SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Mia Jukić

NAČELO KOMPAKTNOSTI I KONCENTRACIJE U VARIJACIJSKOM RAČUNU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj mami

Sadržaj

Predgovor

Cilj je ovog rada opisati metodu koncentracije kompaktnosti koja služi izbjegavanju poteškoće uzrokovane nepostojanjem predkompaktnosti omeđenih skupova u beskonačnodimenzionalnim Banachovim prostorima. Ukratko, metoda koncentracije kompaktnosti daje nam rastav niza (na podnizu) u Hilbertovom prostoru u zbroj konvergentnih nizova koji su pomaknuti asimptotički ortogonalnim skupom grupovnih djelovanja, uz član pogreške koji teži k 0 u slabijoj topologiji (ali i dalje jačoj od slabe topologije). Metodu smo detaljno opisali u trećem poglavlju te dali primjer primjene na nelinernoj Schrödingerovoj jednadžbi. U drugom smo poglavlju opisali glavna svojstva interpolacijskih prostora kako bismo u zadnjem poglavlju mogli poopćiti metodu na Banachove prostore te pomoću interpolacijskih prostora dokazati dodatna svojstva.

Koristim priliku zahvaliti mentoru prof. Nenadu Antoniću na strpljenju i pomoći tijekom pisanja ovog rada. Na kraju bih zahvalila svojoj majci koja mi je bila velika podrška tijekom cijelog studiranja.

Osnovni pojmovi i oznake

1. Funkcijski prostori

Topološki vektorski prostor kompleksan je vektorski prostor V na kojemu je zadana topologija τ u kojoj su zbrajanje i množenje skalarom neprekinuti. Za takvu topologiju kažemo da je usklađena s vektorskom strukturom i zovemo je vektorskom topologijom.

Neka je X vektorski prostor na kojemu je definirano preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$ sa svojstvima:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \alpha \in \mathbb{C}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Takvo preslikavanje zovemo *norma* na prostoru X, a uređen par $(X, \|\cdot\|)$ naziva se normiran prostor. Kažemo da je normiran prostor *potpun* ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor zove se još i *Banachov prostor*. Potpun unitaran prostor naziva se *Hilbertov prostor*. Kažemo da niz x_n *konvergira* k vektoru x u normiranom prostoru, u oznaci $x_n \to x$ ako vrijedi $\|x_n - x\| \Rightarrow 0$. Tu konvergenciju često zovemo jakom.

Teorem 1. *Normiran prostor X potpun je ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ vektora iz X konvergira (obično) u X. U tom slučaju vrijedi $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.*

Niz (x_n) u normiranom prostoru X *slabo konvergira* k vektoru $x \in X$ ako vrijedi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, $\forall f \in X'$. Ovu konvergenciju bilježit ćemo kao $x_n \rightharpoonup x$.

Teorem 2. ***(Banach-Steinhaus, načelo jednolike omeđenosti)*** *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor, te neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X, Y)$. Pretpostavimo da za svaki $x \in X$ vrijedi $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$. Tada je i $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < \infty$.*

Banach-Steinhausov teorem ima mnogo primjena, no jedna od najvažnijih za ovaj rad jest činjenica da je svaki slabo konvergentan niz u normiranom prostoru omeđen.

Kažemo da je normiran prostor X *neprekidno uložen* u Banachov prostor Y, u oznaci $X \hookrightarrow Y$, ako postoji ograničena linearna injekcija $T : X \to Y$. Operator T zovemo operator ulaganja. Kažemo da je ulaganje *kompaktno* ukoliko je operator T kompaktan operator, tj. ukoliko je slika jedinične kugle relativno kompaktan skup u Y.

Topologiju na normiranom prostoru X koja potječe od norme zovemo *jakom topologijom*. Neka su Y_j, $j \in J$ topološki prostori i $(f_j)_{j \in J}$ familija preslikavanja $f_j : X \to Y_j$. *Slaba topologija* na X inducirana familijom $(f_j)_{j \in J}$ najmanja je topologija na u odnosu na koju su sva preslikavanja f_j, $j \in J$, neprekidna. Slabu topologiju možemo promatrati na dualnom prostoru X' normiranog prostora X induciranu svim funkcionalima iz X''. Međutim, pokazuje se da je u primjenama puno važnija slaba topologija na X' generirana ne svim ograničenim funkcionalima na X', nego samo onima oblika $\hat{x}$, $x \in X$. Sjetimo se da je za svaki $x \in X$ preslikavanje $\hat{x} : X' \to \mathbb{F}$ definirano formulom $\hat{x}(f) = f(x)$ za $f \in X'$ neprekidan linearan funkcional na X', tj $\hat{x} \in X''$. Tu topologiju zovemo slabo-$*$ topologija.

Ako je Banachov prostor X beskonačnodimenzionalan, onda je i X' beskonačnodimenzionalan te jedinična kugla u X' nije kompaktan skup. U tom svjetlu tvrdnja sljedećeg teorema naročito je zanimljiva.

Teorem 3. *(**Banach-Alaoglu**) Neka je X normiran prostor. Zatvorena jedinična kugla $\{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ kompaktan je skup u slabo-$*$ topologiji prostora X'.*

Korolar 4. *Zatvorena jedinična kugla $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ refleksivnog normiranog prostora X je slabo kompaktan skup.*

U konačnodimenzionalnom normiranom prostoru nije bilo važno jesmo li definirali kompaktan skup kao skup u kojem svaki niz ima konvergentan podniz ili preko Heine-Borelove definicije kompaktnosti jer su obje definicije ekvivaletne. Kako jedinična kugla u beskonačnodimenzionalnom prostoru nije kompaktan skup, to vidimo da te definicije nisu ekvivalentne u slučaju beskonačnodimenzionalnog normiranog prostora. Iz tog razloga uvodimo različite tipove kompaktnosti skupa $A \subseteq X$:

- *topološka kompaktnost* – svaki otvoreni pokrivač skupa A ima konačan potpokrivač
- *nizovna kompaktnost* – svaki niz u A ima konvergentan podniz s limesom u A.

Teorem 5. *(**Eberlein-Šmulian**) Banachov prostor X je refleksivan ako i samo ako svaki omeđeni niz sadrži slabo konvergentan podniz.*

2. L^p prostori

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren. Za $1 \leq p \leq \infty$ i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ izmjerivu funkciju u Lebesgueovom smislu definiramo

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty \\ \inf\{c \in \mathbb{R}_0^+ : |f| \leq c \text{ s.s. na } \Omega\}, p = \infty, \end{cases}$$

gdje dx označuje integraciju s obzirom na Lebesqueovu mjeru na $\mathbb{R}^d$. Označimo:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ izmjeriva, } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

$$\mathcal{N}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ izmjeriva }, \|f\|_{L^p(\Omega)} = 0\}$$

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega).$$

Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 6. *$L^p(\Omega)$ je Banachov prostor, dok je za $p \in (1, \infty)$ i refleksivan. Nadalje, $L^2(\Omega)$ je Hilbertov prostor uz skalarni produkt*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)dx$$

Teorem 7. ***(Svojstva L^p prostora)***

- *Za $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, je $fg \in L^1(\Omega)$ i vrijedi*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} .$$

- *$C_c^\infty(\Omega)$ je neprekidno uložen u $L^p(\Omega)$, pri čemu je to ulaganje gusto za $p \in [1, \infty)$.*
- *Za $p \in [1, \infty)$ vrijedi $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$.*
- *Za $p \in [1, \infty)$, $L^p(\Omega)$ je separabilan.*

Sljedeći teoremi slijede kao posljedice Hölderove nejednakosti.

Teorem 8. *$L^{p_0} \cap L^{p_1} \subset L^p$ za $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$. Nadalje, za svaki $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ vrijedi ocjena:*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_0}^{\theta}, \tag{2.1}$$

gdje je $\theta = \theta(p_0, p, p_1) = \dfrac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \in (0, 1)$.

Teorem 9. *$L^p \subset L^{p_0} + L^{p_1}$ za $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$, tj. za svaki $f \in L^p$ postoji $g \in L^{p_0}$ i $h \in L^{p_1}$ tako da je $f = g + h$.*

Teorem 10 (Brezis-Lieb)**.** *Neka je (Ω, Σ, μ) prostor mjere. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$. Pretpostavimo da $f_n \to f$ s.s. na Ω, gdje je $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Pretpostavimo da postoji $p \in (0, \infty)$ i neka konstanta $C > 0$ tako da vrijedi*

$$\int_\Omega |f_n|^p d\mu < C, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p| d\mu = 0$$

Dokaz. Primijetimo da iz Fatouve leme slijedi $\int_\Omega |f| d\mu \leq C$.

Iz konveksnosti funckije $t \mapsto |t|^p$ za $p > 1$ te direktnom provjerom za $p \leq 1$, lako je pokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji C_ε tako da za sve $a, b \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$||a + b|^p - |b|^p| \leq \varepsilon |b|^p + C_\varepsilon |a|^p. \tag{2.2}$$

Rastavimo funkcije f_n kao $f_n = f + g_n$ tako da $g_n \to 0$ s.s. Tvrdimo da

$$G_n^\varepsilon = \left(\left||f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p\right| - \varepsilon |g_n|^p\right)_+$$

zadovoljava $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega G_n^\varepsilon = 0$.

Da bismo to pokazali, prvo primijetimo da je

$$\left||f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p\right| \leq \left||f + g_n|^p - |g_n|^p\right| + \left|f\right|^p \leq \varepsilon \left|g_n\right|^p + (1 + C_\varepsilon)\left|f\right|^p,$$

pa je $G_n^\varepsilon \leq (1 + C_\varepsilon)|f|^p$. Nadalje, $G_n^\varepsilon \to 0$ s.s. pa po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega G_n^\varepsilon = 0$. Također, vrijedi

$$\int_\Omega \left||f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p\right| d\mu \leq \varepsilon \int_\Omega |g_n|^p d\mu + \int_\Omega G_n^\varepsilon d\mu.$$

Još je potrebno dokazati uniformnu ograničenost integrala $\int_\Omega |g_n|^p d\mu$. Zaista,

$$\int_\Omega |g_n|^p d\mu = \int_\Omega |f - f_n|^p d\mu \leq 2^p \int_\Omega |f|^p + |f_n|^p d\mu \leq 2^{p+1} C.$$

Dakle,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \left||f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p\right| d\mu \leq \varepsilon D.$$

Kako je ε bio proizvoljan, slijedi tvrdnja teorema.

$\square$

3. Soboljevljevi prostori

Označimo $\lambda(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$. Za svaki $s \in \mathbb{R}$ definiramo *Soboljevljev prostor* $H^s(\mathbb{R}^d)$ kao prostor svih temperiranih distribucija u za koje je $\lambda^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$; tj. da vrijedi

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Teorem 11. *Za proizvoljan $s \in \mathbb{R}$, $u \in H^{s+1}$ ako i samo ako je $u, D_1 u, \ldots, D_d u \in H^s$, gdje je D operator deriviranja definiran s $D_j = \frac{1}{2\pi i}\partial_j$. Vrijedi i izraz za normu:*

$$\|u\|_{H^{s+1}}^2 = \|u\|_{H^s}^2 + \sum_{j=1}^{d} \left\|D_j u\right\|_{H^s}^2.$$

Štoviše, za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

- $u \in H^m \Leftrightarrow ((\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)\ |\alpha| \leq m \Rightarrow D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d))$
- *ako je $s > d/2 + m$ i $u \in H^s$, onda su za svaki $|\alpha| \leq m$ funkcije $D^\alpha u$ ograničene i neprekinute.*

Iz prethodnog teorema vidimo da $H^m(\Omega)$ možemo ekvivalentno definirati kao skup svih funkcija u $L^2(\Omega)$ kojima su derivacije do reda m u $L^2(\Omega)$. Analogno prostoru H^m, Soboljevljeve prostore možemo definirati i nad drugim L^p prostorima. Prostor $W^{m,p}(\Omega)$ za $m \in \mathbb{N}$ definiramo kao skup svih funkcija iz $L^p(\Omega)$ čije su derivacije do reda m u $L^p(\Omega)$. Na tom prostoru definiramo normu:

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} & : p < \infty \\ \sup_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & : p = \infty. \end{cases}$$

Uz ovu je normu $W^{m,p}$ Banachov prostor, dok je, u slučaju $p = 2$, $W^{m,2} = H^m$ i Hilbertov prostor. Pitamo se možemo li poopćiti gornju definiciju za slučaj kada m nije prirodan broj. Odgovor je potvrdan, tj. za $m \in \mathbb{N}$, $p \in (1, \infty)$ i $0 < s < m$ definiramo razlomljeni Soboljevljev prostor $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ kao interpolacijski prostor između $L^p(\mathbb{R}^d)$ i Soboljevljevog prostora; preciznije

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^d) := [L^p(\mathbb{R}^d), W^{m,p}(\mathbb{R}^d)]_{s/m}.$$

Može se pokazati [1] da se tako definirani prostori za $s \in \mathbb{N}$ podudaraju sa Soboljevljevim prostorima koje smo prethodno definirali.

Teorem 12. ***(Relich-Kondrašov)*** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ograničen otvoren skup s Lipschitzovom granicom. Tada vrijedi:*

- *za* $1 \leq p < d$ *je ulaganje* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *kompaktno, za svaki* $q \in [1, p^*)$, *gdje je* $p^* = \frac{dp}{d-p}$
- *za* $p = d$ *je ulaganje* $W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *kompaktno, za svaki* $q \in (1, \infty)$
- *za* $p > d$ *je ulaganje* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *kompaktno, za svaki* $0 \leq \alpha \leq 1 - d/p$.

Posebno je u sva tri slučaja ulaganje $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *kompaktno.*

Interpolacijski prostori

1. Osnovna svojstva

Definicija. Neka su A_0 i A_1 Banachovi prostori. (A_0, A_1) zovemo *Banachovim* ili *interpolacijskim* parom ukoliko postoji Hausdorffov topološki vektorski prostor $\mathcal{A}$ tako da su oba uložena u $\mathcal{A}$.

Teorem 1. *Neka je (A_0, A_1) Banachov par. Tada su*

$$A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} : (\exists a_0 \in A_0), (\exists a_1 \in A_1) : a = a_0 + a_1\},$$

s normom

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1, a_i \in A_i} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1})$$

te $A_0 \cap A_1$, s normom

$$\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}),$$

Banachovi prostori. Nadalje,

$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow A_i \hookrightarrow A_0 + A_1, \quad i = 0, 1.$$

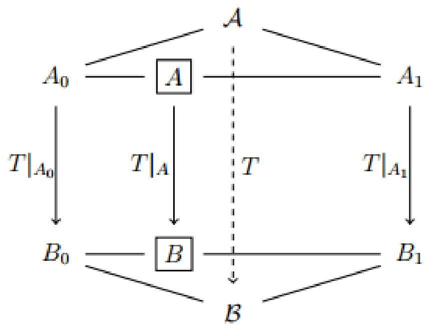
Definicija. Neka su (A_0, A_1) i (B_0, B_1) Banachovi parovi. Skup svih linearnih operatora $T : A_0 + A_1 \to B_0 + B_1$ s ograničenim restrikcijama $T_{|A_i} : A_i \to B_i,\ i = 0, 1$, označavmo s $\mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$.

Teorem 2. *Skup $\mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$, snabdjeven s normom*

$$\|T\|_{\mathcal{L}((A_0,A_1),(B_0,B_1))} = \max\{\|T\|_{\mathcal{L}(A_0;B_0)}, \|T\|_{\mathcal{L}(A_1;B_1)}\},$$

Banachov je prostor neprekidno uložen u $\mathcal{L}(A_0 + A_1; B_0 + B_1)$.

Definicija. Neka je (A_0, A_1) Banachov par. Banachov prostor $A \hookrightarrow \mathcal{A}$ je *međuprostor* s obzirom na A_0 i A_1 ukoliko je $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow A \hookrightarrow A_0 + A_1$. Za međuprostor A kažemo da je *interpolacijski prostor* s obzirom na A_0 i A_1 ukoliko je za svaki $T \in \mathcal{L}((A_0, A_1))$ $T(A) \subseteq A$.



Slika 1: Interpolacijsko osvojstvo

Općenitije, za Banachove prostore A i B kažemo da su interpolacijski prostori u odnosu na (A_0, A_1) i (B_0, B_1) ukoliko su međuprostori za (A_0, A_1) i (B_0, B_1) te ukoliko je za svaki $T \in \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$ $T(A) \subseteq B$.

Napomena. Kako bismo izbjegli moguće nesporazume, napomenimo da, ukoliko su A i B interpolacijski prostori u odnosu na (A_0, A_1) i (B_0, B_1), to ne znači da je A interpolacijski prostor u odnosu na (A_0, A_1) niti da je B interpolacijski prostor u odnosu na (B_0, B_1).

Primijetimo da u definiciji interpolacijskog prostora nemamo zahtjev ograničenosti restrikcije $T_{|A}$. No, $T_{|A} : A \to A$ zaista će biti ograničena što slijedi iz sljedeće leme.

Lema 3. *Neka su $U \hookrightarrow X$ i $V \hookrightarrow Y$ Banchovi prostori. Ako je $S \in \mathcal{L}(X; Y)$ takvo da je $S_{|U} : U \to V$, onda je $S_{|U} \in \mathcal{L}(U; V)$.*

Dokaz. Za dokaz tvrdnje koristit ćemo teorem o zatvorenom grafu, tj. pokazat ćemo da je skup $\Gamma(S) = \{(x, Sx) : x \in U\} \subseteq U \times V$ zatvoren u $U \times V$. Uzmimo konvergentan niz (x_n, Sx_n) u $U \times V$. Tada $x_n \to x \in U$, $Sx_n \to y \in V$. Želimo pokazati da je $Sx = y$. Kako je $S \hookrightarrow X$, slijedi da $x_n \to x$ u X. Kako je $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, to i $Sx_n \to Sx$ u Y pa zbog $V \hookrightarrow Y$ slijedi $Sx = y$. □

Korolar 4. *Neka su A i B interpolacijski prostori s obzirom na (A_0, A_1) i (B_0, B_1). Tada za svaki $T \in \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$ vrijedi $T_{|A} \in \mathcal{L}(A, B)$.*

Teorem 5. *Neka su A i B interpolacijski prostori u odnosu na Banachove parove (A_0, A_1) i (B_0, B_1). Tada postoji konstanta $c > 0$ tako da za sve $T \in \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$ vrijedi ocjena*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(A;B)} \leq c \max(\|T\|_{\mathcal{L}(A_0;B_0)}, \|T\|_{\mathcal{L}(A_1;B_1)}).$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "S\,?"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ X \arrow[r, "S\ cont."'] & Y \end{tikzcd}$$

Slika 2: Neprekidnost restrikcija

Dokaz. Želimo primijeniti Lemu 3 na $U = \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$, $V = \mathcal{L}(A; B)$, $X = \mathcal{L}(A_0 + A_1; B_0 + B_1)$, $Y = \mathcal{L}(A; B_0 + B_1)$ i $S = R$, gdje je

$$R : \mathcal{L}(A_0 + A_1; B_0 + B_1) \to \mathcal{L}(A; B_0 + B_1), \quad R(T) = T_{|A}.$$

Dakle, moramo pokazati ulaganja: $U \hookrightarrow X$, $V \hookrightarrow Y$, te da je $R \in \mathcal{L}(X; Y)$ i $R_{|U} : U \to V$. Ulaganje $U \hookrightarrow X$ posljedica je Teorema 2. Kako bismo dokazali $V \hookrightarrow Y$, uzmimo $a \in A$ i $T \in V$. Tada zbog $B \hookrightarrow B_0 + B_1$ imamo

$$\|Ta\|_{B_0+B_1} \leq c\,\|Ta\|_B \leq c\,\|T\|_{\mathcal{L}(A;B)}\,\|a\|_A$$

pa je $\|T\|_{\mathcal{L}(A;B_0+B_1)} \leq c\,\|T\|_{\mathcal{L}(A;B)}$, što dokazuje $V \hookrightarrow Y$. Iz Korolara 4 odmah slijedi da $R : U \to V$. Preostaje nam dokazati da postoji $c > 0$ tako da je $\|R(T)\|_{\mathcal{L}(A;B_0+B_1)} \leq c\,\|T\|_{\mathcal{L}(A_0+A_1;B_0+B_1)}$, za svaki $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1; B_0 + B_1)$. Uzmimo $T \in \mathcal{L}(A_0 + A_1; B_0 + B_1)$ i $a \in A$, koristeći $A \hookrightarrow A_0 + A_1$ imamo

$$\|Ta\|_{B_0+B_1} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(A_0+A_1;B_0+B_1)}\,\|a\|_{A_0+A_1} \leq c\,\|T\|_{\mathcal{L}(A_0+A_1;B_0+B_1)}\,\|a\|_A$$

iz čega slijedi željeni rezultat. Sada su zadovoljene sve pretpostavke Leme 3 pa zaključujemo da je $R : \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1)) \to \mathcal{L}(A; B)$ linearan i ograničen, što znači

$$\|T\|_{\mathcal{L}(A,B)} \leq c\,\|T\|_{\mathcal{L}((A_0,A_1),(B_0,B_1))} = c\max(\|T\|_{\mathcal{L}(A_0;B_0)}, \|T\|_{\mathcal{L}(A_1;B_1)})$$

$\square$

Napomena. Konstanta $c = c(A, B)$ koja se pojavljuje u prethodnom teoremu naziva se *interpolacijskom konstantom.* U slučaju $c = 1$, prostori A i B nazivaju se *egzaktni interpolacijski prostori.* Za interpolacijske prostore A i B kažemo da su eskponenta θ, $0 \leq \theta \leq 1$ ukoliko vrijedi

$$\|T\|_{\mathcal{L}(A,B)} \leq c\,\|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(A_0,B_0)}\,\|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(A_1,B_1)}\,.$$

Ako je $c = 1$, kažemo da su A i B *egzkatni interpolacijski prostori eksponenta* θ.

2. Realna interpolacijska metoda

Definicija. *Neka je* (A_0, A_1) *Banachov par. Za* $t > 0$ *i* $a \in A_0 + A_1$ *definiramo* K*-funkcional formulom*

$$K(t, a; A_0, A_1) = K(t, a) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\, \|a_1\|_{A_1}),$$

pri čemu je $a_0 \in A_0$ *i* $a_1 \in A_1$.

Očito je $K(1, a) = \|a\|_{A_0+A_1}$ te je, za svaki fiksni $t > 0$, funkcija $K(t, a)$ norma ekvivalentna polaznoj normi na $A_0 + A_1$.

Lema 6. *Za proizvoljni* $a \in A_0 + A_1$, *funkcija* $K(\cdot, a)$ *je rastuća, konkavna i neprekidna. Posebno,* $K(t, a) \leq \max\{1, t/s\}\, K(s, a)$.

Dokaz. $K(\cdot, a)$ očito je rastuća funkcija. Ukoliko je $\max\{1, t/s\} = 1$, tj. $t \leq s$, tada iz monotonosti slijedi $K(t, a) \leq K(s, a)$. Ako je $\max\{1, t/s\} = t/s$, tj. $t \geq s$, tada imamo

$$K(t, a) = \frac{t}{s} \inf_{a=a_0+a_1} (\frac{s}{t} \|a_0\|_{A_0} + s\, \|a_1\|_{A_1}) \leq \frac{t}{s} \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + s\, \|a_1\|_{A_1}) = \frac{t}{s} K(s, a).$$

Još je preostalo dokazati konkavnost, tj.

$$K((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, a) \geq (1-\lambda)K(t_1, a) + \lambda K(t_2, a),\ 0 < \lambda < 1.$$

Za $0 < t_1 < t < t_2 < \infty$ po definiciji imamo

$$\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} K(t_1, a) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} K(t_2, a) \leq \|a_0\|_{A_0} + t\, \|a_1\|_{A_1}.$$

Uzimajući infimum po svim prikazanim reprezentacijama $a = a_0 + a_1$, dobivamo

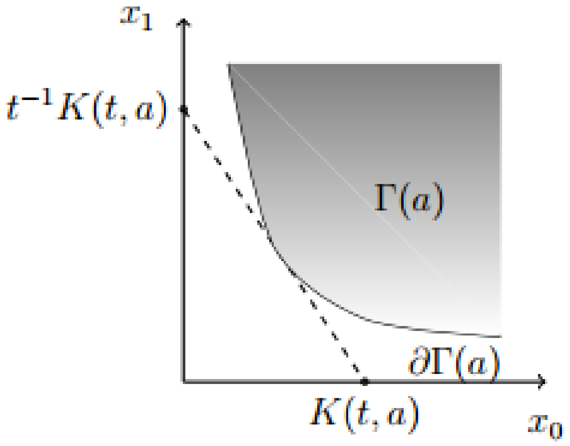
$$\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} K(t_1, a) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} K(t_2, a) \leq K(t, a).$$

Ukoliko stavimo $\lambda = \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1}$, dobivamo željenu tvrdnju. Iz činjenice da je $K(\cdot, a)$ rastuća i konkavna, možemo zaključiti neprekidnost. □

Geometrijska interpretacija

Promotrimo skup

$$\Gamma(a) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (\exists a_0 \in K[0, x_0])\, (\exists a_1 \in K[0, x_1]) : a = a_0 + a_1\},$$



za koji se lako pokaže da je konveksan. Tada imamo

$$K(t,a) = \inf_{(x_0,x_1)\in\Gamma(a)} (x_0 + tx_1) = \inf_{(x_0,x_1)\in\partial\Gamma(a)} (x_0 + tx_1),$$

što znači da je $K(t,a)$ presjek tangente na $\Gamma(a)$ i x_0-osi nagiba $-t^{-1}$.

Da bismo konstruirali interpolacijski prostor pomoću K-metode, koristit ćemo sljedeći izraz: za $0 < \theta < 1 \leq q \leq \infty$ i neprekidnu funkciju $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stavimo

$$\Phi_{\theta,q}(\varphi) = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta}\varphi(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & : q < \infty \\ \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta}\varphi(t) & : q = \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definicija. *Neka je* $0 < \theta < 1 \leq q \leq \infty$ *i* (A_0, A_1) *Banachov par. Definiramo skup*

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \{a \in A_0 + A_1 : \Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a)) < \infty\}.$$

Izraz $\Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a))$ eksplicitno možemo zapisati kao

$$\Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a)) = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta}K(t,a)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & : q < \infty \\ \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta}K(t,a) & : q = \infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

Nije teško pokazati da je za $\theta \leq 0$ ili $\theta \geq 1$ prostor $(A_0, A_1) = \{0\}$ pa nam taj slučaj nije zanimljiv. Tvrdnja sljedećeg teorema najvažniji je rezultat ovog poglavlja. Pokazat će se da pomoću navedenih definicija zaista možemo konstruirati interpolacijski prostor.

Teorem 7. *Neka su $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ Banachovi parovi i $0 < \theta < 1 \le q \le \infty$. Tada vrijedi:*

(i) $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ *s normom* $\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a))$ *je interpolacijski prostor za* (A_0, A_1).

(ii) $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ *i* $(B_0, B_1)_{\theta,q}$ *su egzaktni interpolacijski prostori eksponenta* θ *za* (A_0, A_1) *i* (B_0, B_1), *tj. za proizvoljni* $T \in \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$ *vrijedi ocjena*

$$\|T\|_{\mathcal{L}((A_0,A_1)_{\theta,q},(B_0,B_1)_{\theta,q})} \le \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(A_0;B_0)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(A_1;B_1)} .$$

(iii) Za svaki $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q}$ *vrijedi ocjena*

$$K(t, a) \le ct^{\theta} \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}$$

Dokaz. Neka je $s > 0$, tada je $s^{-\theta q} = \theta q \int_s^\infty t^{-\theta q} \frac{dt}{t}$ pa možemo pisati

$$s^{-\theta} K(s, a) = K(s, a) \left(\theta q \int_s^\infty t^{-\theta q} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\theta q \int_s^\infty t^{-\theta q} K(t, a)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = (\theta q)^{\frac{1}{q}} \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} ,$$

iz čega slijedi *(iii)*. Uzmimo $0 \ne T \in \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$ i $a \in A_0 + A_1$. Tada je, po definiciji,

$$\begin{aligned} K(t, Ta, B_0, B_1) &= \inf_{Ta=b_0+b_1, b_i\in B_i} (\|b_0\|_{B_0} + t \|b_1\|_{B_1}) \\ &\le \inf_{a=a_0+a_1, a_i\in A_i} (\|Ta_0\|_{B_0} + t \|Ta_1\|_{B_1}) \\ &\le \inf_{a=a_0+a_1, a_i\in A_i} (\|T\|_{\mathcal{L}(A_0;B_0)} \|a_0\|_{A_0} + t \|T\|_{\mathcal{L}(A_1;B_1)} \|a_1\|_{A_1}) \\ &\le \|T\|_{\mathcal{L}(A_0;B_0)} K(\tau, a), \end{aligned}$$

gdje je $\tau = t\frac{\|T\|_{\mathcal{L}(A_1;B_1)}}{\|T\|_{\mathcal{L}(A_0;B_0)}}$. Nadalje, računamo

$$\begin{aligned} \|Ta\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} &= \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, Ta; B_0, B_1)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \|T\|_{\mathcal{L}(A_0,B_0)} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, \tau; A_0, A_1)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\le \|T\|_{\mathcal{L}(A_0,B_0)} \Big(\frac{\|T\|_{\mathcal{L}(A_1,B_1)}}{\|T\|_{\mathcal{L}(A_0,B_0)}}\Big)^{\theta} \left(\int_0^\infty [\tau^{-\theta} K(\tau, \tau; A_0, A_1)]^q \frac{d\tau}{\tau}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(A_0,B_0)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(A_1,B_1)} \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} . \end{aligned}$$

Iz prethodne ocjene možemo zaključiti da je $T(a) \in (B_0, B_1)_{\theta,q}$ za svaki $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q}$ i svaki $T \in \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$ te da su $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ i $(B_0, B_1)_{\theta,q}$ egzaktni interpolacijski prostori eksponenta θ. Još nam je preostalo dokazati *(i)*. Nije teško provjeriti da $\Phi_{\theta,q}(K(\cdot, a))$ definira normu, pri čemu nejednakost trokuta slijedi iz nejednakosti Minkowskog pa nam ostaje dokazati da je $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ Banachov prostor te međuprostor u odnosu na (A_0, A_1). Tada će iz *(ii)* slijediti da je i interpolacijski prostor. Ako je (a_n) Cauchyjev niz u $(A_0, A_1)_{\theta,q}$, iz ocjene u (*iii*) slijedi da je i $K(t, a_n)$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, za $t > 0$. Ukoliko uzmemo $t = 1$, možemo zaključiti da je niz (a_n) Cauchyjev u $A_0 + A_1$ pa postoji $a \in A_0 + A_1$ tako da $a_n \to a$ u $A_0 + A_1$. Neka je $q < \infty$ (slučaj $q = \infty$ se dokazuje analogno). Budući da je niz a_n Cauchyjev u $(A_0, A_1)_{\theta,q}$, znamo da

$$(\forall\delta > 0)\ \ (\exists n_0(\delta))\ \ (\forall m > n > n_0(\delta))\ \ \|a_m - a_n\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} < \frac{\delta}{2}.$$

Za $N > 1 > \varepsilon$ ocjenjujemo:

$$\begin{aligned}
\left(\int_\varepsilon^N [t^{-\theta} K(t, a_n - a)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} &\le \left(\int_\varepsilon^N [t^{-\theta} K(t, a_m - a_n)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\varepsilon^N [t^{-\theta} K(t, a - a_m)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \frac{\delta}{2} + \left(\int_\varepsilon^N [t^{-\theta} K(N, a - a_m)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \frac{\delta}{2} + N \|a - a_m\|_{A_0+A_1} \left(\int_\varepsilon^N t^{-\theta q} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \frac{\delta}{2} + cN\varepsilon^{-\theta} \|a - a_m\|_{A_0+A_1} < \delta,
\end{aligned}$$

jer je zadnji član u gornjoj nejednakosti manji od $\delta/2$ za $m > m_1(\delta, \varepsilon, N)$. Ukoliko pustimo $N \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$, dobivamo

$$\|a - a_n\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} \le \delta, \quad n \ge n_0(\delta),$$

što nam daje konvergenciju u $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ te po relaciji trokuta zaključujemo da je $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q}$. Na kraju dokazujemo da je $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ međuprostor, tj. $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow A_0 + A_1$. Uzmimo $a \in A_0 \cap A_1$, tada iz definicije slijedi $K(t, a) \le min\{1, t\} \|a\|_{A_0 \cap A_1}$ pa možemo ocijeniti

$$\begin{aligned}
\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} &\le \left(\int_0^1 [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_1^\infty [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \|a\|_{A_0 \cap A_1} \left[\left(\int_0^1 t^{(1-\theta)q} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \int_1^\infty t^{-\theta q} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
&\le \|a\|_{A_0 \cap A_1} \left[\left(\frac{1}{(1-\theta)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{1}{\theta q}\right)^{\frac{1}{q}}\right],
\end{aligned}$$

iz čega možemo zaključiti $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q}$. Druga inkluzija slijedi iz $\|a\|_{A_0+A_1} = K(1, a)$ i *(iii)*. $\square$

Sada znamo da prostor $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ ima interpolacijsko svojstvo, ali pitanje je koje je značenje parametara θ i q. Sljedeći teorem daje nam bolji uvid u svojstva prostora $(A_0, A_1)_{\theta,q}$.

Teorem 8. *Neka je (A_0, A_1) Banachov par i $0 < \theta < 1 \leq q \leq \infty$. Tada vrijedi:*

(i) $(A_0, A_1)_{\theta,q} = (A_1, A_0)_{1-\theta,q}$

(ii) ako je $q \leq r \leq \infty$, onda vrijede ulaganja

$$(A_0, A_1)_{\theta,1} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,r} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,\infty}$$

(iii) ukoliko je $A_0 \hookrightarrow A_1$, tada je

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\eta,r}$$

za $0 < \theta < \eta < 1 \leq q, r \leq \infty$

(iv) ukoliko je $A_0 = A_1 = A$, onda je $(A_0, A_1)_{\theta,q} = A$ s normom

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = d\,\|a\|_A \text{ , pri čemu je } d = \frac{1}{[\theta(1-\theta)q]^{1/q}}$$

(v) Za svaki $a \in A_0 \cap A_1$ vrijedi ocjena

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} \leq d\,\|a\|_{A_0}^{1-\theta}\,\|a\|_{A_1}^{\theta} \text{ , pri čemu je } d = \frac{1}{[\theta(1-\theta)q]}. \tag{2.3}$$

3. Kompleksna interpolacijska metoda

U ovom ćemo poglavlju definirati i dokazati najvažnija svojstva kompleksne interpolacijske metode. Od osobite će nam pomoći biti Hadamardova lema o tri pravca. U daljnjem će S označavati zatvorenu prugu $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$, dok ćemo sa S_0 označavati otvorenu prugu $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

Lema 9. ***(Hadamardova o tri pravca)*** *Neka je φ kompleksna funkcija, ograničena i neprekinuta na pruzi S, analitička na S_0, za koju postoje pozitivne konstante M_0 i M_1 tako da vrijede ocjene:*

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &\leq M_0, \quad Re\, z = 0 \\ |\varphi(z)| &\leq M_1, \quad Re\, z = 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tada na čitavoj pruzi vrijedi

$$|\varphi(z)| \leq M_0^{1-Re\,z} M_1^{Re\,z} \tag{3.2}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $M_0 = M_1 = 1$. Zaista, ukoliko definiramo funkciju ψ formulom:

$$\psi(z) := \varphi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z},$$

lagano se vidi da ψ zadovoljava sljedeću ocjenu:

$$|\psi(z)| \leq 1, \quad z \in \partial S. \tag{3.3}$$

Obrnuto, ako funkcija ψ, koja je ograničena i neprekinuta na S, te analitička na S_0, zadovoljava ocjenu (3.3), onda funkcija φ definirana s

$$\varphi(z) := \psi(z) M_0^{1-z} M_1^{z}$$

zadovoljava ocjenu (3.1). Stoga, dokažimo teorem u slučaju funkcije φ ograničene jedinicom na rubu pruge S.

Ako $\varphi(z) \to 0$ za $|z| \to \infty$, onda je $|\varphi(z)| \leq 1$ po principu maksimuma modula. U suprotnom, za $n \in \mathbb{N}$ definiramo niz funkcija φ_n formulom:

$$\varphi_n(z) := \varphi(z) e^{(z^2-1)/n}.$$

Uz ovakve φ_n, zbog $\mathrm{Re}\, z \leq 1$ imamo

$$|\varphi_n(z)| = |\varphi(z)| e^{\left(\mathrm{Re}\, z^2 - 1\right)/n} \leq |\varphi(z)| e^{-(\mathrm{Im}\, z)^2/n},$$

pa zbog ograničenosti funkcije φ na S vrijedi

$$\lim_{|z|\to\infty} \varphi_n(z) \to 0.$$

No, sada je φ_n, za svaki n, funkcija iz prvog slučaja, pa zadovoljava ocjenu $|\varphi_n(z)| \leq 1, z \in S$. Međutim, $\varphi_n(z) \to \varphi(z)$, za $z \in S$, pa prijelazom na limes dobivamo željeni rezultat. □

Napomena. Analogno, ili koristeći prethodnu lemu, može se dokazati i sljedeća generalizacija Hadamardove leme:

Neka je φ kompleksna funkcija, ograničena i neprekinuta na pruzi $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \mathrm{Re}\, z \leq b\}$, analitička na unutrašnjosti od S_1, za koju postoje pozitivne konstante M_0 i M_1 tako da vrijede ocjene:

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &\leq M_0, \quad \mathrm{Re}\, z = a \\ |\varphi(z)| &\leq M_1, \quad \mathrm{Re}\, z = b. \end{aligned}$$

Tada na čitavom S_1 vrijedi

$$|\phi(z)| \leq M_0^{\frac{b-\mathrm{Re}\, z}{b-a}} M_1^{\frac{\mathrm{Re}\, z - a}{b-a}}.$$

Napomena. Prethodni teorem možemo poopćiti i na situaciju gdje φ poprima vrijednosti u kompleksnom potpunom normiranom prostoru. Ako je X kompleksan Banachov prostor i $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, onda za funkciju $\varphi : U \to X$ kažemo da je *analitička* (holomorfna) u točki $z_0 \in U$, ukoliko φ ima derivaciju po normi (tzv. jaku derivaciju) u točki z_0. Funkcija φ je analitička na U ukoliko je analitička u svakoj točki na U. Hadamardova lema vrijedi i za funkcije s vrijednostima u Banachovim prostorima. Dokaz je gotovo isti: apsolutne vrijednosti valja zamijeniti normama; stoga u daljnjem tekstu koristimo tu verziju Hadamardove leme bez posebne napomene.

Za dani Banachov par (A_0, A_1) promotrimo skup $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A_0, A_1)$ svih funkcija f kompleksne varijable $z = x + iy$ s vrijednostima u $A_0 + A_1$ koje zadovoljavaju:

(i) f je neprekidna i ograničena na pruzi $0 \le x \le 1$

(ii) f je analitička s $0 < x < 1$ u $A_0 + A_1$

(iii) f je neprekidna na $x = 0$ u A_0 i vrijedi

$$\|f(iy)\|_{A_0} \to 0, \text{ za } |y| \to \infty$$

(iv) f je neprekidna na $x = 1$ u A_1 i vrijedi

$$\|f(1 + iy)\|_{A_1} \to 0, \text{ za } |y| \to \infty.$$

Nije teško provjeriti da je $\mathcal{F}$ vektorski prostor, a u sljedećem teoremu dokazat ćemo da je $\mathcal{F}$, uz pogodno odabranu normu, i potpun normiran prostor.

Teorem 10. *$\mathcal{F}$ s normom $\|f\|_{\mathcal{F}} = \max\left\{\sup_y \|f(iy)\|_{A_0}, \sup_y \|f(1+iy)\|_{A_1}\right\}$ je Banachov prostor.*

Dokaz. Kako bismo dokazali da je $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ norma, dovoljno je vidjeti da $\|f\|_{\mathcal{F}} = 0$ povlači $f = 0$. Ukoliko je $\|f\|_{\mathcal{F}} = 0$, tada je i $\|f(z)\|_{A_0} = 0$ za $\mathrm{Re}\, z = 0$ i $\|f(z)\|_{A_1} = 0$ za $\mathrm{Re}\, z = 1$. Korsiteći Hadamardovu lemu o tri pravca slijedi $f = 0$ na čitavoj pruzi S.

Pretpostavimo da je $\sum_n \|f_n\|_{\mathcal{F}} < \infty$. Iz Hadamardove leme slijedi $\|f_n(z)\|_{A_0+A_1} \le \max\{\sup \|f_n(iy)\|_{A_0+A_1}, \sup \|f_n(1+iy)\|_{A_0+A_1}\}$. Koristeći činjenicu da je $A_i \hookrightarrow A_0 + A_1$, te da za vektore $a \in A_i$ vrijedi $\|a\|_{A_0+A_1} \le \|a\|_{A_i}$, $i = 0, 1$, zaključujemo $\|f_n(z)\|_{A_0+A_1} \le \|f_n\|_{\mathcal{F}}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $z \in S$. Kako je prostor $A_0 + A_1$ potpun, red $\sum_n f_n(z)$ konvergira u $A_0 + A_1$ za svaki $z \in S$, pa možemo definirati funkciju $f : \mathbb{C} \to A_0 + A_1$ tako da stavimo $f(z) = \sum_n f_n(z)$. Fukcija f je, kao limes uniformno konvergentnog reda, neprekidna i ograničena na S te analitička na otvorenoj pruzi. Nadalje, kako je $\|f_n(j + iy)\|_{A_j} \le \|f_n\|_{\mathcal{F}}$, slijedi da red $\sum_n f_n(j + iy)$ konvergira uniformno po y k limesu u A_j, j=0, 1, koji se mora podudarati s limesom u $A_0 + A_1$. Dakle, $f(j + iy) \in A_j$ za $j \in \{0, 1\}$. □

Definicija. *Za dani $\theta \in (0,1)$ definiramo*

$$A_\theta = [A_0, A_1]_\theta = \Big\{ u \in A_0 + A_1 : u = f(\theta), \text{ za neki } f \in \mathcal{F} \Big\}.$$

Za skup A_θ nije teško provjeriti da je vektorski prostor, a sljedeći teorem, koji je analogon Teorema 7, kaže nam da je i interpolacijski prostor za (A_0, A_1).

Teorem 11. *Neka su $(A_0, A_1), (B_0, B_1)$ Banachovi parovi i $0 \le \theta \le 1$. Tada vrijedi:*

(i) *A_θ s normom $\|a\|_{[\theta]} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : f(\theta) = a, f \in \mathcal{F}\}$ je interpolacijski prostor za (A_0, A_1).*

(ii) *A_θ i B_θ su egzaktni interpolacijski prostori eksponenta θ za (A_0, A_1) i (B_0, B_1), tj. za sve $T \in \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$ vrijedi ocjena*

$$\|T\|_{\mathcal{L}((A_0,A_1)_{\theta,q},(B_0,B_1)_{\theta,q})} \le \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(A_0,B_0)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(A_1,B_1)} .$$

Dokaz. Linerano preslikavanje $f \mapsto f(\theta)$ neprekidno je preslikavanje s $\mathcal{F}$ u $A_0 + A_1$ budući da je $\|f(\theta)\|_{A_0+A_1} \le \|f\|_{\mathcal{F}}$. Jezgra tog preslikavanja je $\mathcal{N}_\theta = \{f : f \in \mathcal{F}, f(\theta) = 0\}$. Očito je A_θ izometrički izomorfan s kvocijentnim prostorom $\mathcal{F}/\mathcal{N}_\theta$. Kako je $\mathcal{N}_\theta$ zatvoren prostor, slijedi da je A_θ, kao zatvoren potprostor Banachovog prostora, i sam Banachov. Nadalje, kako je $\|a\|_{A_0+A_1} = \|f(\theta)\|_{A_0+A_1} \le \|f\|_{\mathcal{F}}$, uzimajući infumum, dobivamo $A_\theta \hookrightarrow A_0 + A_1$. Ukoliko definiramo $f(z) = e^{\delta(z-\theta)^2} a$, za $a \in A_0 \cap A_1$, vidmo da je $A_0 \cap A_1 \hookrightarrow A_\theta$. Ovime smo dokazali da je A_θ međuprostor za (A_0, A_1). Očito je $T(A_\theta) \subseteq B_\theta$. Naime, za dani $a \in A_\theta$ nađimo $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ tako da je $f(\theta) = a$. Sada je $T \circ f \in \mathcal{F}(B_0, B_1)$ i $T(f(\theta)) = Ta$, tj. postoji funkcija iz $\mathcal{F}(B_0, B_1)$ čija je vrijednost u θ jednaka Ta. Još nam je preostalo dokazati da su A_θ i B_θ egzaktni interpolacijski prostori eksponenta θ. Za dani $a \in A_\theta$ i $\varepsilon > 0$ postoji funkcija $f \in \mathcal{F}$ tako da je $f(\theta) = a$ i $\|f\|_{\mathcal{F}} < \|a\|_\theta + \varepsilon$. Za $T \in \mathcal{L}((A_0, A_1), (B_0, B_1))$ definirajmo $g(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} T(f(z))$, gdje je M_j norma preslikavanja $T_{|A_j} : A_j \to B_j$, $j = 0, 1$. Očito je $g \in \mathcal{F}(B_0, B_1)$. Nadalje, $\|g\|_{\mathcal{F}(B_0,B_1)} \le \|f\|_{\mathcal{F}(A_0,A_1)} \le \|a\|_\theta + \varepsilon$. Kako je $g(\theta) = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} T(a)$ pa zaključujemo da je $\|Ta\|_{B_\theta} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|g\|_{\mathcal{F}(B_0,B_1)} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|a\|_{A_\theta} + \varepsilon'$, gdje je $\varepsilon' = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \varepsilon$. Puštajući $\varepsilon' \to 0$, dobivamo željenu tvrdnju. □

Teorem 12. *Neka je (A_0, A_1) Banachov par i $0 \le \theta \le 1$. Tada je:*

(i) $(A_0, A_1)_{[\theta]} = (A_1, A_0)_{[1-\theta]}$, *(s jednakim normama)*

(ii) $A_1 \hookrightarrow A_0 \Rightarrow (A_0, A_1)_{[\theta_1]} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{[\theta_0]},\ \theta_0 \le \theta_1$

(iii) $(A, A)_{[\theta]} = A,\ 0 < \theta < 1$

(iv) *za proizvoljni $a \in A_0 \cap A_1$ vrijedi ocjena*

$$\|a\|_{[\theta]} \le \|a\|^{1-\theta}_{A_0} \|a\|^{\theta}_{A_1} .$$

4. Interpolacija L_p prostora

Kompleksna interpolacijska metoda

Teorem 13. *Pretpostavimo da su $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ i $0 < \theta < 1$. Tada je*

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{[\theta]} = L_p, \quad \text{gdje je} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $||\varphi||_{[\theta]} = ||\varphi||_{(L_{p_0}, L_{p_1})_{[\theta]}} = ||\varphi||_{L_p}$, za sve neprekinute funkcije u L_p s kompaktnim nosačem. Definirajmo

$$f(z) = \exp(\varepsilon z^2 - \varepsilon\theta^2)|\varphi(x)|^{p/p(z)}\varphi(x)/|\varphi(x)|,$$

gdje je $1/p(z) = (1-z)/p_0 + z/p_1$. Ukoliko je $||a||_{L_p} = 1$ imamo $f \in \mathcal{F}$ i $||f||_{\mathcal{F}} \leq \exp(\varepsilon)$. Kako je $f(\theta) = a$, zaključujemo $||a||_{[\theta]} \leq \exp(\varepsilon)$. Budući da je ε bio proizvoljan, slijedi $||\varphi||_{[\theta]} \leq ||\varphi||_{L_p}$. U dokazu obrnute nejednakosti koristit ćemo relaciju

$$||\varphi||_{L_p} = \sup\{|\langle\varphi, \psi\rangle| : ||\psi||_{L_{p'}} = 1, \quad \psi \text{ je ograničena i s kompaktnim nosačem}\}.$$

Za ψ kao iz gornjeg skupa deinirajmo

$$g(z) = \exp(\varepsilon z^2 - \varepsilon\theta^2)|\psi(x)|^{p'/p'(z)}\psi(x)/|\psi(x)|,$$

gdje je $1/p'(z) = (1-z)p'_0 + z/p'_1$. Za $||\varphi||_{[\theta]} = 1$ i $F(z) = \langle f(z), g(z)\rangle$ imamo $|F(it)| \leq \exp(\varepsilon)$, $|F(1+it)| \leq \exp(2\varepsilon)$. Po teoremu o tri pravca slijedi $|\langle\varphi, \psi\rangle| \leq F(\theta) \leq \exp(2\varepsilon)$. Kako je ψ prozvoljna, slijedi $||\varphi||_{L_p} \leq 1$. □

Sličan rezultat mogli bismo dobiti i preko realne interpolacijske metode, tj. može se pokazati da vrijedi

$$(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,p} = L_p, \text{ za sve } 1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty \text{ i } \theta \in (0,1),$$

gdje je p dan formulom $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Za dokaz tvrdnje i više detalja može se pogledati u [2].

Rastav slabe konvergencije

Promotrimo ograničen niz (u_k) u Hilbertovom prostoru H, te neprekidan funkcional $\Phi : H \to \mathbb{C}$. Ukoliko je H konačnodimenzionalan, tada će (u_k) imati konvergentan podniz s limesom u pa, na podnizu, $\Phi(u_k) \to \Phi(u)$. Ako je H beskonačnodimenzionalan, onda se egzistencija vektora u tako da, na podnizu, $\Phi(u_k) \to \Phi(u)$ ne može zasnivati na traženju limesa niza (u_k), s obzirom da limes ne mora postojati. Banach-Alaoglu teorem osigurava nam egzistenciju limesa u odnosu na slabu konvergenciju, no funkcional Φ ne mora biti neprekidan u odnosu na slabu topologiju: npr. uzmimo $\Phi(\cdot) = \|\cdot\|$ i niz ortonormiranih vektora (e_k) u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Znamo da $e_k \rightharpoonup 0$, no $\Phi(e_k) = 1$. Dakle, u topologiji u kojoj možemo naći limes niza, funkcional koji promatramo ne mora biti neprekidan.

Iz tih se razloga uvodi pojam $\mathcal{D}$-slabe konvergencije, koja je jača nego slaba konvergencija. Ispostavit će se da ograničeni nizovi ne moraju imati gomilište u odnosu na $\mathcal{D}$-slabu konvergenciju, nego se moramo zadovoljiti sa skupom dislociranih slabih limesa niza u_k. Npr. ukoliko su $w_1,\ w_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ i $u_k(t) = w_1(t-k) + w_2(t+k)$, tada $u_k \rightharpoonup 0$ u $H^1(\mathbb{R})$, no, za dovoljno veliki k, $\|u_k\|_p^p = \|w_1\|_p^p + \|w_2\|_p^p$, $1 \le p < \infty$. U ovom je slučaju $\lim \|u_k\|_p^p$ određen s dislociranim slabim limesima $u_k(\cdot + k) \rightharpoonup w_1$ i $u_k(\cdot - k) \rightharpoonup w_2$.

1. $\mathcal{D}$-slaba konvergencija i dislokacijski prostori

S H ćemo označavati separabilan beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor. U definiciji $\mathcal{D}$-slabe konvergencije koristimo činjenicu da je linearni operator A^*A, za $A \in \mathcal{L}(H)$, hermitski pa možemo primijeniti sljedeću lemu.

Lema 1. *Neka je H Hilbertov prostor i $A \in \mathcal{L}(H)$ hermitski. Ako postoji $\lambda > 0$ tako da za svaki $u \in H$ vrijedi*

$$\|Au\| \ge \lambda \|u\|,$$

tada A ima inverz i vrijedi $\left\|A^{-1}\right\| \le \lambda^{-1}$.

Definicija. Neka je $\mathcal{D}$ skup ograničenih linearnih operatora na H tako da je za svaki $g \in \mathcal{D}$ $\inf_{u\in H, \|u\|=1} \|gu\| > 0$. Kažemo da niz (u_k) *konvergira k $u \in H$ $\mathcal{D}$-slabo*, u oznaci $u_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} u$, ako i samo ako za svaki niz (g_k) elemenata iz $\mathcal{D}$ vrijedi

$$(g_k^* g_k)^{-1} g_k^*(u_k - u) \rightharpoonup 0. \tag{1.1}$$

Ukoliko se skup $\mathcal{D}$ sastoji od izometrija $g^*g = id$, za $g \in \mathcal{D}$, tada je uvjet (1.1) ekvivalentan s

$$g_k^*(u_k - u) \rightharpoonup 0, \tag{1.2}$$

za svaki niz g_k u $\mathcal{D}$. Ukoliko je, dodatno, $\mathcal{D}$ kompaktan u jakoj topologiji u $\mathcal{L}(H)$, lako se vidi da $\mathcal{D}$-slaba konvergencija ne poopćuje slabu konvergenciju, tj. iz $u_k \rightharpoonup 0$ slijedi $(g_k^* g_k)^{-1} g_k^* u_k = g_k^* u_k \rightharpoonup 0$ za svaki niz g_k u $\mathcal{D}$. Zaista, neka $u_k \rightharpoonup 0$ i pretpostavimo da postoji niz g_k u $\mathcal{D}$ tako da $g_k^* u_k \not\rightharpoonup 0$. Odaberimo renumerirani podniz tako da $g_k \rightharpoonup g \in \mathcal{D}$ i $g_k u_k \rightharpoonup w \neq 0$. Tada, za svaki $\varphi \in H$ imamo:

$$(w, \varphi) = \lim(g_k u_k, \varphi) = \lim(u_k, (g_k - g)^* \varphi) + \lim(u_k, g^* \varphi) = 0,$$

što je kontradikcija. Nadalje, ukoliko je $\mathcal{D}$ grupa svih unitarnih operatora na H tada $u_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$ povlači $u_k \to 0$ u normi. Zaista, uzmimo $e \in H$, $\|e\| = 1$ i neka je g_k proizvoljan niz unitarnih operatora za koje vrijedi $g_k^* u_k = \|u_k\| e$. Tada je $\|u_k\| = (g_k^* u_k, e) \to 0$.

Definicija. Skup $\mathcal{D}$ ograničenih linearnih operatora na H je *skup dislokacija* ukoliko vrijedi

(i)
$$0 < \gamma = \inf_{g \in \mathcal{D}, \|u\|=1} \|gu\|^2 \leq \sup_{g \in \mathcal{D}, \|u\|=1} \|gu\|^2 < \infty \tag{1.3}$$

(ii)
$$g_k \text{ niz u } \mathcal{D}, u_k \rightharpoonup 0 \Rightarrow g_k^* g_k u_k \rightharpoonup 0 \tag{1.4}$$

(iii) za svaki niz (u_k) u H te za proizvoljne nizove g_k, h_k u $\mathcal{D}$ vrijedi da $h_k^* g_k \rightharpoonup 0$, $(g_k^* g_k)^{-1} g_k^* u_k \rightharpoonup 0$ ima za posljedicu da na nekom podnizu h_{k_j}

$$(h_{k_j}^* h_{k_j})^{-1} h_{k_j}^* u_{k_j} \rightharpoonup 0. \tag{1.5}$$

Ukoliko je $\mathcal{D}$ grupa u odnosu na množenje, kažemo da je $\mathcal{D}$ grupa dislokacija. Par $(H, \mathcal{D})$ zovemo *dislokacijski prostor*.

Primijetimo da su dislokacije uvijek injektivna preslikavanja. Gornja definicija ima jednostavniji oblik ukoliko su operatori g u $\mathcal{D}$ izometrije, s obzirom da su tada prva dva uvjeta očito zadovoljena. Nadalje, ukoliko je $\mathcal{D}$ grupa unitarnih operatora tada je zadnji uvjet ekvivalentan s

$$g_k \in \mathcal{D}, g_k \not\rightharpoonup 0, u_k \rightharpoonup 0 \text{ ima za posljedicu da } g_k u_k \rightharpoonup 0 \text{ na podnizu.}$$

Sljedeći teorem nam daje jednostavan kriterij za provjeriti je li $\mathcal{D}$ skup dislokacija u slučaju da se sastoji od unitarnih operatora. Iako se taj zahtjev čini jakim, u primjenama će zaista $\mathcal{D}$ najčešće biti grupa unitarnih operatora.

Teorem 2. *Neka je $\mathcal{D}$ skup unitarnih operatora na H. Ukoliko za sve nizove g_k, h_k u $\mathcal{D}$ vrijedi*

$$h_k^* g_k \not\rightharpoonup 0 \Rightarrow h_k^* g_k \text{ ima strogo konvergentan podniz,} \tag{1.6}$$

tada je $\mathcal{D}$ skup dislokacija.

Dokaz. (1.3) i (1.4) slijede iz činjenice da svaki unitarni operator g zadovoljava $g^* g = id$. Preostaje dokazati (1.5). Uzmimo niz u_k u H, g_k, $h_k \in \mathcal{D}$, $h_k^* g_k \not\rightharpoonup 0$ i $g_k^* u_k \rightharpoonup 0$. Primijetimo da je $h_k^* g_k \not\rightharpoonup 0$ ekvivalentno s $g_k^* h_k \not\rightharpoonup 0$. Iz pretpostavke teorema slijedi da $g_k^* h_k$ strogo konvergira (do na podniz). Neka je $v \in H$. Tada je $g_k^* h_k v$ konvergentan niz pa možemo zaključiti $(g_k^* u_k, g_k^* h_k v) \to 0$. Prelaskom na adjungirani operator zaključujemo $(h_k^* g_k g_k^* u_k, v) \to 0$. Kako je $g_k g_k^* = id$, te kako je v proizvoljan, to slijedi $h_k^* u_k \rightharpoonup 0$ čime je dokazano (1.5). □

2. $\mathcal{D}$-slaba konvergencija u $l^2(\mathbb{Z}^d)$

Teorem 3. *Neka je $H = l^2(\mathbb{Z}^d)$. Tada je*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d} := \left\{\eta_\beta : l^2(\mathbb{Z}^d) \ni (c_\alpha) \mapsto (c_{\alpha-\beta}) \in l^2(\mathbb{Z}^d), \beta \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

skup dislokacija.

Dokaz. Primijetimo da je $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$ grupa u odnosu na množenje te da su elementi unitarni operatori. Po prethodnom teoremu dovoljno je dokazati da svaki niz translacija η_{β_k}, koji ne konvergira slabo k 0, ima konvergentan podniz. Primijetimo da ukoliko $|\beta_k| \to \infty$, $\eta_{\beta_k} \rightharpoonup 0$. Dakle, ukoliko $\eta_{\beta_k} \not\rightharpoonup 0$, tada β_k ima ograničen podniz koji ima konstantan podniz te je stoga odgovarajući podniz niza η_{β_k} konstantan. □

Teorem 4. *Neka je $H = l^2(\mathbb{Z}^d)$ te neka je $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$. Tada $c_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$ u H ako i samo ako $c_k \to 0$ u $l^\infty(\mathbb{Z}^d)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $c_k \to 0$ u $L^\infty(\mathbb{Z}^d)$. Tada za svaki niz α_k u $\mathbb{Z}^d$ $c_k(\alpha_k) \to 0$, tj. za svaki $\gamma \in \mathbb{Z}^d$ i za svaki niz α_k u $\mathbb{Z}^d$, $(\eta_{\alpha_k}^* c_k)(\gamma) \to 0$. Neka je $\varphi \in C_c(\mathbb{Z}^d)$. Kako φ ima konačan nosač, slijedi $(\eta_{\alpha_k}^* c_k, \varphi) \to 0$. Kako je $C_c(\mathbb{Z}^d)$ gust u $l^2(\mathbb{Z}^d)$, slijedi $(\eta_{\alpha_k}^* c_k, \varphi) \to 0$, za svaki $\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, tj. $\eta_{\alpha_k}^* c_k \rightharpoonup 0$ u H.

Obrnuto, pretpostavimo da $c_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$. Neka je α_k niz u $\mathbb{Z}^d$ tako da $|c_k(\alpha_k)| \geq \frac{1}{2} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |c_k(\alpha)|$. Neka je $e \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, $e(0) = 1$, $e(\alpha) = 0$, $\alpha \neq 0$. Tada vrijedi:

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |c_k(\alpha)| \leq 2|c_k(\alpha_k)| = 2|(\eta^*_{\alpha_k} c_k)(0)| = 2|(\eta^*_{\alpha_k} c_k, e)| \to 0.$$

□

Korolar 5. *Ako $c_k \overset{\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}}{\rightharpoonup} 0$ u $l^2(\mathbb{Z}^d)$, onda za svaki $q > 2$, $c_k \to 0$ u $l^q(\mathbb{Z}^d)$.*

Dokaz. Primijetimo da $c_k \rightharpoonup 0$ u $l^2(\mathbb{Z}^d)$, što povlači da je niz c_k ograničen u $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Nadalje,

$$\sum_{\alpha} |c_k(\alpha)|^q \leq \sup_{\beta \in \mathbb{Z}^d} |c_k(\beta)|^{q-2} \sum_{\alpha} |c_k(\alpha)|^2 \leq C \, \|c_k\|_{l^\infty}^{q-2} \to 0.$$

□

3. Rastav slabe konvergencije

Pretpostavimo da su X, Y Banachovi prostori gdje je X uložen u Y te da je $\mathcal{D}$ skup ograničenih linearnih bijekcija $g : X \to X$. *Rastav profila* (eng. *profile decomposition*) prikaz je ograničenog niza elemenata (u_k) iz X u obliku

$$u_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_k^{(n)} w^{(n)} + r_k$$

gdje su g_k, za $k \in \mathbb{N}$, elementi skupa $\mathcal{D}$, a $r_k \overset{Y}{\to} 0$. Članove $g_k^{(n)} w^{(n)}$ nazivamo *elementarnim koncentracijama*, a vektore $w^{(n)} \in X$ nazivamo *koncentracijski profili*. Nadalje, vrijedi $g_k^{(n)^{-1}} u_k \rightharpoonup w^{(n)}$. Bitno svojstvo koje očekujemo je *asimptotska ortogonalnost* u smislu da $g_k^{(n)^*} g_k^{(m)} \rightharpoonup 0$, za $n \neq m$.

Glavno pitanje je pod kojim uvjetima niz u_k možemo prikazati u gornjem obliku. U ovom ćemo poglavlju dokazati rastav profila u slučaju kada je X separabilan Hilbertov prostor te će za ostatak r_k vrijediti slabija tvrdnja $r_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$.

Naravno, htjeli bismo imati općenitiji teorem kada za skup $\mathcal{D}$ vrijede samo uvjeti iz definicije $\mathcal{D}$-slabe konvergencije, tj. za svaki $g \in \mathcal{D}$, $\inf_{u \in, \|u\|=1} \|gu\| > 0$. Kako u tom slučaju ne mora postojati operator g^{-1} za $g \in \mathcal{D}$, elementarne koncentracije će biti u obliku $\left(g_k^{(n)^*} g_k^{(n)}\right)^{-1} g_k^{(n)^*}$. Preciznije, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 6. *Neka je $(H, \mathcal{D})$ dislokacijski prostor i γ kao u (1.3). Ako je u_k ograničen niz u H, tada postoji $S \subseteq \mathbb{N}$, niz $w^{(n)}$ u H, $g_k^{(n)}$ u $\mathcal{D}$, $g_k^{(1)} = id$, gdje su $k \in \mathbb{N}$, $n \in S$ tako da za renumerirani podniz niza u_k vrijedi*

$$\left(g_k^{(n)^*} g_k^{(n)}\right)^{-1} g_k^{(n)^*} u_k \rightharpoonup w^{(n)}. \tag{3.1}$$

Nadalje, vrijedi asimptotska ortogonalnost nizova $g_k^{(n)}$, tj.

$$g_k^{(n)^*} g_k^{(m)} \rightharpoonup 0, \ za\ n \neq m \tag{3.2}$$

Red $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left\| w^{(n)} \right\|^2$ konvergira u $\mathbb{R}$ s ocjenom:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left\| w^{(n)} \right\|^2 \leq \gamma^{-1} \limsup \|u_k\|^2 . \tag{3.3}$$

Za ostatak $r_k := u_k - \sum_{n \in S} g_k^{(n)} w^{(n)}$ vrijedi $r_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$.

Dokaz. 1. Pokažimo da (3.3) slijedi iz (3.1) i (3.2). Promotrimo očitu nejednakost

$$\left\| u_k - \sum_{n=1}^{M} g_k^{(n)} w^{(n)} \right\|^2 \geq 0, M \in \mathbb{N}.$$

Koristeći svojstva skalarnog produkta, imamo

$$\|u_k\|^2 - \sum_{n=1}^{M} \left\| g_k^{(n)} w^{(n)} \right\|^2 - 2 \sum_{n=1}^{M} (u_k, g_k^{(n)} w^{(n)}) + \sum_{n \neq m} (g_k^{(m)} w^{(m)}, g_k^{(n)} w^{(n)}) \geq 0, \tag{3.4}$$

gdje zadnji član konvergira k 0 zbog (3.2). Ocijenimo sada treći član, koristeći (1.4) i (3.1).

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^{M} (u_k, g_k^{(n)} w^{(n)}) &= 2 \sum_{n=1}^{M} (g_k^{(n)^*} u_k, w^{(n)}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{M} (g_k^{(n)^*} g_k^{(n)} w^{(n)}, w^{(n)}) + o(1) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{M} \left\| g_k^{(n)} w^{(n)} \right\|^2 + o(1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Kombinirajući (3.4) i (3.5) dobijemo:

$$\limsup \|u_k\|^2 \geq \limsup \sum_{n=1}^{M} \left\| g_k^{(n)} w^{(n)} \right\|^2 , \tag{3.6}$$

što nam, zajedno s (1.3), daje

$$\sum_{n=1}^{M} \left\|w^{(n)}\right\|^2 \leq \gamma^{-1} \limsup \|u_k\|^2 .$$

Ukoliko je S konačan, (3.3) je dokazano. U suprotnom uzmemo $M \to \infty$.

2. Ukoliko $u_k \stackrel{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$, tada je teorem dokazan za $S = \emptyset$. Ukoliko nije tako, promotrimo izraze oblika

$$w^{(1)} = w \lim \left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1} g_k^{(1)^*} u_k. \tag{3.7}$$

Niz (u_k) je po pretpostavci omeđen, a kako je $\mathcal{D}$ ograničen skup, iz Leme 1 i (1.3) slijedi da je i niz $\left(g_k^{(1)^*} g_k^{(1)}\right)^{-1}$ ograničen pa je i gornji niz ograničen te, za svaki izbor niza g_k, ima slabo konvergentan podniz. Kako smo pretpostavili da u_k ne konvergira $\mathcal{D}$-slabo prema 0, postoji podniz $\left(g_{1,k}^{(1)^*} g_{1,k}^{(1)}\right)^{-1} g_{1,k}^{(1)^*} u_{1,k}$ tako da je $w^{(1)} \neq 0$. Definirajmo $v_k^{(1)} = u_{1,k} - g_{1,k}^{(1)} w^{(1)}$ i primijetimo da

$$\left(g_{1,k}^{(1)^*} g_{1,k}^{(1)}\right)^{-1} g_{1,k}^{(1)^*} v_k^{(1)} = \left(g_{1,k}^{(1)^*} g_{1,k}^{(1)}\right)^{-1} g_{1,k}^{(1)^*} u_{1,k} - w^{(1)} \rightharpoonup 0. \tag{3.8}$$

Ukoliko $v_k^{(1)} \stackrel{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$, teorem je dokazan za $S = \{1\}$. U suprotnom ponovimo postupak - postoji niz $g_{2,k}^{(2)} \in \mathcal{D}$ i $w^{(2)} \neq 0$ tako da za podniz $v_{2,k}^{(1)}$ niza $v_k^{(1)}$ vrijedi

$$\left(g_{2,k}^{(2)^*} g_{2,k}^{(2)}\right)^{-1} g_{2,k}^{(2)^*} v_{2,k}^{(1)} \rightharpoonup w^{(2)}.$$

Definirajmo $v_k^{(2)} = v_{2,k}^{(1)} - g_{2,k}^{(2)} w^{(2)}$. Tada vrijedi:

$$\left(g_{2,k}^{(2)^*} g_{2,k}^{(2)}\right)^{-1} g_{2,k}^{(2)^*} v_k^{(2)} = \left(g_{2,k}^{(2)^*} g_{2,k}^{(2)}\right)^{-1} g_{2,k}^{(2)^*} v_{2,k}^{(1)} - w^{(2)} \rightharpoonup 0. \tag{3.9}$$

Pretpostavimo da $g_{2,k}^{(1)^*} g_{2,k}^{(2)} \not\rightharpoonup 0$, tada iz (1.5) i (3.9) slijedi

$$\left(g_{2,k}^{(1)^*} g_{2,k}^{(1)}\right)^{-1} g_{2,k}^{(1)^*} (v_{2,k}^{(1)} - g_{2,k}^{(2)} w^{(2)}) \rightharpoonup 0,$$

pa iz (3.8) zaključujemo:

$$\left(g_{2,k}^{(1)^*} g_{2,k}^{(1)}\right)^{-1} g_{2,k}^{(1)^*} g_{2,k}^{(2)} w^{(2)} \rightharpoonup 0.$$

Iz činjenice da za ograničene nizove operatora vrijedi $A_k \not\rightharpoonup 0 \Rightarrow A_k^* \not\rightharpoonup 0$, te iz (1.5) zaključujemo da

$$\left(g_{2,k}^{(2)^*} g_{2,k}^{(2)}\right)^{-1} g_{2,k}^{(2)^*} g_{2,k}^{(2)} w^{(2)} \rightharpoonup 0,$$

tj. $w^{(2)} \rightharpoonup 0$, što je kontradikcija s $w^{(2)} \neq 0$. Dakle, $g_{2,k}^{(1)^*} g_{2,k}^{(2)} \rightharpoonup 0$, tj. $g_{2,k}^{(2)^*} g_{2,k}^{(1)} \rightharpoonup 0$. Rekurzivno definiramo $v_k^{(n)} := v_{n,k}^{(n-1)} - g_{n,k}^{(n)} w^{(n)} = u_{n,k} - g_{n,k}^{(1)} w^{(1)} - \cdots - g_{n,k}^{(n)} w^{(n)}$, gdje je

$$w^{(n)} = w \lim \left(g_{n,k}^{(n)^*} g_{n,k}^{(n)}\right)^{(-1)} g_{n,k}^{(n)^*} v_{n,k}^{(n-1)}.$$

U svakom koraku algoritma niz $g^{(n+1)}_{n+1,k}$ biramo na sljedeći način: za $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$W_n = \{w \in H\backslash\{0\} : \text{postoji niz } g_j \text{ u } \mathcal{D} \text{ i podniz niza } (v^{(n)}_k) : (g^*_j g_j)^{-1} g^*_j v^{(n)}_{k_j} \rightharpoonup 0\},$$

i $t_n := \sup_{w\in W_n} \|w\|$. Primijetimo da je $t_n < \infty$. Ukoliko je $t_n = 0$, za neki $n \in \mathbb{N}$, slijedi $v^{(n)}_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$ pa je teorem dokazan za $S = \{1, \dots, n\}$. U suprotnom, odaberemo $w^{(n+1)} \in W_n$ sa svojstvom

$$\left\|w^{(n+1)}\right\| \geq \frac{1}{2} t_n, \tag{3.10}$$

i niz $g^{(n+1)}_{n+1,k}$ odaberimo tako da na podnizu vrijedi

$$\left(g^{(n+1)^*}_{n+1,k} g^{(n+1)}_{n+1,k}\right)^{-1} g^{(n+1)^*}_{n+1,k} v^{(n)}_{n+1,k} \rightharpoonup w^{(n+1)}. \tag{3.11}$$

Na sličan se način kao za $n = 1$ pokaže da

$$g^{(p)^*}_{n,k} g^{(q)}_{n,k} \rightharpoonup 0\ \text{, za } p \neq q,\ p, q \leq n.$$

Iz te činjenice lagano zaključujemo da $(g^{(n)^*}_{n,k} g^{(n)}_{n,k})^{-1} g^{(n)^*}_{n,k} u_{n,k} \rightharpoonup w^{(n)}$. Nadalje, iz (3.6) i (3.10) slijedi $\sum_{n\geq 2} t_n^2 \leq 4\gamma^{-1} \limsup \|u_k\|^2$ pa je, posebno, $\lim_{n\to\infty} t_n^2 = 0$. Neka je φ_i ortonormirana baza za H. Tada po definiciji skupa W_n,

$$\limsup_k \sum_i 2^{-i} \sup_{g\in\mathcal{D}} (v^{(n)}_k, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 \leq 4t_n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odaberimo $k(n) > k(n-1)$ tako da je

$$\sum_i 2^{-i} \sup_{g\in\mathcal{D}} (v^{(n)}_{k(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 \leq 4t_n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Za $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\sum_i 2^{-i} \sup_{g\in\mathcal{D}} (v^{(n)}_{k(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 < \varepsilon$, za $n \geq n_0$, pa je $\sup_{g\in\mathcal{D}} (v^{(n)}_{k(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i)^2 \leq C_i\varepsilon$, za $n \geq n_0$. Dakle, za svaki φ_i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{g\in\mathcal{D}} (v^{(n)}_{k(n)}, g(g^*g)^{-1}\varphi_i) = 0.$$

Gornja tvrdnja vrijedi i za sve linearne kombinacije φ_i pa, zbog činjenice da je $\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ gusto u H, slijedi da $v^{(n)}_{k(n)} \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$, tj.

$$v^{(n)}_{k(n)} = u_{n,k(n)} - \sum_{j\leq n} g^{(j)}_{n,k(n)} w^{(j)} \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0, n \to \infty.$$

Renumerirajmo niz $u_n = u_{n,k(n)}$ i definirajmo $g_n^{(j)} = g_{n,k(n)}^{(j)}$, $j \le n$ i $g_n^{(j)} = 0$, $j > n$. Uz ovako smo numerirane nizove dokazali $u_n - \sum_{j\in S} g_n^{(j)} w^{(j)} \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$, tj. ukoliko se vratimo u numeraciju po n i k, dokazali smo

$$u_k - \sum_{n\in S} g_n^{(k)} w^{(k)} \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0.$$

Konačno, ukoliko je $w^{(1)} = w\lim u_k \neq 0$, mogli smo odabrati $g_k^{(1)} = id$ u prvom koraku. Ukoliko je $w\lim u_k = 0$, renumeriramo članove u izrazu s $n = 2, 3, \ldots$ i stavimo $g_k^{(1)} = id$, $w^{(1)} = 0$.

□

Napomena. Primijetimo da $g_k^{(n)^*} g_k^{(m)} \rightharpoonup 0$ ako i samo ako $(g_k^{(m)} v, g_k^{(n)} w) \to 0$ za sve $v, w \in H$ pa iz tog razloga ovo svojstvo nazivamo *asimptotska ortogonalnost*. Za grupu $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$ asimptotska ortogonalnost znači $|y_k^{(n)} - y_k^{(m)}| \to \infty$, za $n \neq m$. U slučaju grupe $G = \{u \mapsto 2^j (u(\cdot - y)), j \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}^d\}$ asimptotska ortogonalnost znači $|j_k^{(n)} - j_k^{(m)}| + |y_k^{(n)} - y_k^{(m)}| \to \infty$.

Ukoliko se $\mathcal{D}$ sastoji od izometrija dobivamo korolar:

Korolar 7. *Neka je $(H, \mathcal{D})$ dislokacijski prostor te neka su elementi skupa $\mathcal{D}$ linearne izometrije na H. Neka je u_k ograničen niz u H. Tada postoji renumerirani podniz niza u_k te nizovi $w^{(n)}$ u H, $g_k^{(n)}$ u $\mathcal{D}$, $g_k^{(1)} = id$, za $k \in \mathbb{N}$, $n \in S$ tako da vrijedi*

$$g_k^{(n)^{-1}} u_k \rightharpoonup w^{(n)},$$

$$g_k^{(n)^{-1}} g_k^{(m)} \rightharpoonup 0, \text{ za } n \neq m,$$

$$\|u_k\|^2 = \sum_{n\in S} \left\|w^{(n)}\right\|^2 + \|r_k\|^2 + o(1),$$

gdje je

$$r_k := u_k - \sum_{n\in S} g_k^{(n)} w^{(n)} \overset{D}{\rightharpoonup} 0.$$

Nadalje, red $\sum_{n\in S} g_k^{(n)} w^{(n)}$ konvergira u H uniformno po k.

Dokaz. Jedino što moramo dokazati je treća tvrdnja, jer sve ostale tvrdnje slijede direktno iz Teorema 6. Ponavljajući sličan postupak kao u dokazu prošlog teorema dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &= \Big\|u_k - \sum_n g_k^{(n)} w^{(n)} - r_k\Big\|^2 = \|u_k\|^2 + \|r_k\|^2 + \sum_n \Big\|w^{(n)}\Big\|^2 \\
&- \sum_{m\neq n} (g_k^{(n)^*} g_k^{(m)}, w^{(n)}) - 2(u_k, r_k) - 2(u_k, \sum_n g_k^{(n)} w^{(n)}) \\
&= \|u_k\|^2 + \|r_k\|^2 + \sum_n \Big\|w^{(n)}\Big\|^2 - 2(u_k, r_k) - 2\sum_n \Big\|w^{(n)}\Big\|^2 + o(1) \qquad (3.13)\\
&= \|u_k\|^2 + \|r_k\|^2 - \sum_n \Big\|w^{(n)}\Big\|^2 - 2(r_k + \sum_n g_k^{(n)} w^{(n)}, r_k) + o(1) \\
&= \|u_k\|^2 - \|r_k\|^2 - \sum_n \Big\|w^{(n)}\Big\|^2 + o(1).
\end{aligned}$$

□

Kao što je već napomenuto, ne mora svaki ograničeni niz imati $\mathcal{D}$-slabo konvergentan podniz. Sljedeći teorem nam daje nužne i dovoljne uvjete za postojanje $\mathcal{D}$-slabo konvergentnog podniza.

Teorem 8. *Neka je $(H, \mathcal{D})$ dislokacijski prostor. Pretpostavimo da je $\mathcal{D}$ grupa unitarnih operatora. Tada ograničeni niz u_k elemenata iz H ima $\mathcal{D}$-slabo konvergentan podniz ako i samo ako*

$$g_k \in \mathcal{D}, g_k \rightharpoonup 0 \Rightarrow g_k u_k \rightharpoonup 0 \qquad (3.14)$$

na renumeriranom podnizu.

Dokaz. Promotrimo renumerirani podniz iz Korolara 7. Ukoliko vrijedi (3.14), tada je $w^{(n)} = 0$, osim za $n = 1$, te $u_k \overset{D}{\rightharpoonup} w^{(1)}$. Obratno, pretpostavimo da u_k ima $\mathcal{D}$-slabo konvergentan podniz. Tada se taj limes mora podudarati s $w^{(1)}$. Za niz g_k iz $\mathcal{D}$, $g_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$, vrijedi

$$g_k u_k = g_k(u_k - w^{(1)}) \overset{D}{\rightharpoonup} 0.$$

□

4. $\mathcal{D}$-slaba konvergencija s operatorima pomaka u $\mathbb{R}^d$

Neka je $H = H^1(\mathbb{R}^d)$ te za grupu $\mathcal{D}$ uzmimo

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d} := \{g_y\}_{y\in\mathbb{Z}^d} \text{ gdje je } g_y u = u(\cdot - y).$$

Lema 9. *Neka je $y_k \in \mathbb{R}^d$. Tada $g_{y_k} \rightharpoonup 0$ ako i samo ako $|y_k| \to \infty$.*

Dokaz. Ukoliko $y_k \to \infty$, tada je za sve $u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $(g_{y_k}u, v) = 0$ za dovoljno veliki k jer je tada zadovoljeno supp$u + y_k \cap$ supp $v = \emptyset$. Kako je $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gusto u $H^1(\mathbb{R}^d)$ slijedi $g_{y_k} \rightharpoonup 0$. Obratno, pretpstavimo da y_k ima ograničen podniz, koji ćemo opet označiti s y_k. Kako je H Hilbertov, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji $y \in H$ tako da $y_k \to y$. Za $u, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, po teoremu o dominiranoj konvergenciji, slijedi $(g_{y_k}u, \phi) \to (g_y u, \phi)$. Kako je $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gusto u H te kako su operatori iz $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^d}$ ograničeni, konvergencija se može proširiti na sve $u, \varphi \in H^1$. Dakle, $g_{y_k} \rightharpoonup g_y$. □

Lema 10. *$(H, \mathcal{D})$ je dislokacijski prostor.*

Dokaz. Po Teoremu 2 dovoljno je provjeriti da za svaki niz y_k u $\mathbb{Z}^d$ vrijedi

$$g_{y_k} \not\rightharpoonup 0 \Rightarrow g_{y_k} \text{ ima strogo konvergentan podniz.}$$

No, ukoliko $g_{y_k} \not\rightharpoonup 0$, iz prethodne leme slijedi da y_k ima konstantan podniz te stoga i g_{y_k} ima konstantan podniz. □

Lema 11. *Pretpostavimo da je u_k ograničen niz u H te neka je $p \in (2, 2^*)$. Tada $u_k \overset{\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}}{\rightharpoonup} 0$ ako i samo ako $\|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$.*

Dokaz. Neka je g_k proizvoljan niz u $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$ te neka je $\varphi \in \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)$. Koristeći Hölderovu nejednakost te invarijantnost L^p norme na translacije, dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (g_k u_k)(x)\, \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} u_k(x + y_k)\, \varphi(x) dx \\ &\leq \|u_k\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)}\, \|\varphi\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)} \to 0.\end{aligned}$$

Kako je funkcija φ proizvoljna, slijedi $g_k u_k \rightharpoonup 0$, tj. $u_k \overset{\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}}{\rightharpoonup} 0$.

Obrnuto, pretpostavimo da $u_k \overset{\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}}{\rightharpoonup}$ te neka je $Q := (0, 1)^d$. Po Soboljevljevoj nejednakosti postoji $C > 0$ tako da

$$\int_{Q+y} |u_k|^p \leq C\, \|u_k\|^2_{H^1(Q+y)} \Big(\int_{Q+y} |u_k|^p \Big)^{1-2/p}, \quad y \in \mathbb{Z}^d \tag{4.1}$$

Dodavajući članove u gornji izraz, dobivamo:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_k|^p \leq C\, \|u_k\|^2_{H^1} \sup_{y \in \mathbb{Z}^d} \Big(\int_Q |g_y u_k|^p \Big)^{1-2/p} \leq 2C \Big(\int_Q |g_{y_k} u_k|^p \Big)^{1-2/p}, \tag{4.2}$$

gdje je $y_k \in \mathbb{Z}^d$ bilo koji niz koji zadovoljava

$$\Big(\int_Q |g_{y_k} u_k|^p\Big)^{1-2/p} \geq \frac{1}{2} \sup_{y \in \mathbb{Z}^d} \Big(\int_Q |g_y u_k|^p\Big)^{1-2/p}.$$

Kako je ulaganje $H^1(Q) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(Q)$ kompaktno, slijedi:

$$\Big(\int_Q |g_{y_k} u_k|^p\Big)^{1-2/p} \to 0 \text{ u } \mathrm{L}^p(Q)$$

pa tvrdnja slijedi iz (4.2). □

Iz Korolara 7 te Leme 9 i Leme 11 slijedi korolar:

Korolar 12. *Neka je u_k ograničen niz u $H^1(\mathbb{R}^d)$. Tada postoji podniz niza u_k, koji ćemo opet označiti s u_k, te nizovi $w^{(n)}$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$, $y_k^{(n)}$ u $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$, $y_k^{(1)} = 0$, za $k \in \mathbb{N}$, $n \in S$ tako da vrijedi*

$$u_k(\cdot + y_k^{(n)}) \rightharpoonup w^{(n)},$$

$$|y_k^{(n)} - y_k^{(m)}| \to \infty, \text{ za } n \neq m,$$

$$\sum_{n \in S} \left\|w^{(n)}\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \leq \limsup \|u_k\|^2_{H^1(\mathbb{R})},$$

$$u_k - \sum_{n \in S} w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)}) \to 0 \ \mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}\text{-slabo i u } L^p(\mathbb{R}^d)$$

za svaki $p \in (2, 2^*)$. Nadalje, red u (12) konvergira u $H^1(\mathbb{R}^d)$ uniformno po k.

Pomoću metode kompaktnosti koncentracijom možemo na jednostavan način provjeriti konvergira li niz $\mathcal{D}$-slabo k 0 ili ne. Ukoliko je odgovor negativan, znamo da postoji nenul dislocirani slabi limes koji je kandidat za rješenje $\mathcal{D}$-invarijantnog problema. Što to konkretno znači u primjenama, vidjet ćemo u sljedećim odjeljcima.

5. Uvjetna minimizacija

U ovom ćemo poglavlju pokazati kako se Teorem 6 može primijeniti u varijacijskom računu.

Neka je $p \in (2, 2^*)$, te neka je $V \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ $\mathbb{Z}^d$-periodička funkcija i pretpostavimo da je $\inf V > 0$. Promotrimo sljedeći problem:

$$c_p = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^d), \|u\|_p = 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 dx \tag{5.1}$$

Nije teško provjeriti da $E(u) := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 dx$ definira ekvivalentnu normu na $H^1(\mathbb{R}^d)$ pa je $c_p > 0$ po Soboljevljevom teoremu ulaganja. Ukoliko je u minimizator gornjeg problema, tada je i $|u| \in H^1(\mathbb{R}^d)$ pa je po strogom principu maksimuma $|u| > 0$. Dakle, možemo pretpostaviti da je $u > 0$. Po pravilu Lagrangeovih multiplikatora u zadovoljava jednadžbu

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \varphi + V u \varphi = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} u^{p-1} \varphi, \ \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^d)$$

što je ekvivalento s $-\triangle u + Vu = \lambda u^{p-1}$ u slabom smislu. Ukoliko se u pomnoži s odgovarajućim skalarom, možemo pretpostaviti $\lambda = 1$.

Teorem 13. *Neka je u_k minimizirajući niz za problem* (5.1)*. Tada postoji niz (y_k) u $\mathbb{Z}^d$, te podniz niza u_k (koji ćemo opet označiti s u_k) tako da $u_k(\cdot - y_k)$ konvergira k minimizatoru.*

Dokaz. Neka je u_k minimizirajući niz. Primijetimo da je za bilo koji niz (y_k) u $\mathbb{Z}^d$ niz $u_k(\cdot + y_k)$ ponovno minimizirajući niz. Po Lemi 11 ne vrijedi $u_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$ jer bi inače vrijedilo $1 = \|u_k\|_p \to 0$, što je očita kontradikcija. Dakle, postoji $w \in H^1(\mathbb{R}^d)$ te niz y_k u $\mathbb{Z}^d$ tako da na renumeriranom podnizu $u_k(\cdot + y_k) \rightharpoonup w \neq 0$. Definirajmo $h_k := u_k(\cdot + y_k)$. Može se pokazati da h_k konvergira po mjeri na svakom ograničenom izmjerivom skupu pa na podnizu konvergira skoro svuda. Iz Brezis-Liebove leme slijedi

$$c_p = \lim \|h_k\|_{H^1}^2 = \|w\|_{H^1}^2 + \lim \|h_k - w\|_{H^1}^2 \tag{5.2}$$

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} |h_k|^p = \int_{\mathbb{R}^d} |w|^p + \lim \int_{\mathbb{R}^d} |h_k - w|^p. \tag{5.3}$$

Označimo $t = \int_{\mathbb{R}^d} |w|^p$. Iz definicije broja c_p te (5.2) slijedi

$$c_p \geq c_p t^{2/p} + c_p(1-t)^{2/p}. \tag{5.4}$$

Gornja je nejednakost moguća samo za $t = 0$ ili $t = 1$. Ukoliko je $t = 0$, tada je $w = 0$, što je kontradikcija. Dakle, $\|w\|_p = 1$. Nadalje, ukoliko je $\lim \|h_k - w\|_{H^1}^2 > 0$, tada je $\|w\|_{H^1}^2 < c_p$, što je kontradikcija. Dakle, $h_k \to w$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$.

□

U prošlom je teoremu funkcija V bila $\mathbb{Z}^d$-periodička, što je jak zahtjev. Idući teorem nam daje postojanje minimizatora u slučaju kada je funkcija V ograničena odozdo sa strogo pozitivnim brojem te ima limes u beskonačnosti.

Teorem 14. *Neka je $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\inf_{x\in\mathbb{R}^d} V > 0$ i pretpostavimo da $V(x) \leq V_\infty := \lim_{|y|\to\infty} V(y)$, $x \in \mathbb{R}^d$, tako da vrijedi stroga nejednakost na skupu pozitivne mjere. Definirajmo $a(u,u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx$ i neka je*

$$c_p = \inf_{u\in H^1(\mathbb{R}^d):\|u\|_p=1} a(u,u). \tag{5.5}$$

Tada se c_p dostiže te svaki minimizirajući niz ima podniz koji konvergira k minimizatoru.

Dokaz. Primijetimo da $a(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$ defnira ekvivalentnu normu na $H^(\mathbb{R}^d)$. Neka je u_k minimizirajući niz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $u_k \rightharpoonup w$. Iz jednakosti $a(u_k - w, u_k - w) = a(u_k, u_k) - 2a(u_k - w, w) - a(w, w)$, slijedi, za $w = w \lim u_k$, $v_k = u_k - w$,

$$c_p = \lim a(u_k, u_k) = a(w, w) + \lim a(v_k, v_k) \geq c_p \|w\|_p^2 + c_p \lim \|v_k\|_p^2 . \tag{5.6}$$

Iz Brezis-Liebove leme direktno izlazi

$$1 = \|u_k\|_p^p = \lim \|v_k\|_p^p + \|w\|_p^p . \tag{5.7}$$

Ukoliko označimo $t = \|w\|_p^p$, kao i prije slijedi

$$c_p \geq c_p t^{2/p} + c_p(1-t)^{2/p}.$$

Kako je $p > 2$ gornja je nejednakost moguća samo za $t \in \{0, 1\}$. Pretpostavimo da je $t = 0$ i pokažimo da to vodi na kontradikciju $a(u_k, u_k) > c_p$. Označimo s $U_\varepsilon = \{V_\infty - V(x) > \varepsilon\}$, $a_\infty(u,u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + V_\infty u^2 dx$ i $c_{p,\infty} = \inf_{\|u\|_p=1} a_\infty(u,u)$.

$$\begin{aligned}
a(u_k, u_k) &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{U_\varepsilon} V(x)u_k^2 dx + \int_{\{V_\infty - V(x)\leq\varepsilon\}} V(x)u_k^2 dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{U_\varepsilon} V(x)u_k^2 dx + \int_{\{V_\infty - V(x)\leq\varepsilon\}} (V_\infty - \varepsilon)u_k^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_k|^2 dx + \int_{U_\varepsilon} V(x)u_k^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} (V_\infty - \varepsilon)u_k^2 dx - \int_{U_\varepsilon} (V_\infty - \varepsilon)u_k^2 dx \\
&= a_\infty(u_k, u_k) + \int_{U_\varepsilon} (V(x) - V_\infty + \varepsilon)u_k^2 dx - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} u_k^2 dx.
\end{aligned}$$

Kako je U_ε ograničen skup, iz Relich-Kondrašovljevog teorema te činjenice da $u_k \rightharpoonup 0$, zaključujuemo $\lim_{k\to\infty} \int_{U_\varepsilon} (V(x) - V_\infty + \varepsilon)u_k^2 dx = 0$, pa je $c_p = \lim a(u_k, u_k) \geq c_{p,\infty} - \varepsilon \liminf \|u_k\|_2^2$. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, dobili smo $c_{p,\infty} \geq c_p$

Neka je $z > 0$ minimizator za $c_{p,\infty}$. Tada je $c_{p,\infty} = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla z|^2 + V_\infty z^2 dx > \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla z|^2 + V(x)z^2 dx \geq c_p$.

Dakle, $t = 1$ pa je $a(w, w) \geq c_p$. Iz (5.7) zaključujemo $a(w, w) \leq c_p$ pa je w traženi minimizator.

$\square$

6. Nelinearna Schrödingerova jednadžba

U ovom će odjeljku osnovni model biti *nelinearna Schrödingerova jednadžba (NLS)*:

$$\begin{cases} iu_t + \triangle u = \pm |u|^{p-2} u \text{ na } \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_t \\ u_{|_{t=0}} = \psi \in H^1(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{6.1}$$

gdje je $1 < p < \infty$. Ukoliko promatramo jednadžbu s pozitivnim predznakom na desnoj strani, tada govorimo o *defokusirajućoj nelinarnosti*, inače govorimo o fokusirajućoj nelinearnosti.

Jednadžba (6.1) zadovoljava sljedeće zakone sačuvanja:

$$M(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} |u(x,t)|^2 dx$$

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x,t)|^2 dx \pm \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x,t)|^p dx,$$

tj. $M(u(t)) = M(u(0))$ i $E(u(t)) = E(u(0))$. Član $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x,t)|^2 dx$ naziva se kinetička energija, a član $\pm \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x,t)|^p dx$ potencijalna energija.

Kažemo da je u *solitonsko rješenje* za fokusirajuću NLS ukoliko je oblika

$$u(x,t) = Q(x) e^{it\tau},$$

za neku funkciju $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ i $\tau > 0$. Lako se provjeri da Q mora zadovoljavati

$$\triangle Q + |Q|^{p-2} Q - \tau Q = 0.$$

Primijetimo da su $Q, \Delta Q, |Q|^{p-2} Q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pa ovu jednakost možemo gledati u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Neka je $p \in (2, \frac{2d+4}{d})$, $\lambda > 0$. Promotrimo problem minimizacije funkcionala energije:

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^p dx,$$

uz uvjet $\|u\|_{L^2}^2 = \lambda$, tj. definirajmo:

$$I_\lambda := \inf\{E(u), u \in H^1(\mathbb{R}^d), \|u\|_{L^2}^2 = \lambda\}. \tag{6.2}$$

Kako bismo mogli riješiti minimizacijski problem, prvo trebamo promotriti za koje p uopće ima smisla gledati gornji problem. Iz Soboljevljevih teorema ulaganja znamo da je $H^1(\mathbb{R}^d)$ uložen u $L^p(\mathbb{R}^d)$, za $p \in (2, 2^*)$, gdje je $2^* = \frac{2d}{d-2}$ pa je drugi član jednakosti na desnoj strani dobro definiran za $p \in (2, \frac{2d+4}{d})$.

Teorem 15. *Za $p \in (2, \frac{2d+4}{d})$ je I_λ konačan. Nadalje, $I_\lambda < 0$.*

Dokaz. Iz Soboljevljevih teorema ulaganja znamo da postoji $C > 0$ tako da je $\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}$. Primjenjujući Hölderovu nejednakost za $p = \frac{d}{d-2}$ i $q = \frac{d}{2}$ slijedi:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{2d+4}{d}} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{2d}{d-2}}\Big)^{\frac{d-2}{d}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2\Big)^{\frac{2}{d}} = \|u\|_{L^{2^*}}^2 \|u\|_{L^2}^{\frac{4}{d}} \leq C\lambda^{\frac{2}{d}} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + |u|^2.$$

Uzmimo $p \in (2, \frac{2d+4}{d})$. Iz osnovne interpolacijske nejednakosti slijedi

$$\|u\|_{L^p}^p \leq \|u\|_{L^2}^{(1-\theta)p} \|u\|_{L^{\frac{2d+4}{d}}}^{\theta p} \leq C(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \lambda)^{\frac{2(p-2)}{d-2}},$$

pa je $I_\lambda \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx - C(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \lambda)^{\frac{d(p-2)}{4}}$. Kako je $\frac{d(p-2)}{4} < 1$, zaključujemo $I_\lambda > -\infty$. Pokažimo da je $I_\lambda < 0$. Definirajmo $u(x) = ae^{-b|x|^2}$, za neke parametre $a, b \geq 0$ koje ćemo odrediti kasnije. Kako je $\|u\|_{L^2}^2 = \lambda$, mora vrijediti $b = \frac{\pi}{2}a^{\frac{4}{d}}\lambda^{\frac{2}{d}}$ pa je

$$E(u) = E(a) = a^{\frac{4}{d}}[\frac{\pi d}{4}\lambda^{1-\frac{2}{d}}] - a^{p-2}[\lambda\frac{1}{p^{\frac{d}{2}+1}}2^{\frac{d}{2}}].$$

Budući da je $p-2 < \frac{4}{d}$, to postoji $a > 0$ tako da je $E(u) < 0$. Također vidimo da je $I_\lambda = -\infty$ za $p > \frac{2d+4}{d}$.

□

Koristeći metodu Lagrangeovih multiplikatora, zaključujemo da postoji $\kappa \in \mathbb{R}$ tako da minimizator $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ zadovoljava:

$$\triangle f + |f|^{p-2} f = \kappa f.$$

Može se pokazati da je $\kappa > 0$.

Glavni je rezultat ovog odjeljka sljedeći teorem:

Teorem 16. *Neka je* $p \in (2, \frac{2d+4}{d})$ *i* $\lambda > 0$. *Tada za bilo koji minimizirajući niz* u_n *postoji niz* y_n *u* $\mathbb{Z}^d$ *takav da je niz* $u_n(\cdot + y_n)$ *relativno kompaktan u* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *te je njegov limes rješenje minimizacijskog problema* (6.2).

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lambda = 1$ i označimo s $\kappa = I_1$. Neka je u_n minimizirajući niz. Kada bi za svaki niz y_n u $\mathbb{Z}^d$ $u_n(\cdot + y_n) \rightharpoonup 0$, iz Leme 11 slijedilo bi $u_n \to 0$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, za $p \in (2, 2^*)$. No, tada bismo dobili:

$$0 > \kappa = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |u_n|^p dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^2 dx \geq 0,$$

što je očito kontradikcija. Dakle, postoji $w \neq 0$ i niz y_n u $\mathbb{Z}^d$ tako da $u_n(\cdot + y_n) \rightharpoonup w$ (na podnizu). Pokazat ćemo da je w traženi minimizator i $u_n(\cdot + y_n) \to w$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$. Stavimo $v_n = u_n(\cdot + y_n)$. Očito je da je i v_n minimizirajući niz. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\kappa &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \|\nabla v_n\|^2_{\mathrm{L}^2} - \frac{1}{p} \|v_n\|^p_{\mathrm{L}^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|(\nabla v_n - \nabla w) + \nabla w\|^2_{L^2} - \frac{1}{p} \|v_n\|^p_{\mathrm{L}^p} \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla w\|^2_{\mathrm{L}^2} + \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{2} \|\nabla v_n - \nabla w\|^2_{\mathrm{L}^2} + \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla v_n - \nabla w) \cdot \nabla w - \frac{1}{p} \|v_n\|^p_{\mathrm{L}^p} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla w\|^2_{\mathrm{L}^2} + \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{2} \|\nabla v_n - \nabla w\|^2_{\mathrm{L}^2} - \frac{1}{p} \|v_n\|^p_{\mathrm{L}^p} \Big),
\end{aligned} \tag{6.3}$$

budući da $\nabla v_n \rightharpoonup \nabla w$ slabo u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Također, iz Brezis-Liebove leme slijede iduća dva identiteta:

$$1 = \|v_n\|^2_{\mathrm{L}^2} = \lim_{n\to\infty} \|v_n - w\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|w\|^2_{\mathrm{L}^2} \tag{6.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^p_{\mathrm{L}^p} - \|v_n - w\|^p_{\mathrm{L}^p} = \|w\|^p_{\mathrm{L}^p}. \tag{6.5}$$

Iz činjenice da za svaku funkciju $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ vrijedi:

$$\kappa \|u\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2} - \frac{1}{p}\|u\|^{p-2}_{L^2} \|u\|^p_{\mathrm{L}^p}, \tag{6.6}$$

te iz (6.3) i (6.4) dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\kappa &\overset{(6.4)}{=} \lim_{n\to\infty} \kappa \|v_n - w\|^2_{\mathrm{L}^2} + \kappa \|w\|^2_{\mathrm{L}^2} \\
&\overset{(6.6)}{\leq} \limsup \Big(\frac{1}{2}\|\nabla v_n - \nabla w\|^2_{L^2} - \frac{1}{p} \|v_n - w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|v_n - w\|^p_{\mathrm{L}^p} \Big) + \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2_{L^2} - \frac{1}{p} \|w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|w\|^p_{L^p} \\
&\leq \limsup \frac{1}{2}\|\nabla v_n - \nabla w\|^2_{L^2} - \liminf \frac{1}{p} \|v_n - w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|v_n - w\|^p_{\mathrm{L}^p} + \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2_{L^2} - \frac{1}{p} \|w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|w\|^p_{L^p} \\
&\overset{(6.3)}{\leq} \kappa + \limsup \frac{1}{p}\|v_n\|^p_{L^p} - \liminf \frac{1}{p} \|v_n - w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|v_n - w\|^p_{\mathrm{L}^p} - \frac{1}{p} \|w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|w\|^p_{L^p} \\
&\overset{(6.5)}{\leq} \kappa + \frac{1}{p}\|w\|^p_{L^p} - \liminf \frac{1}{p}\|v_n - w\|^p_{L^p} - \liminf \frac{1}{p} \|v_n - w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|v_n - w\|^p_{\mathrm{L}^p} - \frac{1}{p} \|w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|w\|^p_{L^p} \\
&\leq \kappa + \frac{1}{p}\|w\|^p_{L^p}(1 - \|w\|^{2-p}_{L^2}) - \frac{1}{p} \liminf \frac{1}{p}\|v_n - w\|^p_{L^p} - \liminf \frac{1}{p} \|v_n - w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|v_n - w\|^p_{\mathrm{L}^p}
\end{aligned}
$$

Dakle, dobili smo:

$$
0 \leq \frac{1}{p}\|w\|^p_{L^p}(1 - \|w\|^{2-p}_{L^2}) - \frac{1}{p} \liminf \frac{1}{p}\|v_n - w\|^p_{L^p} - \liminf \frac{1}{p} \|v_n - w\|^{2-p}_{\mathrm{L}^2} \|v_n - w\|^p_{\mathrm{L}^p} .
$$

Kako je norma slabo odozdo neprekinuta funkcija, to je $\|w\|_{L^2} \leq 1$ pa je $\|w\|^{2-p}_{L^2} \geq 1$. Da bi gornja nejednakost bila zadovoljena, sva tri člana s desne strane moraju biti jednaki 0. Dakle, $\|w\|_{L^2} = 1$. Jer $v_n \rightharpoonup w$ i $\|v_n\|_{\mathrm{L}^2} \to \|w\|_{\mathrm{L}^2}$, možemo zaključiti da $v_n \to w$ u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Iz osnovne interpolacijske nejednakosti i Banach-Steinhausovog teorema slijedi i $v_n \to w$ u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ pa koristeći (6.3) možemo zaključiti $\lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n - \nabla w\|_{\mathrm{L}^2} = 0$. Dakle, $v_n \to w$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$ i $E(w) = \kappa$.
U slučaju da je $\lambda \neq 1$, provedemo identičan račun samo što umjesto (6.3) imamo $\lambda = \lim_{n\to\infty} \|v_n - w\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|w\|^2_{\mathrm{L}^2}$, i umjesto (6.6) imamo $\kappa \|u\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq \frac{1}{2}\lambda \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2} - \frac{1}{p}\lambda^{p/2}\|u\|^{p-2}_{L^2} \|u\|^p_{\mathrm{L}^p}$.
$\square$

Kokompaktnost

1. Osnovni pojmovi

U ovom ćemo poglavlju dati poopćenje definicije $\mathcal{D}$-slabe konvergencije u Banachovom (ne više Hilbertovom) prostoru. Radi jednostavnosti ćemo uzeti da je skup $\mathcal{D}$ grupa.

Definicija. *Neka je A Banachov prostor, te $\mathcal{D}$ grupa neprekidnih linearnih bijekcija na A. Za niz (u_k) elemenata iz A kažemo da konvergira $\mathcal{D}$-slabo prema $u \in A$ ukoliko $g_k(u_k - u) \rightharpoonup 0$ za svaki izbor niza (g_k) u $\mathcal{D}$.*

Primijetimo kako je, zbog činjenice da $\mathcal{D}$ sadrži operator I, svaki $\mathcal{D}$-slabo konvergentan niz ujedno i slabo konvergentan. Obrat vrijedi ukoliko je $\mathcal{D}$ konačna grupa.

Definicija. *Neka su A i B Banachovi prostori takvi da je A uložen u B te neka je $\mathcal{D}$ grupa neprekidnih linearnih bijekcija na A. Kažemo da je ulaganje prostora A u prostor B kokompaktno u odnosu na $\mathcal{D}$ ukoliko svaki $\mathcal{D}$-slabo konvergentan niz u A konvergira u B.*

Napomena. *Ukoliko je $\mathcal{D} = \{I\}$ te je A refleksivan, tada su kokompaktna ulaganja upravo kompaktna ulaganja.*

2. Glavni rezultati

U nastavku ćemo, kad god radimo s Banachovim prostorima čiji su elementi funkcije $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ i čije su norme invarijantne na translacije, za grupu $\mathcal{D}$ iz gornjih definicija uzeti skup:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d} := \{g_y\}_{y \in \mathbb{Z}^d}, \text{ gdje je } g_y u = u(\cdot - y). \tag{2.1}$$

Kad god radimo s Banachovim parom (A_0, A_1), uvijek ćemo mu pridružiti grupu $\mathcal{D}$ na sljedeći način: za elemente g iz $\mathcal{D}$ pretpostavit ćemo da su linearni operatori $g : A_0 + A_1 \to A_0 + A_1$ tako da vrijedi

$$g(A_j) \subseteq A_j \quad \text{i} \quad g : A_j \to A_j \quad \text{je izometrija za } j = 0,\ 1. \tag{2.2}$$

Lema 1. *Neka je (A_0, A_1) Banachov par i $\mathcal{D}$ grupa linearnih preslikavanja $g : A_0 + A_1 \to A_0 + A_1$ koja zadovoljavaju (2.2). Tada je svaka funkcija $g \in \mathcal{D}$ izometrija na $A_0 + A_1$. Nadalje, za svaki $p \in [1, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$, restrikcija od g na $(A_0, A_1)_{\theta,p}$, respektivno $[A_0, A_1]_\theta$ je izometrija na $(A_0, A_1)_{\theta,p}$, respektivno $[A_0, A_1]_\theta$.*

Dokaz. Dokaz slijedi iz osnovnih svojstava interpolacijskih prostora $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ i $[A_0, A_1]_\theta$ primijenjenih na operatore g i g^{-1}. □

Definicija. *Neka je (A_0, A_1) Banachov par takav da je A_1 neprekidno uložen u A_0 te neka je $\mathcal{D}$ grupa linearnih operatora $g : A_0 + A_1 \to A_0 + A_1$ koji zadovoljavaju (2.2). Nadalje, neka je A_1 neprekidno uložen u Banachov prostor B_1. Za familiju ograničenih operatora $(M_t)_{t\in(0,1)}$ iz A_0 u A_1 kažemo da je familija $\mathcal{D}$-kovarijantnih izglađivača ukoliko zadovoljava sljedeće uvjete:*

(i) *za $j = 0, 1$ norma operatora M_t kao neprekidnog operatora iz A_j u A_j je ograničena uniformno po t, tj.* $\sup_{t\in(0,1)} \|M_t\|_{A_j \to A_j} < \infty$

(ii) *funkcija $\sigma(t) := \|I - M_t\|_{A_1 \to B_1}$ zadovoljava* $\lim_{t\to 0} \sigma(t) = 0$

(iii) *za svaki $g \in \mathcal{D}$, i $t \in (0, 1)$ postoji $h_{g,t} \in \mathcal{D}$ tako da je $gM_t = M_t h_{g,t}$.*

Teorem 2. *Neka su (A_0, A_1) i (B_0, B_1) Banachovi parovi takvi da je A_j uložen u B_j, $j = 0, 1$. Pretpostavimo da je k tome A_1 uložen u A_0. Neka je $\mathcal{D}$ grupa linarnih operatora $g : B_0 + B_1 \to B_0 + B_1$ koja zadovoljava (2.2) u odnosu na oba Banachova para (A_0, A_1) i (B_0, B_1). Pretpostavimo da postoji $\mathcal{D}$-kovarijantna familija izglađivača $(M_t : A_0 \to A_1)_{t\in(0,1)}$. Ukoliko je A_1 $\mathcal{D}$-kokompaktno uložen u B_1, tada je, za svaki $\theta \in (0, 1)$ te za svaki $q \in [1, \infty]$, prostor $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ $\mathcal{D}$-kokompaktno uložen u $(B_0, B_1)_{\theta,q}$ i prostor $[A_0, A_1]_\theta$ je $\mathcal{D}$-kokompaktno uložen u $[B_0, B_1]_\theta$.*

Dokaz. Dokazat ćemo teorem u slučaju realne interpolacije. Dokaz u slučaju kompleksne interpolacije je analogan.

Iz definicije interpolacijskih prostora znamo da je $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ uložen u $A_0 + A_1 = A_0$. Dakle, za $a \in (A_0, A_1)_{\theta,q}$, vrijedi

$$\|M_t a\|_{A_1} \leq C\, \|a\|_{A_0} \leq C\, \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} ,$$

pa je operator M_t ograničen iz $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ u A_1.

Pretpostavimo da niz $u_k \overset{\mathcal{D}}{\rightharpoonup} 0$ u $(A_0, A_1)_{\theta,q}$. Pokazat ćemo da $u_k \to 0$ u $(B_0, B_1)_{\theta,q}$. Neka je $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u D. Tada je

$$g_k M_t u_k = M_t h_{g_k,t} u_k \tag{2.3}$$

po svojstvu (iii). Budući da $h_{g_{k,t}} u_k \rightharpoonup 0$ u $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ zaključujemo da $M_t h_{g_{k,t}} u_k \rightharpoonup 0$ u A_1 za svaki fiksni $t \in (0, 1)$. Iz kokompaktnosti ulaganja $A_1 \subseteq B_1$ te (2.3) zaključujemo

$$\lim_{k\to\infty} \|M_t u_k\|_{B_1} = 0. \tag{2.4}$$

Iz svojstva (i) te činjenice da je A_j uložen u B_j, za $j = 0, 1$, imamo da je operator $M_t : A_j \to B_j$ ograničen uniformno po t te vrijedi ocjena

$$S_j := \sup_{t\in(0,1)} \|M_t\|_{A_j\to B_j} < \infty \quad j = 0, 1. \tag{2.5}$$

Budući da je $M_t u_k \in B_0 \cap B_1$ iz (2.5) i glavnog interpolacijskog teorema, slijedi

$$\begin{aligned} \|M_t u_k\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} &\le c_{\theta,q} \|M_t u_k\|_{B_0}^{1-\theta} \|M_t u_k\|_{B_1}^{\theta} \\ &\le c_{\theta,q} (S_0 \|u_k\|_{A_0})^{1-\theta} \|M_t u_k\|_{B_1}^{\theta} . \end{aligned}$$

Po Banach-Steinhausovom teoremu niz (u_k) nužno je ograničen u $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ pa je ograničen i u A_0. Koristeći (2.4) slijedi

$$\lim_{k\to\infty} \|M_t u_k\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} = 0. \tag{2.6}$$

Promotrimo malo detaljnije operator $I - M_t$. Iz (2.5) slijedi da je $I - M_t : A_0 \to B_0$ ograničen i vrijedi $\|I - M_t\|_{A_0\to B_0} \le \|I\|_{A_0\to B_0} + S_0$. Koristeći ovu ocjenu, teorem 7 i svojstvo (ii), zaključujemo da je $I - M_t : (A_0, A_1)_{\theta,q} \to (B_0, B_1)_{\theta,q}$ ograničen operator te vrijedi

$$\begin{aligned} \|I - M_t\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}\to(B_0,B_1)_{\theta,q}} &\le \|I - M_t\|_{A_0\to B_0}^{1-\theta} \|I - M_t\|_{A_1\to B_1}^{\theta} \\ &\le (\|I\|_{A_0\to B_0} + S_0)^{1-\theta} \sigma(t)^{\theta}. \end{aligned}$$

Dakle, koristeći (2.6), imamo

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \|u_k\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} &\le \limsup_{k\to\infty} \|M_t u_k\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} + \limsup_{k\to\infty} \|(I - M_t) u_k\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} \\ &\le 0 + \limsup_{k\to\infty} \|(I - M_t) u_k\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} \\ &\le \limsup_{k\to\infty} (\|I\|_{A_0\to B_0} + S_0)^{1-\theta} \sigma(t)^{\theta} \|u_k\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} . \end{aligned}$$

Iz ograničenosti niza (u_k) u $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ te činjenice da desna strana teži k 0 kako $t \to 0$, dok izraz s lijeve strane ne ovisi o t, slijedi $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{(B_0,B_1)_{\theta,q}} = 0$.

□

Pomoću teorema 2 dobit ćemo kokompaktnost ulaganja interpolacijskih prostora određenih funkcijskih prostora. Prva točka u našim razmatranjima će biti sljedeće svojstvo kokompaktnosti Soboljevljevih ulaganja, koje je direktno poopćenje Leme 11 iz trećeg poglavlja.

Teorem 3. *Neka je* $p \in (1,\infty)$. *Soboljevljevo ulaganje prostora* $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ *u* $L^q(\mathbb{R}^d)$, $p < q < p^*$, *gdje je* $p^* = \frac{pd}{d-p}$ *za* $d > p$ *i* $p^* = \infty$ *za* $d \le p$, *je* $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$*-kokompaktno.*

Dokaz. Označimo s $Q = (0,1)^d$ jediničnu kocku u $\mathbb{R}^d$ i pretpostavimo da $u_n(\cdot - y_n) \rightharpoonup 0$ za svaki izbor niza y_n u $\mathbb{Z}^d$. Po Soboljevljevoj nejednakosti, za svaki $y \in \mathbb{Z}^d$ vrijedi

$$\int_{Q+y} |u_k|^q \le \int_{Q+y} (|\nabla u_n|^p + |u_k|^p)\Big(\int_{Q+y} |u_k|^q\Big)^{1-p/q}.$$

Dodavajući članove u gornji izraz, dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u_k|^q \le \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u_k|^p + |u_k|^p) \sup_{y\in\mathbb{Z}^d} \Big(\int_Q |g_y u_k|^q\Big)^{1-p/q} \le 2C\Big(\int_Q |g_{y_k} u_k|^q\Big)^{1-p/q},$$

gdje je y_k bilo koji niz u $\mathbb{Z}^d$ koji zadovoljava

$$\Big(\int_Q |g_{y_k} u_k|^q\Big)^{1-p/q} \ge \frac{1}{2} \sup_{y\in\mathbb{Z}^d} \Big(\int_Q |g_y u_k|^q\Big)^{1-p/q}.$$

Iz činjenice da je ulaganje $W^{1,p}(Q) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(Q)$ kompaktno, slijedi tražena tvrdnja.

□

Teorem 4. *Neka je* $\alpha \in (0,\infty)$ *i* $p \in (1,\infty)$. *Ulaganje prostora* $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ *u* L^q *je* $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$*-kokompaktno za* $p < q < p^*_\alpha$, *gdje je* $p^*_\alpha = \begin{cases} \frac{pd}{d-\alpha p}, & d > \alpha p \\ \infty, & d \le \alpha p. \end{cases}$

3. Kokompaktnost ulaganja $W^{\alpha,p} \hookrightarrow \mathrm{L}^q$ za $\alpha \in (0,\infty)$

Htjeli bismo pomoću Teorema 2 dokazati da je ulaganje $W^{\alpha,p} \hookrightarrow \mathrm{L}^q$ kokompaktno, za svaki $\alpha \in (0,\infty)$, što će predstavljati poopćenje Teorema 3. Kako bismo to mogli dokazati, potrebno je naći konkretnu familiju $\mathcal{D}$-kovarijantnih izglađivača.

Lema 5. *Neka je* $(A_0, A_1) = (L^p(\mathbb{R}^d), W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$ *i* $(B_0, B_1) = (L^p(\mathbb{R}^d), L^r(\mathbb{R}^d))$, $r \in (p, p^*)$, *te neka je* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$. *Nadalje, neka je* $\rho : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ *glatka* C^∞ *funkcija s nosačem sadržanim u jediničnoj kugli koja zadovoljava* $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$. *Tada je, za svaki fiksni* $t \in (0,1)$, *operator* M_t, *koji je definiran kao*

$$(M_t u)(x) = \int_{|z|\le 1} \rho(z) u(x+tz) dz, \tag{3.1}$$

ograničen iz A_0 *u* A_1, *te familija preslikavanja* $(M_t)_{t\in(0,1)}$ *zadovoljava sva svojstva iz definicije 2..*

Dokaz. Ograničenost operatora M_t slijedi iz dobro poznatih svojstava konvolucije. Također, očito je da je $M_t : A_j \to A_j$ ograničen s $\|M_t\|_{A_j\to A_j} \leq 1$, za $j = 0,1$ i za svaki $t \in (0,1)$, što nam daje svojstvo (ii).

Svojstvo (iii) direktna je posljedica činjenice da je $M_t(u(\cdot - y)) = (M_t u)(\cdot - y)$ za $y \in \mathbb{R}^d$. Dakle, možemo uzeti $h_{g,t} = g$ za proizvoljni $g \in \mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$ i za svaki $t \in (0,1)$.

Ostaje nam dokazati svojstvo (ii). Imamo

$$\begin{aligned} u(x) - M_t u(x) &= \int_{|z|\leq 1} \rho(z)[u(x) - u(x+tz)]dz \\ &= -\int_{|z|\leq 1} \rho(z) \int_0^t z \cdot \nabla u(x+sz) ds dz. \end{aligned}$$

Tada je

$$|u(x) - M_t u(x)|^p \leq \sup_{|y|\leq 1} \rho(y)^p \left| \int_0^t \int_{|z|\leq 1} |\nabla u(x+sz)| ds dz \right|^p.$$

Iz Hölderove nejednakosti slijedi

$$|u(x) - M_t u(x)|^p \leq C t^{\frac{p}{p'}} \int_0^t \int_{|z|\leq 1} |\nabla u(x+sz)|^p ds dz.$$

Integrirajući u odnosu na x, dobijemo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x) - M_t u(x)|^p dx &\leq C t^{\frac{p}{p'}} \int_0^t \int_{|z|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x+sz)|^p dx ds dz \\ &= C t^{\frac{p}{p'}} \int_0^t \int_{|z|\leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)| dx ds dz \qquad (3.2) \\ &= C t^p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Neka je $s \in (r, p^*)$. Tada je $p < r < s$ pa iz Teorema 8 iz prvog poglavlja slijedi

$$\|u - M_t u\|_r \leq \|u - M_t u\|_p^{1-\theta} \|u - M_t u\|_s^{\theta}, \quad \text{gdje je } \theta = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}}. \qquad (3.3)$$

Desnu stranu gornje nejednadžbe možemo ocijeniti koristeći (3.2) te Soboljevljeve teoreme ulaganja pa dobivamo

$$\begin{aligned} \|u - M_t u\|_r &\leq C \|u\|_{W^{1,p}}^{1-\theta} \|u - M_t u\|_{W^{1,p}}^{\theta} \\ &\leq C t^{1-\theta} \|u\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

□

Nakon što smo definirali sav potreban alat, prelazimo na dokaz Teorema 3. Neka je $p \in (1, \infty)$ kao u iskazu teorema i neka je $r \in (p, p^*)$. Neka je $(A_0, A_1) = (\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), \mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d))$ i $(B_0, B_1) = (\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$. Grupu $\mathcal{D}$ i familiju $(M_t)_{t\in(0,1)}$ odaberimo kao u Lemi 5. Znamo iz Teorema 3 da je A_1 $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$-kokompaktno uložen u B_1. Sada možemo primijeniti Teorem 2 iz drugog poglavlja za kompleksne interpolacijske prostore pa dobivamo da je $[\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), W^{1,p}(\mathbb{R}^d)]_\theta$ $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$-kokompaktno uložen u $[\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d), \mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)]_\theta$. Iz poznatih rezultata slijedi da su ta dva prostora $W^{\theta,p}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathrm{L}^{s_0}(\mathbb{R}^d)$ respektivno, gdje je s_0 broj u intervalu (p, r) dan s

$$\frac{1}{s_0} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{r}. \tag{3.4}$$

Stavljajući $\theta = \alpha$ dobivamo željenu tvrdnju za $q = s_0$.

Neka je $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ koji konvergira $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$-slabo k 0. Za dani $q \in (p, p_\alpha)$ odaberimo $r \in (p, p^*)$ dovoljno blizu p tako da broj s_0 koji je dan s (3.4), za $\theta = \alpha$ zadovoljava $p < s_0 < q$. Iz gornjih razmatranja imamo $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{\mathrm{L}^{s_0}(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Neka je $s_1 \in (q, p_\alpha^*)$. Po Soboljevljevom teoremu ulaganja, niz $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, koji je ograničen u $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$, mora biti ograničen i u $\mathrm{L}^{s_1}(\mathbb{R}^d)$. Naposljetku, iskoristimo Teorem 8 iz prvog poglavlja da ograničimo $\|u_k\|_q$ s $\|u_k\|_{s_0}^{1-\beta} \|u_k\|_{s_1}^{\beta}$ za odgovarajući $\beta \in (0, 1)$. To je dovoljno za dokaz Teorema 2 u slučaju $\alpha \in (0, 1)$.

Slučaj $\alpha = 1$ je tvrdnja Teorema 3.

Neka je $\alpha > 1$, a p i q kao u iskazu teorema. Kako je $p < p^*$, to možemo odabrati brojeve q_0 i q_1 koji zadovoljavaju $p < q_0 < \min\{p^*, q\}$ i $q < q_1 < p_\alpha^*$. Neka je (u_k) niz u $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ koji je $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$-slabo konvergentan k 0. Kako je $\alpha > 1$ znamo da je $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ uložen u $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ pa je u_k $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$-slabo konvergentan u $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, a onda je po Teoremu 3 $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{q_0} = 0$. Budući da je $q_0 < q < q_1$, Teorem 8 iz prvog poglavlja nam daje

$$\|u_k\|_q \leq \|u_k\|_{q_0}^{1-\theta} \|u_k\|_{q_1}^{\theta}, \quad \text{za neki } \theta \in (0, 1). \tag{3.5}$$

Jer je $W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ uložen u $\mathrm{L}^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ imamo $\|u_k\|_q \leq C \|u_k\|_{q_0}^{1-\theta} \|u_k\|_{W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^d)}^{\theta}$. Kako je, po Banach-Steinhausovom teoremu, svaki slabo konvergentan niz ograničen, dobivamo $\|u_k\|_q \leq C \|u_k\|_{q_0}^{\theta} \to 0$.

4. Postojanje minimizatora

U ovom će nam odjeljku od osobite pomoći biti iterirana Brezis-Liebova lema koja slijedi kao korolar Brezis-Liebove leme.

Korolar 6. ***(Iterirana Brezis-Liebova lema)*** *Pretpostavimo da je $1 \leq p < \infty$. Neka je $y_k^{(n)}$ točka u $\mathbb{R}^N$, za svaki k i svaki n iz $\mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $\lim_{k\to\infty} |y_k^{(m)} - y_k^{(n)}| = \infty$ za svaki fiksni m i n gdje je $m \neq n$. Neka je $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ ograničen niz takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ niz $u_k(\cdot + y_k^{(n)})$ konvergira s.s. k funkciji $w^{(n)}$. Tada, za svaki $M \in \mathbb{N}$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p - \sum_{n=1}^{M} \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(n)}|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \left| u_k - \sum_{n=1}^{M} w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)}) \right|^p \to 0. \tag{4.1}$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da svaki podniz izraza s lijeve strane u (4.1) ima podniz koji konvergira k 0. To znači da možemo pretpostaviti, bez smanjenja općenitosti, da niz $(y_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ zadovoljava dodatni uvjet $|y_{k+1}^{(n)} - y_{k+1}^{(m)}| > 2|y_k^{(n)} - y_k^{(m)}|$, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \{1, 2, \dots M\}$, $m \neq n$. Taj uvjet nam osigurava da je $\lim_{k\to\infty} f(x + y_k^{(m)} - y_k^{(n)}) = 0$ s.s. na $\mathbb{R}^N$ za svaki $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$. Posebno, to vrijedi za $f = w^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom.

Za $M = 1$ tvrdnja je direktna posljedica Brezis-Liebove leme primjenje na niz funkcija $u_k(\cdot + y_k^{(1)}) \to w^{(1)}$ s.s.

Pretpostavimo da je (4.1) istinito za $M = m$ i pokažimo da je istinito za $M = m + 1$. Definirajmo niz funkcija $(v_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}$

$$v_k^{(m)} = u_k - \sum_{n=1}^{m} w^{(n)}(\cdot - y_k^{(n)}).$$

Primjenjujući pretpostavku indukcije te Brezis-Liebovu lemu na niz $v_k^{(m)}(\cdot + y_k^{m+1})$ čiji je s.s. limes $w^{(m+1)}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p - \sum_{n=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(n)}|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |v_k^{(m)}|^p \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p - \sum_{n=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(n)}|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |v_k^{(m)}(\cdot + y_k^{(n)})|^p \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p - \sum_{n=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(n)}|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |w^{(m+1)}|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |v_k^{(m+1)}(\cdot + y_k^{(n)})|^p,
\end{aligned}$$

što dokazuje korak indukcije. □

Teorem 7. *Za svaki $\alpha > 0$ i svaki $q \in (2, 2_\alpha^*)$, poprima se infimum*

$$c = \inf_{\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}=1} \|u\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)}^2 .$$

Dokaz. Neka je (u_k) minimizirajući niz. Pretpostavimo da za svaki niz (y_k) u $\mathbb{Z}^d$, niz $(u_k(\cdot - y_k))$ konvergira slabo k 0 u $H^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Tada $u_k \to 0$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$, s obzirom da je $H^\alpha(\mathbb{R}^d)$ $\mathcal{D}_{\mathbb{Z}^d}$−kokompaktno uložen u $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$. No, to je kontradikcija s činjenicom da je $\|u_k\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} = 1$. Dakle, postoji niz y_k (do na podniz), te funkcija $w \in H^\alpha(\mathbb{R}^d), w \neq 0$, tako da $u_k(\cdot - y_k)$ konvergira prema w slabo u H^α te po točkama s.s. (uzimamo u obzir da slaba konvergencija u H^α povlači kovergenciju po točkama s.s.). Nadalje, niz $v_k = u_k(\cdot - y_k)$ također je minimizirajući niz. Tada je

$$\begin{aligned} c &= \|v_k\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + o(1) = \|(v_k - w) + w\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + o(1) \\ &= \|v_k - w\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + \|w\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + 2 < v_k - w, w > +o(1) \\ &= \|v_k - w\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + \|w\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + o(1) \end{aligned}$$

Po Brezis-Liebovoj lemi

$$1 = \|v_k\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} = \|v_k - w\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} + \|w\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} + o(1). \tag{4.2}$$

Budući da je $\|f\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} \geq c\,\|f\|^2_{\mathrm{L}^q}$, za svaki $f \in H^\alpha$, možemo zaključiti

$$c \geq c\,\|v_k - w\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} + c\,\|w\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} + o(1).$$

Uzimajući u obzir ((4.2)), slijedi

$$c \geq c(1 - \|w\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)})^{2/q} + c\,\|w\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Kako je $q > 2$ i $w \neq 0$, zadnja nejednakost vrijedi samo ako je $\|w\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)} = 1$. Budući da je norma slabo odozdo poluneprekinuta, vrijedi nejednakost $\|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{c} \leq \|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)}$. □

U idućem teoremu dobivamo postojanje minimizatora kao posljedicu limesa funkcije u beskonačnosti.

Teorem 8. *Pretpostavimo da funkcija $b \in C(\mathbb{R}^d)$ ima limes u beskonačnosti te da je $0 < b_\infty := \lim_{|x|\to\infty} b(x) < b(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}^d$. Tada se, za svaki $\alpha > 0$ i svaki $q \in (2, 2^*_\alpha)$, postiže infimum*

$$\tilde{\kappa} := \inf_{\int_{\mathbb{R}^d} b(x)|u(x)|^q dx = 1} \|u\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Dokaz. Definirajmo funkcionale F, F_0 i ψ na $H^\alpha(\mathbb{R}^d)$ formulama $F(u) := \int_{\mathbb{R}^d} b(x)|u(x)|^q dx$, $F_0(u) := \int_{\mathbb{R}^d} b_\infty |u(x)|^q dx$ i $\psi(u) := \int_{\mathbb{R}^d} (b(x) - b_\infty)|u(x)|^q dx$. Pokažimo da je ψ slabo neprekidan funkcional na $H^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i podijelimo domenu integracije na

$\{b(x) - b_\infty \leq \varepsilon\}$ i omeđen skup $\{b(x) - b_\infty > \varepsilon\}$ te pretpostavimo da $u_n \rightharpoonup u$ u $H^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Tada je

$$\begin{aligned}
|\psi(u_n) - \psi(u)| &= |\int_{\{b(x)-b_\infty \leq \varepsilon\}} (b(x) - b_\infty)|u_n|^q - |u|^q dx + \int_{\{b(x)-b_\infty > \varepsilon\}} (b(x) - b_\infty)||u_n|^q - |u|^q dx| \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} ||u_n|^q - |u|^q| dx + \int_{\{b(x)-b_\infty > \varepsilon\}} (b(x) - b_\infty)||u_n|^q - u|^q| dx \\
&\leq C\varepsilon + \int_{\{b(x)-b_\infty > \varepsilon\}} (b(x) - b_\infty)||u_n|^q - |u|^q| dx
\end{aligned}$$

gdje smo prvi član ograničili koristeći Banach-Steinhaus teorem. Koristeći Brezis-Lieb lemu te činjenicu da je $\{b(x) - b_\infty > \varepsilon\}$ ograničen skup, zaključujemo:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |\psi(u_n) - \psi(u)| &\leq C\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \int_{\{b(x)-b_\infty > \varepsilon\}} (b(x) - b_\infty)|u_n - u|^q dx \\
&= C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Kako je ε proizvoljan, slijedi $\psi(u_n) \to \psi(u)$.

Neka je u_k minimizirajući niz, tj. $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} = \tilde{\kappa}$ i $F(u_k) = 1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $u_k \rightharpoonup w$ u $H^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Pokazat ćemo da je w minimizator gornjeg problema.

Kao u prethodnom teoremu,

$$\tilde{\kappa} = \|u_k\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + o(1) = \|u_k - w\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + \|w\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + o(1). \tag{4.3}$$

Ukoliko napišemo $F(u)$ kao zbroj $F_0(u) = b_\infty \|u\|^q_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}$ i slabo neprekidnog funkcionala $\psi(u)$, Brezis-Liebova lema primijenjena na funckional F_0 daje nam:

$$1 = F(u_k) = F_0(u_k) + \psi(u_k) = \lim_{k\to\infty} F_0(u_k - w) + F_0(w) + \psi(w) \leq \lim_{k\to\infty} F(u_k - w) + F(w). \tag{4.4}$$

Primijetimo da je nejednakost stroga, osim ako $u_k \to w$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$

Uvrštavajući nejednakost $\left\|\frac{u}{F(u)^{1/q}}\right\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} \geq \tilde{\kappa}$, $\forall u \in H^\alpha(\mathbb{R}^d)$, u (4.3) te koristeći (4.4), slijedi:

$$\tilde{\kappa} = \|u_k\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} + o(1) \geq \tilde{\kappa} F(u_k - w)^{2/q} + \tilde{\kappa} F(w)^{2/q} + o(1) \geq \tilde{\kappa}(1 - F(w)) + \tilde{\kappa} F(w)^{2/q} + o(1).$$

Kako je $q > 2$, gornja je nejednakost istinita samo za $F(w) = 1$ ili $w = 0$. Kada bi $w = 0$, tada bismo imali jednakost u (4.4), pa bi $u_k \to 0$ u $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$. No, to je nemoguće jer

$F(\cdot)$ definira ekvivalentnu normu na $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$. Dakle, $u_k \to w$, $F(w) = 1$. Kao u prošlom teoremu, imamo $\|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{\tilde{\kappa}} \leq \|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^d)}$.

$\square$

Bibliografija

[1] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev spaces*, second edition, Pure and Applied Mathematics **140**, Academic Press, 2003.

[2] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces. An Introduction.* Grundlehren der mathematische Wissenschaften 223, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[3] M. Cwikel and K. Tintarev, *On interpolation of cocompact imbeddings* , Revista Mat. Complutense, **26**, 33.-55. (2013).

[4] Lions P.-L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1. Ann.Inst.H.Poincare, Analyse non lineaire* ***1****, 109.-153.* 1984.

[5] Lions P.-L. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2.* Ann.Inst.H.Poincare, Analyse non lineaire **1**, 223.-283. 1984.

[6] I. Schindler and K. Tintarev, *An abstract version of the concentration compactness principle* , Revista Mat. Complutense, **15**, 1.-20. (2002).

[7] K. Tintarev and H.Fieseler, *Concentration compactness: functional-analytic grounds and applications*, Imperil College Press, 2007.

Sažetak

U ovom su radu opisani različiti rezultati teorije kompaktnosti koncentracijom i teorije interpolacije. Rad se sastoji od 4 poglavlja.

U prvom je poglavlju dan kratki pregled funkcijskih prostora i rezultata koje ćemo koristiti u kasnijim poglavljima.

U drugom smo poglavlju dali uvod u teoriju interpolacije; detaljno smo objasnili realnu i kompleksnu interpolacijsku metodu te smo pokazali glavna svojstva interpolacijskih prostora.

U trećem su poglavlju dani glavni rezultati teorije kompaktnosti koncentracijom u Hilbertovom prostoru. Nadalje, pokazali smo kako pomoću navednog teorema dokazati egzistenciju rješenja nelinearne Schrödingerove jednadžbe.

U četvrtom smo poglavlju poopćili definiciju $\mathcal{D}$-slabe konvergencije u Banachovim prostorima, definirali smo pojam kokompaktnosti te smo pomoću rezultata iz teorije interpolacije dokazali kokompaktnost ulaganja prostora $W^{\alpha,p} \hookrightarrow L^q$.

Summary

In this thesis we describe various results of concentration compactness principle and theory of interpolation.

The thesis consists of four chapters. A short overview of function spaces that are to be used in later chapters is given in the first one.

In the second chapter we present classical real interpolation theory with focus on the so-called K-method as well as complex interpolation theory.

The functional-analytic grounds of the concentration compactness are presented in the third chapter, followed by applications on nonlinear Schrödinger equation.

In the final chapter we give a formulation for the concentration compactness method in Banach space, generalizing the Hilbert case described in the previous chapter. We also give definition of cocompactness, a useful weaker counterpart of compactness. We use techniques of interpolation spaces described in the second chapter to deduce results from known cocompact imbeddings for classical Sobolev spaces.

Životopis

Rođena sam 24. travnja 1993. u Zagrebu gdje sam završila osnovnu školu i prirodoslovnu gimnaziju. Godine 2011. upisala sam Preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, te sam tijekom studija bila demonstratorica iz više kolegija. Diplomski studij Primijenjene matematike upisala sam 2014. Sudjelovala sam u dvjema međunarodnim ljetnim školama te sam bila odabrana kao polaznica desetotjednog studentskog programa u istraživačkom centru u Jülichu (Jülich Supercomputing Centre). Iduću akademsku godinu namjeravam upisati Poslijediplomski znanstveni studij matematike Sveučilišta u Zagrebu te nastaviti s procesom vlastitog usavršavanja i napredovanja.