SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Matematički odjel

MLADEN MEŠTROVIĆ

RUBNE ZADAĆE RAVNINSKE ELASTIČNOSTI

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, 1996.

Predgovor

Promatrajući osnovne jednadžbe linearne teorije elastičnosti za statičke zadaće, dolazimo do osnovnih rubnih zadaća teorije elastičnosti. Kod izvoda osnovnih rubnih zadaća pretpostavljamo da su rješenja pomaci $\mathbf{u} \in C^3(\Omega; \mathbf{R}^3)$. Postavljamo varijacijsku formulaciju i uvjete za slaba rješenja prve osnovne rubne zadaće teorije elastičnosti. Posebno analiziramo slučajeve kada tenzor deformacije ili tenzor naprezanja možemo zbog posebnosti rubnih uvjeta i vanjskog opterećenja svesti na dvodimenzionalan tenzor. Uvodimo Airyjevu funkciju naprezanja klase C^4 i rješavanje rubne zadaće svodimo na rješavanje biharmonijske jednadžbe s rubnim uvjetima Dirichletovog tipa. Kako bismo ustanovili da li postoje i slabija rješenja formuliramo pripadnu varijacijsku zadaću i dokazujemo jedinstvenog njenog rješenja. Na kraju rješavamo numerički primjer za slučaj ravninskog naprezanja.

Zahvaljujem mentoru dr.Nenadu Antoniću na trudu uloženom u pomoć pri izradi diplomskog rada.

Sadržaj

1. Osnove mehanike kontinuuma

1.1. Kontinuum

Trodimenzionalni euklidski prostor označimo s E^3.

Kontinuum Ω je povezana glatka 3-dimenzionalna mnogostrukost. Radi jednostavnosti uzimamo da je Ω regularno područje u $\mathbf{R}^3$.

Deformacija kontinuuma Ω je dovoljno glatka (klase C^3) injekcija $\mathbf{f} : \Omega \longrightarrow \mathrm{E}^3$ sa svojstvom da je, za svaki $\mathbf{x} \in \Omega$, $\det \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) > 0$. To posebno znači da je $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})$ regularan operator na $\mathcal{V}^3$, translacijskom prostoru pridruženom euklidskom prostoru E^3. Preslikavanje $\mathsf{x} : \Omega \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{E}^3$ klase C^2 takvo da je $\mathbf{f} = \mathsf{x}(\cdot, t)$ deformacija kontinuuma za svaki $t \in \mathbf{R}$, nazivamo *gibanje kontinuuma.* Konfiguraciju kontinuuma $\mathsf{x}(\Omega, t)$ u trenutku t označavamo s Ω_t, a prostornu točku $\mathbf{x}$ u kojoj se nalazi materijalna točka $\mathbf{p}$ u trenutku t

$$\mathbf{x} = \mathsf{x}(\mathbf{p}, t).$$

Trajektorija gibanja kontinuuma Ω je skup

$$\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \Omega_t, t \in \mathbf{R}\}.$$

Gustoća mase kontinuuma Ω je funkcija $\rho : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbf{R}^+$.

Polja definirana na $\Omega \times \mathbf{R}$ nazivamo *materijalna polja.* Materijalnu točku na mjestu $\mathbf{x}$ u trenutku t označavamo s

$$\mathbf{p} = \mathsf{p}(\mathbf{x}, t).$$

Brzinu materijalne točke definiramo kao parcijalnu derivaciju po vremenu

$$\dot{\mathsf{x}}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathsf{x}(\mathbf{p}, t),$$

a ubrzanje materijalne točke kao drugu derivaciju:

$$\ddot{\mathsf{x}}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathsf{x}(\mathbf{p}, t).$$

Polja definirana na trajektoriji gibanja $\mathcal{T}$ nazivamo *prostorna polja.* Prostornu brzinu $\mathbf{v} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}^3$ definiramo s

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathsf{x}}(\mathsf{p}(\mathbf{x}, t), t),$$

dok je prostorno ubrzanje definirano s

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathsf{x}}(\mathsf{p}(\mathbf{x}, t), t).$$

Materijalna vremenska derivacija općenitog vektorskog prostornog polja $\mathbf{f}$ je prostorno polje označeno s $\dot{\mathbf{f}}$, a definirano s

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{f}} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathsf{x}(\mathsf{p}, t), t)|_{\mathbf{p} = \mathsf{p}(\mathbf{x}, t)} \\
&= [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \dot{\mathsf{x}}(\mathsf{p}(\mathbf{x}, t), t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\
&= [\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(\mathbf{x}, t).
\end{aligned}$$

1.2. Sustav sila i zakoni sačuvanja

Gustoća površinske sile je vektorsko polje

$$\mathbf{s} : \mathcal{T} \times S^2 \longrightarrow \mathcal{V}^3,$$

dok je gustoća volumne sile vektorsko polje

$$\mathbf{b} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}^3.$$

Par $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$ smatra se *sustavom sila* ako je
a) $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ za svaki $t \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{n} \in S^2$ glatka funkcija po $\mathbf{x} \in \Omega_t$
b) $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ za svaki $t \in \mathbf{R}$ neprekidna funkcija po $\mathbf{x} \in \Omega_t$.

Zakon sačuvanja mase. Promatramo tijela s neprekinutom razdiobom mase s obzirom na Lebesgueovu mjeru (volumen). Masa područja $\mathcal{P} \subseteq \Omega$ u trenutku t je integral polja gustoće

$$m(\mathcal{P}) = \int\limits_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Za bilo koju deformaciju $\mathbf{f}$ postoji polje gustoće $\rho_{\mathbf{f}}$ na $\mathbf{f}(\Omega)$ tako da je masa svakog dijela $P \subseteq \Omega$

$$m(P) = \int\limits_{\mathbf{f}(P)} \rho_{\mathbf{f}} \, d\mathbf{x}.$$

Razdioba mase tijela Ω je klasa polja gustoće $\rho_{\mathbf{f}} : \mathbf{f}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}^+$, za svaku deformaciju $\mathbf{f}$, takvih da vrijedi

$$\int\limits_{\mathbf{f}(P)} \rho_{\mathbf{f}} \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbf{g}(P)} \rho_{\mathbf{g}} \, d\mathbf{x} \equiv m(P)$$

za svaki dio $P \subseteq \Omega$ i za svake dvije deformacije $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$. Tada kažemo da je zadovoljen zakon sačuvanja mase.

Zakon sačuvanja impulsa. Polja $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{s}$ i $\mathbf{b}$ zadovoljavaju zakon sačuvanja impulsa ako za svako ograničeno područje $P \subseteq \Omega$ i $t \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\int\limits_{P_t} \rho \dot{\mathbf{v}} dV = \int\limits_{P_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int\limits_{\partial P_t} \mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\mathrm{S}.$$

Zakon sačuvanja momenta impulsa. Polja $\rho, \mathbf{v}, \mathbf{s}$ i $\mathbf{b}$ zadovoljavaju zakon sačuvanja momenta impulsa ako za svako ograničeno područje $P \subseteq \Omega$ i $t \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\int\limits_{P_t} \rho(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) dV = \int\limits_{P_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV + \int\limits_{\partial P_t} \mathbf{r} \times \mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\mathrm{S}.$$

1.3. Cauchyjev teorem

Teorem 1. (Cauchyjev teorem o postojanju naprezanja) *Neka je* $(\mathbf{s}, \mathbf{b})$ *sustav sila na* Ω*. Nužan i dovoljan uvjet da su zadovoljeni zakoni sačuvanja je da postoji tenzorsko polje* $\mathbf{T}$ na $\mathcal{T}$ *(Cauchyjev tenzor naprezanja) takvo da je*

- *za svaki jedinični vektor* $\mathbf{n}$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n};$$

- $\mathbf{T} \in \mathrm{Sym}$;
- $\mathbf{T}$ *zadovoljava jednadžbu gibanja*

$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}.$$

Matricu $\mathbf{T} = (\tau_{ij}(\mathbf{x}, t))$ nazivamo tenzor naprezanja u točki $\mathbf{x}$. Komponente naprezanja u smjeru vektora baze $\mathbf{e}_j$ određene su izrazom

$$\tau_{ij} = s_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i \ , i, j = 1, 2, 3.$$

Komponente τ_{ii} , $i = 1, 2, 3$ nazivamo normalna naprezanja, a komponente τ_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ tangencijalna ili posmična naprezanja.

Divergencija tenzorskog polja $\mathbf{T}$ je jedinstveno vektorsko polje $\mathrm{div}\mathbf{T}$ takvo da vrijedi $(\mathrm{div}\mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \mathrm{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{a})$, za svaki vektor $\mathbf{a}$.

Za određene skupove tenzora s nekim posebnim svojstvima koristimo posebne nazive ioznake:

- Lin – skup svih tenzora,
- Lin^+ – skup svih tenzora $\mathbf{T}$ za koje vrijedi $\det\mathbf{T} > 0$,
- Sym – skup svih simetričnih tenzora,
- Skw – skup svih antisimetričnih tenzora,
- Orth – skup svih ortogonalnih tenzora ($\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$),
- Orth^+ – skup svih ortogonalnih tenzora $\mathbf{Q}$ za koje vrijedi $\det\mathbf{Q} > 0$.

Materijalno tijelo je tijelo $\mathcal{B}$ s razdiobom mase ρ i klasom dinamičkih procesa $\mathcal{C}$. Klasu dinamičkih procesa $\mathcal{C}$ nazivamo konstitucijska klasa tijela i sastoji se od dinamičkih procesa konzistentnih s konstitucijskim pretpostavkama na tijelo.

Dinamički proces je par $(\mathsf{x}, \mathbf{T})$, pri čemu:

- x je gibanje,
- $\mathbf{T}$ je simetrično tenzorsko polje na trajektoriji $\mathcal{T}$ od x,
- $\mathbf{T}(\cdot, t)$ je glatka funkcija na Ω_t.

2. Elastičnost

2.1. Elastično tijelo

Elastično tijelo Ω je materijalno tijelo čija je konstitucijska klasa $\mathcal{C}$ definirana pripadnom glatkom funkcijom

$$\hat{\mathbf{T}} : \mathrm{Lin}^{+} \times \Omega \longrightarrow \mathrm{Sym},$$

tako da je $\mathcal{C}$ skup svih dinamičkih procesa $(\mathsf{x}, \mathbf{T})$ konzistentnih s jednakošću

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathbf{p}, t), \mathbf{p})$$

gdje je $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ naprezanje u $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$, a $\mathbf{F}(\mathbf{p}, t)$ gradijent deformacije.

Vektorsko polje $\mathbf{b}_0 = (\det\mathbf{F})\mathbf{b}$ naziva se volumna sila na referentnoj konfiguraciji. Kontaktno polje na referentnoj konfiguraciji, polje $\mathbf{S} : \Omega \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{Lin}$ definirano sa $\mathbf{S} = (\det\mathbf{F})\mathbf{T}(\mathbf{F})^{-\mathrm{T}}$ nazivamo *Piola-Kirchoffov tenzor naprezanja.* Tenzor $\mathbf{S}$ zadovoljava jednadžbu gibanja

$$\mathrm{div}\mathbf{S} + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathsf{x}},$$

pa stoga i zakone sačuvanja.

Konstitucijska jednadžba za elastično tijelo poprima oblik

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}).$$

Ponašanje konstitucijske jednadžbe u okolini $\nabla\mathbf{f} = \mathbf{I}$ određeno je linearnom transformacijom

$$\mathsf{C} : \mathrm{Lin} \longrightarrow \mathrm{Lin}$$

definiranom kao diferencijal funkcije $\hat{\mathbf{S}}$:

$$\mathsf{C} = D\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}).$$

Tenzor C naziva se *tenzor elastičnosti* . Svojstva tenzora elastičnosti su

- $\mathsf{C}[\mathbf{H}] \in \mathrm{Sym}$ za svaki $\mathbf{H} \in \mathrm{Lin}$;
- $\mathsf{C}[\mathbf{W}] = \mathbf{0}$ za svaki $\mathbf{W} \in \mathrm{Skw}$.

Promatramo referentnu konfiguraciju Ω_t i točku $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Uslijed nekog djelovanja područje Ω_t transformira se u područje Ω_t', a točka $\mathbf{x}$ u točku $\mathbf{y}$. Navedenu transformaciju možemo opisati funkcijom

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

gdje se $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ naziva vektor pomaka.

Matricu $\epsilon = (\epsilon_{ij})$ nazivamo *konačni tenzor deformacija*, gdje je

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right).$$

Ukoliko promatramo samo linearni dio dobivamo *tenzor malih deformacija*:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right).$$

2.2. Linearna elastičnost

Osnovne pretpostavke su

- $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$, t.j. rezidual naprezanja u referentnoj konfiguraciji isčezava
- gradijent pomaka $\nabla\mathbf{u}$ je malen.

Promatramo ponašanje konstitucijske jednadžbe za slučaj kad $\nabla\mathbf{u}$ teži k nuli uz relaciju $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$.

Teorem 2. (Asimptotički oblik konstitucijske jednadžbe) *Neka rezidual naprezanja isčezava. Tada je*

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \mathsf{C}[\mathbf{E}] + o(\nabla\mathbf{u})$$

pri $\nabla\mathbf{u} \to \mathbf{0}$, *gdje je* C *tenzor elastičnosti, a*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$$

tenzor deformacija.

Dokaz. Kako rezidual naprezanja isčezava, uz prethodne pretpostavke i Taylorov razvoj vrijedi

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}) &= \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I}) + D\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{I})[\nabla\mathbf{u}] + o(\nabla\mathbf{u}) \\
&= \mathsf{C}[\nabla\mathbf{u}] + o(\nabla\mathbf{u}) \\
&= \mathsf{C}[\mathbf{E}] + o(\nabla\mathbf{u})
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Osnovne jednadžbe linearne teorije elastičnosti na području Ω su

$$\mathbf{S} = \mathsf{C}[\mathbf{E}],$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T),$$

$$\mathrm{div}\mathbf{S} + \mathbf{b}_0 = \rho_0\ddot{\mathbf{u}}.$$

Kod statičkih zadaća jednadžba gibanja postaje jednadžba ravnoteže i glasi

$$\mathrm{div}\mathbf{S} + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0}.$$

U daljnjem razmatranju pretpostavljamo da je referentna konfiguracija u slučaju $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, što povlači $\mathbf{S} = \mathbf{T}, \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}$ i $\rho_0 = \rho$, pa osnovne jednadžbe linearne teorije elastičnosti na području Ω imaju oblik

$$\mathbf{T} = \mathsf{C}[\mathbf{E}],$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T),$$
$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Ako C ne ovisi o $\mathbf{x} \in \Omega$, kažemo da je gradivo homogeno. Gradivo je izotropno u materijalnoj točki $\mathbf{x}$ ako je grupa simetrija u točki $\mathbf{x}$ upravo Orth^+[G, str. 169]. Vrijedi sljedeći teorem [G, str. 230-232],

Teorem 3. (Poopćeni Hookeov zakon) *Za izotropno gradivo tenzor naprezanja* $\mathbf{T}$ *jednak je:*
$$\mathbf{T} = \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E},$$
gdje su λ *i* μ *Laméovi koeficijenti (funkcije od* $\mathbf{x}$*), a* $\mathbf{E}$ *je tenzor deformacija.*

2.3. Laméova i Beltrami-Michellova jednadžba

Polazne pretpostavke su sljedeće:

- vrijedi generalizirani Hooke-ov zakon za izotropno gradivo;
$$\mathbf{T} = \lambda(\mathrm{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}$$
$$\lambda, \mu \text{ su konstante}$$
- $\mathbf{u} \in C^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$
- na području Ω vrijedi jednadžba ravnoteže
$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0};$$

pri čemu su $\mathbf{b} \in C^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$.

Iz jednakosti :
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})$$
$$\mathrm{tr}\mathbf{E} = \mathrm{div}\mathbf{u}$$
dobivamo
$$\mathbf{T} = \lambda(\mathrm{div}\mathbf{u})\mathbf{I} + \mathbf{2}\mu\mathbf{E}.$$
Tada proizlazi:
$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{T} &= \lambda\mathrm{div}(\mathrm{div}\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathrm{div}\mathbf{E} \\
&= \lambda\mathrm{div}((\mathrm{div}\mathbf{u})\mathbf{I}) + \mu\mathrm{div}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \\
&= \lambda\nabla(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \mu\mathrm{div}(\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}) \\
&= \lambda\nabla(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \mu\nabla(\mathrm{div}\mathbf{u}) \\
&= (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u}.
\end{aligned}$$
Uvrštavanjem u jednadžbu ravnoteže dobivamo Laméovu jednadžbu za homogeno i izotropno gradivo:
$$(\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$
Uz pretpostavku $\mathbf{u} \in C^3(\Omega; \mathbf{R}^3)$, daljnjim deriviranjem Laméovu jednadžbu dobivamo
$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda + \mu)\mathrm{div}(\nabla(\mathrm{div}\mathbf{u})) + \mu\mathrm{div}(\Delta\mathbf{u}) + \mathrm{div}\mathbf{b} \\
&= (\lambda + \mu)\Delta(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mu\Delta(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mathrm{div}\mathbf{b},
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo

$$(\lambda + 2\mu)\Delta(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \mathrm{div}\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Ako definiramo:

$$\mathrm{E} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \; ; \; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \; ,$$

gdje E nazivamo Youngov modul elastičnosti, a ν Poissonov koeficijent, dobivamo prvu Beltrami-Michellovu jednadžbu koja glasi:

$$\Delta(\mathrm{div}\mathbf{u}) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\mathrm{div}\mathbf{b} = 0.$$

Youngov modul elastičnosti E i Poissonov koeficijent ν su fizikalne veličine koje se relativno jednostavno mogu izmjeriti, pa je stoga praktičnije izražavati Beltrami-Michellovu jednadžbu koristeći E i ν.

gradivo	modul elastičnosti E [kN/m^2]	Poissonov koeficijent ν
beton (MB 30)	3.15×10^7	0.2
čelik (Č.0361)	2.1×10^8	0.3
aluminij	7.3×10^7	0.35

2.4. Klasično postavljanje rubnih zadaća teorije elastičnosti

Uz pretpostavke prethodnog odjeljka i dodatnu pretpostavku da je rub Γ područja Ω neprekidno derivabilan, tražimo pomake $\mathbf{u}$ koji zadovoljavaju Laméove jednadžbe i jedan od sljedećih tipova rubnih uvjeta :

(a) **prva osnovna rubna zadaća teorije elastičnosti**

Na rubu Γ područja Ω zadane su površinske sile

$$\mathbf{s} \in C(\Gamma; \mathbf{R}^3),$$

a s $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ označena je vanjska jedinična normala u točki $\mathbf{x}$ na rubu Γ područja Ω i tražimo da vrijedi:

$$\mathbf{T}_{|_\Gamma}\mathbf{n} = \mathbf{s}$$

Tada Laméova jednadžba i ovaj rubni uvjet tvore prvu osnovnu rubnu zadaća teorije elastičnosti. Tražimo funkciju $\mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^3) \cap C^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$ koja zadovoljava Laméovu jednadžbu i ovaj rubni uvjet.

(b) **druga osnovna rubna zadaća teorije elastičnosti**

Na rubu Γ zadamo pomak $\mathbf{u}_{|_\Gamma} = \mathbf{w} \in C(\Gamma; \mathbf{R}^3)$. Tražimo funkciju $\mathbf{u} \in C(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^3) \cap C^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$ koja zadovoljava Laméovu jednadžbu i ovaj rubni uvjet.

(c) **mješovita osnovna rubna zadaća teorije elastičnosti**

Neka su Γ_τ i Γ_u dva neprazna skupa otvorena u Γ i $\Gamma = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u \cup \mathcal{R}$ gdje je $\mathcal{R}$ zanemariv skup u Γ. Na dijelu ruba Γ_τ zadamo površinske sile $\mathbf{s} \in C(\Gamma_\tau; \mathbf{R}^3)$ i tražimo da vrijedi $\mathbf{s} = \mathbf{T}_{|_{\Gamma_\tau}} \mathbf{n}$, a na dijelu ruba Γ_u pomak $\mathbf{u}_{|_{\Gamma_u}} = \mathbf{w} \in C(\Gamma_u; \mathbf{R}^3)$. Tražimo funkciju $\mathbf{u} \in C^1(\Omega \cup \Gamma_\tau; \mathbf{R}^3) \cap C(\Omega \cup \Gamma_u; \mathbf{R}^3) \cap C^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$, koja zadovoljava Laméovu jednadžbu i rubne uvjete na Γ_u i Γ_τ.

3. Varijacijski princip u teoriji malih deformacija

3.1. Područje s Lipschitzovim rubom

Kaže se da područje $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n, n \geq 2$, ima Lipschitzov rub Γ ako postoje pozitivni brojevi α i β takvi da za svaku točku ruba $\mathbf{x}^0$ Kartezijev koordinatni sustav može biti rotiran i translatiran u $\mathbf{x}^0$ tako da vrijede sljedeće tvrdnje

- Neka je $\mathrm{K}_{n-1} := [-\alpha, \alpha]^{n-1} \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ (n-1)-dimenzionalna kocka. Tada postoji Lipschitzova funkcija $a : \Gamma \longrightarrow \mathbf{R}$, točnije takva da vrijedi:
$$(\exists\, \mathrm{L} \in \mathbf{R}^+)(\forall \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathrm{K}_{n-1})\ |a(\mathbf{x}') - a(\mathbf{y}')| < \mathrm{L}|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|.$$
- Svaka točka $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$ takva da je $\mathbf{x}' \in \mathrm{K}_{n-1}$ i $a(\mathbf{x}') < x_n < a(\mathbf{x}') + \beta$ leži unutar Ω, a svaka točka $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n)$ takva da je $\mathbf{x}' \in \mathrm{K}_{n-1}$ i $a(\mathbf{x}') - \beta < x_n < a(\mathbf{x}')$ leži u $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Točke za koje je $a(\mathbf{x}') = x_n$ su upravo one koje leže na rubu Γ.

Sljedeća dva područja su primjeri područja koja prema definiciji nisu područja s Lipschitzovim rubom.

Na rubu Γ područja s Lipschitzovim rubom možemo definirati vanjsku jediničnu normalu $\mathbf{n}$, osim na skupu površinske mjere nula, te vrijedi sljedeće poopćenje klasičnog teorema [BC, str. 370].

Teorem 4. (Teorem o divergenciji) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ područje s Lipschitzovim rubom Γ i neka je $\mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega}; \boldsymbol{R}^n)$. Tada vrijedi:*
$$\int_\Omega (\mathrm{div}\mathbf{u})\, d\mathbf{x} = \int_\Gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\mathrm{S},$$
gdje je $\mathbf{n}$ vanjska jedinična normala na Γ .

3.2. Principi virtualnog rada, virtualnih pomaka, virtualnih naprezanja

U daljnjim razmatranjima bavit ćemo se samo statičkim zadaćama. *Statički dopustivo polje naprezanja* je simetrična tenzorska funkcija $\mathbf{T}$ koja zadovoljava jednadžbu ravnoteže na Ω

$$\mathrm{div}\mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

i rubne uvjete na Γ_τ

$$\mathbf{T}\big|_{\Gamma_\tau}\mathbf{n} = \mathbf{s}\,.$$

Geometrijski dopustivo polje pomaka je vektorska funkcija $\mathbf{u}$ koja zadovoljava rubne uvjete na Γ_u

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_u} = \mathbf{w}\,.$$

Teorem 5. (Princip virtualnog rada) *Neka je* $\mathbf{T}$ *statički dopustivo polje naprezanja, a* $\mathbf{u}$ *geometrijski dopustivo polje pomaka. Tada vrijedi*

$$\int_\Omega \mathbf{T}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u})\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}\mathbf{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,d\mathrm{S}.$$

Dokaz. Prema teoremu o divergenciji vrijedi

$$\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{T}\mathbf{u})d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}(\mathbf{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})d\mathrm{S}.$$

Zbog simetrije tenzora $\mathbf{T}$ vrijedi

$$\mathrm{div}(\mathbf{T}\mathbf{u}) = \mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathrm{div}\mathbf{T}\cdot\mathbf{u},$$

prema čemu dalje slijedi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}(\mathbf{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})d\mathrm{S} &= \int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u})d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega(\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{u})d\mathbf{x} + \int_\Omega(\mathrm{div}\mathbf{T}\cdot\mathbf{u})d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})d\mathbf{x} + \int_\Omega(\mathrm{div}\mathbf{T}\cdot\mathbf{u})d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \mathbf{T}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u})\,d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

čime je dobivena tvrdnja teorema.

Q.E.D.

Princip virtualnog rada se uglavnom iskazuje ovako: Virtualni rad unutarnjih sila jednak je virtualnom radu vanjskih sila.

Prema definiciji, klasično rješenje $\mathbf{u^0}$ je geometrijski dopustivo polje deformacija. Neka je $\mathbf{T^0}$ pripadno statički dopustivo polje naprezanja. Neka je proizvoljna perturbacija polja pomaka $\mathbf{u^0} + \mathbf{h}$ također geometrijski dopustivo polje pomaka. Potrebno je, dakle, da je $\mathbf{h}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}$. Ako se u princip virtualnog rada uvrste posebno $\mathbf{T^0}$ i $\mathbf{u^0}$ odnosno $\mathbf{T^0}$ i $\mathbf{u^0} + \mathbf{h}$ i dobivene jednadžbe oduzmu dobivamo princip virtualnih pomaka.

Teorem 6. (Princip virtualnih pomaka) *Neka je* $\mathbf{T}^0$ *statički dopustivo polje naprezanja, a* $\mathbf{u}^0$ *i* $\mathbf{u}^0 + \mathbf{h}$ *geometrijski dopustiva polja pomaka. Tada vrijedi*

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{T}^0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{h})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}\, d\mathbf{x} + \int\limits_{\Gamma_\tau} \mathbf{Th} \cdot \mathbf{n}\, d\mathrm{S}.$$

Promatra se geometrijski dopustivo polje pomaka $\mathbf{u^0}$ i statički dopustiva polja naprezanja $\mathbf{T^0}$ i $\mathbf{T^0} + \mathbf{H}$. Ako se u princip virtualnog rada uvrste posebno $\mathbf{T^0}$ i $\mathbf{u^0}$ odnosno, $\mathbf{u^0}$ i $\mathbf{T^0} + \mathbf{H}$, i dobivene jednadžbe oduzmu, dobivamo princip virtualnih naprezanja.

Teorem 7. (Princip virtualnih naprezanja) *Neka su* $\mathbf{T}^0$ *i* $\mathbf{T}^0 + \mathbf{H}$ *statički dopustiva polja naprezanja, a* $\mathbf{u}^0$ *geometrijski dopustivo polje pomaka. Tada vrijedi*

$$\int\limits_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u^0}) d\mathbf{x} = \int\limits_{\Gamma_u} \mathbf{H}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}\, d\mathrm{S}\,.$$

Princip virtualnih pomaka služi kao osnova za *metodu pomaka*, a princip virtualnih naprezanja za *metodu sila* kod rješavanja statički neodređenih konstrukcija u građevnoj statici. Više o primjeni i postupku rješavanja može se naći u [A], a ovdje ćemo riješiti jedan jednostavniji primjer na oba načina.

Primjer. Neka je zadana armirano-betonska neprekinuta ploča preko tri polja opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem q.

Potrebno je nacrtati momentni dijagram: a.) metodom sila, b.) metodom pomaka.

Rješenje: **a.) metodom sila**.
Presijecanjem prekobrojnih veza oslobađamo nepoznate sile u tim vezama. Statički određenu konstrukciju nastalu oslobođenjem prekobrojnih veza nazivamo osnovni sistem.

Deformacijska energija konstrukcije, ukoliko zanemarimo utjecaj poprečnih i uzdužnih sila glasi

$$\Pi_d^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \int\limits_0^{L_k} \frac{\left(M^{(k)}(x)\right)^2}{E_k I_k} dx,$$

gdje su n broj štapova, L_k duljina, E_k modul elastičnosti i I_k moment inercije k-tog štapa, a $M^{(k)}(x)$ moment na k-tom štapu kao funkcija od x. Moment na zadanom sistemu M_x jednak je zbroju momenata na osnovnom sistemu od vanjskog opterećenja i nepoznatih sila u prekobrojnim vezama

$$M(x) = M_O(x) + \sum_{j=1}^{m} X_j m_j(x),$$

gdje su $M_O(x)$ momenti od vanjskog opterećenja na osnovnom sistemu, X_j sile u prekobrojnim vezama, $m_j(x)$ momenti na osnovnom sistemu od jediničnih sila u prekobrojnim vezama ($X_j = 1, X_k = 0$ za $k \neq j$). Tada deformacijska energija poprima oblik

$$\Pi_d^* = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \int\limits_0^{L_k} \frac{\left(M_O^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{m} X_j m_j^{(k)}(x)\right)^2}{E_k I_k} dx.$$

Derivacija deformacijske energije po sili u prekobrojnoj vezi (X_i) jednaka je pomaku na mjestu, pravcu i smjeru sile X_i. Kako sile X_i djeluju u paru, derivacija deformacijske energije jednaka je relativnom pomaku krajeva presiječene veze na pravcu para sila X_i

$$\begin{aligned}
\delta_i = \frac{\partial \Pi_d^*}{\partial X_i} &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{L_k} \frac{M^{(k)}(x)}{E_k I_k} \frac{\partial M^{(k)}(x)}{\partial X_i} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{L_k} \frac{M^{(k)}(x)}{E_k I_k} m_i^{(k)}(x) dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{L_k} \frac{1}{E_k I_k} \left(M_O^{(k)}(x) m_i^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{m} X_j m_j^{(k)}(x) m_i^{(k)}(x) \right) dx.
\end{aligned}$$

Uvodimo oznake za zbroj integrala preko svih štapova konstrukcije i nazivamo ih koeficijenti popustljivosti

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{L_k} \frac{1}{E_k I_k} m_j^{(k)}(x) m_i^{(k)}(x) dx,$$

$$f_{iO} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^{L_k} \frac{1}{E_k I_k} M_O^{(k)}(x) m_i^{(k)}(x) dx.$$

Izraz f_{ij} predstavlja pomak na mjestu, pravcu i smjeru sile X_i za opterećenje silom $X_j = 1$, a izraz f_{iO} pomak na mjestu, pravcu i smjeru sile X_i za vanjsko opterećenje. Na mjestima oslobođenih veza relativni pomak jednak je nuli, pa dobivamo sljedeće jednadžbe koje nazivamo jednadžbe kontinuiteta:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{m} X_j f_{ij} + f_{iO} = 0, \; i = 1, \cdots m.$$

Definiramo matricu $\mathbf{F} = (f_{ij})$ i vektore $\mathbf{F}^O = (f_{iO})$ i $\mathbf{X} = (X_i)$ dobivamo matrični oblik jednadžbi

$$\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{F}^O = \mathbf{0}.$$

Momentni dijagrami na osnovnom sistemu su:

Izrazi za koeficijente popustljivosti su:

$$f_{11} = \frac{2l}{3},\ f_{12} = \frac{l}{6},\ f_{22} = \frac{2l}{3},\ f_{1O} = -\frac{ql^2}{12},\ f_{2O} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Jednadžbe kontinuiteta glase:

$$\begin{aligned} \frac{2l}{3}X_1 + \frac{l}{6}X_2 - \frac{ql^2}{12} &= 0 \\ \frac{l}{6}X_1 + \frac{2l}{3}X_2 - \frac{ql^2}{12} &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo $X_1 = X_2 = \frac{ql^2}{10}$, a time i konačni momentni dijagram.

b.) metodom pomaka.
Nepoznanice su nepoznati kutevi zaokreta slobodnih čvorova i nepoznati translatorni pomaci konstrukcije. U inženjerskoj metodi pomaka zanemaruje se utjecaj deformacija izazvanih djelovanjem uzdužnih sila. Postavljamo jednadžbe ravnoteže slobodnih čvorova i jednadžbe na jediničnim nepoznatim translatornim pomacima. Izraz za moment savijanja u čvoru i štapa ij glasi $M_{ij} = m_{ij} + \overline{M_{ij}}$, gdje su $\overline{M}_{ij}$ moment od vanjskog opterećenja

na konstrukciji sa spriječenim pomacima i

$$m_{ij} = a_{ij}\varphi_i + b_{ij}\varphi_j + c_{ij}\Delta v_{ij},$$

a_{ij} moment za kut zaokreta $\varphi_i = 1$, b_{ij} moment za kut zaokreta $\varphi_j = 1$ i c_{ij} moment za jedinični relativni pomak čvorova okomit na os štapa ($\Delta v_{ij} = 1 =$. Veličine a_{ij}, b_{ij} i c_{ij} ovise o rubnim uvjetima na krajevima štapa ij, modulu elastičnosti E_{ij}, momentu inercije I_{ij} i duljini l_{ij} štapa ij.

U ovom primjeru nepoznanice su kutevi zaokreta φ_2 i φ_3. Krutosti štapova definiramo s $k_{ij} = \frac{E_{ij}I_{ij}}{E_0 I_0 l_{ij}}$, pa uz pretpostavku $E_0 I_0 = EI$ dobivamo $k_{12} = k_{23} = k_{34} = \frac{1}{l}$. Izrazi za momente na krajevima štapova su:

$$\begin{aligned}
M_{21} &= 3k_{12}\varphi_2 - \frac{ql^2}{8} = \frac{3}{l}\varphi_2 - \frac{ql^2}{8},\\
M_{23} &= 4k_{23}\varphi_2 + 2k_{23}\varphi_3 + \frac{ql^2}{12} = \frac{4}{l}\varphi_2 + \frac{2}{l}\varphi_3 + \frac{ql^2}{12},\\
M_{32} &= 2k_{23}\varphi_2 + 4k_{23}\varphi_3 - \frac{ql^2}{12} = \frac{2}{l}\varphi_2 + \frac{4}{l}\varphi_3 - \frac{ql^2}{12},\\
M_{34} &= 3k_{34}\varphi_3 + \frac{ql^2}{8} = \frac{3}{l}\varphi_3 + \frac{ql^2}{8}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza za momente u jednadžbe ravnoteže čvorova $\sum M_{2i} = 0$ i $\sum M_{3i} = 0$ dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{l}\varphi_2 + \frac{2}{l}\varphi_3 - \frac{ql^2}{24} &= 0,\\
\frac{2}{l}\varphi_2 + \frac{7}{l}\varphi_3 + \frac{ql^2}{24} &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem sustava jednadžbi dobivamo $\varphi_2 = -\varphi_3 = \frac{ql^3}{120}$, a time i konačne izraze za momente na krajevima štapova $M_{21} = -\frac{ql^2}{10}, M_{23} = \frac{ql^2}{10}, M_{32} = -\frac{ql^2}{10}$ i $M_{34} = \frac{ql^2}{10}$ i konačni momentni dijagram.

3.3. Princip minimuma potencijalne energije u teoriji elastičnosti

Za elastično anizotropno tijelo vrijedi $\mathbf{T} = \mathsf{C}[\mathbf{E}]$. Definiramo energiju deformacije (točnije gustoću energije deformacije)

$$\mathcal{W}(\mathbf{E}) \equiv \frac{1}{2}\mathsf{C}[\mathbf{E}] \cdot \mathbf{E}.$$

Pretpostavljamo da je pripadna kvadratna forma jednoliko pozitivno definitna

$$(\exists C_0 > 0)(\forall \mathbf{E} \in \mathrm{Sym})\; 2\mathcal{W}(\mathbf{E}) \equiv \mathsf{C}[\mathbf{E}] \cdot \mathbf{E} \geq C_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}.$$

Za izotropni slučaj, Laméovi koeficijenti λ i μ su pozitivni. Vrijedi

$$2\mathcal{W}(\mathbf{E}) = \lambda \vartheta^2 + 2\mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq 2\mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\,,$$

gdje uvodimo oznaku $\vartheta = \mathrm{tr}\mathbf{E}$. Uvrštavanjem izraza $\mathbf{T}^0 = \mathsf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u^0})]$ u princip virtualnih pomaka dobivamo

$$\int_\Omega \mathsf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u^0})]\mathbf{E}(\mathbf{h})\, d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}\, d\mathrm{S} = 0\,.$$

Definiramo potencijalnu energiju elastičnog tijela kao funkcional

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int_\Omega \mathcal{W}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\, d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}\, d\mathbf{x}.$$

Za geometrijski dopustivo polje pomaka $\mathbf{u^0}+\mathbf{h}$ koristimo pripadnu kvadratnu formu $\mathcal{W}(\mathbf{E})$ i princip virtualnih pomaka kako bismo izračunali razliku

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{u^0} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{u^0}) &= \int_\Omega \Big[\mathcal{W}\Big(\mathbf{E}(\mathbf{u^0} + \mathbf{h})\Big) - \mathcal{W}\Big(\mathbf{E}(\mathbf{u^0})\Big)\Big]\; d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{h}\, d\mathrm{S} \\
&= \int_\Omega \mathsf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u^0})] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{h})\, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_\Omega \mathsf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{h})] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{h})\, d\mathbf{x} \\
&\quad - \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{h}\, d\mathrm{S} \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \mathsf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{h})] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{h})\, d\mathbf{x} \geq \frac{1}{2} C_0 \int_\Omega \mathbf{E}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{h})\, d\mathbf{x} \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Prema tome, slijedi da je geometrijski dopustivo polje pomaka $\mathbf{u}^0$ minimum potencijalne energije, pa je dokazan sljedeći teorem:

Teorem 8. (Princip minimuma potencijalne energije) *Rješenje* $\mathbf{u^0}$ *mješovite zadaće teorije elastičnosti minimizira potencijalnu energije*

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathsf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} - \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u}\, d\mathrm{S}$$

na skupu geometrijski dopustivih polja pomaka.

4. Funkcije s konačnom energijom

4.1. Prostor funkcija s konačnom energijom

Rješenje rubne zadaće možemo dobiti kao pomak u kojem funkcional potencijalne energije Φ poprima minimum. Potrebno je naći prostor funkcija na kojem je funkcional definiran i poprima minimum. Neka je Ω ograničeno područje s Lipschitzovim rubom. Integral $\int\limits_{\Omega} \mathsf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) d\mathbf{x}$, sastavni dio potencijalne energije $\Phi(\mathbf{u})$, nazivamo *energija deformacije.* Potrebno je promatrati prostor kvadratično integrabilnih funkcija $\mathbf{u}$ čiji su gradijenti $\nabla\mathbf{u}$ također kvadratično integrabilni.

Općenito, promatramo prostor $C^k(\overline{\Omega})$ i definiramo skalarni produkt

$$(u,v)_k \equiv \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leq k} D^\alpha u D^\alpha v \, d\mathbf{x}$$

gdje su

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \; , \; |\alpha| = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i .$$

Lako se provjeri da je $(u,v)_k$ zaista skalarni produkt. Tako definiran skalarni produkt inducira normu

$$(u,u)_k^{1/2} \equiv \|u\|_{k,2}.$$

Upotpunjenje prostora $C^k(\overline{\Omega})$ u ovoj normi je Hilbertov prostor, nazivamo ga Soboljevljev prostor i označavamo s $W^{k,2}(\Omega) \equiv \mathrm{H}^k(\Omega)$.

Neka je $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ prostor svih beskonačno neprekidno derivabilnih funkcija u Ω i neprekidno proširivih na $\overline{\Omega}$. Prostor $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ je gust u $\mathrm{H}^k(\Omega)$ ako je Ω područje s Lipschitzovim rubom. Definiramo prostor funkcija s kompaktnim nosačem

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{v \in \mathcal{E}(\overline{\Omega}) \mid \operatorname{supp} v \subset \Omega\},$$

gdje je $\operatorname{supp} f = \overline{M}$ nosač funkcije f, a $M = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}$ je skup svih elemenata područja Ω za koje je vrijednost funkcije f različita od 0. Neka je $C_0^k(\overline{\Omega}) = \{v \in C^k(\overline{\Omega}) \mid D^\alpha v = 0 \text{ na } \Gamma \text{ za } |\alpha| \leq k-1\}$. Zatvorenje od $C_0^k(\overline{\Omega})$ u $W^{k,2}(\Omega)$ je također Hilbertov prostor i označavamo ga s $W_0^{k,2}(\Omega) \equiv H_0^k(\Omega)$. To je zatvoren Hilbertov potprostor Hilbertovog prostora $W^{k,2}(\Omega)$.

Ukoliko promatramo $\mathbf{u} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3$, energija deformacije je konačna i prostor $W \equiv [W^{1,2}(\Omega)]^3$ nazivamo *prostor funkcija s konačnom energijom.*

4.2. Teorem o tragu

Promatramo omeđeno područje $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, gdje je n proizvoljan pozitivan cijeli broj.

Teorem 9. (Teorem o tragu) *Postoji neprekidno linearno preslikavanje* $Z : H^1(\Omega) \longrightarrow L_2(\Gamma)$ *takvo da je* $Z\mathbf{u} = \mathbf{u}_{|\Gamma}$ *za* $\mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega})$. $Z\mathbf{u}$ *se naziva trag funkcije u.*

Dokaz. Dokaz provodimo za kocku, za slučaj $n \geq 2$ (u slučaju $n = 1$ dokaz je jednostavniji). Za općenito područje Ω s Lipschitzovim rubom dokaz možemo svesti na slučaj kocke koristeći particiju jedinice.

Promatramo kocku $C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, 0 < x_i < 1\} = (0,1)^n$ i funkciju $\mathbf{u} \in C^1(\overline{C})$. Ako uzmemo $\mathbf{x} = (\mathbf{x}',\ x_n)$,$\mathbf{x}' \in (0,1)^{n-1}$, dobiva se

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x}',\eta) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}',0) + \int_0^\eta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}(\mathbf{x}',\zeta)d\zeta \\
\mathbf{u}(\mathbf{x}',0) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}',\eta) - \int_0^\eta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}(\mathbf{x}',\zeta)d\zeta \\
\mathbf{u}^2(\mathbf{x}',0) &\leq 2\left(\int_0^\eta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}(\mathbf{x}',\zeta)d\zeta\right)^2 + 2\mathbf{u}^2(\mathbf{x}',\eta) \\
&\leq 2\int_0^1 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}(\mathbf{x}',\zeta)\right]^2 d\zeta + 2\mathbf{u}^2(\mathbf{x}',\eta).
\end{aligned}$$

Ako integriramo po η na intervalu $[0,1]$ dobivamo

$$\mathbf{u}^2(\mathbf{x}',0) \leq 2\int_0^1 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}(\mathbf{x}',\zeta)\right]^2 d\zeta + 2\int_0^1 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}',\eta)d\eta.$$

Integriranjem na površini S, koja je u ovom slučaju baza kocke, dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{S}} \mathbf{u}^2(\mathbf{x}',0)d\mathbf{x}' &\leq 2\int_{\mathrm{S}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}(\mathbf{x}',\zeta)\right)^2 d\zeta + \int_0^1 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}',\eta)d\eta\right] d\mathrm{S} \\
&\leq 2\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2.
\end{aligned}$$

Također možemo ustanoviti analogne nejednakosti za ostale površine. Tada je

$$\int_{\partial C} \mathbf{u}^2 d\mathrm{S} \leq 4n\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2$$

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\partial C} \mathbf{u}^2 d\mathrm{S}\right)^{1/2} \leq 2\sqrt{n}\|\mathbf{u}\|_{1,2}.$$

Prostor $C^1(\overline{\Omega})$ je gust u $H^1(\Omega)$, a ograničen linearan operator definiran na gustom podskupu može biti neprekidno proširen na cijeli prostor.

Q.E.D.

4.3. Ekvivalentnost normi i Rellichov teorem

Teorem 10. (Teorem o ekvivalentnim normama) *Na prostoru $H_0^1(\Omega)$ sljedeće dvije norme, $\|\cdot\|_{1,2}$ i $\|\cdot\|'$, su ekvivalentne.*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{1,2} &= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right)^2 d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{u}^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2} \\
\|\mathbf{u}\|' &= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right)^2 d\mathbf{x}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Dokaz. Tvrdnja $(\|\mathbf{u}\|')^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2$ je očita iz same definicije normi. Potrebno je pokazati da također vrijedi i :

$$\int_\Omega \phi^2 d\mathbf{x} \leq C \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2 d\mathbf{x},$$

za $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ako je Ω povezan i da postoji kocka s rubom duljine a koja sadrži Ω, možemo bez smanjenja općenitosti da je Ω kocka. Nosač funkcije ϕ leži u skupu Ω.

Prikladnom promjenom koordinatnog sustava $(\phi(\mathbf{x}', 0) = 0)$ dobivamo

$$\phi(\mathbf{x}', x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\mathbf{x}', \zeta) d\zeta$$

$$\phi(\mathbf{x}', x_n) \leq \int_0^{a} \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\mathbf{x}', \zeta) d\zeta$$

$$\phi^2(\mathbf{x}', x_n) \leq a \int_0^{a} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\mathbf{x}', \zeta)\right]^2 d\zeta.$$

Integracijom s obzirom na x_n dobivamo

$$\int_0^a \phi^2(\mathbf{x}', x_n) dx_n \leq a^2 \int_0^{a} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\mathbf{x}', \zeta)\right]^2 d\zeta.$$

Integriramo obzirom na $\mathbf{x}'$ i koristeći Fubinijev teorem dobivamo

$$\int_\Omega \phi^2 d\mathbf{x} \leq a^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right)^2 d\mathbf{x} \leq a^2 \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2 d\mathbf{x}.$$

Sada je dokazana i tvrdnja

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 \leq a^2 \|\mathbf{u}\|'.$$

Prema tome, dokazano je da su navedene norme $\|\mathbf{u}\|_{1,2}$ i $\|\mathbf{u}\|'$ ekvivalentne .

Q.E.D.

Ulaganje je svako injektivno preslikavanje kod kojeg možemo identificirati domenu i sliku. Kompaktno preslikavanje na normiranom prostoru je neprekidno preslikavanje koje svaki ograničen skup preslikava u predkompaktan skup. Za karakterizaciju predkompaktnih skupova u L^p koristimo sljedeći Kolmogorovljev kriterij.

Neka je Ω povezano područje, $M \subset L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$. Nužan i dovoljan uvjet da je skup M predkompaktan u skupu $L^p(\Omega)$ je da su funkcije $\mathbf{f} \in M$

(i) jednoliko ograničene, t.j. $(\exists C \in \mathbf{R}^+)(\forall \mathbf{f} \in M)\ \|\mathbf{f}\|_{L_p(\Omega)} \leq C$,

(ii) ekvineprekidne, t.j. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da uz proširenje nulom izvan Ω vrijedi

$$\left(\int_\Omega |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right)^{1/p} < \epsilon$$

za $|h| < \delta$ i $\mathbf{f} \in M$, gdje δ ne ovisi o $\mathbf{f}$.

Teorem 11. (Rellichov teorem) *Ulaganje $W^{1,2}(\Omega)$ u $L^2(\Omega)$ je kompaktno preslikavanje.*

Dokaz Rellichovog teorema može se naći u [NH, str. 75-77].

4.4. Koercitivnost i Kornova nejednakost

Teorem 12. *Neka je Ω područje u $\mathbf{R}^3$ i neka je $\mathbf{u} \in [W_0^{1,2}(\Omega)]^3$. Tada vrijedi :*

$$\int_\Omega \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x}.$$

Dokaz. Budući da je skup $\mathcal{D}(\Omega)$ u Hilbertovom prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$, to je zbog neprekinutosti dovoljno pokazati tvrdnju za $\mathbf{u} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$. Vrijedi:

$$\frac{1}{4} \int_\Omega \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right) \cdot \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) d\mathbf{x}.$$

Za drugi integral s desne strane jednakosti vrijedi:

$$\int_\Omega (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^{\mathrm{T}}) d\mathbf{x} = \int_\Omega (\nabla \mathbf{u})^2 \, d\mathbf{x} \geq 0.$$

Q.E.D.

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi nejednakost:

$$\int_\Omega [\mathbf{E}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}] d\mathbf{x} \geq \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|_{1,2}^2$$

za bilo koji $\mathbf{v} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3$. Ovu nejednakost nazivamo *koercitivnost deformacije.*

Teorem 13. *Neka je Ω područje u $\mathbf{R}^3$ i neka je $\mathbf{u} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3$. Tada je $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ako i samo ako je $\mathbf{u}$ oblika $\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbf{u}$ oblika $\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}$. Ova tvrdnja povlači, samim uvrštavanjem za proizvoljne $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ prema definiciji malih deformacija $\mathbf{E}$, da vrijedi $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Neka je $w \in \mathcal{E}(R^3)$ i

$$\int_{\mathbf{R}^3} w(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 1,$$

gdje vrijedi $\operatorname{supp} w \subset K(0,1)$. Neka je

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^3} \int_{\mathbf{R}^3} w\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{h}\right) \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Za dovoljno mali h vrijedi $\mathbf{u}_h \in [\mathcal{E}(\overline{\Omega})]^3$ i $\mathbf{u}_h \to \mathbf{u}$ u $[W^{1,2}(\Omega)]^3$ za $h \to 0$. Očito je $e_{ij}(\mathbf{u}) = 0$ u Ω za

$$\frac{\partial u_{hi}}{\partial x_j} = \frac{1}{h^3} \int_{\mathbf{R}^3} w\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{h}\right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Prvo dokazujemo izraz za $\mathbf{v} \in [\mathcal{E}(\overline{\Omega})]^3$. Sada je dakle

$$\frac{\partial^3 v_i}{\partial x_k \partial x_l \partial x_p} = 0.$$

Prikladnom upotrebom indeksa slijedi

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_m} = 0.$$

Prema tome, dobivamo

$$v_1 = a_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + c_1x_2x_3,$$

$$v_2 = a_2 + b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + c_2x_1x_3,$$

$$v_3 = a_3 + b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + c_3x_2x_2.$$

Zbog $e_{ij}(\mathbf{v}) = 0$ za $i \neq j$, vrijedi

$$c_1 = -c_2, c_1 = -c_3, c_2 = -c_3 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0,$$

$$b_{12} = -b_{21}, b_{13} = -b_{31}, b_{23} = -b_{32}.$$

Prema tome , $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}$. Neka je $P \equiv \{\mathbf{v} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3 \mid \mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}\}$. P je konačno-dimenzionalan linearni podskup, zatvoren u $[W^{1,2}(\Omega)]^3]$. Za $\mathbf{u}_h \in P$ i $\mathbf{u}_h \to \mathbf{u}$ u $[W^{1,2}(\Omega)]^3$ za $h \to 0$, tvrdnja teorema slijedi jer je P konačno-dimenzionalni linearni podskup zatvoren u $[W^{1,2}(\Omega)]^3$. Neka je V zatvoren potprostor od $[W^{1,2}(\Omega)]^3$ takav da vrijedi $[W_0^{1,2}(\Omega)]^3 \subset V \subset [W^{1,2}(\Omega)]^3$.

Q.E.D.

Neka je $P_V = P \cap V$ i neka je Q_V ortogonalni komplement od P_V u prostoru V t.j. $V = P_V \oplus Q_V$. Nejednakost

$$\int_\Omega \mathbf{E}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \geq c\|\mathbf{v}\|_{1,2}^2$$

za bilo koji $\mathbf{v} \in Q_V$ nazivamo *Kornova nejednakost.*

Kornova nejednakost kazuje da, ako je funkcional potencijalne energije $\Phi(\mathbf{u})$ konačan, tada pomaci pripadaju $[W^{1,2}(\Omega)]^3$, Kartezijevom produktu Soboljevljevih prostora $W^{1,2}(\Omega)$.

Teorem 14. *Neka je $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ područje s Lipschitzovim rubom i neka je $V = P_V \oplus Q_V$. Tada vrijedi Kornova nejednakost.*

Dokaz: Pretpostavljamo suprotnu tvrdnju:

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\exists \mathbf{v_n} \in Q_V)\ \|\mathbf{v_n}\|_{1,2} = 1\ \&\ \int_\Omega \mathbf{E}(\mathbf{v}_n) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_n) d\mathbf{x} < \frac{1}{n}.$$

Promatramo konvergentan podniz $\mathbf{v}_{n,k} \to \mathbf{v}\,\mathrm{u}\,[L^2(\Omega)]^3$. Prema pretpostavci i koercitivnosti deformacije $\mathbf{v}_{n,k}$ je Cauchyjev niz. Znači da vrijedi $\mathbf{v}_{n,k} \to \mathbf{v}\,\mathrm{u}\,[W^{1,2}(\Omega)]^3$, ali i $\|\mathbf{v}\|_{1,2} = 1$. Iz pretpostavke slijedi $\mathbf{E}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ što povlači da je $\mathbf{v} \in P \cap V = P_V$. Kako je $\mathbf{v} \in Q_V$ zaključuje se da je $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ova činjenica je u kontradikciji s početnom pretpostavkom $\|\mathbf{v}\|_{1,2} = 1$.

Q.E.D.

5. Varijacijska formulacija i rješenje osnovne rubne zadaće teorije elastičnosti

5.1. Slabo rješenje

Neka je Ω područje s Lipschitzovim rubom $\Gamma = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u \cup \mathcal{R}$, gdje je $\mathcal{R}$ skup površinske mjere jednake nuli. Definiramo skup

$$\mathcal{V} = \{\phi \in C^1(\overline{\Omega}) \mid \operatorname{supp}\phi \subset \Omega \cup \Gamma_\tau\}.$$

Promatramo zatvarač skupa $\mathcal{V}$ u skupu $H^{1,2}(\Omega)$, te pišemo $[\overline{\mathcal{V}}]^3 = V$. Vrijedi $[H_0^{1,2}]^3 \subset V \subset [H^{1,2}(\Omega)]^3$. Prostor V je također Hilbertov prostor i nazivamo ga *prostor probnih funkcija.*

Podsjetimo se da je $W = [W^{1,2}(\Omega)]^3$. Funkciju $\mathbf{u} \in W$ nazivamo *slabo rješenje prve osnovne rubne zadaće teorije elastičnosti* ako je

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in V$$

$$\int\limits_\Omega [\lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})(\operatorname{div}\mathbf{v}) + 2\mu\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})]d\mathbf{x} = \int\limits_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}d\mathbf{x} + \int\limits_{\Gamma_\tau} \mathbf{s}\cdot\mathbf{v}d\mathrm{S},\ \ \mathbf{v} \in V.$$

5.2. Rješenje osnovne rubne zadaće teorije elastičnosti varijacijskim postupkom

Neka je H separabilan Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ i normom $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u},\mathbf{u})^{1/2}$. Proizvoljan funkcional $\Phi : H \to \mathbf{R}$ je koercitivan ako

$$\lim \Phi(\mathbf{u}) = +\infty \ \text{ za } \|\mathbf{u}\| \to \infty.$$

Kažemo da je funkcional Φ odozdo slabo polu-neprekidan ako

$$\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u} \Rightarrow \liminf \Phi(\mathbf{u}_n) \geq \Phi(\mathbf{u}),$$

gdje $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ znači slabu konvergenciju $\mathbf{u}_n$ prema $\mathbf{u}$ u prostoru H; t.j. da $(\mathbf{u}_n,\mathbf{y}) \to (\mathbf{u},\mathbf{y})$ za svaki $\mathbf{y} \in H$.

Teorem 15. *Neka je funkcional $\Phi : H \to \mathbf{R}$ koercitivan i odozdo slabo polu-neprekidan. Tada Φ poprima mimimum na H.*

Dokaz: Uslijed koercitivnosti slijedi da vrijedi

$$(\exists\rho > 0)(\forall\mathbf{u} \in H)\|\mathbf{u}\| \geq \rho \Rightarrow \Phi(\mathbf{u}) > \Phi(\mathbf{0}) + 1.$$

Neka je $B_\rho \equiv \{\mathbf{u} \in H \mid \|\mathbf{u}\| \leq \rho\}$. Ukoliko postoji minimum, očito je da ne može biti izvan kugle B_ρ. Dakle, vrijedi tvrdnja $\inf_{\mathbf{u}\in H}\Phi(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{u}\in B_\rho}\Phi(\mathbf{u})$. Neka je $C = \inf_{\mathbf{u}\in B_\rho}\Phi(\mathbf{u})$. Možemo uzeti niz $(\mathbf{u}_n)$ u B_ρ, takav da $\Phi(\mathbf{u}_n) \to C$. Kugla B_ρ je slabo kompaktna, pa postoji slabo konvergentni podniz $(\mathbf{u}_{n,k}) \rightharpoonup \mathbf{u}$. Kugla B_ρ je slabo zatvorena jer je konveksna, što povlači $\|\mathbf{u}\| \leq \rho$. Prema pretpostavci da je funkcional Φ odozdo slabo polu-neprekidan slijedi

$$C = \lim \Phi(\mathbf{u}_{n,k}) = \liminf \Phi(\mathbf{u}_{n,k}) \geq \Phi(\mathbf{u}).$$

Dakle, $\Phi(\mathbf{u}) = C$ i funkcional Φ poprima minimum u točki $\mathbf{u}$.

Q.E.D.

Promatramo funkcional $\Phi : H \longrightarrow \mathbf{R}$ na Hilbertovom prostoru H. Za funkcional Φ kažemo da ima *Gâteauxov diferencijal* u točki $u \in H$ ako

$$(\exists \mathbf{A} \in H')(\forall v \in H) \ \lim_{t\to 0}\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} = \mathbf{A}[v].$$

Takav $\mathbf{A}$, ako postoji, je jedinstven i označujemo ga s $D\Phi(u)$.

Teorem 16. *Neka je funkcional Φ diferencijabilan (u Gâteauxovom smislu) u svakoj točki $u \in H$. Pretpostavimo*

- $D\Phi(u+h)[h] - D\Phi(u)[h] \geq 0$, *za svaki $u, h \in H$;*
- $t \mapsto D\Phi(u+tv)[h]$ *je neprekidna funkcija za sve $u, v, h \in H$.*

Tada je funkcional Φ slabo odozdo polu-neprekidan.

Dokaz. Neka vrijedi $u_n \rightharpoonup u$. Definiramo funkciju $\varphi(t) = \Phi\left(u + t(u_n - u)\right), t \in [0,1]$. Kako je funkcional Φ diferencijabilan u Gâteauxovom smislu u svakoj točki, slijedi da je funkcija $\varphi(t)$ diferencijabilna i

$$\varphi'(t) = D\Phi\left(u + t(u_n - u)\right)[u_n - u].$$

Neprekidnost $\varphi'(t)$ za $t \in [0,1]$ je posljedica neprekidnosti diferencijala $D\Phi(u)$. Integracijom po segmentu dobivamo

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \Phi(u_n) - \Phi(u) = \int_0^1 D\Phi\left(u + t(u_n - u)\right)[u_n - u]dt.$$

Potrebno je dokazati da

$$\liminf \Phi(u_n) - \Phi(u) \geq 0 \text{ kada } u_n \rightharpoonup u.$$

Kako bismo ovo dokazali, potrebno je pokazati da vrijedi

$$\liminf\left[\Phi(u_n) - \Phi(u) - D\Phi(u)[u_n - u]\right] \geq 0,$$

kada $D\Phi(u)[u_n - u] \to 0$ za $u_n \rightharpoonup u$.

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) - \Phi(u) \quad - \quad D\Phi(u)[u_n - u] &= \int_0^1 \left(D\Phi\left(u + t(u_n - u)\right)[u_n - u] - D\Phi(u)[u_n - u]\right)dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t}\left[D\Phi\left(u + t(u_n - u)\right)[t(u_n - u)] - D\Phi(u)[t(u_n - u)]\right]dt \geq 0.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorem 17. *Neka su $\mathbf{u}_0 \in W, \mathbf{b} \in [L^2(\Omega)]^3$ i $\mathbf{s} \in [L^2(\Gamma_\tau)]^3$.Nadalje, neka je $\Gamma_u \neq \emptyset$, a Laméovi koeficijenti $\lambda \geq 0$ i $\mu > 0$. Tada postoji jedinstveno slabo rješenje $\mathbf{u}$ osnovne rubne zadaće teorije elastičnosti i vrijedi*

$$\|\mathbf{u}\|_W \leq c\left(\|\mathbf{u_0}\|_W + \|\mathbf{b}\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\mathbf{s}\|_{[L^2(\Gamma_\tau)]^3}\right).$$

Dokaz. Promatramo prostor probnih funkcija V i prostor

$$P = \{\mathbf{v} \in W | \mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{x}\}.$$

Kad uvrstimo poopćeni Hookeov zakon u funkcional potencijalne energije Φ dobivamo

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\lambda\vartheta^2(\mathbf{u}) + \mu\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})\right) d\mathbf{x} - \int\limits_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} d\mathrm{S}.$$

Ovaj funkcional ima Gâteauxov diferencijal u svakoj točki $\mathbf{u} \in W$

$$D\Phi(\mathbf{u})[\mathbf{v}] = \int\limits_{\Omega} (\lambda \mathrm{div}\mathbf{u}\, \mathrm{div}\mathbf{v} + 2\mu\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}))\, d\mathbf{x} - \int\limits_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} ds.$$

Diferencijabilan funkcional Ψ poprima minimum u točki $\mathbf{w}^0$ u Hilbertovom prostoru H ako vrijedi $D\Psi(\mathbf{w}^0)[v] = 0$ za svaki $\mathbf{v} \in H$. Ukoliko stavimo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$ za $\mathbf{w} \in V$ i $H = V$, možemo pisati

$$\Phi(\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) = \Psi(\mathbf{w})$$

i zaključujemo da vrijedi sljedeća jednakost za diferencijale funkcionala

$$D\Psi(\mathbf{w})[\mathbf{v}] = d\Phi(\mathbf{u}_0 + \mathbf{w})[\mathbf{v}] = D\Phi(\mathbf{u})[\mathbf{v}],$$

za svaki $\mathbf{w}$, $\mathbf{v} \in V$. Očito je da funkcional Φ poprima minimum u točki $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}^0$ ako i samo ako funkcional Ψ poprima minimum u točki $\mathbf{w}^0 \in v$. Ako je točka $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}^0$ točka minimuma funkcionala Φ, tada vrijedi $D\Phi(\mathbf{u}^0)[\mathbf{v}] = 0$, za svaki $\mathbf{v} \in V$. Tada je $\mathbf{u}^0$ slabo rješenje po definiciji. Pokazano je, dakle , da slabo rješenje postoji kao posljedica postojanja minimuma funkcionala Ψ. Prema teoremu 15, minimum funkcionala postoji ako je funkcional koercitivan i slabo odozdo polu-neprekidan.

Uslijed pretpostavke za Laméove koeficijente, na gotovo cijelom Ω vrijedi

$$\frac{1}{2}\lambda\vartheta^2(\mathbf{u}) + \mu\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \geq \mu\mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}).$$

Ako je Γ_u neprazan skup otvoren u Γ, tada je $P \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Dokaz ove tvrdnje može se naći u [NH, str. 91]. Uz ovu tvrdnju i teorem 14, zaključujemo da vrijedi Kornova nejednakost za elemente skupa $V = Q_V$. Zbog toga dobivamo

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) = & \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\lambda\vartheta^2(\mathbf{u}_0 + \mathbf{w} + \mu\mathbf{E}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{w}\right] d\mathbf{x} \\
& - \int\limits_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) d\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) ds \\
\geq & \mu \int\limits_{\Omega} [\mathbf{E}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) + 2\mathbf{E}(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{w}) + \mathbf{E}(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}_0)]\, d\mathbf{x} \\
& - \int\limits_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) d\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) d\mathbf{x} > \\
C_1\|\mathbf{w}\|_W^2 - & C_2\|\mathbf{u}_0\|_W\|\mathbf{w}\|_W - C_3\|\mathbf{b}\|_{[L_2(\Omega)]^3}\|\mathbf{w}\|_W - C_4\|\mathbf{s}\|_{[L_2(\Gamma_\tau)]^3}\|\mathbf{w}\|_W - C_5.
\end{aligned}$$

Sve konstante su pozitivne i nezavisne od $\mathbf{w}$, pa zaključujemo da

$$\Phi(\mathbf{u}_0 + \mathbf{w}) \to \infty \text{ kada } \|\mathbf{w}\|_W \to \infty,$$

t.j. funkcional Ψ je koercitivan.

Promatramo razliku diferencijala funkcionala ψ u točkama $\mathbf{w}+\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}$ i prema definiciji Gâteauxovog diferencijala, pozitivnosti Laméovog koeficijenta μ i Kornove nejednakosti dobivamo

$$D\Psi(\mathbf{w}+\mathbf{v})[\mathbf{v}] - D\Psi(\mathbf{v})[\mathbf{v}] = \int_{\Omega} \Big[\lambda\vartheta^2(\mathbf{v} + 2\mu\mathbf{e}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})\Big]\, dx \geq C\|\mathbf{v}\|_W^2.$$

Diferencijal funkcionala $D\Psi(\mathbf{w})$ je neprekidan po $\mathbf{w}$ na svakom segmentu, čime smo u uvjetima teorema 16, prema kojemu je sada funkcional Ψ slabo odozdo polu-neprekidan.

Prema teoremu 15 dokazano je postojanje minimuma funkcional Ψ, a time i postojanje slabog rješenja. Ukoliko pretpostavimo da postoje dva slaba rješenja $\mathbf{u}'$ i $\mathbf{u}''$, možemo staviti $\mathbf{y} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}''$. Prema definiciji slabog rješenja dobivamo

$$\int_{\Omega} [\lambda\vartheta(\mathbf{y})\vartheta(\mathbf{v}) + 2\mu\mathbf{E}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v})]\, d\mathbf{x} = 0,$$

za svaki $\mathbf{v} \in V$. Ako u ovaj izraz stavimo $\mathbf{v} = \mathbf{y}$, zbog pozitivnosti Laméovog koeficijenta μ i Kornove nejednakosti dobivamo $\|\mathbf{y}\|_W = 0$, što znači da je $\mathbf{u}' = \mathbf{u}''$, čime je pokazana i jedinstvenost slabog rješenja.

Ukoliko u izraz iz definicije slabog rješenja stavimo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$ dobivamo

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\lambda\vartheta(\mathbf{w})\vartheta(\mathbf{v}) + 2\mu\mathbf{E}(\mathbf{w})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}))\, d\mathbf{x} \\ = \; & -\int_{\Omega} (\lambda\vartheta(_0)\vartheta(\mathbf{v}) + 2\mu\mathbf{E}(\mathbf{u}_0)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{v}))\, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s}\cdot\mathbf{v}\, d\mathrm{s}, \end{aligned}$$

za svaki $\mathbf{v} \in V$. Ako stavimo $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, iz Kornove nejednakosti slijedi sljedeća nejednakost

$$\begin{aligned} C\|\mathbf{w}\|_W^2 &\leq \int_{\Omega} \Big[\lambda\vartheta^2(\mathbf{w}) + 2\mu\mathbf{E}(\mathbf{w})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{w})\Big]\, d\mathbf{x} \\ &\leq C_1\|\mathbf{w}\|_W\|\mathbf{u}_0\|_W + \|\mathbf{b}\|_{[L_2(\Omega)]^3} + \|\mathbf{s}\|_{[L_2(\Gamma_\tau)]^3}. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s $\|\mathbf{w}\|_W$ i uzimanjem u obzir činjenice da je $\|\mathbf{u}\|_W \leq \|\mathbf{u}_0\|_W + \|\mathbf{w}\|_W$ dolazimo do nejednakosti iz tvrdnje teorema.

Q.E.D.

5.3. Princip minimuma potencijalne energije i rješenje prve osnovne rubne zadaće teorije elastičnosti

Teorem 18. (Princip minimuma potencijalne energije) *Neka je $\mathbf{u}_0 \in W, \mathbf{b} \in [L^2(\Omega)]^3$ i neka je $\mathbf{s} \in [L^2(\Gamma_\tau)]^3$. Nadalje, neka je $\Gamma_u \neq \emptyset$, te neka su $\mu > 0$, i $\lambda \geq 0$ na $\overline{\Omega}$. Tada funkcional potencijalne energije*

$$\Phi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \Big[\frac{1}{2}\lambda\vartheta^2(\mathbf{u}) + \mu\mathbf{E}(\mathbf{u})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\Big]\, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s}\cdot\mathbf{u} d\mathrm{S}.$$

poprima minimum na skupu funkcija $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$ gdje je $\mathbf{w} \in V$, ako i samo ako je $\mathbf{u}$ slabo rješenje mješovite rubne zadaće teorije elastičnosti.

Dokaz. Ako funkcional poprima minimum na skupu funkcija $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}$, tada prema teoremu 17 slijedi da je $\mathbf{u}$ slabo rješenje rubne zadaće.

Pretpostavimo da je $\mathbf{u}$ slabo rješenje mješovite rubne zadaće teorije elastičnosti. Neka je $\hat{\mathbf{u}}$ točka minimuma funkcionala Φ i slabo rješenje mješovite rubne zadaće teorije elastičnosti. Zbog jedinstvenosti slabog rješenja zaključujemo da vrijedi $\mathbf{u} \equiv \hat{\mathbf{u}}$, t.j. slabo rješenje minimizira funkcional $\Phi(\mathbf{u})$.

Q.E.D.

U prvoj osnovnoj rubnoj zadaći teorije elastičnosti pretpostavljamo $\Gamma_u = \emptyset$, $\Gamma = \Gamma_\tau \cup \mathcal{R}$, gdje je $\mathcal{R}$ skup onih točaka na rubu Γ u kojima ne postoji normala. Prostor probnih funkcija je cijeli prostor W i $\mathbf{u_0} \equiv 0$.

Teorem 19. *Nužan uvjet za postojanje rješenja prve osnovne rubne zadaće teorije elastičnosti su zadovoljeni uvjeti ravnoteže :*

$$\int_\Omega \mathbf{b} d\mathbf{x} + \int_\Gamma \mathbf{s} d\mathrm{S} = \mathbf{0},$$

$$\int_\Omega (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) d\mathbf{x} + \int_\Gamma (\mathbf{x} \times \mathbf{s}) d\mathrm{S} = \mathbf{0}.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{v} \in P = \{\mathbf{w} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3 \mid \mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{x}\}$. Taj $\mathbf{v}$ uvrstimo kao probnu funkciju u izraz iz definicije slabog rješenja

$$\int_\Omega [\lambda(\mathrm{div}\mathbf{u})(\mathrm{div}\mathbf{v}) + 2\mu \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v})] d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} d\mathrm{S}.$$

Prema teoremu 13 vrijedi da je $\mathbf{E}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, što znači da isčezava lijeva strana jednakosti. Ukoliko postoji slabo rješenje prve osnovne rubne zadaće teorije elastičnosti, tada je nužno da isčezava i desna strana jednakosti, t.j.

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} d\mathrm{S} = 0, \ \mathbf{v} \in P.$$

Ako stavimo $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, tada je $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ i imamo

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot \mathbf{a} d\mathrm{S} = 0, \ \mathbf{a} \in \mathbf{R}^3;$$

iz čega slijedi prva tvrdnja teorema. Ako stavimo $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, tada je $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{x}$ i imamo

$$\int_\Omega \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{x}) d\mathrm{S} = 0, \ \mathbf{c} \in \mathbf{R}^3.$$

Kako vrijede jednakosti $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{b})$ i $\mathbf{s} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{x}) = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{b})$, dolazimo do druge tvrdnje teorema.

Q.E.D.

6. Ravninska elastičnost

6.1. Osnovne zadaće ravninske elastičnosti

Pojedine zadaće možemo formulirati u dvije dimenzije, za funkcije dviju varijabli x_1 i x_2 (ili u polarnim koordinatama r i φ). Takve zadaće su posebni slučajevi općih zadaća; ovisne su o obliku tijela, vrsti opterećenja i rubnim uvjetima, te ih nazivamo *zadaće ravninske elastičnosti.*

6.1.1. Ravninske deformacije

Promatramo elastično cilindrično tijelo čiji je poprečni presjek područje $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Neka koeficijenti gradiva, volumne sile i rubni uvjeti ne ovise o koordinati x_3, a os x_3 neka je paralelna s osi cilindra. Pretpostavljamo da vrijede sljedeće jednakosti: $b_3 = 0$, $s_3 = 0$ i $w_3 = 0$. Primjeri za takav slučaj su tuneli i ukopane cijevi.

Na temelju ovih pretpostavki za vektor pomaka $\mathbf{u}$ možemo staviti

$$u_3 = 0 \;,\; \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0,$$

t.j. $u_i = u_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$. Iz toga slijedi $e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0$, t.j. možemo promatrati dvodimenzionalni tenzor deformacija.

Prema poopćenom Hookeovom zakonu za izotropna gradiva dobivamo

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \vartheta' + 2\mu e_{ij} \;, i, j = 1, 2$$

$$\vartheta' = e_{11} + e_{22} \;,\; \tau_{33} = \lambda \vartheta'$$

$$\tau_{i3} = \tau_{3i} = 0,\; i < 3.$$

Na temelju inverznog izraza Hookeovog zakona imamo sljedeću jednakost

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \theta \delta_{ij} \right),$$

pa slijedi (za $i = j = 3$) izraz

$$e_{33} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{33} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \theta \right) = 0,$$

t.j. τ_{33} možemo izraziti preko τ_{11} i τ_{22} :

$$\tau_{33} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \theta.$$

Uz $\theta = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$ dolazimo do izraza

$$\tau_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\tau_{11} + \tau_{22}) = \nu(\tau_{11} + \tau_{22}).$$

Ako gornji izraz uvrstimo u inverzni oblik Hookeovog zakona dobivamo $(i, j = 1, 2)$

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2\mu}\left[\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\delta_{ij}(\tau_{11}+\tau_{22})\left(1+\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\mu}\left[\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\frac{2\lambda+2\mu+\lambda}{2(\lambda+\mu)}\delta_{ij}(\tau_{11}+\tau_{22})\right] \\ &= \frac{1}{2\mu}\tau_{ij} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\delta_{ij}(\tau_{11}+\tau_{22}). \end{aligned}$$

Koristeći Youngov modul elastičnosti E i Poissonov koeficijent ν konačno dobivamo

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1+\nu}{E}[\tau_{11} - \nu(\tau_{11}+\tau_{22})] \\ e_{22} &= \frac{1+\nu}{E}[\tau_{22} - \nu(\tau_{11}+\tau_{22})] \\ e_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{12}. \end{aligned}$$

Ako koeficijenti poopćenog Hookeovog zakona ne ovise o x_3, tada jednakost $\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\vartheta' + 2\mu e_{ij}$ očito povlači da je treća komponenta jednadžbe ravnoteže $\frac{\partial\tau_{3j}}{\partial x_j} + b_3 = 0$ zadovoljena ako i samo ako je $b_3 = 0$.

Jednadžbe ravnoteže su sada

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \;, i, j = 1, 2.$$

Statički rubni uvjeti na zakrivljenoj površini cilindra su oblika

$$\tau_{ij}n_j = s_i \;, i = 1, 2 \;,$$

a kinematički rubni uvjeti su oblika

$$u_i = w_i \;, i = 1, 2.$$

6.1.2. Ravninsko naprezanje

Promatramo elastično tijelo kod kojeg je jedna dimenzija manjeg reda veličine u odnosu na ostale dvije dimenzije. Izaberimo koordinatni sustav takav da je koordinatna os x_3 u smjeru dimenzije manjeg reda veličine, a ishodište postavimo u težište područja. Pretpostavljamo $b_3 = 0$ i $s_3 = 0$. Promatramo područje neopterećen na plohama $x_3 = \pm h$ t.j.

$$\tau_{3i} = 0 \text{ za } x_3 = \pm h \;, i = 1, 2, 3.$$

Primjer za ovaj su slučaj su visokostijeni, zidni nosači opterećeni u svojoj ravnini.

Uslijed male dimenzije područja u smjeru osi x_3 možemo pretpostaviti $\tau_{3i} = 0, i = 1, 2, 3$ na cijelom cilindru, t.j. tenzor naprezanja je dvodimenzionalan tenzor.

Za izotropno gradivo dobivamo zbog $\tau_{33} = 0$ da vrijedi

$$e_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}(e_{11} + e_{22}) = -\nu(e_{11} + e_{22}),$$

i taj izraz uvrstimo u generalizirani Hookeov zakon, pa dolazimo do izraza $(i, j = 1, 2)$

$$\tau_{ij} = \lambda^* \delta_{ij} \vartheta' + 2\mu e_{ij},$$

uz $\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$. Inverzni oblik Hookeovog zakona tada glasi

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\tau_{ij} - \frac{\lambda^*}{4\mu(\lambda^* + \mu)}\delta_{ij}\theta' \ , i, j = 1, 2$$

$$\theta' = \tau_{11} + \tau_{22} \ ; \ \vartheta' = \frac{\theta'}{2(\lambda^* + \mu)}.$$

Koristeći Youngov modul elastičnosti E i Poissonov koeficijent ν, dolazimo do odnosa

$$\lambda^* = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}.$$

Komponente tenzora deformacije sada računamo preko sljedećih izraza:

$$e_{11} = \frac{1}{E}(\tau_{11} - \nu\tau_{22}), \ e_{22} = \frac{1}{E}(\tau_{22} - \nu\tau_{11}), \ e_{33} = -\frac{\nu}{E}(\tau_{11} + \tau_{22}),$$

$$e_{12} = \frac{1 + \nu}{E}\tau_{12}, \ e_{13} = e_{23} = 0.$$

Uočimo da poopćeni Hookeov zakon postaje jednak onome u prethodnom odjeljku pri supstituciji $\lambda \longrightarrow \lambda^*$. Jednadžbe ravnoteže i rubni uvjeti su jednaki, a komponente naprezanja, pomaka i deformacija ovise i o x_3.

6.1.3. Poopćeno ravninsko naprezanje

Promatramo područje kao u prethodnom odjeljku, t.j. tanku ploču debljine 2h. Ravnina koja dijeli ploču na dva dijela debljine h naziva se središnja ravnina. Koordinatne osi x_1 i x_2 postavljamo u središnju ravninu. Neka su koeficijenti gradiva nezavisni o x_3 i neka vrijedi $b_3 = 0$ i $s_3 = 0$, a za preostale komponente b_i i s_i , $i = 1, 2$ vrijedi da su simetrične u odnosu na središnju ravninu. Pretpostavljamo da zadana funkcija **w** ima na rubu ista svojstva kao i funkcija **S**. Uz pretpostavku da su krajevi cilindra neopterećeni, t.j.

$$\tau_{i3} = \tau_{3i} = 0 \text{ za } x_3 = \pm h \ , i = 1, 2, 3,$$

iz treće komponente jednadžbe ravnoteže $\frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} = 0$ zaključujemo

$$\frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} = 0 \text{ za } x_3 = \pm h.$$

Zbog očito malih naprezanja unutar tanke ploče možemo pretpostaviti $\tau_{33} = 0$ na cijeloj ploči. Kako su vanjske sile funkcije od x_3, pomaci u_3 su neparne funkcije od x_3, a u_1 i u_2 su također funkcije od x_3.

Za komponente funkcije pomaka definiramo *glavne vrijednosti* u odnosu na debljinu ploče

$$\overline{u}_i = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} u_i(x_1, x_2, x_3) dx_3,$$

te zaključujemo, zbog neparnosti funkcije u_3, da je očito $\overline{u}_3 \equiv 0$. Analogno definiramo glavne vrijednosti $\overline{b}_i$ i $\overline{s}_i$, kao i glavne vrijednosti komponenti deformacija $\overline{e}_{ij}$ i komponenti naprezanja $\overline{\tau}_{ij}$. Zbog simetrije i $\tau_{33} = 0$ vrijedi

$$\overline{\tau}_{3i} \equiv 0 \ , i = 1, 2, 3$$

$$\overline{e}_{3i} \equiv 0 \ , i < 3 \ , \overline{e}_{33} \neq 0.$$

Prema tome matrica $(\overline{\tau}_{ij})$ reducirana je na matricu reda 2. Jednadžbe ravnoteže postaju oblika

$$\frac{\partial \overline{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \overline{b}_i = 0 \ , i, j = 1, 2.$$

Zbog $\tau_{33} = 0$ vrijedi $e_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}(e_{11} + e_{22})$ za izotropna gradiva, pa generalizirani Hookeov zakon za glavne vrijednosti glasi

$$\overline{\tau}_{ij} = \lambda^* \delta_{ij} \overline{\vartheta}' + 2\mu \overline{e}_{ij},$$

gdje je $\overline{\vartheta}' = \overline{e}_{11} + \overline{e}_{22}$. Rubni uvjeti u smislu glavnih vrijednosti $\overline{s}_i$ i $\overline{w}_i$ poprimaju oblik

$$\overline{u}_i = \overline{w}_i(x_1, x_2),$$

$$\sum_{j=1}^{2} \overline{\tau}_{ij} \nu_j = \overline{s}_i \ , i = 1, 2.$$

6.2. Rješenja zadaće ravninske elastičnosti u obliku pomaka

Rubni problem ravninske elastičnosti može se formulirati koristeći vektorsku funkciju pomaka. Laméove jednadžbe, nakon uvrštavanja u jednadžbe ravnoteže, reduciraju se na sustav jednadžbi

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta'}{\partial x_i} + \mu \triangle u_i + b_i = 0 \ , i = 1, 2 \, ,$$

gdje je $\vartheta' = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ na području $\Omega \subset R^2$ (t.j. na $\Omega \times (-h, h)$ za ravninsko naprezanje).

Za mješoviti rubnu zadaću rubni uvjeti su

$$u_i = w_i \ , i = 1, 2 \text{ na } \Gamma_u \ (\Gamma_u \times (-h, h)),$$

$$\sum_{j=1}^{2} \tau_{ij} \nu_j = s_i \text{ na } \Gamma_\tau \ (\Gamma_\tau \times (-h, h)),$$

gdje su Γ_u i Γ_τ međusobno disjunktni skupovi otvoreni u Γ i $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau \cup \mathcal{R}$ (gdje je $\mathcal{R}$ skup duljine 0.)

Na području Ω za svaki simetričan tenzor $\mathbf{E} \in \mathrm{Sym}(2)$ vrijedi

$$2W(\mathbf{e}) = \sum_{i,j,k,l=1}^{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \geq c_0 \sum_{i,j=1}^{2} e_{ij}^2.$$

U ravnini također vrijedi i Kornova nejednakost

$$\sum_{i,j=1} 2 \int_\Omega e_{ij}^2(\mathbf{u}) dx_1 dx_2 \geq C \sum_{j=1}^{2} \|u_j\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}$$

za bilo koji $\mathbf{u} \in V$. Slabo rješenje zadaće ravninskih deformacija definiramo kao funkcija $\mathbf{u} \in [W^{1,2}(\Omega)]^3$ takvu da vrijedi

$$\mathbf{u} - \mathbf{w} \in V = \{\mathbf{u} \in [W^{1,2}(\Omega)]^2 \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ na } \Gamma_u\}$$

$$\int_\Omega c_{ijkl} e_{ij}(\mathbf{u}) e_{kl}(\mathbf{v}) dx_1 dx_2 = \int_\Omega b_i v_i dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_\tau} S_i v_i ds, \ \mathbf{v} \in V.$$

Za izotropno gradivo potencijalna energija je izražena kao funkcional

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\lambda \vartheta^2(\mathbf{u}) + \mu e_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{u})\right] dx - \int_\Omega b_i u_i dx - \int_{\Gamma_\tau} S_i u_i ds.$$

6.3. Rješenje zadaće ravninske elastičnosti u obliku naprezanja. Airyjeva funkcija naprezanja

Teorem 20. *Neka je $\Omega \subset R^2$ jednostavno povezano područje i neka za volumne sile vrijedi $b_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2$. Pretpostavljamo da je gradivo homogeno i izotropno. Tada funkcije $\tau_{ij} \in C^2[\Omega \times (-h, h)], i, j = 1, 2$ zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti deformacija*

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n} = 0 \ , i, j = 1, 2$$

samo ako vrijedi

$$\triangle(\tau_{11} + \tau_{22}) = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\right).$$

Kod ravninskih deformacija uvjet nije samo nužan nego i dovoljan za kompatibilnost pripadnih deformacija.

Dokaz. Uvjet kompatibilnosti u dvodimenzionalnom slučaju glasi

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Iz uvjeta kompatibilnosti i inverznog oblika Hookeovog zakona slijedi

$$\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \triangle\theta' - 2\frac{\partial^2 \tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Deriviranjem prve jednadžbe ravnoteže po x_1 dobivamo

$$\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial b_1}{\partial x_1} = 0,$$

a deriviranjem druge jednadžbe ravnoteže po x_2 dobivamo

$$\frac{\partial^2 \tau_{21}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} = 0.$$

Zbrajanjem tih dviju jednakosti dolazimo do izraza

$$-2\frac{\partial^2\tau_{12}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2\tau_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\tau_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}.$$

Uvrštavanjem ovog izraza u izraz

$$\frac{\partial^2\tau_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\tau_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\triangle\theta' - 2\frac{\partial^2\tau_{12}}{\partial x_1\partial x_2} = 0$$

dobiva se tvrdnja teorema.

Q.E.D.

6.3.1. Ravninske deformacije

Teorem 21. *Promatramo cilindrično tijelo s jednostavno povezanim područjem Ω kao poprečnim presjekom. Neka je gradivo homogeno i izotropno. Na području Ω postoji tenzor $\tau_{ij} \in C^2(\Omega)$ koji zadovoljava jednadžbe ravnoteže homogenog sustava*

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = 0\ , i, j = 1, 2$$

i jednadžbu kompatibilnosti

$$\triangle(\tau_{11} + \tau_{22}) = 0$$

ako i samo ako postoji biharmonijska (Airyjeva) funkcija U na Ω ($U \in C^4(\Omega)$ i $\triangle^2 U = 0$ na Ω) takva da vrijedi

$$\tau_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\,, \tau_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2},$$

$$\tau_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_2}.$$

Dokaz. Ukoliko postoji biharmonijska funkcija U s navedenim svojstvima, uvrštavanjem u jednadžbe ravnoteže i jednadžbu kompatibilnosti očito je da su te jednadžbe zadovoljene.

Neka postoji funkcija $\tau_{ij} \in C^2(\Omega)$ koja zadovoljava jednadžbe ravnoteže i jednadžbu kompatibilnosti. Potrebno je konstruirati funkciju $U(x_1, x_2)$ sa navedenim svojstvima. Neka je izabrana proizvoljna točka $\mathbf{A} = (x_1^0, x_2^0) \in \Omega$. Definira se funkcija

$$B(x_1, x_2) = \int_{\mathbf{A}}^{(x_1,x_2)} (\tau_{11}dx_2 - \tau_{12}dx_1).$$

Zbog prve komponente jednadžbe ravnoteže $\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_2} = 0$, integrand je totalni diferencijal, a kako je Ω jednostavno povezano područje , funkcija B je nezavisna o putu integracije i vrijedi

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = -\tau_{12}\ ,\ \frac{\partial B}{\partial x_2} = \tau_{11}.$$

Analogno definiramo funkciju

$$C(x_1, x_2) = \int_{\mathbf{A}}^{(x_1,x_2)} (\tau_{22}dx_1 - \tau_{12}dx_2)$$

za koju vrijedi

$$\frac{\partial C}{\partial x_1} = \tau_{22} \ , \ \frac{\partial C}{\partial x_2} = -\tau_{12}.$$

Uspoređujući parcijalne derivacije funkcija B i C vidljiva je jednakost

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = \frac{\partial C}{\partial x_2}.$$

Iz ovako definiranih funkcija B i C konstruiramo novu funkciju

$$U(x_1, x_2) = \int_{\mathbf{A}}^{(x_1,x_2)} (C dx_1 + B dx_2).$$

Iz definicija funkcija B,C i U proizlazi da je integrand totalni diferencijal i da vrijedi

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = C \ , \ \frac{\partial U}{\partial x_2} = B.$$

Daljnjim parcijalnim deriviranjem slijede svojstva Airyjeve funkcije naprezanja U iz iskaza teorema, a uvrštavanjem u jednadžbu kompatibilnosti slijedi da je funkcija U biharmonijska.

Q.E.D.

6.3.2. Ravninsko naprezanje

Teorem 22. *Promatramo ravninsko naprezanje cilindričnog tijela $\Omega \times (-h, h)$ jednostavno povezanog poprečnog presjeka Ω. Neka je gradivo homogeno i izotropno i neka vrijedi da je volumna sila $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$, te neka postoji funkcija $U \in C^4[\Omega \times (-h, h)]$ takva da vrijedi*

$$\tau_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \tau_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2},$$

$$\tau_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Tada tenzor naprezanja $\mathbf{T}$ zadovoljava Beltramijeve uvjete kompatibilnosti ako i samo ako

$$U = U_0(x_1, x_2) - \frac{\nu}{2(1+\nu)} x_3^2 \triangle u_0(x_1, x_2)$$

gdje je $\triangle^2 u_0 = 0$ na Ω.

Dokaz. Promatramo Beltramijeve uvjete kompatibilnosti

$$\triangle \tau_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i x_j} = 0 \ , i, j = 1, 2, 3.$$

Ukoliko zbrojimo Beltramijeve jednadžbe za $i = j = 1, 2, 3$ dobivamo $\triangle \theta = 0$. Prema pretpostavci $\tau_{3j} = 0 (j = 1, 2, 3)$ iz Beltramijeve jednadžbe slijedi

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} = const = \beta.$$

Kako je θ simetričan u odnosu na ravninu $x_3 = 0$, dobivamo da je $\beta = 0$, što povlači

$$\theta = \theta(x_1, x_2) \text{ i } \triangle \theta_0 = 0.$$

Promatramo funkciju U koja zadovoljava uvjete iz iskaza leme. Ukoliko definiramo

$$\triangle_1 U \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) U,$$

zbog svojstva funkcije U i $\theta = \theta_0(x_1, x_2)$ proizlazi $\triangle_1 U = \theta_0$. Ako u prvu Beltramijevu jednadžbu za $i = j = 1$ uvrstimo funkciju U koristeći svojstvo funkcije U iz iskaza leme i jednakost $\theta = \theta_0$ dolazimo do

$$\triangle \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x_1^2} = 0.$$

Daljnjim raspisivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\triangle \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x_2^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x_2^2}\frac{1+\nu}{1+\nu} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x_2^2}\frac{\nu}{1+\nu} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x_2^2}\frac{1}{1+\nu}
\end{aligned}$$

Uz ovu jednakost i $\triangle\theta_0 = 0$ dobivamo sljedeći oblik Beltramijeve jednadžbe

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\theta_0\right) = 0.$$

Definiramo funkciju $\psi \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\theta_0$, za funkciju ψ vrijedi prema prethodnim jednakostima $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = 0$, a iz Beltramijeve jednadžbe za $i = j = 2$ slijedi $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0$, dok iz Beltramijeve jednadžbe za $i = 1, j = 2$ slijedi $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$. Prema tim jednakostima funkcija ψ je linearna funkcija po varijablama x_1 i x_2. Funkcija $\psi = \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\theta_0$ nakon što je dvaput integriramo po x_3, daje izraz

$$U = U_0(x_1, x_2) + x_3 U_1(x_1, x_2) - \frac{1}{2}\frac{\nu}{1+\nu}x_3^2\theta_0(x_1, x_2) + \int dx_3 \int \psi dx_3.$$

Zbog simetričnosti naprezanja u odnosu na os x_3 slijedi $U_1 \equiv 0$, a zbog svojstva funkcije U iz iskaza leme očito možemo staviti $\psi \equiv 0$. Uz ove zaključke jasno je da je funkcija U oblika

$$U = U_0(x_1, x_2) - \frac{\nu}{2(1+\nu)}x_3^2 \triangle u_0(x_1, x_2).$$

Zbog $\triangle_1 U_0 = \theta_0$ i $\triangle\theta_0 = 0$ slijedi tvrdnja $\triangle^2 U_0 = 0$ na Ω.

Obrat vrijedi, jer kad uvrstimo izraz iz iskaza leme za funkciju U u Beltramijeve jednadžbe i iskoristimo uvjet $\triangle^2 U_0 = 0$, proizlazi da su Beltramijeve jednadžbe zadovoljene.

Q.E.D.

Teorem 23. *Neka je područje $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ jednostavno povezano. Neka je tijelo $\Omega \times (-h, h)$ od homogenog i izotropnog gradiva i volumna sila neka je jednaka nuli. Komponente naprezanja $\tau_{ij} \in C^2[\Omega \times (-h, h)]$ zadovoljavaju jednadžbe ravnoteže i Beltramijeve jednadžbe kompatibilnosti*

$$\triangle\tau_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \text{ za } i, j = 1, 2, 3$$

ako i samo ako postoji funkcija $U \in C^4[\Omega \times (-h,h)]$ takva da vrijedi

$$\tau_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\, , \tau_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2},$$

$$\tau_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$U = U_0(x_1,x_2) - \frac{\nu}{2(1+\nu)} x_3^2 \triangle U_0(x_1,x_2),$$

gdje je $\triangle^2 U_0 = 0$ na Ω.

Dokaz. Neka tenzor $\tau_{ij} \in C^2[\Omega \times (-h,h)]$ zadovoljava jednadžbe ravnoteže i kompatibilnosti. Prema dokazu teorema kod ravninskih deformacija i dokazu prethodnog teorema konstruiramo funkcija U koja zadovoljava tražene uvjete.

Obratno, ukoliko postoji funkcija U s navedenim svojstvima, tenzor τ definiran preko funkcije U zadovoljava jednadžbe ravnoteže i kompatibilnosti što se provjeri uvrštavanjem u te jednadžbe.

Q.E.D.

6.3.3. Poopćeno ravninsko naprezanje

Teorem 24. *Neka je $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ jednostavno povezano područje,a tijelo $\Omega \times (-h,h)$ neka je homogeno i izotropno, dok je volumna sila jednaka nuli. Tada komponente naprezanja $\tau_{ij} \in C^2[\Omega \times (-h,h)]$ zadovoljavaju jednadžbe naprezanja i Beltramijeve jednadžbe kompatibilnosti ako i samo ako jednakosti*

$$\overline{\tau}_{11} = \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x_2^2}\, , \overline{\tau}_{22} = \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x_1^2}\, , \overline{\tau}_{12} = \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

vrijede u smislu glavnih vrijednosti gdje su

$$\overline{U} = U_0 - \frac{h^2}{3} \frac{\mu}{2(1+\mu)} \triangle U_0\, , U_0 = U_0(x_1,x_2),$$

$$\triangle^2 \overline{U} = \triangle^2 U_0 = 0.$$

Dokaz slijedi analogno dokazu prethodna dva teorema.

6.3.4. Transformacija rubne zadaće

Promatramo prvu osnovnu rubnu zadaću ravninske elastičnosti koju smo formulirali za Airyjevu funkciju naprezanja U. Potrebno je napraviti i transformaciju pripadnih rubnih uvjeta.

Teorem 25. *Neka je $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ jednostavno povezano područje s Lipschitzovim rubom Γ. Volumne sile su identički jednake nuli, a zadane su površinske sile $\mathbf{s} \in C^2(\Gamma \times (-h,h); \mathbf{R}^2)$. Pripadno rješenje $\tau_{ij} \in C^2(\overline{\Omega} \times (-h,h))$ prve osnovne rubne zadaće ravninske elastičnosti izrazimo preko Airyjeve funkcije naprezanja U. Tada U zadovoljava sljedeće rubne uvjete na $\Gamma \times (-h,h)$*

$$U = A + Bx_1 + Cx_2 + \int_0^s \left[n_1 \int_0^t s_2 dz + n_1 \int_0^t s_1 dz \right] dt,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = Bn_1 + Cn_2 - n_1 \int_0^s s_2 dt + n_2 \int_0^s s_1 dt,$$

gdje su A, B i C proizvoljne funkcije od x_3, a dt i dz diferencijali luka ruba Γ područja Ω.

6.3.5. Varijacijska zadaća za Airyjevu funkciju naprezanja

Prvu osnovnu zadaću ravninske elastičnosti za homogeno i izotropno tijelo cilindričnog oblika čiji je poprečni presjek jednostavno povezano područje Ω s Lipschitzovim rubom Γ možemo iskazati kao Dirichletovu zadaću za Airyjevu funkciju naprezanja na području $\Omega \subset \mathbf{R}^2$:

$$\triangle^2 U = 0 \text{ na } \Omega,$$

$$U = g_0, \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = g_1 \text{ na } \Gamma.$$

Ova zadaća može biti formulirana kao varijacijska zadaća

$$\Phi(U) = \int_\Omega (\triangle U)^2 dx_1 dx_2 = \text{minimum}$$

na skupu funkcija oblika $U = U^0 + w$, gdje je $U^0 \in H^2(\Omega)$ fiksna funkcija koja zadovoljava rubne uvjete, a $w \in H_0^2(\Omega)$.

Gâteauxov diferencijal gornjeg funkcionala glasi

$$D\Phi(U)[v] = 2 \int_\Omega \triangle U \triangle v dx_1 dx_2,$$

gdje je $v \in H_0^2(\Omega)$. Ako je U rješenje naše zadaće, nakon parcijalne integracije dolazimo do izraza $D\Phi(U)[v] = 0$, za bilo koji $v \in H_0^2(\Omega)$. Tada je U stacionarna vrijednost i

$$\Phi(U + v) - \Phi(U) = \Phi(v) \geq 0,$$

što u stvari znači da funkcional Φ poprima minimum u točki U.

Teorem 26. *Varijacijska zadaća*

$$\Phi(U) = \int_\Omega (\triangle U)^2 dx_1 dx_2 = \min$$

ima jedno i samo jedno rješenje.

Dokaz. Funkcional $\mathcal{F}(w) \equiv \Phi(u^0 + w)$ je koercitivan na $H_0^2(\Omega)$. Za $w \in H_0^2(\Omega)$ vrijedi $\int_\Omega [(\partial_{12} w)^2 - \partial_{11} w \partial_{22} w] dx_1 dx_2 = 0$. Prema tome slijedi jednakost

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \int_\Omega (\triangle w)^2 dx_1 dx_2 = \int_\Omega \left[(\triangle w)^2 + (\partial_{12} w)^2 - \partial_{11} w \partial_{22} w \right] dx_1 dx_2 \\ &= \int_\Omega \left[(\partial_{11} w)^2 + (\partial_{22} w)^2 + 2(\partial_{12} w)^2 \right] dx_1 dx_2 = \|w\|^2_{H_0^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Za Gâteauxov diferencijal u točki U^0 vrijedi nejednakost

$$D\Phi(U^0)[w] = 2 \int_\Omega w \triangle^2 U^0 dx_1 dx_2 \leq 2\|\triangle U^0\|_{L_2} \|w\|_{L_2} \leq 2\|\triangle U^0\|_{L_2} \|w\|_{H_0^2}.$$

Za funkcional $\mathcal{F}$ sada imamo slijedeći izraz

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(w) &= \Phi(U^0 + w) = \Phi(U^0) + \Phi(w) + D\Phi(U^0)[w] = \Phi(U^0) + \|w\|^2_{H_0^2(\Omega)} + D\Phi(U^0)[w] \\
&\geq \Phi(U^0) + \|w\|^2_{H_0^2(\Omega)} - 2\|\triangle U^0\|_{L_2}\|w\|_{H_0^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

čime je pokazana koercitivnost funkcionala. Gâteauxov diferencijal $D\Phi(U)[v]$ neprekidan je za fiksni v i vrijedi

$$D\Phi(U + v)[v] - D\Phi(U)[v] = 2\Phi(v) = \|v\|_{H_0^2(\Omega)} \geq 0.$$

Sada prema teoremu 16 slijedi da je funkcional Φ slabo odozdo polu-neprekidan. Prema teoremu 15 ako je funkcional Φ koercitivan i slabo odozdo polu-neprekidan, slijedi da funkcional poprima minimum, čime je pokazana egzistencija rješenja.

Ukoliko pretpostavimo da su U i V dva rješenja varijacijske zadaće, dobivamo

$$\begin{aligned}
\|U - V\|^2_{H_0^2(\Omega)} &= 2\Phi(U - V) = D\Phi(V + U - V)[U - V] - D\Phi(V)[U - V] \\
&= D\Phi(U)[U - V] - D\Phi(V)[U - V] \\
&= 2\int_\Omega \triangle U \triangle (U - V) dx_1 dx_2 - 2\int_\Omega \triangle V \triangle (U - V) dx_1 dx_2 \\
&= 2\int_\Omega \triangle (U - V) \triangle (U - V) dx_1 dx_2 = D\Phi(U - V)[U - V] \\
&= 2\int_\Omega \triangle^2 (U - V)(U - V) dx_1 dx_2 = 2\int_\Omega (\triangle^2 U - \triangle^2 V)(U - V) dx_1 dx_2 = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, dobivamo $U - V = 0$, odnosno $U = V$, i rješenje je jedinstveno.

Q.E.D.

7. Numeričko rješenje rubne zadaće

7.1. Postavljanje rubne zadaće i podjela područja

U ovom poglavlju rješavamo primjer rubne zadaće ravninske elastičnosti u posebnom slučaju ravninskog naprezanja. Promatramo područje manjeg reda veličine u smjeru treće koordinatne osi u odnosu na dimenzije u ravnini u kojoj je opterećeno. Cilj rješavanja zadaće je dobivanje trajektorija naprezanja, kako bismo u nekom konkretnom slučaju, na primjer armirano-betonskog elementa, znali ispravno postaviti potrebnu armaturu.

Zadano područje podijelimo na ekvidistantnu mrežu i diferencnim postupkom riješimo zadaću. Postupak će nam dati približno rješenje, jer vrijednosti derivacije (potrebnog reda) Airyjeve funkcije naprezanja u pojedinim točkama izražavamo preko vrijednosti same Airyjeve funkcije naprezanja u toj točki i okolnim točkama.

Neka je zadano područje Ω s rubom Γ opterećeno jednolikim kontinuiranim opterećenjem q po cijelom gornjem dijelu ruba Γ i jednolikim kontinuiranim opterećenjem q' po dijelu donjeg dijela ruba Γ.

Zbog zahtjeva zadovoljenja uvjeta globalne ravnoteže mora biti zadovoljen uvjet da je zbroj svih sila u smjeru osi y jednak nuli, to dobivamo nužan odnos zadanog opterećenja:

$$q \cdot a + q' \cdot a' = 0 \rightarrow q' = 2q.$$

Rješavamo homogenu diferencijalnu jednadžbu za Airyjevu funkciju naprezanja

$$\triangle^2 U = 0.$$

Rubne uvjete na konturi možemo izračunati kao rezne sile na statički određenom nosaču koji ima oblik konture.

Zadana diferencijalna jednadžba u diferencnom obliku glasi

$$\frac{\triangle^4 U}{\triangle x^4} + 2\frac{\triangle^4 U}{\triangle x^2 \triangle y^2} + \frac{\triangle^4 U}{\triangle y^4} = 0,$$

gdje oznaka $\frac{\triangle^k U}{\triangle x^i \triangle y^j}$, $i + j = 4$ znači približnu vrijednost derivacije $\frac{\partial^k U}{\partial x^i \partial y^j}$, $i + j = 4$. Zbog jednostavnijeg daljnjeg rješavanja pretpostavljamo ekvidistantnu mrežu, t.j. $\triangle x = \triangle y$.

7.2. Rješavanje rubne zadaće

Ukoliko promatramo čvorove u mreži oko čvora k. Tada čvorove neposredno oko čvora k numeriramo na sljedeći način:

Nakon raspisivanja izrara za potrebne diferencije, uz zahtjev da početna jednadžba mora biti zadovoljena u svakom čvoru, dobivamo da vrijednosti funkcije naprezanja moraju u svakoj točki zadovoljavati sljedeću jednadžbu:

$$20U_k - 8(U_{k-1} + U_{k+1} + U_j + U_l) + 2(U_{l-1} + U_{l+1} + U_{j-1} + U_{j+1}) + U_{k-2} + U_{k+2} + U_i + U_m = 0.$$

Postavljajući ove jednadžbe za sve čvorove unutar područja dobivamu sustav od n linearnih jednasžbi s n nepoznanica. Rješenje sustava su vrijednosti Airyjeve funkcije naprezanja u čvorovima mreže. U jednadžbe za točke na udaljenosti $\triangle x$ ili $\triangle y$ od ruba ulaze i vrijednosti Airyjeve funkcije naprezanja izvan područja. Potrebne vrijednosti možemo izraziti preko vrijednosti Airyjeve funkcije naprezanja u točkama unutar područja i na samom rubu.

Izraz za vrijednosti Airyjeve funkcije naprezanja u točkama izvan područja tada glasi:

$$U_{k-1} = U_{k+1} - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_k \cdot 2e.$$

U našem zadatku zadaća koju rješavamo svodi se na rješavanje susrava 5 jednadžbi s 5 nepoznanica koje glase:

$$\begin{gathered} 22U - 7 - 8U_8 - 8U_{12} + 0 + 0 = -3.5qa^2 \\ -8U_7 + 23U_8 + 3U_{12} + 0 + 0 = 0.15625qa^2 \\ -8U_7 + 3U_8 + 23U_{12} + U_{22} + 0 = -1.21875qa^2 \\ 0 + 0 + U_{12} + 22U_{22} - 8U_{23} = -3.375qa^2 \\ 0 + 0 + 0 - 8U_{22} + 23U_{23} = 0.5qa^2. \end{gathered}$$

Rješenje ovog sustava jednadžbi su vrijednosti

$$\begin{aligned} U_7 &= -0.220859qa^2 \\ U_8 &= -0.050653qa^2 \\ U_{12} &= -0.119211qa^2 \\ U_{22} &= -0.160368qa^2 \\ U_{23} &= -0.034041qa^2. \end{aligned}$$

Vrijednosti naprezanja možemo dobiti iz svojstva Airiyeve funkcije naprezanja

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ \tau_{yy} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Za vrijednosti drugih parcijalnih derivacija koristit ćemo diferencni oblik u kojem je približna vrijednost drugih parcijalnih derivacija izražena preko vrijednosti Airyjeve funkcije naprezanja u pojedinim točkama, t.j.

$$\begin{aligned} (\tau_{xx})_k &= \frac{U_l - 2U_k + U_j}{\triangle y^2}, \\ (\tau_{yy})_k &= \frac{U_{k-1} - 2U_k + U_{k+1}}{\triangle x^2}, \\ (\tau_{xy})_k &= \frac{(U_{l+1} + U_{j-1}) - (U_{j+1} + U_{l-1})}{4\triangle x \triangle y}. \end{aligned}$$

Glavna naprezanja u pojedinim točkama izračunamo pomoću izraza

$$\tau_{1,2} = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} \pm \sqrt{(\tau_{xx} - \tau_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

a smjerove glavnih naprezanja pomoću izraza

$$\mathrm{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\tau_{xx} - \tau_{yy}}.$$

Vrijednosti naprezanja u čvorovima mreže našeg područja su:

	τ_{xx}/q	τ_{yy}/q	τ_{xy}/q	α	τ_1/q	τ_2/q
1	0.	-1.	0.	0°	0.	-1.
2	1.9325	-1.	0.	0°	1.9325	-1.
3	2.3791	-1.	0.	0°	2.3791	-1.
4	1.	-1.	0.	0°	1.	-1.
5	0.	-1.	0.	0°	0.	-1.
6	0.	0.9325	0.	0°	0.	0.9325
7	-0.6601	-1.743	0.5	11°18'	0.76	-1.84
8	-0.3791	1.9128	-0.3205	$-11°40'$	-0.32	-1.98
9	-1.31	-1.31	-1.	$-45°$	-0.31	-2.31
11	0.	-4.1852	0.	0°	0.	-4.1852
12	0.281	-4.1852	0.2026	2°35'	0.29	-4.19
13	-2.7195	-2.7195	-1.7669	$-45°$	-0.9526	-0.9526
16	0.	12.	0.	0°	0.	12.
17	-15.4342	-26.4342	-0.6724	$-3°32'$	-26.34	-15.34
18	-0.5447	0.	0.	0°	-0.5447	0.
21	2.8682	0.	0.	0°	2.8682	0.
22	1.318	-3.4129	-0.25	$-3°10'$	1.14	-3.42
23	0.0893	-1.4766	1.	26°	0.58	-1.96
24	0.	-1.0893	0.	0°	0.	0.
27	2.8682	-1.	0.	0°	2.8682	-1.
28	0.9107	-2.	0.	0°	0.9107	-2.
29	0.	-2.	0.	0°	0.	-2.

Na temelju ovih vrijednosti možemo konstruirati trajektorije naprezanja.

7.3. Trajektorije naprezanja

Literatura

[A] Anđelić, M. : Statika neodređenih štapnih konstrukcija, DHGK, 1993.

[AV] Aganović, I.,Veselić, K. : Linearne diferencijalne jednadžbe (Uvod u rubne probleme), Matematički odjel Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, 1992.

[BC] Baiocchi, C., Capello, A. : Variational and Quasivariational Inequalities, John Wiley and Sons, 1984.

[G] Gurtin, M.E. : An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, 1981.

[KS] Kurepa, S. : Funkcionalna analiza, Školska knjiga, 1990.

[KZ] Kostrenčić, Z. : Teorija elastičnosti, Sveučilište u Zagrebu, 1971.

[NH] Nečas, J., Hlaváček, I. : Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies: An Introduction, Elsevier Scientific Publishing, 1981.