i $U \subseteq \mathbf{C}$ otvoren skup, onda za funkciju $\varphi : U \longrightarrow X$ kažemo da je *analitička* (holomorfna) u točki $z_0 \in U$, ukoliko φ ima derivaciju po normi (tzv. jaku derivaciju) u točki z_0. Funkcija φ je analitička na U ukoliko je analitička u svakoj točki od U. Pored gornje, *jake* analitičnosti, definira se i tzv. *slaba* analitičnost funkcije $\varphi : U \longrightarrow X$: Kažemo da je φ slabo analitička ukoliko je za svaki $f \in X'$ funkcija $z \mapsto {}_{X'}\langle\, f, x(z)\,\rangle_X$ analitička. Naravno, jaka analitičnost povlači slabu; međutim, vrijedi i obrat, što je jedna od značajnijih posljedica Banach–Steinhausovog teorema. Hadamardov teorem vrijedi i za funkcije s vrijednostima u Banachovim prostorima. Dokaz je gotovo isti: apsolutne vrijednosti valja zamijeniti normama; stoga u daljnjem tekstu koristimo tu verziju Hadamardovog teorema bez posebne napomene. ∎

Napomena 3. Iz (4) se vidi da uvjet ograničenosti na S funkcije φ možemo oslabiti i tražiti npr. da φ ima najviše eksponencijalan rast kada $\mathsf{Im}\, z \longrightarrow \infty$. Svi rezultati koji se oslanjaju na teorem 1 i dalje će vrijediti uz ovu, oslabljenu, pretpostavku. ∎

Ilustrirajmo najprije primjenu Hadamardovog teorema u dokazu Hölderove nejednakosti, formulirane u prvom poglavlju.

Propozicija 1. (**Hölderova nejednakost**) *Neka je* $1 \leq p \leq \infty$, *a* $f \in \mathrm{L}^p(M,\mu)$ *i* $g \in \mathrm{L}^{p'}(M,\mu)$ *kompleksne funkcije na prostoru mjere* (M,μ). *Tada je* $fg \in \mathrm{L}^1(M,\mu)$ *i vrijedi nejednakost*

$$\|fg\|_{\mathrm{L}^1} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}}.$$

Dokaz. Za $p = \infty$ tvrdnja je očigledna. Budući da su jednostavne funkcije guste u $\mathrm{L}^p(M,\mu)$ za $1 \le p < \infty$, tvrdnju je u tom slučaju dovoljno pokazati za nenegativne jednostavne funkcije f i g. Definirajmo

$$F(z) := \int_M f^{pz} g^{p'(1-z)}\, d\mu \,. \tag{6}$$

F je očigledno neprekinuta na pruzi S i analitička u njenoj nutrini. Nadalje, vrijedi

$$|F(z)| \le \int_M f^{p\,\mathrm{Re}\, z} g^{p'(1-\mathrm{Re}\, z)}\, d\mu \,,$$

pa je F i ograničena na S.

Ako je $\mathrm{Re}\, z = 0$, onda iz prethodnog slijedi nejednakost

$$|F(z)| \le \int_M g^{p'}\, d\mu = \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}}^{p'} \,,$$

dok za $\mathrm{Re}\, z = 1$ vrijedi

$$|F(z)| \le \int_M f^{p}\, d\mu = \|f\|_{\mathrm{L}^{p}}^{p} \,.$$

Iz prethodnih nejednakosti i Hadamardovog teorema o tri pravca slijedi ocjena ($z = x+iy$):

$$(\forall\, x \in [0,1]) \quad |F(z)| \le \|f\|_{\mathrm{L}^p}^{px} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}}^{p'(1-x)} \,. \tag{7}$$

Posebno, za $z = 1/p$ dobivamo $F(1/p) \le \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^{p'}}$.

Q.E.D.

Sljedeći je korolar prije posljedica dokaza negoli tvrdnje propozicije 1.

Korolar 1. *Neka su p, q i $r \ge 1$ takvi da vrijedi $1/p + 1/q = 1/r$. Neka su, nadalje, $f \in \mathrm{L}^p(M,\mu)$ i $g \in \mathrm{L}^q(M,\mu)$ kompleksne funkcije na prostoru mjere (M,μ). Tada je $fg \in \mathrm{L}^r(M,\mu)$ i vrijedi nejednakost*

$$\|fg\|_{\mathrm{L}^r} \le \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^q}. \tag{8}$$

Dokaz. Ponovno je jedini netrivijalan slučaj kada su i p i q realni brojevi (dakle, manji od beskonačno). Uz funkciju F definiranu kao u (6) (s q umjesto p') imamo

$$(\forall\, y \in [0,1]) \quad |F(iy)| \le \|g\|_{\mathrm{L}^q}^q \;\&\; |F(1+iy)| \le \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p \,.$$

Odavdje i iz Hadamardovog teorema slijedi analogna ocjena kao u (7). Posebno, za $z = r/p$ dobivamo tvrdnju.

Q.E.D.

Korolar 2. *(**Interpolacijska nejednakost**) Neka su $1 \le p \le q \le \infty$, a $f \in \mathrm{L}^p(M,\mu) \cap \mathrm{L}^q(M,\mu)$ kompleksna funkcija na prostoru mjere (M,μ). Tada je za svaki r, $p \le r \le q$, $f \in \mathrm{L}^r(M,\mu)$, te vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^r} \le \|f\|_{\mathrm{L}^p}^{\alpha} \|f\|_{\mathrm{L}^q}^{1-\alpha} \,, \tag{9}$$

pri čemu je $\alpha \in [0,1]$ takav da vrijedi $1/r = \alpha/p + (1-\alpha)/q$.

Dokaz. Neka je $q < \infty$. Uz $p_1 := p/\alpha$ i $q_1 := q/(1-\alpha)$ imamo $1/p_1 + 1/q_1 = 1/r \le 1$. Tvrdnja slijedi primjenom korolara 1 na funkcije $u := |f|^\alpha$ i $v := |f|^{(1-\alpha)}$. U slučaju $q = \infty$, tvrdnju dobivamo izravnim računom.

Q.E.D.

Definicija. Norme $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ na prostoru X su *konzistentne* ako svaki niz (x_n) koji teži k nuli u jednoj normi, a Cauchyjev je u drugoj, konvergira k nuli u obje norme.

Ako su norme $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ konzistentne, onda definiramo

$$\|x\|_+ := \inf\left\{\|y\|^{(0)} + \|z\|^{(1)} : x = y + z, y \in X_0, z \in X_1\right\} . \tag{10}$$

Propozicija 2. *Neka su $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ konzistentne norme na X. Tada vrijedi:*

(a) $\|\cdot\|_+$ je norma na X.

(b) Ako s X_0, X_1 i X_+ označimo upotpunjenja od X u normama $\|\cdot\|^{(0)}$, $\|\cdot\|^{(1)}$ i $\|\cdot\|_+$ redom, onda se identiteta na X proširuje do neprekinutog injektivnog preslikavanja s X_0, odnosno X_1, u X_+.

Dokaz. Neka je $x \in X$ takav da vrijedi $\|x\|_+ = 0$. Tada iz definicije funkcije $\|\cdot\|_+$ zaključujemo da vrijedi

$$\inf\left\{\|y\|^{(0)} + \|z\|^{(1)} : x = y + z, y \in X_0, z \in X_1\right\} = 0 .$$

Stoga postoje nizovi (y_n) i (z_n) u X takvi da $y_n \longrightarrow 0$ u normi $\|\cdot\|^{(0)}$, a $z_n \longrightarrow 0$ u normi $\|\cdot\|^{(1)}$. No, tada $y_n = x - z_n \longrightarrow x$ u normi $\|\cdot\|^{(1)}$, pa je, kao konvergentan niz, (y_n) Cauchyjev niz s obzirom na normu $\|\cdot\|^{(1)}$. Zbog konzistencije normi slijedi da i niz (y_n) konvergira k nuli u $\|\cdot\|^{(1)}$, što povlači $x = 0$.

Nenegativnost, subaditivnost i pozitivna homogenost od $\|\cdot\|_+$ su trivijalno zadovoljene, pa je $\|\cdot\|_+$ norma po definiciji, čime je dokazana prva tvrdnja.

Budući da $\|x\|_+ \leq \|y\|^{(0)} + \|z\|^{(1)}$ vrijedi za sve rastave oblika $x = y + z$, gdje je $y \in X_0$, a $z \in X_1$, to posebno za $y = x$ i $z = 0$ slijedi nejednakost

$$(\forall\, x \in X) \quad \|x\|_+ \leq \|x\|^{(0)} .$$

Odavdje odmah zaključujemo da se identiteta proširuje do neprekinutog preslikavanja $i : X_0 \longrightarrow X_+$. Još valja pokazati injektivnost.

Zbog linearnosti preslikavanja i dovoljno je vidjeti da mu je jezgra trivijalna. Neka je $x \in X_0$ takav da je $i(x) = 0$. Zbog neprekinutosti preslikavanja i postoji niz (x_n) u X za koji vrijedi:

$$\begin{aligned} x_n &\longrightarrow x \quad \text{u} \quad X_0, \\ x_n &\longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad X_+ . \end{aligned}$$

Iz posljednjeg slijedi postojanje nizova (y_n) i (z_n) u X, takvih da vrijedi $(\forall\, n \in N) x_n = y_n + z_n$ i

$$\begin{aligned} y_n &\longrightarrow x \quad \text{u} \quad X_0, \\ z_n &\longrightarrow 0 \quad \text{u} \quad X_1 . \end{aligned}$$

Sada, kao i ranije, zaključujemo da vrijedi $z_n = x_n - y_n \longrightarrow x$ u normi $\|\cdot\|^{(0)}$, pa ponovno argument konzistencije daje $z_n \longrightarrow 0$ u $\|\cdot\|^{(0)}$, odnosno $x = 0$.

Dokaz za X_1 je potpuno analogan.

Q.E.D.

Sve L^p norme na nekom σ-konačnom prostoru s mjerom su međusobno konzistentne. Međutim, postoje i primjeri nekonzistentnih normi.

Primjer 1. Neka je $\|\cdot\|^{(0)}$ L^2–norma na $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, te definirajmo $\|f\|^{(1)} := \|f\|^{(0)} + |f(0)|$. Tada norme $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ nisu konzistentne.

Zaista, definirajmo niz glatkih funkcija (f_n) koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

(a) $\operatorname{supp} f_n \subseteq [-1/n, 1/n]$ i

(b) $(\forall\, n \in \mathbf{N})(\forall\, x \in \mathbf{R}) \quad f_n(x) \le f_n(0) = 1$.

Tada očito vrijedi $\|f_n\|^{(0)} \le (2/n)^{1/2}$, što trne k nuli za $n \longrightarrow \infty$. Nadalje, zbog (b) je $\|f_m - f_n\|^{(1)} = \|f_m - f_n\|^{(0)}$ maleno za velike m i n, što znači da je (f_n) Cauchyjev niz u normi $\|\cdot\|^{(1)}$. Međutim, budući da je $\|f_m\|^{(1)} \ge 1$, za sve m, to (f_n) ne konvergira k nuli i u normi $\|\cdot\|^{(1)}$ što povlači da ove dvije norme nisu konzistentne. ∎

Primjer 2. Na $X = C([0,1])$ definirajmo norme

$$\|f\|^{(0)} = \int_0^1 |f(x)|\, dx\ ,$$

$$\|f\|^{(1)} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{2^n} |f(r_n)|\ ,$$

pri čemu je (r_n) niz svih racionalnih brojeva u [0,1]. Primijetimo da je $\|\cdot\|^{(1)}$ zaista norma na X, što slijedi iz činjenice da je $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ gusto u $[0,1]$.

Neka je $f \in X$, te neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $N \in \mathbf{N}$ takav da vrijedi $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} M < \varepsilon$, pri čemu je $M > 0$ maksimum funkcije f.

Definirajmo funkciju $g_\varepsilon \in X$ takvu da vrijedi

$$g_\varepsilon(r_n) = f(r_n);\ n = 1, \ldots, N\ ,$$

$$\int_0^1 |g_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon\ .$$

Tada funkcija $h_\varepsilon := f - g_\varepsilon$ zadovoljava

$$h_\varepsilon(r_n) = 0;\ n = 1, \ldots, N\ ,$$

$$|h_\varepsilon(x)| < 2M\ ,$$

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{2^n} |h_\varepsilon(r_n)| \le 2\varepsilon\ .$$

Zbog gornjeg slijedi $\|f\|_+ = \inf\left\{\|g\|^{(0)} + \|h\|^{(1)} : f = g + h\right\} < 3\varepsilon$, što zbog proizvoljnosti broja ε i funkcije f povlači da $\|\cdot\|_+$ nije norma na X. Na koncu, iz tvrdnje (a) propozicije 2 slijedi da norme $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ nisu konzistentne. ∎

Napomena 4. Obrat gornje propozicije također vrijedi. Naime, ukoliko je $\|\cdot\|_+$ norma, a proširenja identitete su injektivna, onda su norme $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ konzistentne.

∎

Za konzistentne norme $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ na prostoru X definiramo $\mathcal{F}(X)$ kao skup svih neprekinutih funkcija $f : S \longrightarrow X_+$, analitičkih na unutrašnjosti pruge S, koje zadovoljavaju

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = 0 \Longrightarrow f(z) \in X_0\ , \\ \operatorname{Re} z = 1 \Longrightarrow f(z) \in X_1\ , \end{cases} \tag{11}$$

$$\sup\{\|f(z)\|_+ : z \in S\} < \infty\ , \tag{12}$$

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \sup\left\{\|f(iy)\|^{(0)}, \|f(1+iy)\|^{(1)} : y \in \mathbf{R}\right\} < \infty\ . \tag{13}$$

Skup $\mathcal{F}(X)$ igra važnu ulogu u konstrukciji familije Banachovih prostora koja interpolira prostore X_0 i X_1. Prostore X_t ćemo dobiti na neki način lijepljenjem onih elemenata iz $\mathcal{F}(X)$ koji poprimaju istu vrijednost u t. Da bismo to mogli, moramo vidjeti da li $\mathcal{F}(X)$ možemo opskrbiti strukturom Banachovog prostora, te da li možemo naći odgovarajući zatvoren potprostor po kojem ćemo pocijepati $\mathcal{F}(X)$. Sljedeća propozicija daje pozitivan odgovor na oba pitanja.

Propozicija 3.
(a) $(\mathcal{F}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ *je Banachov prostor.*
(b) Za svaki $t \in [0,1]$ *je*

$$K_t := \{f \in \mathcal{F}(X) : f(t) = 0\}$$

zatvoren potprostor od $\mathcal{F}(X)$.

Dokaz. Da bismo dokazali da je $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ norma, ponovno je dovoljno vidjeti da $\|f\|_{\mathcal{F}} = 0$ povlači $f = 0$. Zbog nejednakosti $\|\cdot\|_+ \leq \|\cdot\|^{(k)}, k = 0, 1$; te definicije od $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$, slijedi nejednakost

$$\sup\{\|f(it)\|_+, \|f(1+it)\|_+ : t \in \mathbf{R}\} \leq \|f\|_{\mathcal{F}} \ ,$$

odnosno, zbog teorema o tri pravca

$$\sup\{\|f(z)\|_+ : z \in S\} \leq \|f\|_{\mathcal{F}} \ .$$

Stoga, $\|f\|_{\mathcal{F}} = 0$ povlači da vrijedi $(\forall\, z \in S) f(z) = 0$, drugim riječima, $f = 0$.

Neka je (f_n) Cauchyjev niz u $\mathcal{F}(X)$. Tada je za dovoljno velike indekse k i m, $\|f_k - f_m\|_{\mathcal{F}}$, odnosno, $\sup\{\|f_k(z) - f_m(z)\|_+ : z \in S\}$ maleno, što ima za posljedicu da niz f_n konvergira uniformno po $z \in S$ k neprekinutoj funkciji $f : S \longrightarrow X_+$. Zbog $\|f(z)\|_+ \leq \|f_n(z) - f(z)\|_+ + \|f_n(z)\|_+$ slijedi da je f ograničena na S, a analitičnost u nutrini slijedi iz jednolike konvergencije. Konačno, (11) je ispunjeno zbog potpunosti prostora X_0 i X_1, (13) je također zadovoljeno, pa je $f \in \mathcal{F}(X)$, odnosno $\mathcal{F}(X)$ je potpun, čime je dokazana tvrdnja (a).

K_t je zatvoren kao jezgra ograničenog linearanog operatora, koji za svaki $t \in [0,1]$, elementu $f \in \mathcal{F}(X)$ pridružuje vrijednost u točki t, $f(t) \in X_+$.

Q.E.D.

Za $t \in [0,1]$ definirajmo prostor $\tilde{X}_t := \mathcal{F}(X)/K_t$, te s $\|\cdot\|^{(t)}$ označimo odgovarajuću kvocijentnu normu.

Uočimo da X možemo poistovjetiti s podskupom $\tilde{X}_t$ preko preslikavanja koje svakom x iz X pridružuje $[x]$, klasu ekvivalencije konstante s vrijednošću x.

S druge strane, $\tilde{X}_t$ možemo poistovjetiti s podskupom X_+ preko preslikavanja koje klasu $[f]$ preslikava u (zajedničku) vrijednost u točki t, $f(t)$. To je preslikavanje očito injektivno, ali i neprekinuto, što slijedi iz sljedećeg računa:

Neka je $[f] \in \tilde{X}_t$, te $x = f(t)$. Iz prvog dijela dokaza propozicije 3 slijedi $\|x\|_+ \leq \|f\|_{\mathcal{F}}$, stoga je

$$\|x\|_+ \leq \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : f \in \mathcal{F}(X) \& f(t) = x\} = \|[f]\|^{(t)} \ .$$

Označimo s X_t upotpunjenje prostora X u normi $\|\cdot\|^{(t)}$. Vrijedi:

$$X \longrightarrow X_t \longrightarrow \tilde{X}_t \longrightarrow X_+ \ ,$$

pri čemu svaka strelica predstavlja neprekinuto injektivno preslikavanje (ulaganje).

Za $t = 0$ (odnosno $t = 1$), X_t se podudara s polaznim prostorom X_0 (tj. X_1). Zaista, uzmimo $x \in X$, te neka je $f \in \mathcal{F}(X)$ takav da je $f(0) = x$. Tada vrijedi

$$\|x\|^{(0)} \le \sup\Big\{\|f(iy)\|^{(0)}, \|f(1+iy)\|^{(1)} : y \in \mathbf{R}\Big\} = \|f\|_{\mathcal{F}} ,$$

pa je $\|x\|^{(0)} \le \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : f(0) = x\}$.

Obratno, neka je c pozitivna konstanta. Pogledajmo funkciju $f_c(z) := e^{-cz}x$. Tada je $\|f_c(iy)\|^{(0)} = \|x\|^{(0)}$, a $\sup\{\|f_c(1+iy)\|^{(0)} : y \in \mathbf{R}\} = e^{-c}\|x\|^{(1)}$, što možemo načiniti po volji malim izborom velikog c. Stoga je $\|x\|^{(0)} = \|f_c\|_{\mathcal{F}} \ge \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : f(0) = x\}$. Dakle, kvocijentna je norma za $t = 0$ upravo jednaka polaznoj normi $\|\cdot\|^{(0)}$. Posve je analogan dokaz za $t = 1$.

Prostori $X_t, t \in [0, 1]$, zovu se *interpolacijski prostori* između X_0 i X_1, a pripadajuće norme *interpolacijske norme*. Može se pokazati da je $X_t = \tilde{X}_t$; međutim, za nas je značajnija činjenica da je norma na X_t po definiciji jednaka kvocijentnoj normi na $\mathcal{F}(X)/K_t$. Obično se u primjenama, pri identifikaciji prostora X_t s konkretnim Banachovim prostorom B_t, dokazuje da su oba upotpunjenja od X u istoj normi. Tu ćemo strategiju i mi provoditi u sljećem odjeljku kada ćemo nalaziti interpolacijske prostore L^p prostora.

Sada je konačno sve priređeno da iskažemo i dokažemo osnovni teorem interpolacije.

Teorem 2. (**Calderón–Lions**) *Neka su X i Y prostori s danim konzistentnim normama $\|\cdot\|_X^{(0)}$ i $\|\cdot\|_X^{(1)}$ (odnosno $\|\cdot\|_Y^{(0)}$ i $\|\cdot\|_Y^{(1)}$). Neka je T neprekinuta i uniformno ograničena funkcija sa S u $\mathcal{L}(X_+, Y_+)$, koja je analitička na nutrini pruge S, te ima sljedeća svojstva:*

(a) $T(t) : X \longrightarrow Y$, za svaki $t \in (0, 1)$.

(b) $(\forall\, y \in \mathbf{R}) T(iy) \in \mathcal{L}(X_0, Y_0)$ i vrijedi $M_0 := \sup\{\|T(iy)\|_{\mathcal{L}(X_0,Y_0)} : y \in \mathbf{R}\} < \infty$.

(c) $(\forall\, y \in \mathbf{R}) T(1+iy) \in \mathcal{L}(X_1, Y_1)$ i $M_1 := \sup\{\|T(1+iy)\|_{\mathcal{L}(X_1,Y_1)} : y \in \mathbf{R}\} < \infty$.

Tada je za svaki $t \in (0, 1)$, $T(t)[X_t] \subseteq Y_t$ i vrijedi ocjena

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X_t,Y_t)} \le M_0^{1-t} M_1^t \; . \tag{14}$$

Dokaz. Kao i ranije, dovoljno je dokazati teorem za $M_0 = M_1 = 1$.

Ako je $f \in \mathcal{F}(X)$, onda je $z \mapsto T(z)f(z)$ neprekinuta i ograničena funkcija na S s vrijednostima u Y_+, te analitička na S. Zbog pretpostavki (b) i (c) imamo ocjene

$$(\forall\, y \in \mathbf{R}) \begin{cases} \|T(iy)f(iy)\|_Y^{(0)} \le \|f(iy)\|_X^{(0)} , \\ \|T(1+iy)f(1+iy)\|_Y^{(1)} \le \|f(1+iy)\|_X^{(1)} . \end{cases}$$

Zbog ovoga, preslikavanje $\mathcal{I} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$, definirano s $(\mathcal{I}f)(z) := T(z)f(z)$, ima normu manju ili jednaku 1, odakle neposredno slijedi ocjena iz tvrdnje teorema. Nadalje, za

$$K_t^X := \{f \in \mathcal{F}(X) : f(t) = 0\} ,$$
$$K_t^Y := \{f \in \mathcal{F}(Y) : f(t) = 0\} ,$$

vrijedi $\mathcal{I}(K_t^X) \subseteq {K_t}^Y$.

Stoga je dobro definirano preslikavanje $\tilde{\mathcal{I}}_t : \tilde{X}_t \longrightarrow \tilde{Y}_t$ formulom $\tilde{\mathcal{I}}_t([f]) := [T(t)f(t)]$.

Uz identifikaciju $\tilde{X}_t$ s podprostorom X_+, preslikavanje $\tilde{\mathcal{I}}_t$ se podudara s restrikcijom $T(t)$ na taj podprostor. Konačno, zbog (a), vrijedi $T(t)[X_t] \subseteq Y_t$.

Q.E.D.

2. Steinov teorem interpolacije

Nakon što smo dokazali apstraktni teorem interpolacije prirodno se nameće pitanje kako ga primijeniti na konkretne slučajeve. Glavna je poteškoća, naime, u identifikaciji interpolacijskih familija. U ovom odjeljku, kao što što smo već najavili, rješavamo taj problem u slučaju L^p prostora i formuliramo teorem interpolacije za taj slučaj (Steinov teorem).

Neka je (M, μ) σ-konačan prostor s mjerom, a p_0 i p_1 takvi da vrijedi $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$. Neka je, nadalje, $X := \mathrm{L}^{p_0}(M, \mu) \cap \mathrm{L}^{p_1}(M, \mu)$, te s $\|\cdot\|^{(0)}$ i $\|\cdot\|^{(1)}$ označimo norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p_0}}$ i $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p_1}}$ redom. Pokazat ćemo da u slučaju kada je $p_1 < \infty$ vrijedi $X_t = \mathrm{L}^{p_t}(M, \mu), 0 \leq t \leq 1$, pri čemu je

$$\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_0} \; .$$

Za $p_1 = \infty$ i $t = 1$, X_1 je zatvarač prostora X u L^∞ normi, što može biti pravi potprostor od $\mathrm{L}^\infty(M, \mu)$.

Tvrdnja se pokazuje tako da se dokaže da se norme $\|\cdot\|^{(t)}$ i $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p_t}}$ podudaraju na jednostavnim funkcijama, koje čine gust podskup prostora X. Neka je $t \in (0, 1)$, te φ jednostavna funkcija takva da vrijedi $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^{p_t}} = 1$. Definirajmo preslikavanje $f : S \longrightarrow X$ formulom

$$f(z) := |\varphi(\cdot)|^{p_t\left(\frac{z}{p_1} + \frac{1-z}{p_0}\right)} e^{i \arg \varphi(\cdot)} \tag{15}$$

Za svaki $z \in S, f(z) \in X$ i vrijedi

$$\begin{aligned}(\forall\, y \in \mathbf{R}) \|f(iy)\|_{\mathrm{L}^{p_0}}^{p_0} &= \int_M \left| |\varphi(x)|^{p_t p_0\left(\frac{iy}{p_1} + \frac{1-iy}{p_0}\right)} \right| d\mu(x) \\ &= \int_M |\varphi(x)|^{p_t} \, d\mu(x) = 1 \; .\end{aligned}$$

Ukoliko je $p_1 = \infty$, onda $(\forall\, y \in \mathbf{R}) \|f(1 + iy)\|_{\mathrm{L}^\infty} = 1$. U suprotnom imamo

$$\begin{aligned}(\forall\, y \in \mathbf{R}) \|f(1+iy)\|_{\mathrm{L}^{p_1}}^{p_1} &= \int_M \left| |\varphi(x)|^{p_t p_1\left(\frac{1+iy}{p_1} - \frac{iy}{p_0}\right)} \right| d\mu(x) \\ &= \int_M |\varphi(x)|^{p_t} \, d\mu(x) = 1 \; .\end{aligned}$$

Stoga je $\|f\|_{\mathcal{F}(X)} = \sup_{y \in \mathbf{R}} \{\|f(iy)\|_{\mathrm{L}^{p_0}}, \|f(1+iy)\|_{\mathrm{L}^{p_1}}\} = 1$, pa nalazimo da je

$$\|\varphi\|^{(t)} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : f(t) = \varphi\} \leq 1 = \|\varphi\|_{\mathrm{L}^{p_t}} \; .$$

Obrnuto, neka je $f \in \mathcal{F}(X)$ i φ jednostavna funkcija na M. Definirajmo, analogno kao u (15), preslikavanje g formulom:

$$g(z) := |\varphi(\cdot)|^{q_t\left(\frac{z}{q_1} + \frac{1-z}{q_0}\right)} e^{i \arg \varphi(\cdot)} \; , \tag{16}$$

pri čemu vrijedi

$$\frac{1}{q_t} = 1 - \frac{1}{p_t} \; .$$

Kako je $f(z)$ analitička i ograničena funkcija s vrijednostima u X_+, to preslikavanje definirano s

$$H(z) := \int_M f(z)g(z)\,d\mu\ ,$$

zadovoljava $H(t) = \int_M \varphi f(t)\,d\mu$, pa po Hadamardovom teoremu imamo

$$\begin{aligned}
|H(t)| &\leq \sup_{y\in\mathbf{R}}\{|H(iy)|, |H(1+iy)|\} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbf{R}}\{\|f(iy)g(iy)\|_{\mathrm{L}^1}, \|f(1+iy)g(1+iy)\|_{\mathrm{L}^1}\} \\
&\leq \sup_{y\in\mathbf{R}}\{\|f(iy)\|_{\mathrm{L}^{p_0}}\|g(iy)\|_{\mathrm{L}^{q_0}}, \|f(1+iy)\|_{\mathrm{L}^{p_1}}\|g(1+iy)\|_{\mathrm{L}^{q_1}}\} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{F}(X)}\|g\|_{\mathcal{F}(Y)} \\
&= \|\varphi\|_{\mathrm{L}^{q_t}}\|f\|_{\mathcal{F}(X)}\ ,
\end{aligned}$$

pri čemu je $Y := \mathrm{L}^{q_0}(M,\mu) \cap \mathrm{L}^{q_1}(M,\mu)$. Ovdje se jednakost između pretposljednjeg i posljednjeg retka u gornjem računu dobije potpuno analogno kao i prije, kada smo ocjenjivali funkciju f.

Ovime smo pokazali da vrijedi $|\int_M \varphi f(t)\,d\mu| \leq \|\varphi\|_{\mathrm{L}^{q_t}}\|f\|_{\mathcal{F}(X)}$, odakle zaključujemo da je $f(t) \in \mathrm{L}^{p_t}(M,\mu)$, te vrijedi $\|f(t)\|_{\mathrm{L}^{p_t}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(X)}$. Stoga, za jednostavnu funkciju ψ imamo traženu obratnu nejednakost:

$$\|\psi\|^{(t)} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(X)} : f \in \psi + K_t\} \geq \|\psi\|_{\mathrm{L}^{p_t}}\ .$$

Pokazali smo, dakle, da se norme $\|\cdot\|^{(t)}$ i $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^{p_t}}$ podudaraju na jednostavnim funkcijama. Budući da je $X = \mathrm{L}^{p_0}(M,\mu)\cap\mathrm{L}^{p_1}(M,\mu)$, a jednostavne funkcije su guste u X_t i $\mathrm{L}^{p_t}(M,\mu)$, zaključujemo da su ti prostori međusobno jednaki.

Kombinirajući upravo dokazano s Calderón–Lionsovim teoremom interpolacije imamo:

Teorem 3. *(**Stein**) Neka su (M,μ) i (N,ν) σ-konačni prostori s mjerom, te neka su $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Neka je T neprekinuta i uniformno ograničena funkcija sa S u $\mathcal{L}(\mathrm{L}^{p_0}(M,\mu) + \mathrm{L}^{p_1}(M,\mu), \mathrm{L}^{q_0}(N,\nu) + \mathrm{L}^{q_1}(N,\nu))$, analitička na nutrini od S, koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(a) $T(z) : \mathrm{L}^{p_0}(M,\mu) \cap \mathrm{L}^{p_1}(M,\mu) \longrightarrow \mathrm{L}^{q_0}(N,\nu) \cap \mathrm{L}^{q_1}(N,\nu)$, za svaki $z \in S$.

(b) Za svaki $y \in \mathbf{R}$ je $T(iy) \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^{p_0}(M,\mu), \mathrm{L}^{q_0}(N,\nu))$ i vrijedi

$$M_0 := \sup\{\|T(iy)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^{p_0},\mathrm{L}^{q_0})} : y \in \mathbf{R}\} < \infty.$$

(c) Za svaki $y \in \mathbf{R}$ je $T(1+iy) \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^{p_1}(M,\mu), \mathrm{L}^{q_1}(N,\nu))$ i vrijedi

$$M_1 := \sup\{\|T(1+iy)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^{p_1},\mathrm{L}^{q_1})} : y \in \mathbf{R}\} < \infty\ .$$

Tada je za svaki $t \in (0,1)$, operator $T(t) : \mathrm{L}^{p_t}(M,\mu) \longrightarrow \mathrm{L}^{q_t}(N,\nu)$ i vrijedi ocjena

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^{p_t},\mathrm{L}^{q_t})} \leq M_0^{1-t}M_1^t\ , \tag{17}$$

pri čemu su p_t i q_t određeni s $\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_0}$, $\frac{1}{q_t} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_0}$. ∎

3. Riesz–Thorinov teorem interpolacije. L^p ocjene.

Postoje brojne L^p ocjene za Fourierovu transformaciju i konvoluciju. One daju uvjete na p i q tako da Fourierova transformacija ili konvolucija danom funkcijom bude ograničen operator s L^p u L^q. Da bismo dobili te važne rezultate, ne moramo posegnuti za *teškom mašinerijom* apstraktne interpolacije koju smo razvili u prvom odjeljku ovog poglavlja. Već i Steinov teorem je preopćenit; ukoliko je $T(z) = T$ konstanta, kao neposrednu posljedicu Steinovog teorema imamo najjednostavniji teorem interpolacije L^p prostora. Riječ je o Riesz–Thorinovom teoremu, nakon kojeg do kraja odjeljka slijedi nekoliko primjera njegove uporabe.

Teorem 4. (**Riesz–Thorin**) *Neka su (M, μ) i (N, ν) σ-konačni prostori s mjerom, te neka su $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$. Neka je T linearan operator s $\mathrm{L}^{p_0}(M, \mu) \cap \mathrm{L}^{p_1}(M, \mu)$ u $\mathrm{L}^{q_0}(N, \nu) \cap \mathrm{L}^{q_1}(N, \nu)$, koji zadovoljava*

$$(\forall\, f \in \mathrm{L}^{p_0}(M, \mu) \cap \mathrm{L}^{p_1}(M, \mu)) \quad \|Tf\|_{\mathrm{L}^{q_0}} \le M_0\|f\|_{\mathrm{L}^{p_0}} \& \|Tf\|_{\mathrm{L}^{q_1}} \le M_0\|f\|_{\mathrm{L}^{p_1}} \ .$$

Tada je za svaki $f \in \mathrm{L}^{p_0}(M, \mu) \cap \mathrm{L}^{p_1}(M, \mu)$ i svaki $t \in \langle 0, 1\rangle$, $Tf \in \mathrm{L}^{q_t}(N, \nu)$ i vrijedi ocjena

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^{q_t}} \le M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{\mathrm{L}^{p_t}} \ , \tag{18}$$

pri čemu su p_t i q_t određeni s $\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_0}$, $\frac{1}{q_t} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_0}$. ∎

Primjer 3. (**Hausdorff–Youngova nejednakost**) Sada imamo sve priređeno da dokažemo teorem I.7, kao što smo najavili u prvom poglavlju. Podsjetimo se, ako je $1 \le p \le 2$, onda je Fourierova transformacija ograničen linearan operator s $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ u $\mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^n)$, norme manje ili jednake 1.

Označimo s $\mathcal{F}$ operator Fourierove transformacije, $\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n)$ (ovdje imamo $p_0 = q_0 = 2, p_1 = 1, q_1 = \infty$). Iz Plancherelovog teorema slijedi

$$\|\mathcal{F}f\|_{\mathrm{L}^2} = \|f\|_{\mathrm{L}^2} \ .$$

S druge strane, iz formule $(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\, dx$ slijedi ocjena

$$\|\mathcal{F}f\|_{\mathrm{L}^\infty} \le \|f\|_{\mathrm{L}^1} \ .$$

Iz posljednje dvije nejednakosti i Riesz–Thorinovog teorema slijedi da je $\mathcal{F}f \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^n)$ za $1 \le p \le 2$ i vrijedi $(M_0 = M_1 = 1)$

$$\|\mathcal{F}f\|_{\mathrm{L}^{p'}} \le \|f\|_{\mathrm{L}^p} \ .$$

∎

Primjer 4. (**Youngova nejednakost**) Za $f, g \in \mathcal{S}$ definiramo konvoluciju $f * g$ formulom

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x - y) g(y)\, dy \ . \tag{19}$$

Ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$, a $g \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^n)$, onda, zbog Hölderove nejednakosti i translacijske invarijantnosti Lebesgueove mjere, za svaki x gornji integral apsolutno konvergira i vrijedi ocjena

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^\infty} \le \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}} \ . \tag{20}$$

Nadalje, neka su $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Tada zbog Fubinijevog teorema vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)g(y)| \, dy \, dx = \|f\|_{\mathrm{L}^1} \|g\|_{\mathrm{L}^1} \; ,$$

pa je i u ovom slučaju konvolucija $f * g$ dobro definirana i zadovoljava ocjenu

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^1} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1} \|g\|_{\mathrm{L}^1} \; . \tag{21}$$

Koristeći Riesz–Thorinov teorem, sada možemo definirati konvoluciju i na drugim Lebesgueovim prostorima.

Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Tada, zbog formula (19) i (21), $T_f(g) := f * g$ definira ograničen operator s $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$, odnosno $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n)$, u samog sebe. U oba je slučaja norma operatora T_f ocijenjena s $\|f\|_{\mathrm{L}^1}$. Sada teorem interpolacije daje da se za svaki p, T_f proširuje do ograničenog operatora s $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$, s istom ocjenom norme.

Neka je sada $g \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$, te označimo s T_g konvoluciju $f * g$. Po prethodnom vrijedi

$$\begin{aligned} T_g &: \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n) \, , \quad \|T_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^1, \mathrm{L}^p)} \leq \|g\|_{\mathrm{L}^p} \; , \\ T_g &: \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n) \, , \quad \|T_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^{p'}, \mathrm{L}^\infty)} \leq \|g\|_{\mathrm{L}^p} \; . \end{aligned}$$

Ponovno primjenjujemo Riesz–Thorinov teorem. T_f proširuje do ograničenog operatora s $\mathrm{L}^r(\mathbf{R}^n)$ u $\mathrm{L}^s(\mathbf{R}^n)$, pri čemu eksponenti r i s zadovoljavaju

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{s} \; , \tag{22}$$

i vrijedi ocjena $\|f * g\|_{\mathrm{L}^s} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^r} \|g\|_{\mathrm{L}^p}$. Ovo je tzv. *Youngova nejednakost.* ∎

Primjer 5. Htjeli bismo znati da li se i ovako proširena konvolucija, definirana s pomoću Riesz–Thorinovog teorema još uvijek može računati integralnom formulom (19). Odgovor na ovo pitanje je pozitivan, a dokaz provodimo u dvije etape.

Neka su $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n), g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n), h \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^n)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su funkcije f, g i h nenegativne. Računajmo

$$\int h(x) \left(\int f(x-y) g(y) \, dy \right) dx = \int g(y) \left(\int f(x-y) h(x) \, dx \right) dy \leq \|g\|_{\mathrm{L}^1} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|h\|_{\mathrm{L}^{p'}} \; .$$

Kako gornje vrijedi za svaki $h \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^n)$, integral $\int f(x-y)g(y)\,dy$ konvergira za skoro svaki x, definirajući L^p funkciju norme manje ili jednake $\|g\|_{\mathrm{L}^1} \|f\|_{\mathrm{L}^p}$. Međutim, preslikavanje $f \mapsto \int f(x-y)g(y)\,dy$ se podudara s konvolucijom na $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n)$ pa stoga, zbog Riesz–Thorinovog teorema, i na svim L^p prostorima.

Uzmimo sada p, r i s kao u (22), te pretpostavimo da su $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n), g \in \mathrm{L}^r(\mathbf{R}^n)$ i $h \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{L}^{s'}(\mathbf{R}^n)$ nenegativne funkcije. Tada, zbog Hölderove i Youngove nejednakosti, vrijedi

$$\int g(y) \left(\int f(x-y) h(x) \, dx \right) dy \leq \|g\|_{\mathrm{L}^r} \|\tilde{f} * h\|_{\mathrm{L}^{r'}} \leq \|g\|_{\mathrm{L}^r} \|\tilde{f}\|_{\mathrm{L}^p} \|h\|_{\mathrm{L}^{s'}} \; .$$

Zbog Fubinijevog je teorema, stoga, $g(y)f(x-y)h(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, te $y \mapsto g(y)f(x-y)h(x) \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ (ss x) i vrijedi

$$\int h(x) \left(\int f(x-y) g(y) \, dy \right) dx \leq \|g\|_{\mathrm{L}^r} \|\tilde{f}\|_{\mathrm{L}^p} \|h\|_{\mathrm{L}^{s'}} \; .$$

Zbog proizvoljnosti funkcije h, zaključujemo da je $y \mapsto f(x-y)g(y)$ skoro svuda L^1 funkcija, a $x \mapsto \int f(x-y)g(y)\,dy$ L^s funkcija s normom manjom ili jednakom $\|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^r}$. Kako se ograničena linearna preslikavanja $g \mapsto f * g$ i $g \mapsto \int f(x-y)g(y)\,dy$ podudaraju na $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) \cap \mathrm{L}^r(\mathbf{R}^n)$, podudaraju se i na $\mathrm{L}^r(\mathbf{R}^n)$. ∎

4. Restrikcija Fourierove transformacije na kvadratične plohe

Na kraju ovog poglavlja dajemo jednu važnu primjenu Steinovog teorema. Za razliku od prethodnih odjeljaka, ovdje se *neće raditi samo o interpolaciji*, već će se načiniti svojevrsna sinteza svega do sada učinjenog, koja će nam poslužiti kao uvod u glavni cilj ovog rada, proučavanje rješenja (nelinearnih) valnih jednadžbi.

Neka je $M \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, te μ pozitivna mjera koncentrirana na M, s umjerenim rastom u beskonačnosti. Razmotrimo sljedeća dva problema:

(A) Za koje vrijednosti od $p, 1 \leq p < 2, f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^{n+1})$ povlači da $\hat{f}$ ima dobro definiranu restrikciju na $\mathrm{L}^2(M, \mu)$, uz ocjenu

$$\left(\int |\hat{f}|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \leq C_p \|f\|_{\mathrm{L}^p} \,, \tag{23}$$

za neku konstantu C_p.

(B) Za koje vrijednosti od q, $2 < q \leq \infty$, temperirana distribucija $F\mu$, za proizvoljan $F \in \mathrm{L}^2(M, \mu)$ ima inverznu Fourierovu transformaciju u $\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^{n+1})$, te vrijedi

$$\|(F\mu)^\vee\|_{\mathrm{L}^q} \leq C_q \left(\int |F|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \,, \tag{24}$$

za neku konstantu C_q.

Primijetimo najprije da su gornji problemi dobro postavljeni. Naime, po Hausdorff-Youngovoj nejednakosti, dokazanoj u prethodnom odjeljku, Fourierova je transformacija ograničen linearan operator s $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^{n+1})$ u $\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^{n+1})$, pa ima smisla pitati da li $\hat{f}$ ima restrikciju na M odgovarajućih svojstava. Nadalje, (inverzna) Fourierova transformacija temperirane distribucije $F\mu$ jest funkcija, pa ima smisla pitati da li je ona u nekom Lebesgueovom prostoru.

Lema 1. *Ukoliko je $q = p'$, dualan indeksu p, onda su problemi (A) i (B) ekvivalentni.*

Dokaz. Neka je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^{n+1})$, a $F \in \mathrm{L}^2(M, \mu)$. Promotrimo dualan produkt $(F\mu)^\vee$ i f:

$$\langle (F\mu)^\vee, f\rangle = \langle F\mu, \hat{f}\rangle = \int \bar{\hat{f}} F \, d\mu \,,$$

Pretpostavimo da neki p rješava problem (A). Uzimanjem apsolutne vrijednosti u gornjem računu i koristeći Cauchy-Schwartzovu nejednakost dobivamo

$$|\langle (F\mu)^\vee, f\rangle| \leq \left(\int |\hat{f}|^2 \, d\mu\right)^{1/2} \left(\int |F|^2 \, d\mu\right)^{1/2} .$$

Zaključujemo da je $(F\mu)^\vee \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$, pa iz Hölderove nejednakosti i (23) slijedi ocjena (24), drugim riječima p' rješava (B).

Obrnuto, ako neki q rješava problem (B), onda uz $p = q'$ imamo

$$\langle F\mu, \hat{f}\rangle = \langle (F\mu)^\vee, f\rangle = \int \bar{f} (F\mu)^\vee \, dx \,.$$

Iz posljednjeg slijedi $|\langle F\mu, \hat{f}\rangle| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|(F\mu)^\vee\|_{\mathrm{L}^q}$. Odavdje vidimo da je $\hat{f} \in \mathrm{L}^2(M, \mu)$, pa ponovno možemo primijeniti Hölderovu nejednakost te zaključiti da f zadovoljava nejednakost (23).

Q.E.D.

Neka je M kvadratična ploha dana s $M := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : R(x) = r\}$, pri čemu je R polinom drugog stupnja s realnim koeficijentima, a r realna konstanta. Neka je k tome R funkcija od točno $n+1$ varijabli, tako da je, osim izoliranih točaka, M upravo n-dimenzionalna glatka mnogostrukost u $\mathbf{R}^{n+1}$. Postoji kanonska mjera μ pridružena funkciji R dana s

$$d\mu := \frac{dx_1 \dots dx_n}{\left|\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}}\right|} ,$$

tamo gdje je $\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}} \neq 0$, tako da se M može zadati dajući funkcionalnu ovisnost varijable x_{n+1} o $x_1, \dots, x_n$. Budući da je diferencijal funkcije R svuda maksimalnog ranga (ranga n), u okolini svake točke možemo naći lokalni koordinatni sustav tako da gornje vrijedi. Jednostavnosti radi pretpostavimo da $\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}} \neq 0$ vrijedi globalno. To nije nikakvo važnije ograničenje na plohu M, dok se u suprotnom računi bitno kompliciraju.

Lema 2. *Pretpostavimo da možemo dokazati nejednakost*

$$\|\check{\mu} * g\|_{\mathrm{L}^q} \leq C^2 \|g\|_{\mathrm{L}^p} , \tag{25}$$

za p i q kao ranije. Tada je problem (A) riješen za takav p, uz istu konstantu kao u (23).

Dokaz. Zaista, vrijedi

$$\begin{aligned} \int |\hat{f}|^2 \, d\mu &= \int \bar{\hat{f}} \hat{f} \, d\mu \\ &= \int \bar{f} (\hat{f}\mu)^\vee \, dx = \int \bar{f} (f * \check{\mu}) \, dx \\ &\leq \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|\check{\mu} * f\|_{\mathrm{L}^q} . \end{aligned}$$

Odavdje i iz (22) slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Promotrimo analitičku familiju distribucija

$$G_z(x) := \gamma(z)(R(x) - r)_+^z , \tag{26}$$

pri čemu je γ analitička funkcija s jednostrukom nultočkom u točki $z = -1$. Za $t \in \mathbf{R}$ definirajmo M_t na analogan način kao plohu M, s time da je sada $r = t$ promjenljiv. Zbog implicitne pretpostavke o regularnosti preslikavanja R imamo dobro definiranu zamjenu varijabli $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, t)$, kojoj je Jacobijan $\frac{\partial R}{\partial x_{n+1}}$.

Neka je φ test funkcija. Za dani z promotrimo dualan produkt G_z s φ:

$$\begin{aligned} \langle G_z, \varphi \rangle &= \gamma(z) \int_{\mathbf{R}^{n+1}} (R(x) - r)_+^z \varphi(x) \, dx \\ &= \gamma(z) \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{M_t} \varphi \, d\mu_t \right) (t - r)_+^z \, dt \end{aligned}$$

Označimo li s $\Phi(t)$ unutarnji integral imamo $\langle G_z, \varphi \rangle = \gamma(z) \int_{\mathbf{R}} \Phi(t) (t - r)^z{}_+ \, dt$. Iskoristimo Laurentov razvoj oko točke $z = -1$ distribucije x_+^z ([G-Š], str. 176):

$$x_+^z = \frac{\delta(x)}{z+1} + x_+^{-1} + (z+1) x_+^{-1} \ln x_+ + \dots + \frac{(z+1)^k}{k!} x_+^{-1} \ln^k x_+ + \dots .$$

Uvrštavanjem u gornji intergral i prijelaskom na limes kada $z \longrightarrow -1$ dobivamo

$$\lim_{z\to -1}\langle G_z,\varphi\rangle = C\int_M \varphi\, d\mu = \langle C\mu,\varphi\rangle \ ,$$

pri čemu je $C = \lim_{z\to -1}\frac{\gamma(z)}{z+1}$. Stoga analitičkim produljenjem možemo proširiti G_z na prugu $-\lambda_0 \le \mathsf{Re}\, z \le 0$ i promatrati pridruženu familiju operatora $T_z g := (G_z\hat{g})^\vee = \check{G}_z * g$. Budući da je G_z ograničen na $\mathsf{Re}\, z = 0$, slijedi ocjena

$$\|T_z g\|_{\mathrm{L}^2} \le |\gamma(z)|\|g\|_{\mathrm{L}^2} \ .$$

Funkciju γ ćemo birati tako da ima najviše eksponencijalan rast pri $\mathsf{Im}\, z \longrightarrow \infty$ (napomena 3). Kao neposredna posljedica Steinovog teorema slijedi

Lema 3. *Pretpostavimo da možemo dokazati kako je $\check{G}_z$ ograničen na pravcu* $\mathsf{Re}\, z = -\lambda_0$, *za $\lambda_0 > 1$, te da funkcija $t \mapsto \|\check{G}_{-\lambda_0+it}\|_{\mathrm{L}^\infty}$ ima najviše eksponencijalan rast u beskonačnosti. Tada (25) vrijedi za*

$$p = \frac{2\lambda_0}{\lambda_0+1}\ ,\ q = p' = \frac{2\lambda_0}{\lambda_0-1}\ .$$

∎

Na ovaj je način problem reduciran na računanje inverzne transformacije $\check{G}_z$, odakle se jednostavno očita tražena vrijednost z, za koju je ona ograničena. To smo načinili u sljedećim primjerima.

Primjer 6. Neka je $M := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} - Q(x',x') = 0\}$, pri čemu je $x' := (x_1,\dots,x_n)$, $x := (x', x_{n+1})$, a Q nedegenerirana kvadratna forma na $\mathbf{R}^n$ signature (a,b)

$$Q(x',x') := x_1^2 + \ldots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - x_n^2 \ . \tag{27}$$

Ovdje su a i b nenegativni cijeli brojevi za koje vrijedi $a+b=n$. Ovako definiran M zvati ćemo kvadratičnom plohom *prve vrste*.

Promotrimo analitičku familiju poopćenih funkcija

$$G_z(x) := \Gamma(z+1)^{-1}\left(x_{n+1} - Q(x',x')\right)_+^z \ .$$

Cilj nam je izračunati inverznu Fourierovu transformaciju distribucije G_z. U [G-Š], str. 360 nalazimo integral

$$\int_{\mathbf{R}^+} x^z e^{2\pi i x y}\, dx = i e^{\frac{iz\pi}{2}}\Gamma(z+1)(2\pi y + i0)^{-z-1} \ ,$$

odakle slijedi

(28)

$$\Gamma(z+1)^{-1}\int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x_{n+1} y_{n+1}}\left(x_{n+1} - Q(x',x')\right)_+^z\, dx_{n+1} = i e^{\frac{iz\pi}{2}} e^{2\pi i y_{n+1} Q(x',x')}(2\pi y_{n+1} + i0)^{-z-1} \ .$$

Nadalje, vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i x y} e^{2\pi i t x^2}\, dx = \left(\frac{2}{|t|}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-i\pi}{4}\operatorname{sign} t} e^{-\frac{\pi y^2}{2t}} \ .$$

Kombinirajući posljednje s (28) dobijamo da je tražena inverzna Fourierova transformacija jednaka

$$\check{G}_z(y) = i e^{\frac{iz\pi}{2}}\left(\frac{2}{|y_{n+1}|}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}(b-a)} e^{-\frac{\pi Q(y',y')}{2y_{n+1}}}(2\pi y_{n+1} + i0)^{-z-1} \ . \tag{29}$$

Ona je očito ograničena samo ukoliko je $\mathsf{Re}\,(-z-1-\frac{n}{2}) = 0$, odnosno $\mathsf{Re}\, z = -\frac{n+2}{2}$. ∎

Primjer 7. Drugi kanonski slučaj kvadratične plohe, tzv. ploha *druge vrste* definira se kao $M := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : Q(x,x) = 0\}$, gdje je Q nedegenerirana kvadratna forma na $\mathbf{R}^{n+1}$ signature (a,b). Drugim riječima, Q je dana s

$$Q(x,x) := x_1^2 + \ldots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - x_{n+1}^2 \,. \tag{30}$$

Ovdje su a i b nenegativni cijeli brojevi za koje vrijedi $a + b = n + 1$.

Za $n \geq 2$ definirajmo analitičku familiju

$$G_z(x) := \Gamma(z+1)^{-1}\Gamma\left(z + \frac{n+1}{2}\right)^{-1} G(x,x)_+^z \,.$$

U slučaju kada je $n = 1$, M je unija dvaju pravaca. Inverzna Fourierova transformacija distribucije G_z je ([G-Š], str. 365)

$$\begin{aligned} \check{G}_z(y) = 2^{n+1+2z}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{2i}\bigg(& e^{-i\left(z+\frac{b}{2}\right)\pi}\left(4\pi^2 Q(y,y) - i0\right)^{-z-\frac{n+1}{2}} \\ & -e^{i\left(z+\frac{b}{2}\right)\pi}\left(4\pi^2 Q(y,y) + i0\right)^{-z-\frac{n+1}{2}}\bigg) \,. \end{aligned} \tag{31}$$

Gornje je, pak, ograničeno samo ukoliko je $\operatorname{Re} z = \frac{n+1}{2}$. ∎

Primjer 8. Kvadratična ploha *treće* vrste definira se u obliku $M := \left\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : Q(x,x) = 1\right\}$, gdje je Q forma iz prethodnog primjera. Neka je

$$G_z(x) := h(z)\Gamma(z+1)^{-1}\left(1 - Q(x,x)\right)_+^z \,,$$

pri čemu je h odgovarajuća funkcija. Inverznu Fourierovu transformaciju $\check{G}_z$ nalazimo u [Sz], str. 709

$$\begin{aligned} \check{G}_z(y) = 2^{\frac{n+1}{2}+z}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Bigg[& -\sin\pi\left(z+\frac{a}{2}\right)\frac{K_{\frac{n+1}{2}+z}(Q(2\pi y,2\pi y)_-^{1/2})}{Q(2\pi y,2\pi y)_-^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}+z\right)}} \\ & + \frac{\pi}{2\sin\pi\left(z+\frac{n+1}{2}\right)}\Bigg(\sin\pi\left(z+\frac{a}{2}\right)\frac{J_{\frac{n+1}{2}+z}(Q(2\pi y,2\pi y)_+^{1/2})}{Q(2\pi y,2\pi y)_+^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}+z\right)}} \\ & + \sin\pi\frac{b}{2}\frac{J_{-\frac{n+1}{2}-z}(Q(2\pi y,2\pi y)_+^{1/2})}{Q(2\pi y,2\pi y)_+^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}+z\right)}}\Bigg)\Bigg] \,, \end{aligned} \tag{32}$$

pri čemu su K i J Besselove funkcije.

Ukoliko je Q pozitivno definitna ($b = 0$), onda u (32) prvi i treći član otpadaju, pa iz $h = 1$ slijedi poznata formula

$$\left((1 - |x|^2)_+^z\right)^\vee = \frac{1}{2}\pi^{-z}|y|^{-z-\frac{n+1}{2}}J_{z+\frac{n+1}{2}}(2\pi|y|) \,. \tag{33}$$

Ovo je pak ograničeno ([G-Š], str. 185) ukoliko je $\operatorname{Re} z \geq -\frac{n+2}{2}$. ∎

Iz linearne algebre slijedi da svaka kvadratna ploha, koja nije sadržana u hiperravnini, može biti afinim transformacijama svedena na jedan od prethodna tri oblika. Budući da afine transformacije ne utječu na rješenja problema (A) i (B), dovoljno je promatrati samo ta tri slučaja.

Primjetimo da iz teorema slijedi kako u najvećem broju slučajeva $\lambda_0 = (n+2)/2$ zadovoljava naše potrebe (što vodi na $p = 2(n+2)/(n+4)$). Taj je rezultat i najbolji mogući, što slijedi iz

Lema 4. (**A.W.Knapp**) *Neka je M n–dimenzionalna C^∞ mnogostrukost uložena u $\mathbf{R}^{n+1}$, te μ mjera koja ne iščezava na M. Tada (23) ne može vrijediti ukoliko nije $p \leq 2(n+2)/(n+4)$).* ∎

Teorem 5. *Nužan i dovoljan uvjet za pozitivno rješenje problema (A) i (B) je:*
U slučaju plohe prve vrste

$$p = \frac{2(n+2)}{n+4}, \quad q = \frac{2(n+2)}{n} .$$

U slučaju plohe druge vrste, za $n \geq 2$

$$p = \frac{2(n+1)}{n+3}, \quad q = \frac{2(n+1)}{n-1} .$$

U slučaju plohe treće vrste

(a) $a = n+1$, $b = 0$ i

$$\begin{aligned} 1 \leq & p \leq \frac{2(n+2)}{n+4} , \\ \frac{2(n+2)}{n} \leq & q \leq \infty . \end{aligned}$$

(b) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \geq 3$ i

$$\begin{aligned} \frac{2(n+1)}{n+3} \leq p \leq \frac{2(n+2)}{n+4} , \\ \frac{2(n+2)}{n} \leq q \leq \frac{2(n+1)}{n-1} . \end{aligned}$$

(c) $a = b = 1$, $n = 2$ i

$$1 < p < \frac{6}{5}, \quad 6 \leq q < \infty .$$

∎

Unatoč činjenici da je $q = p'$, radi preglednosti smo eksplicitno naveli vrijednosti oba indeksa. Primijetimo da iz teorema slijedi kako u najvećem broju slučajeva $\lambda_0 = (n+2)/2$ zadovoljava naše potrebe (što vodi na $p = 2(n+2)/(n+4)$).

Teorem 5 je djelomično već dokazan. Naime iz leme 4 i prethodnog primjera slijedi nužnost gornjih ocjena za p. Nužnost donjih ocjena za p može se dobiti razmatranjem rasta mjere μ u beskonačnosti i u to se ovdje nećemo upuštati (npr. slučaj (b) plohe treće vrste opisan je u [Sz]). Jedinstvenost u slučaju ploha prve i druge vrste slijedi iz invarijantnosti tih ploha s obzirom na neke transformacije. Primjerice, u prvom slučaju razmatramo homogenost s obzirom na anizotropno skaliranje

$$G_t f(x) := f(tx_1, \ldots, tx_n, t^2 x_{n+1}) .$$

Jednostavnom zamjenom varijabli dobije se

$$\|G_t f\|_{\mathrm{L}^p} = t^{-\frac{n+2}{p}} \|f\|_{\mathrm{L}^p} . \tag{34}$$

S druge pak strane, slično se dobije da je $(G_t f)^\wedge(y) = t^{-(n+2)} G_{\frac{1}{t}} \hat{f}(y)$, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \|t^{-(n+2)} G_{\frac{1}{t}} \hat{f}\|_{\mathrm{L}^2(M,\mu)} &= t^{-(n+2)} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}\left(\frac{1}{t} y', \frac{1}{t^2} |y'|^2 \right) dy' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= t^{-\frac{n+4}{2}} \|f\|_{\mathrm{L}^2(M,\mu)} . \end{aligned} \tag{35}$$

Uspoređujući (34) i (35), zaključujemo da p mora biti kao u teoremu 5, kako bi vrijedila nejednakost u (23).

III. Fundamentalna rješenja parcijalnih diferencijalnih operatora

1. Lokalna rješivost diferencijalnih operatora

U ovom poglavlju dajemo neke primjene Fourierove transformacije u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Započinjemo sa zacijelo najprimitivnijem pitanjem vezanim uz diferencijalne jednadžbe, pa i jednadžbe uopće: Da li dana jednadžba ima rješenja ili ne. Precizirajmo, neka je zadan linearan parcijalan diferencijalni operator oblika

$$L := \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x) D^\alpha \ , \tag{1}$$

pri čemu su c_α glatke funkcije, a $D^\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}}\partial^\alpha$. U vezi s operatorom L promatramo jednadžbu

$$Lu = f \ . \tag{2}$$

Zanima nas da li za danu funkciju f, definiranu u okolini neke točke, postoji rješenje gornje jednadžbe, te kakvo je. U ovoj općenitosti to je jako teško pitanje. Naime, obično gornju jednadžbu rješavamo na nekom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Najčešće je Ω mnogostrukost s rubom, ili pak ima točke u beskonačnosti, pa ponašanje funkcije f na rubu ili u beskonačnosti može stvarati poteškoće, te u bitnome utjecati na odgovor na dano pitanje. Zbog toga ćemo razmotriti ovo pitanje lokalno. U tu svrhu imamo sljedeću

Definicija. Diferencijalni operator L je *lokalno rješiv* u točki $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ako postoji okolina U točke x_0 tako da vrijedi

$$(\forall\, f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n))(\exists\, u \in \mathcal{D}')(\forall\, \S \in \mathcal{U}) \quad \mathcal{L}\sqcap(\S) = \{(\S) \ .$$

Ponekad se kaže da je tada jednadžba $Lu = f$ lokalno rješiva. Za operator L kažemo da je *globalno rješiv* na otvorenom skupu Ω, ako je lokalno rješiv u svakoj svojoj točki.

Napomena 1. Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da f ima kompaktan nosač. Naime, za $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ i $x_0 \in \mathbf{R}^n$ možemo uzeti $\varphi \in \mathcal{D}$ takvo da je $\varphi = 1$ na nekoj okolini točke x_0. Ukoliko riješimo jednadžbu $Lu = f\varphi$ u blizini x_0, onda je u također i rješenje polazne zadaće, budući da je $f\varphi = f$ u okolini točke x_0. ∎

Uz najjače uvjete, analitičnost koeficijenata c_α i funkcije f, klasičan je rezultat Cauchyja i Kowalevske koji daje lokalnu egzistenciju rješenja za nekarakterističnu Cauchyjevu zadaću. Analitičnost se, međutim, ovdje ne može ispustiti i u tom se smislu ovaj rezultat ne može poopćiti. Hans Lewy je 1956. godine dao poznati primjer linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe u trodimenzionalnom prostoru koja nije lokalno rješiva niti u jednoj točki prostora $\mathbf{R}^3$. Drugim riječima, Lewy je našao linearan parcijalan diferencijalni operator s analitičkim (kompleksnim) koeficijentima, takav da čim malo oslabimo desnu stranu, te od f zahtijevamo samo da bude C^∞ funkcija, rješenje jednadžbe $Lu = f$ ne postoji nigdje, čak niti u distribucijama. No unatoč rečenome, Lewyjev operator izgleda vrlo *pitomo* $(z = x + iy)$:

$$L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + i(x+iy)\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + iz\frac{\partial}{\partial t} \ .$$

F. Treves je 1962. godine dao primjer operatora s realnim koeficijentima koji nije lokalno rješiv (vidjeti [T]).

Postavlja se pitanje karakterizacije lokalno rješivih operatora. Međutim to je pitanje vrlo teško i ovdje se nećemo baviti time. Ograničit ćemo se na operatore s *konstantnim koeficijentima*, tj. operatore oblika (1), pri čemu su c_α konstante, za svaki multiindeks α. Nadalje, pretpostavljamo da vrijedi

$$\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha| \neq 0 \,, \tag{3}$$

te u tom slučaju kažemo da je L *reda* m. Ukoliko definiramo

$$P(\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \xi^\alpha \,, \tag{4}$$

onda možemo zapisati da je $L = P(D)$. Polinom P ćemo zvati *simbolom*, a onaj njegov dio koji sadrži samo potencije reda m zvat ćemo *glavnim simbolom* operatora L. Kao što smo već vidjeli u prvom poglavlju, ovakav zapis je više nego zgodan za primjenu Fourierove transformacije, budući da djelovanje operatora L na funkciju time prelazi u množenje transformata funkcije njegovim simbolom.

Operatore s konstantnim koeficijentima smo izdvojili već i zbog toga što se među njima nalaze tzv. *valni* operatori, koji se proučavaju u ovom radu. U tom, jednostavnom slučaju, odgovor na pitanje o lokalnoj rješivosti je pozitivan. Štoviše, svaki parcijalan diferencijalan operator s konstantnim koeficijentima je globalno rješiv. Ovdje dajemo jednostavan izravan dokaz ovog rezultata.

Teorem 1. *Neka je L parcijalan diferencijalni operator s konstantnim koeficijentima. Tada za svaki $f \in \mathcal{D}$ postoji $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ koji zadovoljava $Lu = f$ na $\mathbf{R}^n$.*

Dokaz. (**L. Nirenberg**) Formalnom primjenom Fourierove transformacije na jednadžbu $Lu = P(D)u = f$ dobijamo $P(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Stoga bi se činilo prirodnim definirati traženo rješenje u jednadžbe s

$$u(x) = \left(\frac{\hat{f}}{P}\right)^{\vee}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}\,d\xi \,.$$

Ovdje, međutim, nastaju poteškoće. P je polinom u n varijabli i ima mnoštvo (čitavu mnogostrukost) nultočaka. Stoga gornja formula bez daljnjeg nema smisla.

Ideja je u sljedećem: Kako je $f \in \mathcal{D}$ to se $\hat{f}$ može proširiti do cijele funkcije na $\mathbf{C}^n$. Dakle, $\hat{f}/P$ je meromorfna funkcija, pa ćemo deformacijom konture integracije zaobići nultočke od P. Preciznije, neka je η jediničan vektor u $\mathbf{R}^n$ koji nije nultočka glavnog simbola operatora L. Zamjenom koordinata (rotacijom i dilatacijom) možemo postići da η *gleda* u nekom od kanonskih smjerova. Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\eta = (0,\dots,0,1)$. Također, množenjem s konstantom možemo postići da je koeficijent uz ∂_n^m jednak 1. Tada je $L = \partial_n^m + L'$, pri čemu je L' parcijalan diferencijalni operator reda manjeg ili jednakog $m-1$ u ∂_n.

Vektor $\xi \in \mathbf{R}^n$ zapišimo u obliku $\xi = (\xi', \xi_n)$, gdje je $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Neka je ξ' proizvoljan ali čvrst. Promotrimo polinom $P(\xi', \cdot)$. To je polinom jedne varijable ξ_n, stupnja m, nad poljem kompleksnih brojeva. Budući da je $\mathbf{C}$ algebarski zatvoreno polje, to za svaki ξ' $P(\xi', \cdot)$ ima točno m kompleksnih nultočaka. Označimo ih s $\lambda_1(\xi'), \dots, \lambda_m(\xi')$, pri čemu smo ih poredali po rastućim imaginarnim dijelovima, te po rastućim realnim dijelovima ako su imaginarni jednaki. Zbog neprekinute ovisnosti korjena polinoma o koeficijentima slijedi da su $\mathrm{Im}\,\lambda_j(\xi')$ neprekinuti po ξ' za sve j. Trebati će nam dvije leme.

Lema 1. *Postoji izmjeriva funkcija $\Phi : \mathbf{R}^{n-1} \longrightarrow [-m-1, m+1]$ takva da vrijedi*

$$(\forall\, \xi' \in \mathbf{R}^{n-1}) \min_j \left|\Phi(\xi') - \lambda_j(\xi')\right| \geq 1\,. \tag{5}$$

∎

Lema 2. *Neka je $P(\xi', \xi_n) = \xi_n^m + \langle$niži članovi u $\xi_n\rangle$, te neka je $N(P) := \{\zeta \in \mathbf{C}^n : P(\zeta) = 0\}$ skup svih nultočaka polinoma P. Također, neka je $d(\xi) := d(\xi, N(P))$. Tada vrijedi*

$$|P(\xi)| \geq \left(\frac{d(\xi)}{2}\right)^m\,.$$

∎

Vratimo se na dokaz teorema. Definirajmo funkciju u formulom

$$u(x) := \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{M(\xi')} e^{2\pi i x\cdot\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}\, d\xi_n d\xi'\,, \tag{6}$$

gdje je $M(\xi') := \{\xi \in \mathbf{R}^n : \mathsf{Im}\, \xi_n = \Phi(\xi')\}$, a Φ funkcija kao iz Leme 1. Na osnovu Lema zaključujemo da duž$M(\xi')$ vrijedi ocjena $|P(\xi)| \geq 2^{-m}$. Kako f ima kompaktan nosač, to postoji $R > 0$ tako da je $\operatorname{supp} f \subseteq \mathrm{K}(0, R)$. Za $\zeta \in \mathbf{C}^n$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ dobijamo da je Fourierova transformacija funkcije f

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathrm{K}(0,R)} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{2\pi i x\cdot\eta} f(x)\, dx\,.$$

Odavdje dobivamo ocjenu $|\hat{f}(\zeta)| \leq C_0 e^{2\pi R|\mathsf{Im}\,\zeta|}$, pri čemu konstanta C_0 ovisi o R i funkciji f. Slično, za $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ imamo

$$\zeta^\alpha \hat{f}(\zeta) = \int_{\mathrm{K}(0,R)} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{2\pi i x\cdot\eta} D^\alpha f(x)\, dx\,,$$

odakle slijedi ocjena

$$|\zeta^\alpha| \left|\hat{f}(\zeta)\right| \leq \sup |D^\alpha f| \int_{\mathrm{K}(0,R)} e^{2\pi i x\cdot\eta}\, dx\,.$$

Označimo li s C_α gornji supremum, dobijamo sličnu ocjenu kao ranije

$$\left(\prod_{k=1}^m |\zeta_k|^{\alpha_k}\right) \left|\hat{f}(\zeta)\right| \leq C_\alpha e^{2\pi R|\mathsf{Im}\,\zeta|}\,.$$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da za svaki $N \in \mathbf{N}_0$ vrijedi ocjena

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq \frac{C_N e^{2\pi R|\mathsf{Im}\,\zeta|}}{(1 + |\zeta|)^N}\,, \tag{7}$$

za neku pozitivnu konstantu C_N. Odavdje slijedi da $\hat{f}$ trne čim $|\mathsf{Re}\,\zeta| \longrightarrow 0$, tako dugo dok je $\mathsf{Im}\,\zeta$ ograničen. U svjetlu prethodnog razmatranja vidimo da integral u (6), zajedno sa svim svojim parcijalnim derivacijama, konvergira apsolutno i uniformno definirajući C^∞ funkciju u. Time smo opravdali sljedeći račun:

$$\begin{aligned} Lu(x) = P(D)u(x) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{M(\xi')} P(D) e^{2\pi i x\cdot\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)}\, d\xi_n d\xi' \\ &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{M(\xi')} e^{2\pi i x\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi_n d\xi' = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \\ &= f(x)\ . \end{aligned}$$

Ovdje smo u pretposljednjoj jednakosti koristili Cauchyjev teorem.

Q.E.D.

Preostaje dokazati leme.

Dokaz Leme 1. Interval $[-m-1, m+1]$ ima duljinu $2m+2$, stoga za svaki $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ postoji podinterval duljine 2 koji ne sadrži niti jednu od točaka $\mathsf{Im}\,\lambda_j(\xi')$. Preslikavanje Φ ćemo definirati kao središnju točku tog intervala. Preciznije, definirajmo

$$\begin{aligned} \mu_0(\xi') &:= -m-1\ , \\ \mu_{m+1}(\xi') &:= m+1\ , \end{aligned}$$

dok za $1 \le j \le m$ stavljamo

$$\mu_j(\xi') := \max\{\min\{\mathsf{Im}\,\lambda_j(\xi'), m+1\}, -m-1\}\ .$$

Funkcije μ_j su očito neprekinute za svaki j, stoga su skupovi

$$V_j := \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1} : \mu_{j+1}(\xi') - \mu_j(\xi') \ge 2\},\ j = 0, \ldots, m+1$$

izmjerivi i pokrivaju čitav $\mathbf{R}^{n-1}$. Možemo konstruirati disjunktne izmjerive podskupove W_j koji također pokrivaju $\mathbf{R}^{n-1}$. Sada je funkcija Φ definirana s

$$\Phi(\xi') := \frac{1}{2}\left(\mu_{j+1}(\xi') + \mu_j(\xi')\right),\ \xi' \in W_j\ ,$$

očito izmjeriva i zadovoljava nejednakost (5).

Q.E.D.

Dokaz Leme 2. Uzmimo vektor $\xi \in \mathbf{R}^n$ takav da je $P(\xi) \neq 0$, te, kao i ranije, vektor $\eta = (0, \ldots, 0, 1)$. Definirajmo funkciju $g : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, formulom $g(z) := P(\xi + z\eta)$. Ovako definiran g je polinom jedne kompleksne varijable i kao takav ima točno m nultočaka; označimo ih s $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Tada je

$$g(z) = C(z-\lambda_1)\ \ldots\ (z-\lambda_m)\ ,$$

pa stoga vrijedi

$$\left|\frac{g(z)}{g(0)}\right| = \prod_{j=1}^{m} \left|1 - \frac{z}{\lambda_j}\right|\ .$$

Budući da je $\xi + \lambda_j\eta \in N(P)$, to je $|\lambda_j| \ge d(\xi)$. Stoga $|z| \le d(\xi)$ povlači da je $|g(z)/g(0)| \le 2^m$. Također vrijedi

$$|g^{(m)}(0)| = \left|\frac{m!}{2\pi i} \int_{|\zeta| = d(\xi)} g(\zeta)\zeta^{-m-1}\, d\zeta\right| \le \frac{m!}{2}\, \frac{|g(0)|}{d(\xi)^{m+1}} 2^m\, 2\pi d(\xi)\ ,$$

drugim riječima $|g^{(m)}(0)| \le m!\,|g(0)|\,2^m d(\xi)^{-m}$. Međutim, zbog

$$g(0) = P(\xi) \;\text{ i }\; g^{(m)}(0) = \frac{\partial^m P(\xi)}{\partial \xi_n^m} = m!$$

vrijedi $m! \le m!\,|g(0)|\,2^m d(\xi)^{-m}$, odnosno $|P(\xi)| \ge (d(\xi)/2)^m$, što se i tvrdilo.

Q.E.D.

Ovim je Teorem 1 u potpunosti dokazan.

2. Fundamentalna rješenja i Malgrange – Ehrenpreiseov teorem

U prethodnom smo odjeljku dokazali da je svaki linearan parcijalan diferencijalan operator s konstantnim koeficijentima globalno rješiv na čitavom $\mathbf{R}^n$. Pojam *rješivost* se lako poopćuje i na slučaj kada je f distribucija. Reći ćemo da je parcijalan diferencijalan operator L lokalno rješiv u okolini točke x_0, ako postoji okolina Ω točke x_0 takva da vrijedi

$$(\forall\, f \in \mathcal{D}'(\Omega))(\exists\, u \in \mathcal{D}'(\Omega)) \quad Lu = f \text{ na } \Omega\,.$$

Kao i prije, dovoljno je gledati distribucije f s kompaktnim nosačem, tj. $f \in \mathcal{E}'$. Zapravo, dovoljno je uzeti $f = \delta$. Naime, ukoliko je distribucija E rješenje jednadžbe $Lu = \delta$, onda $E_f := E * f$ zadovoljava $LE_f = f$.

Definicija. Distribuciju E ćemo zvati *fundamentalno rješenje* za operator $L = P(D)$ ukoliko zadovoljava distribucijsku jednadžbu $LE = \delta$.

Razlog za proučavanje fundamentalnih rješenja je u sljedećem: Ako je $f \in \mathcal{D}'$, te $u := E * f$, onda vrijedi

$$\begin{aligned} P(D)u = P(D)(E * f) &= P(D)E * f \\ &= \delta * f \\ &= f\,. \end{aligned}$$

Stoga, ukoliko možemo naći fundamentalno rješenje, onda imamo teorem egzistencije za sve parcijalne diferencijalne jednadžbe $P(D)u = f$ gdje je $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$. Nadalje, ako možemo naći izraz za E, onda imamo i eksplicitnu reprezentaciju rješenja, $u = E * f$.

Značajan je teorem Malgrangea i Ehrenpreisa po kojem svaki linearan parcijalan diferencijalni operator s konstantnim koeficijentima ima fundamentalno rješenje. Zanimljivo je to da je ovaj važan rezultat jednostavno proširenje teorema 1.

Teorem 2. (**Malgrange–Ehrenpreis**) *Svaki parcijalan diferencijalni operator s konstantnim koeficijentima ima fundamentalno rješenje.*

Dokaz. Po uzoru i uz oznake kao u dokazu teorema 1, fundamentalno rješenje tražimo u obliku

$$E(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{M(\xi')} e^{2\pi i x\cdot\xi} \frac{1}{P(\xi)}\, d\xi_n d\xi'\,.$$

Problem je u tome što u gornjoj formuli integrand općenito nije (čak ni lokalno) L^1 funkcija. Stoga umjesto P, za dovoljno velike $N \in \mathbf{N}$, promotrimo polinome

$$P_N(\xi) := P(\xi)\left(1 + |\xi|^2\right)^N\,.$$

Definirajmo

$$E_N(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_{M(\xi')} \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{P_N(\xi)}\, d\xi_n d\xi' \ .$$

Na području integracije vrijedi $|P_N(\xi)| \geq C\left(1+|\xi|^2\right)^N$, pa će gornji integral konvergirati ukoliko je $N > n/2$. Ako možemo dokazati da je $P_N(D)E_N = \delta$, onda smo gotovi, jer tada distribucija $E := (I-\Delta)^N E_N$ zadovoljava $P(D)E = \delta$.

Neka je φ test funkcija. Računajmo

$$\begin{aligned}
\langle P_N(D)E_N, \varphi\rangle &= \langle E_N, P_N(-D)\varphi\rangle \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\int_{M(\xi')} \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{P_N(\xi)} P_N(-D)\varphi(x)\, d\xi_n d\xi' dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\int_{M(\xi')} \frac{1}{P_N(\xi)} \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} P_N(-D)\varphi(x)\, dx d\xi_n d\xi' dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\int_{M(\xi')} \hat{\varphi}(-\xi)\, d\xi_n d\xi' \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}(-\xi)\, d\xi = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle \ .
\end{aligned}$$

Q.E.D.

3. Regularnost diferencijalnih operatora

Definicija. Neka je L linearan parcijalan diferencijalni operator s glatkim koeficijentima, dan formulom (1). Kažemo da je L *hipoeliptičan* ukoliko za svaki $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ vrijedi inkluzija $\operatorname{supp}\operatorname{sing} u \subseteq \operatorname{supp}\operatorname{sing} Lu$. Drugim riječima, L je hipoeliptičan ako i samo ako za svaki otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, $Lu \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ povlači $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Napomena 2. Kažemo da je diferencijalan operator L *eliptičan* u točki $x \in \mathbf{R}^n$ ako za njegov glavni simbol vrijedi

$$(\forall\, \xi \in \mathbf{R}^n\backslash\{0\}) \qquad \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0 \ .$$

L je eliptičan ako je eliptičan u svakoj točki $x \in \mathbf{R}^n$. Kao posljedica karakterizacije hipoeliptičnih operatora (vidjeti [Folland], str. 78, teorem 3.29), slijedi da su svi eliptični operatori hipoeliptični, odakle je i naziv hipoeliptičnost.
∎

Poznato je da su svi obični diferencijalni operatori s C^∞ koeficijentima hipoeliptični. S parcijalnim diferencijalnim operatorima to, međutim, nije slučaj.

Primjer 1. Promotrimo operator koji odgovara jednadžbi akustičnih valova, $L = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$. Opće rješenje jednadžbe $Lu = 0$ dano je s $u(x,y) = f(x) + g(y)$, pri čemu su f i g proizvoljne C^1 funkcije. Prema tome L nije hipoeliptičan.
∎

Primijetimo da, ukoliko je parcijalan diferencijalan operator L hipoeliptičan, onda je svako njegovo fundamentalno rješenje C^∞ funkcija u $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$. U slučaju operatora s konstantnim koeficijentima, taj je uvjet i dovoljan za hipoeliptičnost.

Teorem 3. *Neka je L parcijalan diferencijalni operator s konstantnim koeficijentima. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne*
(a) L je hipoeliptičan.
(b) Svako fundamentalno rješenje operatora L je u $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$.
(c) Postoji fundamentalno rješenje operatora L, koje je u $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$.

Najprije dokažimo sljedeću lemu.

Lema 3. *Neka je $f \in \mathcal{D}'$ sa svojstvom da je $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$, te neka je $g \in \mathcal{E}'$. Tada je $\operatorname{supp}\operatorname{sing}(f * g) \subseteq \operatorname{supp} g$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $x \notin \operatorname{supp} g$. Pokazati ćemo da je f C^∞ funkcija u okolini točke x.

Kako je $x \notin \operatorname{supp} g$, to postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\mathrm{K}(x, \varepsilon) \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$. Neka je $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{K}(0, \varepsilon/2))$, takva da je $\varphi = 1$ na $\mathrm{K}(0, \varepsilon/4)$. Tada je

$$f * g = (\varphi f) * g + (1 - \varphi) f * g \ .$$

Kako je $(1 - \varphi) f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, vrijedi da je i $(1 - \varphi) f * g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Također vrijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\varphi f) * g &\subseteq \operatorname{supp} \varphi f + \operatorname{supp} g \\ &\subseteq \left\{ y \in \mathbf{R}^n : d(y, \operatorname{supp} g) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \ . \end{aligned}$$

Odavdje zaključujemo da je kugla $\mathrm{K}(x, \varepsilon/2)$ disjunktna s nosačem funkcije $(\varphi f) * g$, pa na njoj vrijedi $f * g = (1 - \varphi) f * g$, što je svakako C^∞ funkcija.

Q.E.D.

Dokaz Teorema 3. Implikacija (a) povlači (b) slijedi iz ranijih razmatranja, dok je implikacija (b) povlači (c) trivijalna. Jedina netrivijalna stvar za dokazati jest da (c) povlači (a).

Neka je E fundamentalno rješenje operatora L, koje je u $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$. Pretpostavimo da je $u \in \mathcal{D}'$, te $Lu \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, pri čemu je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren skup.

Za $x \in \Omega$ odaberimo $\varepsilon > 0$ dovoljno malen, tako da je zatvarač kugle $\mathrm{K}(x, \varepsilon)$ sadržan u Ω. Odaberimo, nadalje, funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{K}(x, \varepsilon))$, takvu da je $\varphi = 1$ na $\mathrm{K}(x, \varepsilon/2)$. Tada je

$$L(\varphi u) = \varphi L u + v \ ,$$

pri čemu je $v = 0$ na $\mathrm{K}(x, \varepsilon/2)$, te izvan $\mathrm{K}(x, \varepsilon)$. Zapišimo

$$E * L(\varphi u) = E * \varphi L u + E * v \ .$$

Kako je $\varphi L u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{K}(x, \varepsilon))$, to je $E * Lu$ C^∞ funkcija. Također je, po prethodnoj lemi, $E * v \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}(x, \varepsilon/2))$. Stoga je $E * L(\varphi u) \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}(x, \varepsilon/2))$. Međutim, $E * L(\varphi u) = LE * \varphi u = \delta * \varphi u = \varphi u$, pa je $\varphi u \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}(x, \varepsilon/2))$. Budući da je $\varphi = 1$ na $\mathrm{K}(x, \varepsilon/2)$, slijedi da je $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}(x, \varepsilon/2))$. Tvrdnja teorema sada slijedi zbog proizvoljnosti $x \in \mathbf{R}^n$.

Q.E.D.

4. Primjeri fundamentalnih rješenja

U ovom odjeljku, između ostalog, uvodimo tri osnovna parcijalna diferencijalna operatora, odnosno jednadžbe, kojima ćemo posvetiti naredno poglavlje. Sve tri jednadžbe su evolucijske, što znači i to da rješenje ovisi o realnom parametru t, kojeg ćemo zvati *vrijeme*, dok ćemo preostale varijable nazivati *prostornima*. Kako je osnovni alat kojeg ovdje koristimo Fourierova transformacija, zgodno je uvesti sljedeću konvenciju: Transformaciju po prostornim varijablama zvati ćemo jednostavno Fourierova transformacija i označavati kao do sada, s kapicom. Nasuprot tome, Fourierovu ćemu transformaciju po svim varijablama označavati s $\mathcal{F}$.

4.1. Operator provođenja

Operator provođenja dan je s

$$L := \partial_t - \triangle \, .$$

Cilj nam je pronaći distribuciju K, takvu da je zadovoljeno $(\partial_t - \triangle)K = \delta(x)\delta(t)$, pri čemu ovaj produkt distribucija ima smisao tenzorskog produkta. Ovdje $\delta(x)$ *nije* δ *u točki*, već u *varijabli* x.

Uzimanjem Fourierove transformacije u obje varijable, slijedi formula

$$(\mathcal{F}K)(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i\tau + 4\pi^2|\xi|^2} \, .$$

$\mathcal{F}K$ je lokalno integrabilna u blizini ishodišta, stoga definira temperiranu distribuciju. Poteškoća je u tome što $\mathcal{F}K$ nije globalno integrabilna, pa je izravna primjena inverzne Fourierove transformacije time otežana. Umjesto toga, vratimo se na polaznu jednadžbu, te uzmimo samo Fourierovu transformaciju po varijabli x. Slijedi (distribucijska) obična diferencijalna jednadžba

$$\partial_t \hat{K}(\xi, t) + 4\pi^2|\xi|^2 \hat{K}(\xi, t) = \delta(t) \, .$$

Rješenje ove jednadžbe dano je s

$$\hat{K}(\xi, t) = \begin{cases} a(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}, & \text{za } t > 0 \\ b(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}, & \text{za } t < 0 \end{cases} ,$$

pri čemu vrijedi $a(\xi) - b(\xi) = 1$. Kao što vidimo, postoji izvjesna sloboda u izboru funkcija a i b; međutim, najprirodnija bi bila ona koja bi činila $\hat{K}$ temperiranom i po t. Uzmimo li npr. $a := 1$ i $b := 0$, onda slijedi

$$\hat{K}(\xi, t) = \begin{cases} e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}, & \text{za } t > 0 \\ 0 \, , & \text{za } t < 0 \end{cases} .$$

Drugim riječima, $\hat{K}(\xi, t) = H(t)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$, gdje je H Heavisideova funkcija. Uzimanjem inverzne transformacije slijedi (primjer I.7):

$$K(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} H(t) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \, . \tag{8}$$

Funkciju $K_t(x) := K(x,t)$ često nazivamo *Gaussova jezgra.*

S (8) je dano fundamentalno rješenje za operator provođenja. Primjetimo da je L hipoeliptičan, jer je K C^∞ funkcija izvan ishodišta u $\mathbf{R}^{n+1}$. Štoviše, K, zajedno sa svim svojim derivacijama, brzo trne u beskonačnosti, stoga u formuli za rješenje homogene početne zadaće za jednadžbu provođenja, $u(x,t) = K_t * u_0$, možemo derivirati pod znakom integrala koliko god puta to želimo. Rješenje je stoga glatko, što znači da jednadžba provođenja ima jako regularizirajuće svojstvo; uz proizvoljan početni uvjet, rješenje je C^∞ funkcija. To je razlogom što je u jednadžbi provođenja vrijeme ireverzibilno (ovo je slaba forma drugog zakona termodinamike).

Na koncu, primijetimo da je fundamentalno rješenje K invarijantno na prostorne rotacije, jer ovisi samo o $|x|^2$.

4.2. Schrödingerov operator

Schrödingerov operator na prvi pogled jako nalikuje operatoru provođenja; naime ima oblik

$$L := i\partial_t - \triangle \ . \tag{9}$$

Razlika je, međutim, u imaginarnoj jedinici koja je uz vremensku derivaciju. Postupimo li na isti način kao u prethodnom slučaju, dobijemo jednadžbu

$$i\partial_t \hat{K}(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2\hat{K}(\xi,t) = \delta(t) \ ,$$

odakle slijedi

$$\hat{K}(\xi,t) = H(t)e^{4\pi^2|\xi|^2 it} \ .$$

Primijetimo da je $\hat{K}$ temperirana distribucija, koja međutim nije u L^1, pa nije jednostavno primjeniti inverznu transformaciju kako bismo dobili K. Za $\varepsilon > 0$ definirajmo distribuciju K_ε formulom

$$K_\varepsilon(x,t) = H(t)e^{4\pi^2|\xi|^2(-\varepsilon+it)} \ .$$

Budući da $\hat{K}_\varepsilon$ konvergira ka $\hat{K}$ u smislu temperiranih distribucija, to i njihove inverzne transformacije konvergiraju prema K. Za svaki $\varepsilon > 0$ je $\hat{K}_\varepsilon$ integrabilna, pa možemo mijenjati poredak integracije u

$$K_\varepsilon(x,t) = H(t)\int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi + 4\pi^2|\xi|^2(-\varepsilon+it)}\, d\xi \ .$$

Odavdje računanjem integrala i prijelaskom na limes $\varepsilon \longrightarrow 0$ slijedi formula za fundamentalno rješenje Schrödingerovog operatora

$$K(x,t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} H(t) e^{\frac{|x|^2}{4it}} \ . \tag{10}$$

Primjetimo da je i u ovom slučaju fundamentalno rješenje rotacijski invarijantno, što je i bilo za pretpostaviti, s obzirom na sličnost s operatorom provođenja. Ono što se ovdje *pokvarilo* je to da smo izgubili hipoeliptičnost. Naime, K nije glatka (čak ni integrabilna, osim u slučaju jedne prostorne dimenzije) na čitavoj poluravnini određenoj s $t = 0$. Vidimo da Schrödingerova jednadžba, za razliku od jednadžbe provođenja, nema izglađujuće svojsrtvo. Naime, iz (10) se vidi da se glatkoća čuva, pa je rješenje Schrödingerove jednadžbe podjednako glatko kao i početni uvjet.

U daljnjem označavamo

$$R(x,t) := \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4it}} \ . \tag{11}$$

4.3. Valni operator

Valni je operator dan s

$$L := \partial_{tt} - \triangle \ . \tag{12}$$

Djelujemo li Fourierovom transformacijom po svim varijablama, slijedi

$$(\mathcal{F}K)(\xi,\tau) = \frac{1}{4\pi^2(|\xi|^2 - \tau^2)} \ . \tag{13}$$

Ova funkcija, međutim, čak nije ni lokalno integrabilna, stoga nije posve jasno kako je interpretirati kao distribuciju. Zbog toga ponovno vršimo transformaciju samo po prostornim varijablama. Dobija se sljedeća jednadžba:

$$\partial_{tt}\hat{K}(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2\hat{K}(\xi,t) = \delta(t) \ .$$

Rješenje ove jednadžbe su

$$\begin{aligned} \hat{K}_+(\xi,t) &= a_+(\xi)e^{2\pi i|\xi|t} + b_+(\xi)e^{-2\pi i|\xi|t}\ , \ \text{za } t > 0\ , \\ \hat{K}_-(\xi,t) &= a_-(\xi)e^{2\pi i|\xi|t} + b_-(\xi)e^{-2\pi i|\xi|t}\ , \ \text{za } t < 0\ , \end{aligned}$$

pri čemu se koeficijenti udređuju iz uvjeta

$$\hat{K}_+(\xi,0+) = \hat{K}_-(\xi,0-)\ , \quad \partial_t\hat{K}_+(\xi,0+) - \partial_t\hat{K}_-(\xi,0-) = 1 \ .$$

Odabiremo takvu kombinaciju da $\hat{K}_+$, odnosno $\hat{K}_-$, ima nosač sadržan u poluprostoru određenom s $t \geq 0$, odnosno $t \leq 0$. Odgovarajuća rješenja su

$$\begin{aligned} \hat{K}_+(\xi,t) &= H(t)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\ , \\ \hat{K}_-(\xi,t) &= -H(-t)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} = \hat{K}_+(\xi,-t)\ , \end{aligned}$$

Iako $\hat{K}_+$ i $\hat{K}_-$ nisu integrabilne po t, možemo ih dobiti kao limese u $\mathcal{S}'$ L^1 funkcija

$$\hat{K}_+^{\varepsilon}(\xi,t) = e^{-2\pi\varepsilon t}H(t)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\ , \ \text{za } \varepsilon > 0 \ .$$

Zaista, $\hat{K}_+^{\varepsilon}$ je integrabilna za svaki ε i lako se vidi da konvergira k $\hat{K}_+$ u $\mathcal{S}'$, kad $\varepsilon \longrightarrow 0$. Stoga vrijedi i $\mathcal{F}K_+^{\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{F}K_+$. $\mathcal{F}K_+^{\varepsilon}$ je lako izračunati; dobije se

$$(\mathcal{F}K_+^{\varepsilon})(\xi,\tau) = \frac{1}{4\pi^2(|\xi|^2 - (\tau - i\varepsilon)^2)} \ .$$

Iskoristimo li vezu između $\hat{K}_+$ i $\hat{K}_-$, dobije se da vrijedi $\mathcal{F}K_- = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \mathcal{F}K_-^\varepsilon$ u $\mathcal{S}'$, pri čemu je

$$(\mathcal{F}K_-^\varepsilon)(\xi,\tau) = \frac{1}{4\pi^2(|\xi|^2 - (\tau + i\varepsilon)^2)} \ .$$

Našli smo, dakle, način da funkciju u (13) interpretirmo (na dva načina) kao temperiranu distribuciju, stoga je i njezina inverzna transformacija temperirana distribucija.

U jednoj prostornoj dimenziji fundamentalno se rješenje može jednostavno izravno dobiti. Zamjenom varijabli $s := t - x$ i $y := t + x$, valni operator prelazi u oblik

$$\tilde{L} = 4\partial_{sy} \ ,$$

pa slijedi jednadžba za fundamentalno rješenje

$$4\partial_{sy}\tilde{K} = \delta(s)\delta(y) \ .$$

Odavdje slijedi da je svako fundamentalno rješenje odgovarajuća linearna kombinacija distribucija

$$\tilde{K}_1 = \frac{1}{4}H(s)H(y)\,, \ \tilde{K}_2 = -\frac{1}{4}H(s)H(-y)\,,$$
$$\tilde{K}_3 = -\frac{1}{4}H(-s)H(y)\,, \ \tilde{K}_4 = \frac{1}{4}H(-s)H(-y)\,.$$

Prva od gornjih funkcija vodi na fundamentalno rješenje, dano s pomoću lokalno integrabilne funkcije

$$K_1 = \frac{1}{2}H(t-x)H(t+x) = \frac{1}{2}H(t)H(t^2 - x^2) \ .$$

Nosač distribucije K_1 je tzv. konus budućnosti, dan s $t \geq 0$, $t + x \geq 0$ i $t - x \geq 0$. Odatle slijedi da je singularan nosač od K_1 unija dviju zraka iz ishodišta, stoga valni operator nije hipoeliptičan (v. primjer 1). Slična se razmatranja provode u preostala četiri slučaja; nosači odgovarajućih distribucija su preostala tri konusa. Primjerice, nosač fundamentalnog rješenja K_4 je simetričan obzirom na ishodište nosaču od K_1 (konus prošlosti).

Valni je operator specijalan slučaj **Klein–Gordonovog** operatora

$$L := L := \partial_{tt} - \triangle - m^2 \ ,$$

pri čemu je $m \neq 0$. Isti račun, uz $\kappa^2(\xi) := 4\pi^2|\xi|^2 + m^2$ umjesto $4\pi^2|\xi|^2$, *prolazi* i u ovom slučaju. Tako npr. slijede Fourierove transformacije fundamentalnih rješenja za *lijeve* i *desne valove*

$$\hat{K}_+(\xi,t) = H(t)\frac{\sin(2\pi\kappa(\xi)t)}{2\pi\kappa(\xi)} \ ,$$
$$\hat{K}_-(\xi,t) = -H(-t)\frac{\sin(2\pi\kappa(\xi)t)}{2\pi\kappa(\xi)} = \hat{K}_+(\xi,-t) \ ,$$

Potpuno analogno, $\hat{K}_+$ i $\hat{K}_-$ možemo dobiti kao limese L^1 funkcija (s obzirom na varijablu t) u smislu temperiranih distribucija, pa slijede formule

$$(\mathcal{F}K_+)(\xi,\tau) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2(|\xi|^2 + \tilde{m}^2 - (\tau - i\varepsilon)^2)} \ \text{i}$$
$$(\mathcal{F}K_-)(\xi,\tau) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2(|\xi|^2 + \tilde{m}^2 - (\tau + i\varepsilon)^2)} \ ,$$

pri čemu je $\tilde{m} := m/2\pi$ tzv. *reducirana masa.*

IV. Egzistencija rješenja nelinearnih valnih jednadžbi

1. Uvod

Temelj Kvantne mehanike je **Schrödingerova jednadžba** koja ima izvorni oblik

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi \ ,$$

pri čemu je $\hbar$ reducirana Planckova konstanta, m masa čestice, a V potencijal polja u kojem se čestica giba. Mi ćemo se ograničiti na tzv. Schrödingerovu jednadžbu za *slobodnu česticu* ($V = 0$). Schrödingerova je jednadžba nastala 1926. godine, u nastojanju da se bolje opišu atomski spektri. Predložio ju je austrijski fizičar E. Schrödinger po analogiji s već poznatim rezultatima u valnoj optici. Iako su njena rješenja zadovoljavala neka očekivana svojstva (npr. jednadžbu kontinuiteta), bilo je poteškoća pri njihovoj fizikalnoj interpretaciji, s obzirom na to da su u pitanju kompleksne funkcije. Danas prihvaćenu interpretaciju rješenja Schrödingerove jednadžbe dao je M. Born 1926. godine. Preciznije, on je kvadrat apsolutne vrijednosti rješenja $|\psi(x,t)|^2$ interpretirao kao *gustoćo vjerojatnosti* nalaženja čestice u okolini točke x, u trenutku t. Rješenja stoga treba tražiti među L^2 funkcijama (što ima za posljedicu *kvantizaciju energije*).

Međutim, Schrödingerova jednadžba nije invarijantna na Lorentzove transformacije, stoga ne može dobro opisati čestice koje se gibaju *relativističkim* brzinama (bliskim brzini svjetlosti). Najjednostavnije relativističko poopćenje istodobno je predloženo od strane više istraživača (E. Schrödinger, W. Gordon, V. Fock, O. Klein i drugi), iste 1926. godine. To je poznata **Klein–Gordonova jednadžba**, koja ima oblik

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \Delta\psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \ ,$$

pri čemu je c brzina svjetlosti. Ona opisuje čestice bez *spina* (npr. Π mezone). Ovdje pak nije moguće dati vjerojatnosnu interpretaciju rješenja, jer se pokazuje da veličina, koju bi bilo prirodno nazvati gustoćom vjerojatnosti, općenito nije nenegativna. Pokazuje se da je razlog u tome što je Klein–Gordonova jednadžba drugog reda u vremenu. Izlaz iz ovih poteškoća ponudio je P. A. M. Dirac, 1928. godine, linearizirajući Klein–Gordonovu jednadžbu. Međutim, zadovoljavajući fizikalan opis relativističkih čestica dala je tek Kvantna teorija polja.

U ovom, posljednjem, poglavlju dajemo osnovne ocjene za linearnu Schrödingerovu, valnu i Klein–Gordonovu jednadžbu, te dajemo teoreme egzistencije za neka njihova nelinearna poopćenja. Tvrdnje najčešće dokazujemo samo za Schrödingerovu jednadžbu, dok za preostale dvije uglavnom navodimo rezultate.

Svaka se evolucijska jednadžba može zapisati u obliku

$$\partial_t u = Lu + N(u) \ , \tag{1}$$

pri čemu je L linearan, a N nelinearan operator. Za Schrödingerovu jednadžbu će L biti Laplaceov operator. Najčešći oblik nelinearnosti je $N(u) = -f(u)$, pri čemu je f realna ili kompleksna funkcija. U tom slučaju, za valnu jednadžbu možemo uvesti $v := u_t$, pa imamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) \end{pmatrix} \ , \tag{2}$$

što je upravo oblik (1).

Ako s $R(t)$ označimo evolucijski operator za jednadžbu (1), onda je njeno rješenje dano s

$$u(\cdot,t) = R(t)u(\cdot,0) + \int_0^t R(t-s)N(u(s))\,ds\ . \tag{3}$$

Zbog toga su ocjene za linearne jednadžbe osobito važne. Naime, ocjena rješenja će ujedno biti i ocjena norme evolucijskog operatora, što će nam s obzirom na (3) dati važne informacije o rješenju nelinearne jednadžbe (npr. jedinstvenost, uz neke uvjete na nelinearni član).

Osnovni aparat koji se koristi pri izvođenju linearnih ocjena je teorija interpolacije razvijena u drugom poglavlju.

2. L^p–L^q ocjene za linearne jednadžbe

2.1. Ocjene za Schrödingerovu jednadžbu

Promatramo početnu zadaću za homogenu Schrödingerovu jednadžbu na $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = 0 \\ u(\cdot,0) = u_0\ , \end{cases} \tag{S}$$

gdje je u_0 kompleksna funkcija. Rješenje u izražava se formulom

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^n} R(x-\xi,t)u_0(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbf{R}^n} e^{\frac{|x-\xi|^2}{4it}}u_0(\xi)\,d\xi\ , \tag{4}$$

koju formalno možemo dobiti uvrštavanjem $a = -i$ u poznatu formulu za rješenje inicijalne zadaće za jednadžbu provođenja, s koeficijentom provođenja $a > 0$:

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u \\ u(\cdot,0) = u_0\ . \end{cases}$$

Pretpostavimo da je $u_0 \in \mathcal{D}$. Djelujući Fourierovom transformacijom po x na jednakosti u (S), dobijamo Cauchyjevu zadaću za običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\begin{cases} \hat{u}_t - 4\pi^2 i|\xi|^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\cdot,0) = \hat{u}_0\ . \end{cases} \tag{$\hat{\mathrm{S}}$}$$

Rješenje gornje zadaće dano je s

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{4\pi^2 i|\xi|^2 t}\hat{u}_0\ , \tag{5}$$

odakle uzimanjem inverzne transformacije slijedi formula

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi ix\cdot\xi}e^{4\pi^2 i|\xi|^2 t}\hat{u}_0\ . \tag{6}$$

Odavdje, na potpuno analogan način kao i pri nalaženju fundamentalnog rješenja za Schrödingerov operator, dobijamo formulu (4).

Označimo s $R(t)$ evolucijskim operator za Schrödingerovu jednadžbu, tj. operator koji početnom podatku u_0 pridružuje funkciju $u(t)$, rješenje u trenutku t:

$$u(\cdot,t) := R(t)u_0 = \int_{\mathbf{R}^n} R(\cdot-\xi,t)u_0(\xi)\,d\xi\ . \tag{7}$$

Tada iz (4) slijedi ocjena

$$\|u(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|R(t)u_0\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\|u_0\|_{\mathrm{L}^1}\ . \tag{8}$$

S druge pak strane, uzimanjem L^2–norme u (5), kao posljedicu Plancherelovog teorema imamo sačuvanje *naboja*

$$\|u(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}^2} = \|R(t)u_0\|_{\mathrm{L}^2} = \|u_0\|_{\mathrm{L}^2}\ . \tag{9}$$

Budući da su glatke funkcije s kompaktnim nosačem guste u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, $R(t)$ je izometrija prostora $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$. Nadalje, iz istog razloga $R(t)$ preslikava $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^n)$ i vrijedi ocjena (8). Sada, iz teorema II.4 (Riesz–Thorin), uz $p_0 = 1$, $q_0 = \infty$, $p_1 = q_1 = 2$, te $M_0 = (4\pi t)^{-n/2}$ i $M_1 = 1$ slijedi L^p–$\mathrm{L}^{p'}$ ocjena za rješenje homogene linearne Schrödingerove jednadžbe

$$(\forall\, p\in[1,2])\quad \|u(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}^{p'}} = \|R(t)u_0\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq (4\pi t)^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\|u_0\|_{\mathrm{L}^p}\ . \tag{10}$$

Gornja je ocjena zapravo ocjena norme evolucijskog operatora $R(t)$, stoga zapišimo

$$\|R(t)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^p,\mathrm{L}^{p'})} \leq (4\pi t)^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\ . \tag{11}$$

Primjetimo da je (11) pogodnija ocjena od (10), utoliko što je možemo primijeniti i u slučaju kad jednadžba koju promatramo nije linearna. To slijedi iz formule za rješenje (3).

Na osnovu Duhamelovog principa, za nehomogenu zadaću

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = f \\ \quad u(\cdot,0) = u_0\ , \end{cases}$$

dobivamo formulu

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^n} R(x-\xi,t)u_0(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_{\mathbf{R}^n} R(x-\xi,t-s)f(\xi,s)\,d\xi ds\ , \tag{12}$$

koju s pomoću evolucijskog operatora možemo zapisati u kompaktnijem obliku (isp.(3))

$$u(x,t) = R(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f(\cdot,s)\,ds\ . \tag{13}$$

I u ovom se slučaju izvode energetske nejednakosti, no u to se ovdje nećemo upuštati. Formula (13) je osobito pogodna pri izvođenju prostorno-vremenskih ocjena.

2.2. Ocjene za valnu i Klein–Gordonovu jednadžbu

Promatramo Cauchyjevu zadaću za homogenu valnu jednadžbu na $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$:

$$\text{(W)} \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u(\cdot, 0) = 0 \\ u_t(\cdot, 0) = u_1 \ , \end{cases}$$

te za homogenu Klein–Gordonovu jednadžbu

$$\text{(KG)} \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u = 0 \\ u(\cdot, 0) = 0 \\ u_t(\cdot, 0) = u_1 \ . \end{cases}$$

U oba je slučaja u_1 realna funkcija.

Označimo sa $S(t)$ evolucijski operator za valnu, a s $T(t)$ za Klein–Gordonovu jednadžbu; drugim riječima, operator koji početnoj brzini u_1 pridružuje rješenje pripadne jednadžbe u trenutku t. Kao i u slučaju Schrödingerove jednadžbe, zanimati će nas za koje su p i q gornji operatori ograničeni s $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ u $\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^n)$.

Uvedimo najprije neke oznake. Za $n \geq 3$ definirajmo sljedeće točke u ravnini:

$$\begin{aligned} P_1 &:= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) , \\ P_2 &:= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} \right) , \\ P_3 &:= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \right) , \end{aligned}$$

dok u slučajevima $n = 1$ ili 2, definirajmo $P_2 := (0, 0)$ i $P_3 := (1, 1)$. Također definirajmo

$$P_4 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) , \quad P_5 := \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \right) ,$$
$$P_6 := \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) .$$

Označimo, nadalje, s $\mathcal{T}$ zatvoren trokut kojemu su vrhovi točke P_1, P_2 i P_3.

Vrijedi sljedeći

Teorem 1. *Neka su $1 \leq p, q \leq \infty$. Tada su operatori $S(t)$ i $T(t)$ ograničeni s $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ u $\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^n)$ za svaki $t > 0$, ako i samo ako $(1/p, 1/q)$ pripada trokutu $\mathcal{T}$.* ∎

Dovoljnost u teoremu 1 slijedi iz L^p–L^q ocjena. U slučaju valne jednadžbe ocjena je dana sljedećim teoremom.

Teorem 2. *Neka je $(1/p, 1/q) \in \mathcal{T}$. Tada postoji konstanta $C > 0$ tako da vrijedi*

$$\|S(t)u_1\|_{\mathrm{L}^q} \leq Ct^b \|u_1\|_{\mathrm{L}^p} ,$$

gdje je $b = 1 - n/p + n/q$. ∎

U slučaju Klein–Gordonove jednadžbe imamo sličan rezultat:

Teorem 3. *Neka je $(1/p, 1/q) \in \mathcal{T}$. Tada postoji konstanta $C > 0$ tako da vrijedi*

$$\|T(t)u_1\|_{L^q} \le Ct^a \|u_1\|_{L^p} ,$$

pri čemu je a po dijelovima afina funkcija u $1/p$ i $1/q$:

$$a = \begin{cases} \frac{n-2}{q} - n\left(1 - \frac{1}{p}\right), & u\ trokutu\ P_1P_5P_6 \\ -\frac{n}{q} + (n-2)\left(1 - \frac{1}{p}\right), & u\ trokutu\ P_1P_4P_6 \\ -\frac{n}{2} + \frac{n}{q}, & u\ četverokutu\ P_0P_3P_5P_6 \\ \frac{n}{2} - \frac{n}{p}, & u\ četverokutu\ P_0P_2P_4P_6\ . \end{cases}$$

∎

Primijetimo da je gornje ocjene dovoljno dokazati u odgovarajućim vrhovima P_i, jer tada zbog Riesz–Thorinovog teorema te ocjene vrijede i na njihovoj konveksnoj kombinaciji. Ocjene za Klein–Gordonovu jednadžbu, međutim, zahtijevaju interpolaciju prostora L^∞ i BMO (tzv. prostora funkcija ograničene srednje varijacije). Kako te tehnike u ovom radu nisu razvijene, teorem 3 nećemo dokazivati.

U slučaju teorema 2, najinteresantniji je vrh P_1, koji leži na pravcu dualnosti $1/p + 1/q = 1$.

Rješenje zadaće (W) dano je s $u(\cdot, t) = K(\cdot, t) * u_1$, pri čemu je

$$\hat{K}(\xi, t) = \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} .$$

Uložimo ovaj operator u analitičku familiju

$$\hat{K}_z(\xi, t) := (2\pi|\xi|)^{-z-\frac{n}{2}} J_{z+\frac{n}{2}}(2\pi|\xi|t) .$$

Za $\mathsf{Re}\, z = \frac{n+1}{2}$ operator $\hat{K}_z(\xi, t)$ ograničen. Naime vrijedi

$$\hat{K}_z(\xi, t) = \left(\frac{4|\xi|}{t}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(2\pi|\xi|t) ,$$

pa je $|\hat{K}_z(\xi, t)| \le \frac{2}{\pi t}$, stoga K_z* preslikava L^2 u L^2. Inverzna transformacija gornje familije ima oblik (v. (II.33))

$$K_z(x, t) = c_z \left(1 - |xt|^2\right)_+^{-z} ,$$

stoga, za $\mathsf{Re}\, z = 0$, K_z* očito preslikava L^1 u L^∞. Sada, primjenom Riesz–Thorinovog teorema u $z = \frac{n-1}{2}$, slijedi da je K_z* ograničen s L^p u L^q, pri čemu su p i q koordinate točke P_1, te vrijedi ocjena iz teorema.

3. Prostorno–vremenske ocjene za linearne jednadžbe

Prostorno–vremenske ocjene za rješenja linearnih valnih jednadžbi, u velikoj mjeri slijede iz restrikcijskog teorema za Fourierovu transformaciju (teorem II.5). Naime, pri ocjenjivanju rješenja homogene jednadžbe, potrebno je interpretirati rješenje problema (B), formuliranog u odjeljku II.4, kao tvrdnje o rješenjima parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Trebat će nam sljedeća lema ([Y], str. 133, korolar 1):

Lema 1. *Za svaku funkciju $u \in L^1(0, T; L^p(\mathbf{R}^n))$ vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\left\| \int_a^b u(t, \cdot)\, dt \right\|_{L^p} \le \int_a^b \|u(t, \cdot)\|_{L^p}\, dt .$$

∎

Propozicija 1. *Neka je u rješenje inicijalne zadaće za Schrödingerovu jednadžbu na* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} iu_t - \Delta u = f \\ u(\cdot, 0) = u_0 \ . \end{cases}$$

Pretpostavimo da su $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^{n+1})$, $u_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$, pri čemu je $p = 2(n+2)/(n+4)$. Tada je $u \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ i vrijedi ocjena

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq C\left(\|u_0\|_{\mathrm{L}^2} + \|f\|_{\mathrm{L}^p}\right) \ .$$

Dokaz. Primijetimo da rješenje gornje zadaće možemo zapisati u obliku

$$u(x,t) = \int_M \hat{u}_0(\xi) e^{2\pi i(x\cdot\xi + t\tau)}\, d\mu + \int_0^t R(t-s) f(\cdot, s)\, ds \ ,$$

pri čemu je $d\mu := \delta_{\tau - 2\pi|\xi|^2} d\xi d\tau$ mjera koncentrirana na skupu $M := \{(\xi,\tau) \in \mathbf{R}^{n+1} : \tau - 2\pi|\xi|^2 = 0\}$. Ploha M je prve vrste (primjer II.6), pa ocjena za prvi član na desnoj strani gornje jednakosti slijedi iz teorema II.5.

Označimo li s v drugi član na desnoj strani gornje jednakosti, te primijenimo lemu 1 i iskoristimo ocjenu norme evolucijskog operatora za Schrödingerovu jednadžbu, dobivamo

$$\|v(\cdot,t)\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq \int_0^t (4\pi(t-\tau))^{-r} \|f(\cdot,\tau)\|_{\mathrm{L}^p} d\tau \ ,$$

gdje je $r = n/(n+2)$. Kako je $1/p - 1/p' = 1 - r = 2/(n+2)$, to možemo primijeniti teorem o razlomljenoj integraciji ([Stein], str. 119), odakle slijedi $\|v\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq c\|f\|_{\mathrm{L}^p}$. Time je ova propozicija dokazana.

Q.E.D.

Ocjene za valnu i Klein–Gordonovu jednadžbu dane su u sljedećoj

Propozicija 2. *Neka je u rješenje početne zadaće za Klein–Gordonovu ($m > 0$) ili valnu jednadžbu ($m = 0$) na* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + m^2 u = f \\ u(\cdot, 0) = 0 \\ u_t(\cdot, 0) = u_1 \ . \end{cases}$$

Pretpostavimo da su $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^{n+1})$,te $u_1 \in X$, pri čemu je $X = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ u slučaju Klein–Gordonove, odnosno $X = \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^n)$ u slučaju valne jednadžbe, a za indeks p vrijedi ($q := p'$):

(a) Ako je $m > 0$, onda je

$$\frac{2(n+1)}{n+3} \leq p \leq \frac{2(n+2)}{n+4} \ ,$$
$$\frac{2(n+2)}{n} \leq q \leq \frac{2(n+1)}{n-1} \ ,$$

za $n \geq 2$, odnosno

$$1 < p < \frac{6}{5}, \quad 6 \leq q < \infty \ ,$$

za $n = 1$.

(b) Ako je $m = 0$, onda je

$$p = \frac{2(n+1)}{n+3}\,, \quad q = \frac{2(n+1)}{n-1}\ .$$

Tada je $u \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ i vrijedi ocjena

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{p'}} \leq C\left(\|u_1\|_X + \|f\|_{\mathrm{L}^p}\right)\ .$$

Dokaz. Dokazujemo gornju ocjenu u slučaju homogene jednadžbe ($f = 0$). Definirajmo, kao i ranije, oznaku $\kappa^2(\xi) := |\xi|^2 + \tilde{m}^2$, pri čemu je $\tilde{m} := m/2\pi$ tzv. reducirana masa. Primjenom Fourierove transformacije slijedi formula za rješenje

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi+\kappa(\xi)t)}\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\kappa(\xi)}\,d\xi \\ &- \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi-\kappa(\xi)t)}\frac{\hat{u}_1(\xi)}{2i\kappa(\xi)}\,d\xi\ . \end{aligned}$$

Gornja se formula može zapisati u obliku

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} e^{2\pi i(x\cdot\xi+t\tau)}F(\xi)\,d\mu\ ,$$

gdje je $d\mu := \frac{1}{\kappa(\xi)}\delta_{\tau^2-\kappa^2(\xi)}d\xi d\tau$ mjera koncentrirana na hiperboloidu ($m > 0$), odnosno konusu ($m = 0$), danom s $M := \{(\xi,\tau) \in \mathbf{R}^{n+1} : \tau^2 = |\xi|^2 + \tilde{m}^2\}$. Funkcija F dana je formulom

$$F(\xi) := \begin{cases} \frac{1}{2i}\hat{u}_1(\xi), & \text{na plaštu } \tau = \kappa(\xi) \\ -\frac{1}{2i}\hat{u}_1(\xi), & \text{na plaštu } \tau = -\kappa(\xi)\ . \end{cases}$$

Sada, koristeći pretpostavke na u_1 i Plancherelov teorem, slijedi nejednakost

$$\|F\|_{\mathrm{L}^2(M,\mu)} \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{\kappa^2(\xi)}|\hat{u}_1(\xi)|^2\,d\xi \leq C\|u_1\|_X\ .$$

Kako je ploha M je druge, odnosno treće vrste (primjeri II.7 i II.8), tražena ocjena slijedi iz teorema II.5.

Q.E.D.

4. Postojanje rješenja nelinearnih jednadžbi

Ovdje ćemo se ograničiti samo na *globalnu* egzistenciju rješenja nelinearnih valnih jednadžbi. Pod globalnom egzistencijom razumijevamo vremenski globalnu egzistenciju, drugim riječima, postojanje rješenja za sve $t \in [0,\infty)$ (odnosno $t \in \mathbf{R}$); za razliku od (vremenski) *lokalne* egzistencije, gdje se zahtijeva postojanje rješenja samo na nekom netrivijalnom vremenskom intervalu $[0,T]$, za $T > 0$. Koncentrirat ćemo se na dvije jednadžbe.

Nelinearna valna jednadžba ima oblik

(NLW) $$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0\ ,$$

pri čemu je f neprekinuta realna funkcija koja zadovoljava $f(0) = 0$. Nadalje, F će označavati onu primitivnu funkciju funkcije f, za koju vrijedi $F(0) = 0$. Često se izdvajaju dva specijalna slučaja: (NLW$_0$), u kojem je $f'(0) = 0$ i tzv. nelinearna Klein–Gordonova jednadžba (NLKG), kad je $m^2 = f'(0) > 0$. U fizici m ima interpretaciju mase, pa se ponekad kaže da (NLW$_0$) opisuje bezmasene, a (NLKG) masivne čestice.

Nelinearna Schrödingerova jednadžba je oblika

$$iu_t - \Delta u + f(u) = 0 , \tag{NLS}$$

gdje je $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ neprekinuta funkcija koja zadovoljava $f(0) = 0$. Pretpostavit ćemo da je $f(u) = g\left(|u|^2\right) u$, pri čemu je g realna funkcija. Neka je, nadalje, $F(u) := \frac{1}{2} G\left(|u|^2\right)$, gdje je G primitivna funkcija za g koja zadovoljava $G(0) = 0$.

Primjer 1. Ilustrirajmo problem globalne egzistencije rješenja na jednostavnom primjeru običnih diferencijalnih jednadžbi

$$v_{tt} + v^3 = 0 \ \text{ i } \ w_{tt} - w^3 = 0 .$$

Množenjem prve s v_t dobijamo sačuvanje *energije*

$$v_t^2 + \frac{1}{2} v^4 = E = \text{const},$$

što povlači da sva njena rješenja leže na zatvorenim krivuljama u faznom prostoru i postoje u svim vremenima.

S druge pak strane, iz preostale jednadžbe na isti način dobijamo

$$w_t^2 - \frac{1}{2} w^4 = E = \text{const}.$$

Stoga rješenje s danom energijom E i početnim uvjetom $w(0) = w_0$ zadovoljava

$$t = \int_{w_0}^{w} \left(E + \frac{1}{2} s^4 \right)^{-\frac{1}{2}} ds ,$$

ukoliko je $E > 0$ i $w'(0) > 0$. Neka je T vrijednost gornjeg integrala od w_0 pa do beskonačno. Tada $w(t) \longrightarrow \infty$, za $t \longrightarrow T$, pa imamo *eksploziju* rješenja u trenutku T.

Odavdje vidimo da već i predznak nelinearnog člana može biti odgovoran za globalnu egzistenciju ili eksploziju rješenja u konačnom vremenu. ∎

Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, važno svojstvo rješenja diferencijalne jednadžbe je očuvanje energije.

Lema 2. *Pretpostavimo da za (klasično) rješenje u (NLW) na $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ postoji $R > 0$ tako da vrijedi ocjena*

$$(\forall\, t \in \mathbf{R}^+)(\forall\, x \in \mathbf{R}^n) \quad |x| \geq R \Longrightarrow |p_j(x,t)| \leq \frac{1}{R^n},\ j = 1, \ldots, n , \tag{14}$$

pri čemu je p_j gustoća impulsa definirana s $p_j(x,t) := (\partial_t u)(\partial_j u)$. Tada u zadovoljava sljedeći zakon sačuvanja energije:

$$E(u) := \int \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right) dx = const. \tag{15}$$

Dokaz. Pomnožimo li (NLW) s u_t, nakon uvažavanja pretpostavke o F dobijamo

$$u_t u_{tt} - u_t \Delta u + (F(u))_t = 0 \ .$$

Odavdje, dodavanjem i oduzimanjem $\sum_j (\partial_j \partial_t u)(\partial_j u)$, te odgovarajućim grupiranjem dobijamo jednakost u divergentnom obliku

$$\partial_t e - \sum_{j=1}^{n} p_j = 0 \ ,$$

pri čemu je e *gustoća energije* definirana s

$$e := \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \ .$$

Integrirajući gornji identitet po kugli $\mathrm{K}(0,R)$, zbog (14) slijedi ocjena

$$\left| \partial_j \int_{\mathrm{K}(0,R)} e \, dx \right| \leq \frac{C}{R} \ ,$$

odakle prelaskom na limes $R \longrightarrow \infty$ dobivamo tvrdnju.

Q.E.D.

Lema 3. *Neka je u rješenje za (NLS) na $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Tada vrijedi zakon sačuvanja energije*

$$E(u) := \int \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + F(u) \right) dx = const, \tag{16}$$

te zakon održanja naboja

$$\int |u|^2 \, dx = const.$$

Dokaz. Množenjem jednadžbe s $\bar{u}_t$ i integriranjem po $\mathbf{R}^n$ dobije se

$$i \int u_t \bar{u}_t \, dx - \int \Delta u \bar{u}_t \, dx + \int f(u) \bar{u}_t \, dx = 0 \ .$$

Zbog $\mathsf{div}\,(\nabla u \bar{u}_t) = \Delta u \bar{u}_t + \nabla u \cdot \nabla \bar{u}_t$ i teorema o divergenciji imamo

$$i \int |u_t|^2 \, dx + \int \nabla u \cdot \nabla \bar{u}_t \, dx + \int g\left(|u|^2\right) u \bar{u}_t \, dx = 0 \ .$$

Uzimanjem realnog dijela dobivamo $\frac{d}{dt} E(u) = 0$, odakle slijedi sačuvanje energije. Množenjem jednadžbe s $\overline{iu}$ i uzimanjem realnog dijela dobivamo preostalu nejednakost.

Q.E.D.

Kao i ranije, označimo s $u(t)$ rješenje jednadžbi u čas $t \in \mathbf{R}$. Nadalje, neka $E(u(t))$ označava energiju u istom trenutku. Konačnost energije ima za posljedicu da je $u(t) \in X$, pri čemu je $X = \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n) \times \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ u slučaju (NLW), odnosno $X = \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n)$ u slučaju (NLS). Definirajmo k tome i prostore $X_1 = \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n) \times \mathrm{H}^1(\mathbf{R})$, odnosno $X_1 = \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n)$ za (NLW) i (NLS) redom. Za početak je prirodno tražiti rješenja među slabo neprekinutim funkcijama $u : \mathbf{R} \longrightarrow X$.

Definicija. Kažemo da je funkcija $u : \mathbf{R} \longrightarrow X$ *slabo neprekinuta*, ako je za svaki $\lambda \in X'$ preslikavanje $t \mapsto \langle \lambda, u(t) \rangle$ neprekinuto.

Teorem 4. *(***Egzistencija slabog rješenja***) Promatrajmo i (NLS) i (NLW), te pretpostavimo da vrijedi*

$$F(u) \geq -c|u|^2 \ , \tag{17}$$

za neku konstantu $c > 0$ i

$$\frac{|F(u)|}{|f(u)|} \longrightarrow \infty \text{ pri } |u| \longrightarrow \infty \ . \tag{18}$$

Tada za svaki početni uvjet, za koji je $E(u(0)) < \infty$ i $u(0) \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ postoji slabo neprekinuto rješenje $u : \mathbf{R} \longrightarrow X$ jednadžbe (NLW) ili (NLS), koje zadovoljava

$$(\forall\, t \in \mathbf{R}) \quad E(u(t)) \leq E(u(0)) \ .$$

∎

Primjetimo da gornji teorem ne kaže ništa o jedinstvenosti slabog rješenja. Uvjet (18) znači da F raste sporije od eksponencijalne funkcije. Moguće su i druge pretpostavke u prethodnom teoremu. U slučaju (NLS) uvjet (17) možemo oslabiti do

$$F(u) \geq -c(|u|^2 + |u|^{q+1}), \text{ za neki } q < 1 + \frac{4}{n} \ . \tag{19}$$

S druge pak strane, za (NLW) možemo zamijeniti (17) i (18) jedinstvenim uvjetom

$$uf(u) \geq 0 \ . \tag{20}$$

On povlači da je $F(u) \geq 0$, međutim, dozvoljava proizvoljan rast u beskonačnosti, primjerice $f(u) = ue^{u^2}$.

Teorem 5. *(***Jako rješenje konačne energije***) Pretpostavimo da (17) vrijedi za (NLW), te (19) za (NLS). Neka je, nadalje, f funkcija klase C^1 koja zadovoljava*

$$|f'(u)| \leq c\left(1 + |u|^{p-1}\right) \tag{21}$$

za neku pozitivnu konstantu c, pri čemu je

$$\begin{aligned} &1 < p < 1 + \frac{4}{n-2}, \ n \geq 3 \ , \\ &1 < p < \infty, \ n = 1, 2 \ . \end{aligned} \tag{22}$$

Tada postoji slabo rješenje u koje je i jedinstveno. K tome je $u : \mathbf{R} \longrightarrow X$ i jako neprekinuta funkcija, koja zadovoljava

$$(\forall\, t \in \mathbf{R}) \quad E(u(t)) = E(u(0)) \ .$$

∎

Sljedeći teorem spada u klasu tzv. teorema regularnosti, koji daju pripadnost rješenja nekoj klasi funkcija, ako je i početni uvjet u toj istoj klasi.

Teorem 6. *(*H^2 **rješenje***) Pretpostavimo da f zadovoljava uvjete teorema 5. Ukoliko su početni podaci iz X_1, onda je jedinstveno rješenje (NLW), odnosno (NLS), jako neprekinuta funkcija s vrijednostima u X_1.*

∎

Teoremi egzistencije zasnivaju se na apriornim ocjenama, stoga ćemo započeti diskusiju dokaza gornjih teorema izvođenjem relevantnih ocjena. Tretirat ćemo samo (lakši) slučaj (NLS).

Osnovna veličina je energija. Prema lemi 3 energija i L^2–norma su sačuvane. Uz (19) imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\,dx &= E(u(0)) - \int F(u)\,dx \\ &\le E(u(0)) + c\int |u|^2\,dx + c\int |u|^{q+1}\,dx\,.\end{aligned}$$

Prva su dva člana u gornjoj nejednakosti, po spomenutoj lemi, konstante. Stoga je dovoljno ocijeniti posljednji član.

Po teoremu I.13 (Soboljev-Gagliardo-Nirenberg) slijedi da je $\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n)$ uložen u prostor $\mathrm{L}^{2^*}(\mathbf{R}^n)$, pri čemu je $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ Soboljevljev konjugat indeksa 2, te vrijedi (Soboljevljeva) nejednakost

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{2^*}} = \|u\|_{\mathrm{L}^{\frac{2n}{n-2}}} \le C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}\,.$$

S druge pak strane, prema interpolacijskoj nejednakosti (korolar II.2) slijedi da je

$$\|u\|_{\mathrm{L}^{q+1}} \le \|u\|_{\mathrm{L}^2}^{\alpha}\|u\|_{\mathrm{L}^{\frac{2n}{n-2}}}^{1-\alpha}\,,$$

pri čemu je $\alpha = \frac{n}{q+1} - \frac{n-2}{2}$. Konačno, iz prethodnih nejednakosti dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2\,dx &\le E(u(0)) + c\int |u|^2\,dx \\ &\quad + c\left(\int |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{4}[2(q+1)-n(q-1)]}\left(\int |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{n}{4}(q-1)}\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Ovo je glavna ocjena koja se koristi u dokazu teorema 4. Pretpostavka $q < 1 + \frac{4}{n}$ povlači $\frac{n}{4}(q-1) < 1$ odakle slijedi ograničenost $\int |\nabla u|^2\,dx$, što pak povlači i ograničenost $\int F(u)\,dx$. U graničnom slučaju $q = 1 + \frac{4}{n}$ slijedi nejednakost

$$\int |u|^{2+\frac{4}{n}}\,dx \le \left(\int |u|^2\,dx\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int |\nabla u|^2\,dx\right)\,.$$

U svjetlu teorema 4, glavni zaključak teorema 5 je jedinstvenost. Radi jednostavnosti zamijenimo uvjet (21) slabijim uvjetom

$$|f'(u)| \le c|u|^{p-1}\,. \tag{24}$$

Neka su u i v dva rješenja (NLS) koja zadovoljavaju isti početni uvjet. Tada zadovoljavaju integralnu jednadžbu

$$u(t) - v(t) = \int_0^t R(t-\tau)(f(u(\tau)) - f(v(\tau)))\,d\tau\,,$$

pri čemu radi jednostavnosti zapisa stavljamo $u(t) := u(\cdot, t)$. $R(t)$ je evolucijski operator za Schrödingerovu jednadžbu, definiran u (7). Uzmemo li L^{p+1} normu na obje strane gornje jednakosti, s pomoću ocjene (10) dobijemo

$$\|u(t) - v(t)\|_{\mathrm{L}^{p+1}} \le \int_0^t (4\pi(t-\tau))^{-\frac{2}{r}}\|f(u(\tau)) - f(v(\tau))\|_{\mathrm{L}^{\frac{p+1}{p}}}\,d\tau\,,$$

pri čemu je $r := \frac{4}{n}\frac{p+1}{p-1}$. Primijetimo da je, zbog (22), $r \geq 2$, pa je jezgra $(t-\tau)^{-\frac{2}{r}}$ lokalno integrabilna.

Zbog pretpostavke da je f funkcija klase C^1, iz teorema srednje vrijednosti slijedi da za svaki τ postoji $w(\tau) \leq \max\{u(\tau), v(\tau)\}$, tako da vrijedi

$$f(u(\tau)) - f(v(\tau)) = f'(w(t))(u(\tau) - v(\tau)) \ .$$

Uzimanjem $\mathrm{L}^{\frac{p+1}{p}}$ norme u gornjem izrazu, te korištenjem pretpostavke (24), slijedi ocjena

$$\|f(u(\tau)) - f(v(\tau))\|_{\mathrm{L}^{\frac{p+1}{p}}} \leq c\|w(\tau)^{\frac{p+1}{p}}(u(\tau) - v(\tau))\|_{\mathrm{L}^{\frac{p+1}{p}}} \ .$$

Odavdje pak primjenom korolara II.1 slijedi

$$\|u(t) - v(t)\|_{\mathrm{L}^{p+1}} \leq c\int_0^t (4\pi(t-\tau))^{-\frac{2}{r}} \left(\|u(\tau)\|^{p-1}_{\mathrm{L}^{p+1}} + \|v(\tau)\|^{p-1}_{\mathrm{L}^{p+1}}\right) \|u(\tau) - v(\tau)\|_{\mathrm{L}^{p+1}}\, d\tau \ .$$

S druge pak strane, zbog (22) i teorema ulaganja (teorem II.5) slijedi da je za svaki $T > 0$ $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^1) \subseteq \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^{p+1})$, stoga gornja nejednakost prelazi u

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t) - v(t)\|_{\mathrm{L}^{p+1}} \leq cT^{1-\frac{2}{r}} \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t) - v(t)\|_{\mathrm{L}^{p+1}} \ .$$

Odatle zaključujemo da je $u = v$ na svakom vremenskom intervalu $[0,T]$ za koji je $cT^{1-\frac{2}{r}} < 1$. Ponavljajući isti postupak slijedi da je $u = v$ na $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$,...; stoga je $u = v$ za svaki t.

Skicirajmo dokaz teorema 4 u slučaju Schrödingerove jednadžbe, ispuštajući neke tehničke detalje. Pretpostavimo da vrijedi (18) i (19), te da je f funkcija klase C^1 (što nije ograničenje, jer je f neprekinuta, pa se može aproksimirati glatkim funkcijama). Ideja dokaza je u tome da odrežemo funkciju f za velike u. Stoga pronalazimo niz (f_j) takav da $f_j \longrightarrow f$ uniformno za ograničene u, da svaki f_j zadovoljava (21) i (22) (što je ispunjeno ukoliko je svaka f_j' npr. ograničena), te da (18) i (19) vrijedi za svaki f_j, uniformno po j. Za čvrsti j možemo stoga primijeniti teorem 5 i zaključiti da postoji jedinstveno rješenje $u_j \in \mathrm{C}(\mathbf{R};\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n))$ jednadžbe

$$i\partial_j u_j - \Delta u_j + f_j(u_j) = 0 \ , \tag{25}$$

te (zbog uniformne konvergencije niza (f_j)) vrijedi zakon sačuvanja energije

$$\int \left(\frac{1}{2}|\nabla u_j|^2 + F_j(u_j)\right) dx = \int \left(\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 + F_j(u_0)\right) dx \leq \mathrm{const.}$$

i zakon sačuvanja naboja

$$\int |u_j|^2\, dx = \int |u_0|^2\, dx \ ,$$

uniformno po t i po j. Pretpostavka (19) ima za posljedicu da je (u_j) ograničen u H^1 (ocjena (23)), također uniformno po t i po j, stoga je (u_j) niz u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R};\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n))$. Zbog toga (u_j) ima slabo $*$ konvergentan podniz, označimo ga ponovo s (u_j), tako da $u_j \longrightarrow u$ u slaboj $*$ topologiji na $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R};\mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n))$. No onda konvergira i u smislu distribucija, pa linearni članovi u (25) konvergiraju slabo.

Valja još pokazati da niz $(f_j(u_j))$ konvergira u nekom smislu k $f(u)$. Pokazat ćemo da konvergira skoro svuda.

Za svaki ograničen skup $B \subseteq \mathbf{R}^n$ je $\mathrm{H}^1(B)$ kompaktno uložen u $\mathrm{L}^2(B)$. Međutim, treba nam kompaktnost i u vremenu. Za velike u_j iz (18) i ograničenosti integrala $\int F_j(u_j)$ zaključujemo da je $(f_j(u_j))$ u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$, dok za male u_j iz L^2 ocjena slijedi da je $(f_j(u_j))$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$ uniformno po t. Odatle slijedi da je niz $(f_j(u_j))$ ograničen u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n) + \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n))$, pa iz jednadžbe vidimo da je niz

$$i\partial_j u_j = \Delta u_j - f_j(u_j) = 0 \ ,$$

ograničen u $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}; \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^n) + \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n))$. Prema Aubinovom teoremu kompaktnosti ([Ta], str. 50,51), postoji podniz, ponovo ga označimo s $(f_j(u_j))$, koji konvergira k $f(u)$ skoro svuda.

Da bi imali rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe, konvergencija niza $(f_j(u_j))$ mora biti barem u distribucijama, međutim to slijedi iz konvergencije skoro svuda i E-gorovljevog teorema ([Y], str. 16).

[Folland] G. B. Folland: *Partial Differential Eqations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983

[GCD] Guang-Chang Dong: *Nonlinear partial differential equations of second order*, AMS, 1991

[GCD] I. M. Geljfand-G.E.Šilov: *Generalized Functions; I. Properties and Operations*, Academic Press, 1964

[KFa] S. Kurepa: *Funkcionalna analiza*, kolska knjiga, Zagreb, 1981

[MSW] Bernard Marshall, Walter Strauss, Stephen Wainger: L^p-L^q *estimates for the Klein-Gordon equation*, J. Math. pures et appl. **59** (1980) 417–440

[RS1] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics – I. Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972

[Rudin] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill International editions, Singapore, 1978

[Stein] E. M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1970

[Sz] Robert S. Strichartz: *Restrictions of Fourier transforms to Quadratic Surfaces and Decay of Solutions of Wave Equations*, Duke Math. J. **44** (1977) 705–714

[Sch] L. I. Schiff: *Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill, London, 1978

[Ta] L. Tartar: *Topics in Non Linear Analysis*, publications mathematiques d'Orsay 78.13

[X] Xavier Saint Raymond: *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, CRC Press, Boca Raton, 1991.

[Y] K. Yosida: *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1995

[Anam] T. Aubin: *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge – Ampère Equations*, Springer – Verlag, New York, 1982.

[B&C] Claudio Baiocchi, A.ntonio Capelo: *Variational and Quasivariational Inequalities, Applications to Free Boundary Problems*, Wiley, New York, 1984.

[C&Hmmp] Richard Courant, David Hilbert: *Methods of Mathematical Physics I,II;* John Wiley & Sons, New York, 1989.

[Ewcm] Lawrence Craig Evans: *Weak convergence methods for Nonlinear Partial Differential Equations;* CBMS vol. 74, AMS, Providence, 1990.

[Fran] G. B. Folland: *Real Analysis,* Willey, New York, 1985.

[Fozc] F. I. Frankl': O zadačah C. A. Čapljigina dlja smešaniih do- i sverhzvukoviih tečenia, *Izvestija Akademii nauk SSSR*, **9**,121–143 (1945)

[Fshl] Kurt O. Friedrichs: Symmetric Hyperbolic Linear Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, VII, 345–392 (1954)

[Fspl] Kurt O. Friedrichs: Symmetric Positive Linear Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, XI, 333–418 (1958)

[Gpde] P. R. Garabedian: *Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1964.

[Gccr] Patrick Gérard: Compacité par compensation et régularité 2-microlocale, in *Séminaire Equations aux Dérivées Partielles 1988–89 (Ecole Polytechnique, Palaiseau, exp. VI)*