Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Martin Lazar

Globalna rješenja Boltzmannove jednadžbe

Diplomski rad

Zagreb, 26. travnja 2007.

Predgovor

Ludwig Boltzmann je 1872. godine napisao jednadžbu koja opisuje ponašanje razrijeđenog plina. Boltzmannova jednadžba je i dalje osnova kinetičke teorije plinova i primjenjuje se za proučavanje ne samo klasičnih plinova, koje je Boltzmann imao na umu kad ju je pisao, nego uz odgovarajuća poopćenja, koristi se za proučavanje prijenosa elektrona, neutrona i fotona u odgovarajućim sredinama. U zadnjih dvadeset godina povećano je zanimanje za nju i jedan od najnovijih rezultata na tu temu je članak Ronalda DiPerne i Pierre Louis Lionsa u kojem dokazuju egzistenciju globalnih rješenja Boltzmannove jednadžbe. U ovom Radu sam pokušao dati prikaz tog dokaza i pri tom pojasniti mnoštvo detalja, koji su u članku ostali nerazjašnjeni.

Ovom prilikom želim se zahvaliti svom mentoru dr. Nenadu Antoniću na nesebičnoj potpori i razumijevanju koje sam imao za vrijeme pisanja ovog Rada. Ističem da sam kroz cijelo to vrijeme mogao računati na njegovu pomoć u razjašnjavanju svih nejasnoća na koje sam nailazio. Mnoštvom korisnih savjeta trudio se pojasniti i prikazati zanimljivim relativno teško i meni do tada nepoznato gradivo, koje se u Radu koristi. Na kraju se zahvaljujem i asistentima Nevenu Balenoviću i Marku Vrdoljaku na uloženom vremenu i korisnim savjetima kojima su mi pomogli riješiti određene probleme vezane uz ovaj rad.

Zagreb, lipnja 1998.

Martin Lazar

Sadržaj

Predgovor i

Sadržaj iii

I. Kinetička teorija plinova

1. Fazni prostor 2
2. Liouvilleova jednadžba 6
3. Poincaréov teorem 7

II. Izvod Boltzmannove jednadžbe

1. Fazni prostor i Liouvilleova jednadžba za plin 10
2. Heuristički izvod Boltzmannove jednadžbe 13

III. Pregled analitičkih rezultata

1. L^p prostori 18
2. Distribucije 19
3. Slaba kompaktnost u L^p 21
4. Prijenosni teorem 22

IV. Cauchyjeva zadaća za Boltzmannovu jednadžbu

1. Prve ocjene rješenja 26
2. Osnovni teorem 29
3. Klasična rješenja pomoćne Cauchyeve zadaće iterativnim postupkom . . . 31
4. Aproksimativna rješenja 36
5. Prijelaz na slabo konvergentan podniz i prva svojstva limesa 39
6. Jaka konvergencija 43
7. Limes je renormalizirano rješenje 46

Literatura **53**

I. Kinetička teorija plinova

1. Fazni prostor

U statističkoj mehanici prikladno je opisati stanje mehaničkog sustava G sa s stupnjeva slobode pomoću vrijednosti Hamiltonovih varijabli $q_1, q_2, \cdots, q_s; p_1, p_2, \cdots, p_s$. Jednadžbe gibanja tada poprimaju sljedeći oblik

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \tag{1}$$

gdje je H *Hamiltonova funkcija* $2s$ varijabli $q_1, \cdots, p_s$ (pritom pretpostavljamo da H ne ovisi o vremenu t eksplicitno). Vremenska derivacija funkcije H se lako izračuna koristeći (1):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = 0 .$$

Zbog toga što sustav (1) sadrži samo jednadžbe prvog reda, na osnovu jedinstvenosti rješenja Cauchyeve zadaće za sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, slijedi da znajući vrijednosti Hamiltonovih jednadžbi u trenutku t_0 možemo odrediti njihove vrijednosti u svakom drugom trenutku t.

Uvedimo sad 2s dimenzionalni euklidski prostor Γ, čije točke imaju Kartezijeve koordinate $q_1, \cdots, p_s$. Svakom stanju mehaničkog sustava G odgovara jedna točka u Γ koju zovemo *imaginarnom točkom* danog sustava, a cijeli prostor Γ *faznim prostorom*. Budući da je stanje mehaničkog sustava u svakom trenutku t jedinstveno određeno stanjem u nekom fiksnom trenutku t_0, onda će i gibanje imaginarne točke u Γ, što predstavlja promjenu stanja danog sustava, biti jedinstveno određeno njenim položajem u t_0. Krivulja koju određuje to gibanje zove se *trajektorija*. Slijedi da kroz svaku točku faznog prostora prolazi točno jedna trajektorija.

Pogledajmo vremenski interval $[t_0, t]$. U tom vremenu svaka točka $P_0 \in \Gamma$ prijeđe u drugu, jedinstveno određenu točku P, dakle cijeli prostor Γ se transformira u samog sebe. Ovo gibanje faznog prostora zove se *prirodno gibanje* i ima sljedeće svojstvo: premještaj svake točke u intervalu $\Delta t = t - t_0$ ovisi o njegovoj duljini i o položaju u t_0, ali ne i o izboru t_0. To svojstvo uvjetuje stacionarnost gibanja, to jest brzina točaka faznog prostora ovisi jedino o njihovom položaju, i ne mijenja se s vremenom. U nastavku Hamiltonove varijable $q_1, \cdots, p_s$ danog sustava G zvat ćemo *dinamičkim koordinatama* njegove imaginarne točke u prostoru Γ i označavati slovom P, a svaku funkciju tih varijabli zvat ćemo *faznom funkcijom* (Hamiltonova funkcija je primjer fazne funkcije). Radi jednostavnosti zapisa uzet ćemo i da je $t_0 = 0$.

Definirajmo još invarijantan dio $\Gamma' \subseteq \Gamma$ kao svaki podskup faznog prostora koji se tokom prirodnog gibanja transformira u samog sebe.

Svako neprekidno preslikavanje faznog prostora u samog sebe ne mora biti njegovo prirodno gibanje, budući da ono ima i neka dodatna svojstva koja opisuju sljedeća dva teorema.

Teorem 1. (Liouville) *Neka je M (u smislu Lebesguea) izmjeriv skup točaka faznog prostora Γ danog mehaničkog sustava, koji u prirodnom gibanju faznog prostora u vremenu t prelazi u $M_t \subseteq \Gamma$. Tada vrijedi:*

$$\lambda(M) = \lambda(M_t) ,$$

gdje je s λ označena Lebesqueova mjera (volumen) na $\mathbf{R}^{2s}$.

Dem. Uvedimo nove oznake radi jednostavnosti:

$$x_i = q_i, \qquad x_{s+i} = p_i \ ,$$

$$X_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad X_{s+i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ ,$$

za $i = 1, 2, \cdots, s$.

U novim oznakama raspisane jednadžbe (1) glase

(2)
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2, \cdots, x_{2s}) \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{dx_{2s}}{dt} = X_{2s}(x_1, x_2, \cdots, x_{2s}) \ , \end{cases}$$

odakle primjenom Schwarzovog teorema o simetriji derivacije slijedi

$$\sum_{i=1}^{2s} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \ .$$

Ako su $x_i^{(0)} (i = 1, 2, \cdots, s)$ početne vrijednosti varijabli x_i (u trenutku 0), onda je jedinstveno rješenje sustava (2) sljedećeg oblika:

$$x_i = f_i(t; x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_{2s}^{(0)}) \ .$$

U integralu

$$\lambda(M_t) = \int_{M_t} dx_1 \cdots dx_{2s}$$

zamijenimo varijable stavljajući:

$$x_i = f_i(t; y_1, \cdots, y_{2s}) \ ,$$

gdje t shvaćamo kao pomoćni parametar.

Budući da je $(y_1, \cdots, y_{2s}) \in M$ ako i samo ako je $(x_1, \cdots, x_{2s}) \in M_t$, vrijedi da je

$$\lambda(M_t) = \int_M J(t; y_1 \cdots y_{2s}) dy_1 \cdots dy_{2s} \ ,$$

gdje je s J označen jakobijan

$$J(t; y_1, \cdots, y_{2s}) = \frac{\partial(x_1 \cdots x_{2s})}{\partial(y_1, \cdots, y_{2s})} \ .$$

Deriviranjem po parametru t dobivamo

(3)
$$\frac{d\lambda(M_t)}{dt} = \int_M \frac{\partial J}{\partial t} dy_1 \cdots dy_{2s} \ .$$

Vrijednost $\frac{\partial J}{\partial t}$ možemo izračunati pomoću pravila za derivaciju determinante. Na taj način imamo da je:

(4)
$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2s} J_i$$

pri čemu je

$$J_i = \frac{\partial(x_1, \cdots, x_{i-1}, \frac{\partial x_i}{\partial t}, x_{i+1}, \cdots, x_{2s})}{\partial(y_1, \cdots, y_{2s})} \qquad (1 \le i \le 2s).$$

Zbog toga što su x_i funkcije samo po varijabli t i relacije (2) imamo da je:

$$J_i = \frac{\partial(x_1, \cdots, x_{i-1}, X_i, x_{i+1}, \cdots, x_{2s})}{\partial(y_1, \cdots, y_{2s})} \qquad (1 \le i \le 2s) \ .$$

Međutim,

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_k} = \sum_{r=1}^{2s} \frac{\partial X_i}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_k} \qquad (1 \le i \le 2s, 1 \le k \le 2s) \ ,$$

$$J_i = \sum_{r=1}^{2s} \frac{\partial X_i}{\partial x_r} \frac{\partial(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_r, x_{i+1}, \cdots, x_{2s})}{\partial(y_1, \cdots, y_{2s})} \ .$$

U gornjoj sumaciji jedino je član uz $r = i$ različit od nule, pa je

$$J_i = J \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \ .$$

Uvrštavajući taj izraz u (4) dobijemo

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \sum_{i=1}^{2s} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \ .$$

Sada zbog (3) vrijedi:

$$\frac{d\lambda(M_t)}{dt} = 0 \ .$$

Q.E.D.

Gledajmo sada točku $P \in \Gamma$. U prirodnom gibanju kroz vremenski interval t ona prelazi u jedinstveno određenu točku, koju ćemo označavati s P_t. Za proizvoljnu faznu funkciju f definirajmo funkciju f_1 na $\mathbf{R} \times \Gamma$ izrazom:

$$f_1(t, P) = f(P_t) \ .$$

Neka je M Lebesque–izmjeriv podskup konačne mjere faznog prostora, a f fazna funkcija Lebesque–integrabilna na Γ. Zamjenom varijabli dobivamo sljedeće jednakosti:

$$\int_{M_t} f(P) dV_t = \int_M f(P_t) dV = \int_M f_1(t, P) dV \ .$$

Zbog Liouvilleovog teorema je $dV = dV_t$, pa slijedi:

$$\int_{M_t} f(P) dV = \int_M f_1(t, P) dV \ .$$

U slučaju da je M invarijantan skup ($M_t = M$) imamo:

$$\int_M f(P) dV = \int_M f_1(t, P) dV \ .$$

Teorem 2. (Birkhoff) *Neka je M Lebesque–izmjeriv podskup konačne mjere u faznom prostoru, a f Lebesque–integrabilna fazna funkcija na M. Tada za skoro svaku točku $P \in M$ postoji limes*

$$\lim_{C \to \infty} \frac{1}{C} \int_0^C f_1(t, P) dt \ ,$$

a taj limes postoji skoro svuda i kad $C \to -\infty$. ∎

Veličina $(1/C)\int_0^C f_1(P,t)dt$ je srednja vrijednost funkcije f duž trajektorije koja prolazi kroz P, u vremenskom intervalu $\langle 0, C\rangle$. Limes ove vrijednosti kad $C \to \infty$ zovemo *vremenskim usrednjenjem* funkcije f na trajektoriji kroz točku P. Drugačije iskazano, Birkhoffov teorem kaže da za integrabilnu funkciju postoji vremensko usrednjenje na trajektoriji koja u času $t = 0$ prolazi kroz P, za skoro svaki P. Dokaz teorema se može naći u [H, str. 20].

Proučimo sada jedan primjer fazne funkcije. S fizičkog stanovišta najvažnija fazna funkcija je energija $E(q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)$.

U izoliranom mehaničkom sustavu energija je konstantna. To znači da je za svaki $a \in \mathbf{R}$ skup $E^{\leftarrow}(a)$ invarijantan podskup od Γ; takve podskupove ćemo zvati *površine konstantne energije*.

Uvedimo oznaku Σ_x za površinu konstantne energije $E = x$.

Pretpostavit ćemo da za naš mehanički sustav vrijede sljedeće četiri pretpostavke koje su obično ispunjene u sustavima razmatranim u statističkoj mehanici:

1) Nenegativnost funkcije E. Taj se zahtjev može uvijek ispuniti namještanjem aditivne konstante u formuli za potencijalnu energiju.
2) Dio faznog prostora definiranog nejednakošću $E < x$ je jednostruko povezano područje ograničeno površinom Σ_x.
3) Σ_x je zatvoren i dovoljno gladak skup.
4) Za $x_1 < x_2$ je Σ_{x_1} unutar područja omeđenog sa Σ_{x_2}, pa familiju $(\Sigma_x, x \in \mathbf{R}_0^+)$ možemo predočiti familijom koncetričnih sfera.

Osim ovih pretpostavki u mehaničkom sustavu vrijedi i to da je ukupna energija podudarna s Hamiltonovom funkcijom.

Zbog zakona sačuvanja energije za $M \subseteq \Sigma_x$ vrijedi i $M_t \subseteq \Sigma_x, t \in \mathbf{R}$; . Problem s kojim se sada suočavamo je definiranje mjere na Σ_x. Naime, ako za $M \subseteq \Sigma_x$ definiramo mjeru

$$m(M) := \int_M d\Sigma \,,$$

onda ta mjera neće biti invarijantna s obzirom na prirodno gibanje, to jest za nju neće vrijediti Birkhoffov i Liouvilleov teorem. Zato želimo uvesti novu mjeru na Σ_x.

Razmotrimo sada dvije infinitezimalno bliske površine Σ_x i $\Sigma_{x+\Delta x}$, a skup omeđen njima označimo s D. Tada je zbog Liouvilleovog teorema volumen

$$\int_D dV$$

invarijantan s obzirom na prirodno gibanje.

Označimo s n normalu na površinu Σ_x. Gornji se integral može napisati na sljedeći način:

$$\int_D dV = \int_x^{x+\Delta x} \int_M d\Sigma dn$$

i vrijedi

$$\int_x^{x+\Delta x} \int_{M_t} d\Sigma dn = \int_x^{x+\Delta x} \int_M d\Sigma dn \,. \tag{5}$$

Kako je $dx_i = \cos(n, x_i)dn$, to imamo

$$\Delta x = dE = \sum_{i=1}^{2s} \frac{\partial E}{\partial x_i} dx_i = \sum \frac{\partial E}{\partial x_i} \cos(n, x_i) dn \,.$$

Zbog

$$\cos(n, x_i) = \frac{\partial E/\partial x_i}{|\nabla E|}$$

vrijedi

$$dE = \frac{\sum_{i=1}^{2s}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i}\right)^2}{|\nabla E|} dn = |\nabla E| dn \;, \tag{6}$$

pa možemo definirati mjeru μ na $\sum_x$:

$$\mu(M) := \int_M \frac{d\Sigma}{|\nabla E|} \;.$$

Koristeći (5) i (6) vidimo da mjera μ zadovoljava Liouvilleov teorem, to jest

$$\mu(M_t) = \mu(M) \;. \tag{7}$$

Ukoliko želimo normirati mjeru μ, tada je možemo predefinirati na sljedeći način:

$$\mu_0(M) := \frac{\mu(M)}{\mu(\Sigma_x)} \;.$$

2. Liouvilleova jednadžba

Razmatrat ćemo slučaj plina s N molekula i uvesti funkciju gustoće ρ, definirane tako da integral

$$\int_D \rho(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}) d^s p \, d^s q$$

predstavlja broj molekula koje se u trenutku t nalaze u skupu $D \subseteq \Gamma$.

Funkcija gustoće zadovoljava Liouvilleovu jednadžbu:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right) = 0 \;.$$

Smisao jednadžbe je da prirodno gibanje točaka u faznom prostoru, shvaćeno kao gibanje fluida, ima svojstvo inkompresibilnosti toka.

Da bismo dokazali da Liouvilleova jednadžba vrijedi za funkciju ρ, uzmimo proizvoljni volumni element ω u Γ, i sa S označimo njegov rub. Tada vrijedi

$$\frac{d}{dt}\int_\omega \rho d\Gamma = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rho dS \;, \tag{8}$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinična normala na rub S, a $\mathbf{v}$ je $2s$-dimenzionalna *brzina*:

$$\mathbf{v} = (\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_s, \dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_s) \;.$$

Na osnovu teorema o divergenciji imamo:

$$\int_\omega \mathsf{div}\, \mathbf{v} \rho d\Gamma = -\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rho dS \;,$$

pa kombinirajući gornju relaciju s (8) i koristeći proizvoljnost skupa ω dobivamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathsf{div}\,(\rho \mathbf{v}) = 0 \ .$$

Raspisivanjem slijedi

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \mathsf{div}\,(\rho \mathbf{v}) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \cdot \dot{p}_i \right] + \sum_{i=1}^{s} \rho \left[\frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i \right] \ . \end{aligned}$$

Iz Hamiltonovog sustava jednadžbi slijedi da su članovi u drugoj sumaciji u zadnjoj jednakosti jednaki nuli, pa ona prelazi u Liouvilleovu jednadžbu i time je dokaz gotov.

3. Poincaréov teorem

Mehanički sustav zatvoren u konačni volumen s konačnom energijom će se u konačnom vremenu vratiti u proizvoljnu blizinu skoro svakog početnog stanja. Preciznije, vrijedi sljedeći

Teorem 3. (Poincaré) *Ako za proizvoljno malen $A \subseteq \Sigma_x \subseteq \Gamma$ s $B \subseteq A$ označimo skup svih točaka koje se ne vraćaju u A nakon što ga jednom napuste, onda je $\mu(B) = 0$.*

Dem. Označimo s $B_1, B_2, B_3, \ldots$ područja dobivena prirodnim gibanjem skupa B nakon vremena $t, 2t, \ldots$. Zbog definicije skupa B možemo uzeti t dovoljno velik tako da je $B \cap B_t = \emptyset$. Tvrdimo da je tada

$$(\forall n, k) \ , B_n \cap B_{n+k} = \emptyset \ .$$

U suprotnom bi činjenica da je $P \in B_n \cap B_{n+k}$ zbog nepresijecanja trajektorija povlačila da je $P \in B_{n-1} \cap B_{n+k-1}$ i dalje induktivno da je $P \in B \cap B_k$, što je u kontradikciji s definicijom skupa B.

Zbog (7) vrijedi da je $\mu(B) = \mu(B_1) = \ldots$, pa ako je $\mu(B) > 0$ slijedi da je mjera cijele energetske površine neograničena, što je u suprotnosti s pretpostavkom teorema, pa je zato

$$\mu(B) = 0 \ .$$

Q.E.D.

Vrijeme koje je potrebno sustavu da se vrati u početno stanje zove se *Poincaréov krug.*

II. Izvod Boltzmannove jednadžbe

1. Fazni prostor i Liouvilleova jednadžba za plin

U razmatranju plina s N molekula uvest ćemo $6N$-dimenzionalni vektor $\mathbf{z}$ koji se sastoji od komponenata vektora položaja $\mathbf{x}_i$ i brzina $\boldsymbol{\xi}_i$ čestica, te $6N$-dimenzionalni vektor $\mathbf{Z}$ koji se sastoji od komponenata brzina $\boldsymbol{\xi}_i$ i sila na česticu po jedinici mase $\mathbf{X}_i$. Pripadni fazni prostor je skup $\Gamma = \Omega^N \times \mathbf{R}^{3N}$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ dio prostora u kojem se gibaju čestice plina. Novouvedeni vektori $\mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}$ odgovaraju vektorima $\mathbf{q}$ i $\mathbf{p}$ iz Hamiltonovog sustava, a broj stupnjeva slobode s jednak je $3N$ (svakoj čestici pripadaju tri stupnja slobode). Mi ćemo razmatrati samo hamiltonijane oblika

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + V(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}) ,$$

gdje suma predstavlja kinetičku energiju sustava, a funkcija V potencijalnu energiju. U daljnjem radu ćemo pretpostavljati fizikalnu situaciju u kojoj možemo zanemarivati potencijalnu energiju, to jest uzet ćemo $V = 0$, pa Hamiltonove jednadžbe poprimaju sljedeći oblik:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} . \end{cases}$$

Zadnja jednadžba iskazuje činjenicu da u našem sustavu nisu prisutne sile. Pomoću vektora $\mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}$ gornji sustav jednadžbi se može zapisati na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z} , \tag{1}$$

što je upravo Newtonov sustav jednadžbi gibanja, koji je sustav običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda, pa vrijednost rješenja $\mathbf{z}$ u početnom trenutku određuje vrijednost rješenja $\mathbf{z}$ u svakom drugom trenutku.

Ako ne znamo početne vrijednosti s apsolutnom točnošću, moramo uvesti vjerojatnosnu distribuciju $P(t, \mathbf{z})$, koja predstavlja gustoću vjerojatnosti nalaženja točke u faznom prostoru u trenutku t. Preciznije, vjerojatnost nalaženja točke $\mathbf{z}$ u skupu $D \subseteq \Gamma$ u trenutku t jednaka je integralu

$$\int_D P(t, \mathbf{z}) d\mathbf{z} .$$

Imajući zadanu početnu vjerojatnosnu distribuciju $P_0 := P(0, \mathbf{z})$, želimo izračunati distribucije $P(t, \mathbf{z})$ u kasnijim trenucima. Da bismo to postigli, potrebno je odrediti evolucijsku jednadžbu za $P(t, \mathbf{z})$.

Intuitivan način na koji se to može postići je sljedeći. Na vjerojatnosnu distribuciju možemo gledati kao na gustoću naše točke u faznom prostoru, pa zakon sačuvanja mase daje

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathsf{div}\,(P\mathbf{Z}) = 0 .$$

Koristeći relaciju

$$\mathsf{div}\,(P\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} P + P \mathsf{div}\,\mathbf{Z} ,$$

međusobnu neovisnost varijabli prostora i brzine, te odsustvo sila, imamo

$$\mathsf{div}\,\mathbf{Z} = \sum (\mathsf{div}_{\mathbf{x}_i} \boldsymbol{\xi}_i + \mathsf{div}_{\boldsymbol{\xi}_i} \mathbf{X}_i) = 0 .$$

Iz gornjih relacija slijedi Liouvilleova jednadžba:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{Z} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} P = 0 .$$

Relacija (1) jedinstveno određuje prirodno gibanje faznog prostora, pa je zato svakoj točki $\mathbf{z}_0$ pridružena jedinstvena točka $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ u koju se $\mathbf{z}$ preslika u vremenskom intervalu t. Prirodno gibanje, kako je pokazano u prvom poglavlju, zadovoljava Liouvilleov teorem:

$$\int_R d\mathbf{z} = \int_{R_0} J(\mathbf{z}/\mathbf{z}_0) d\mathbf{z}_0 = \int_{R_0} d\mathbf{z}_0 \ , \tag{2}$$

koji slijedi iz činjenice da je $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$ i $J(\mathbf{z}_0/\mathbf{z}_0) = 1$.

Liouvilleova jednadžba i teorem su oboje izvedeni uz pretpostavku glatkoće funkcija $\mathbf{z}$ i $\mathbf{Z}$. Međutim, često je korisno razmatrati granični slučaj u kojem sustav ima samo diskretna međudjelovanja s konačnim impulsima, što je dobra aproksimacija za jake odbojne sile kojima molekule međusobno djeluju na veoma malim udaljenostima. Ovakva razmatranja dovode do pojma plina satavljenog od čvrstih lopti, tzv. biljarskih kugli, koje međusobno ne djeluju na dovoljno velikoj udaljenosti, a pri sudaru se elastično odbijaju. Promjer molekula σ tada odgovara dometu međumolekularne odbojne sile. Ovakva interpretacija nam kvari glatkoću funkcija $\mathbf{z}$ i $\mathbf{Z}$, koje više nisu ni neprekidne jer prilikom sudara molekula dolazi do trenutne promjene njihovih brzina. Pokazat ćemo da usprkos tome Liouvilleov teorem sačuvanja volumena i dalje vrijedi. Dokaz se zasniva na činjenici da jakobijan transformacije varijable $\mathbf{z}$ prilikom sudara ostaje jednak 1. Pogledajmo to detaljnije.

U sudaru dvije identične kugle, njihove brzine $(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')$ prije i $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ poslije sudara su povezane relacijama:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 &= \boldsymbol{\xi}_1' - \mathbf{n}[\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\xi}_1' - \boldsymbol{\xi}_2')] \\ \boldsymbol{\xi}_2 &= \boldsymbol{\xi}_2' - \mathbf{n}[\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\xi}_2' - \boldsymbol{\xi}_1')] \ , \end{aligned} \tag{3}$$

gdje je $\mathbf{n}$ jedinični vektor u smjeru vektora koji spaja središta dviju kugli. Relacije se dobiju iz zakona sačuvanja energije i impulsa.

Lako se provjeri da su relacije reverzibilne, tj. da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1' &= \boldsymbol{\xi}_1 - \mathbf{n}[\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2)] \\ \boldsymbol{\xi}_2' &= \boldsymbol{\xi}_2 - \mathbf{n}[\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1)] \ . \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da se komponente brzina dviju čestica prilikom sudara linearno transformiraju. Matricu te transformacije označimo s $\mathbf{A}$. Njen inverz $\mathbf{A}^{-1}$ je jednak $\mathbf{A}$, pa je zato $\mathbf{A}^2$ jedinična matrica. Njezina determinanta, odnosno jakobijan transformacije koordinata brzina J_1 je zato jednak ± 1. Pokazat ćemo da je on upravo jednak -1.

Uvedimo sljedeću transformaciju varijabli:

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_1' + \boldsymbol{\xi}_2'), \quad \overline{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) \ ,$$

$$\mathbf{V}' = \boldsymbol{\xi}_1' - \boldsymbol{\xi}_2', \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2 \ .$$

Nove varijable odgovaraju brzinama centara mase, odnosno relativnim brzinama dviju čestica, prije i poslije sudara.

Koristeći (3) vidimo da su nove varijable međusobno povezane relacijama

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\xi}} &= \overline{\boldsymbol{\xi}}' \\ \mathbf{V} &= \mathbf{V}' - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \ . \end{aligned}$$

Jakobijan ove transformacije je očigledno -1. Ako s J_0 označimo jakobijan transformacija $(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2') \mapsto (\overline{\boldsymbol{\xi}}', \mathbf{V}')$ i $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \mapsto (\overline{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V})$ (one očigledno imaju jednake Jakobijane), dobijemo za jakobijan transformacije (3):

$$\begin{aligned} J_1 &= J(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 | \boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2') = J(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 | \overline{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V}) J(\overline{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{V} | \overline{\boldsymbol{\xi}}', \mathbf{V}') J(\overline{\boldsymbol{\xi}}', \mathbf{V}' | \boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2') \\ &= (1/J_0) \cdot (-1) \cdot J_0 = -1 \ . \end{aligned}$$

Jakobijan transformacije J varijable $\mathbf{z}$ prilikom sudara jednak je produktu Jakobijana J_1 i J_2 koji odgovaraju transformaciji varijabli brzine i položaja (zbog nezavisnosti varijabli $\mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}$).

Činjenica da je $J_2 = -1$ može se intuitivno dosta lako prihvatiti, heuristički je to izvedeno u [C, str. 17], dok se strogi dokaz toga može naći u [S, str. 1297].

Pokazali smo da je $J_1 = -1$ i pozvat ćemo se na to da je $J_2 = -1$, pa je $J = 1$, čime smo dokazali sačuvanje volumena u faznom prostoru.

Uzmimo proizvoljan skup $D_0 \subseteq \Gamma$ i sa D označimo njegovu sliku u prirodnom gibanju faznog prostora, tj. $D = T^t D_0$. Vjerojatnost da je $\mathbf{z}_0 \in D_0$ jednaka je vjerojatnosti $\mathbf{z} = T^t \mathbf{z}_0 \in D$, pa koristeći transformaciju varijabli dobivamo:

$$\int_{D_0} P_0(\mathbf{z}_0) d\mathbf{z}_0 = \int_D P(t, \mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{D_0} P(t, T^t \mathbf{z}_0) J(\mathbf{z}/\mathbf{z}_0) d\mathbf{z}_0 \ .$$

Zbog proizvoljnosti skupa D_0 lokalizacijom slijedi:

$$P(t, T^t \mathbf{z}_0) J(\mathbf{z}/\mathbf{z}_0) = P_0(\mathbf{z}_0) \ .$$

Pokazali smo da je $J(\mathbf{z}/\mathbf{z}_0) = 1$, što nam daje

$$P(t, T^t \mathbf{z}_0) = P_0(\mathbf{z}_0) \ ,$$

tj. funkcija P je konstantna na trajektoriji svake točke i vrijedi Liouvilleova jednadžba:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\xi}_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} P = 0 \ . \tag{4}$$

Gornju jednadžbu moramo nadopuniti odgovarajućim početnim i rubnim uvjetima. Početni uvjeti su zadani funkcijom distribucije P_0 u trenutku $t = 0$. Rubni uvjeti se moraju zadati čak i ako naš plin nije zatvoren u neki konačni volumen, jer su područja koja odgovaraju preklapanju dviju kugli isključena iz faznog prostora. Zato moramo predefinirati fazni prostor $\Gamma = \Omega^N \times \mathbf{R}^{3N}$, isključujući iz njega sve točke koje zadovoljavaju

$$(\exists i, j \in \{1, 2, \cdots, N\}) \quad i \neq j \quad \& \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < \sigma \ ,$$

gdje je σ promjer svake kugle.

Na rubovima isključenih područja moramo zadati rubne uvjete tako da P ostane konstanta na trajektoriji. Budući da funkcija brzine ima prekid na rubu, moramo zahtijevati da P poprima istu vrijednost u $\mathbf{z}'$ i $\mathbf{z}$, gdje $\mathbf{z}'$ i $\mathbf{z}$ predstavljaju točke na rubu koje odgovaraju stanju sustava prije i poslije sudara. Detaljnije:

$$\begin{aligned} &P(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots, \mathbf{x}_j, \boldsymbol{\xi}_j, \cdots, \mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_N) = \\ &P(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\xi}_i - \mathbf{n}_{ij}(\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{V}_{ij}), \cdots, \mathbf{x}_j, \boldsymbol{\xi}_j + \mathbf{n}_{ij}(\mathbf{n}_{ij} \cdot \mathbf{V}_{ij}), \cdots, \mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_n) \end{aligned} \tag{5}$$

za

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = \sigma \quad (i \neq j) ,$$

gdje je $\mathbf{V}_{ij} = \boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\xi}_j$, a $\mathbf{n}_{ij}$ jedinični vektor u smjeru vektora koji spaja središta i-te i j-te kugle.

U slučaju da se Ω ne sastoji od cjelokupnog prostora $\mathbf{R}^3$, moramo zadati i rubne uvjete na granici koja zatvara naš plin. Najčešće se tu zadaju uvjeti zrcalne refleksije ($\boldsymbol{\xi}_i' = \boldsymbol{\xi}_i - \mathbf{n}_i(\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_i)$), a njihovo fizičko značenje odgovara elastičnom srazu sa stijenkom.

2. Heuristički izvod Boltzmannove jednadžbe

Liouvilleova jednadžba, koju smo dosad razmatrali, ne može se koristiti u praktičnom računu zbog velikog broja varijabli (reda 10^{20}). To su imali na umu Maxwell i Boltzmann kad su počeli raditi s funkcijom distribucije jedne čestice $P^{(1)}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. Ta funkcija zavisi samo od sedam varijabli, to jest komponenata vektora položaja $\mathbf{x}$ i brzine $\boldsymbol{\xi}$ i vremena t. Boltzmann je pomoću heurističkih argumenata izveo jednadžbu za $P^{(1)}$ i sada ćemo prikazati taj izvod.

Prvo ćemo precizno definirati funkciju $P^{(1)}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$; ona predstavlja vjerojatnost nalaženja fiksne čestice (označimo je s 1) u točki $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \Gamma$ u trenutku t. $P^{(1)}$ i P su povezane jednostavnom relacijom

$$P^{(1)}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega^{N-1} \times \mathbf{R}^{3N-3}} P(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}_N) d\mathbf{x}_2 d\boldsymbol{\xi}_2 \cdots d\mathbf{x}_N d\boldsymbol{\xi}_N .$$

U odsutnosti sudara $P^{(1)}$ također zadovoljava jednadžbu (4) kao i P (s jedinom razlikom da moramo uzeti $N = 1$). Ostaje nam izračunati posljedice sudara na evolucijsku jednadžbu za $P^{(1)}$. Vjerojatnost sudara naše fiksne čestice bit će povezana s vjerojatnošću nalaženja bilo koje druge čestice s centrom udaljenim od centra prve čestice točno σ. Iz toga zaključujemo da će nam u evolucijskoj jednadžbi za $P^{(1)}$ trebati uvrstiti novu funkciju $P^{(2)}$, koja određuje vjerojatnosnu distribuciju za dvije fiksne čestice. $P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2)$ dakle predstavlja vjerojatnost (točnije gustoću vjerojatnosti) nalaženja prve čestice u točki $(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1)$ i druge u $(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2)$ u trenutku t. Definirajmo uz to funkcije L i G na sljedeći način. Za $D \subseteq \Gamma$ integral

$$\int_D \int_t^{t+h} L ds d\mathbf{x}_1 d\boldsymbol{\xi}_1$$

predstavlja očekivani broj čestica u dijelu faznog prostora D, koje u vremenskom intervalu h napuste taj dio faznog prostora. Na sličan način se definira funkcija G takva da

$$\int_D \int_t^{t+h} G ds d\mathbf{x}_1 d\boldsymbol{\xi}_1$$

predstavlja očekivani broj čestica koje u vremenskom intervalu h uđu u dio faznog prostora D. Tada za $P^{(1)}$ vrijedi sljedeća jednakost:

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} P = G - L . \tag{6}$$

Jasno je da za dovoljno mali skup D i vremenski interval h, čestica koja se nalazi u D će napustiti taj skup prilikom svakog sudara, pa ono što treba izračunati je vjerojatnost sudara čestice 1 s bilo kojom drugom česticom. Budući da preostalih čestica ima $N - 1$, i one su identične, dovoljno je računati vjerojatnost sudara s jednom određenom česticom koju ćemo zvati čestica 2.

U računu ćemo se poslužiti jednostavnim trikom; česticu 1 ćemo zamisliti kao stacionarnu kuglu s dvostruko većim promjerom od stvarnog, a česticu 2 kao točku s brzinom $\mathbf{V}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1$. Neka je $\mathbf{x}_2$ točka na sferi radijusa σ s centrom u $\mathbf{x}_1$ i neka je $\sigma\mathbf{n}$ vektor koji spaja $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$, pri čemu je $\mathbf{n}$ jedinični vektor. Nadalje, neka je $dS = \sigma^2 d\mathbf{n}$ infinitezimalno područje na sferi oko $\mathbf{x}_2$ ($d\mathbf{n}$ je infinitezimalno područje na sferi oko vrha vektora $\mathbf{n}$). Čestica 2 s brzinom $\boldsymbol{\xi}_2$ će pogoditi područje dS na sferi u vremenskom intervalu dt samo ako se nalazi u cilindru visine $|\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}|dt$ s bazom dS. Zato je vjerojatnost sudara čestica 1 i 2 na dijelu sfere dS s vrijednostima unutar intervala $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_1], [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1 + d\boldsymbol{\xi}_1], [\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 + d\mathbf{x}_2], [\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_2 + d\boldsymbol{\xi}_2], [t, t + dt]$ jednaka $P(2)(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) d\mathbf{x}_1 d\boldsymbol{\xi}_1 d\boldsymbol{\xi}_2 \sigma^2 d\mathbf{n} |\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}| dt$. Ako želimo izračunati ukupnu vjerojatnost sudara moramo integrirati brzinu $\boldsymbol{\xi}_2$ po $\mathbf{R}^3$ i položaj $\mathbf{x}_2$ po dijelu sfere na kojem je $\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n} < 0$ (čestice se kreću jedna prema drugoj, tj. doći će do sudara), pa dobivamo

$$L = (N-1) \int_{\mathbf{R}^3} \int_{S_-} P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_1 + \sigma\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) |\mathbf{V}_2 \cdot n| \sigma^2 d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_2 ,$$

gdje je sa S_- označena hemisfera na kojoj je $\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n} < 0$.

Na analogni način se nalazi izraz za funkciju G, s time da se sada gledaju brzine $\boldsymbol{\xi}_1$ i $\boldsymbol{\xi}_2$ poslije sudara, pa moramo integrirati po hemisferi S_+ definiranoj relacijom $\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n} > 0$. Tako dobijemo

$$G = (N-1) \int_{\mathbf{R}^3} \int_{S_+} P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_1 + \sigma\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) |\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}| \sigma^2 d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_2 .$$

Sada jednadžbu (6) možemo zapisati u obliku:

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} P = (N-1) \int_{\mathbf{R}^3} \int_{S} P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_1 + \sigma\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n} \sigma^2 d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_2 .$$

U gornjem integralu smo ispustili apsolutnu vrijednost, a umjesto po hemisferi integriramo po cijeloj sferi S.

Gornja jednadžba još uvijek nam nije od velike koristi. Ono što se želi dobiti je jednadžba koja će sadržavati samo funkciju $P^{(1)}$. Tu jednadžbu je napisao Boltzmann i ona nosi njegovo ime.

Sljedeće što ćemo iskoristiti je neprekidnost vjerojatnosne distribucije P prilikom sudara. Stavljajući $i = 1$ i $j = 2$ u jednakost (5) i integrirajući po vektorima brzine i položaja preostalih $N-2$ čestica, dobijemo:

$$P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2) = P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1 - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}), \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2 + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}))$$

za $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = \sigma$, pri čemu smo $\mathbf{V}$ pisali umjesto $\mathbf{V}_{12}$, a $\mathbf{n}$ umjesto $\mathbf{n}_{12}$. Radi kraćeg zapisa, koristit ćemo oznake

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1' &= \boldsymbol{\xi}_1 - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \\ \boldsymbol{\xi}_2' &= \boldsymbol{\xi}_2 + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) . \end{aligned} \tag{7}$$

Koristeći gornje relacije možemo ovako pisati izraz za funkciju G poprima oblik:

$$G = (N-1)\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^3} \int_{S_+} P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1', \mathbf{x}_1 + \sigma\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2') |\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{n}| d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_2 . \tag{8}$$

U ovom trenutku potrebno je uvesti dodatne pretpostavke, Boltzmannove argumente. U razrijeđenom plinu broj čestica N je veoma velik, a σ malen. Na primjer uzmimo da imamo plin zatvoren u kutiju volumena 1 cm^3 pri sobnoj temperaturi i pri atmosferskom tlaku. Tada je $N \cong 10^{20}$ i $\sigma \cong 10^{-8}$cm, pa procjenjujemo da je $(N-1)\sigma^2 \cong N\sigma^2 = 1$ m^2, što je značajna veličina, dok razliku između $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x} + \sigma\mathbf{n}$ možemo zanemariti. Zato ćemo koristiti tzv. Boltzmann-Gradov limes pri kojem $N \to \infty$, $\sigma \to 0$, a $N\sigma^2$ ostaje konstantan.

Osim toga, budući da volumen koji zauzimaju čestice iznosi $N\sigma^3 \cong 10^{-4}$ cm^3, sudar dviju određenih čestica je malo vjerojatan slučaj. Zato se za čestice prije sudara može pretpostaviti da su statistički neovisne, tj. da za njih vrijedi relacija

$$P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2) = P^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) P^{(1)}(t, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2) \ ,$$

ili preciznije zapisano

$$P^{(2)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{x}_1 + \sigma\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_2) = P^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) P^{(1)}(t, \mathbf{x}_1 + \sigma\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}_2)$$

za

$$(\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1) \cdot n < 0 \ .$$

Naravno, pretpostavka o statističkoj neovisnosti se ne može proširiti i na čestice koje su se upravo sudarile. Ovo sad možemo primijeniti na izraz za L, budući da se tu razmatraju čestice koje se tek trebaju sudariti. Problem je kako primijeniti statističku neovisnost na izraz za funkciju G. Rješenje se nalazi u pisanju izraza za G u obliku (8), budući da transformacija (7) preslikava hemisferu S^+ na hemisferu S^-.

Uzimajući u obzir sve Boltzmannove pretpostavke, dobivamo sljedeće izraze za funkcije G i L:

$$G = N\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^3} \int_{S_+} P^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1') P^{(1)}(t, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2') |(\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1) \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\xi}_2 d\mathbf{n} \ ,$$

$$L = N\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^3} \int_{S_-} P^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) P^{(1)}(t, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2) |(\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1) \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\xi}_2 d\mathbf{n} \ .$$

Uvrštavajući ove izraze u relaciju (6) konačno dobivamo Boltzmannovu jednadžbu:

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} P$$

$$= N\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^3} \int_{S_-} [P^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1') P^{(1)}(t, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2') - P^{(1)}(t, \mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1) P^{(1)}(t, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}_2)] |(\boldsymbol{\xi}_2 - \boldsymbol{\xi}_1) \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\xi}_2 d\mathbf{n} \ .$$

Boltzmannovu jednadžba je evolucijska jednadžba za $P^{(1)}$ koja u sebi ne sadrži $P^{(2)}$ i to je njena glavna prednost. Pisanje jednadžbe možemo sada pojednostavniti. Kao prvo možemo ispustiti indeks $^{(1)}$ koji nam više ne treba, a umjesto varijabli $\boldsymbol{\xi}_1$ i $\boldsymbol{\xi}_2$ pisat ćemo $\boldsymbol{\xi}$ i $\boldsymbol{\xi}_*$. Jednadžbu ćemo tada napisati na sljedeći način

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} P = N\sigma^2 \int_{\mathbf{R}^3} \int_{S_-} (P' P_*' - P P_*) |\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}| d\boldsymbol{\xi}_* d\mathbf{n} \ .$$

Treba pojasniti da je P funkcija od $t, \mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}$; P_* od $t, \mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}_*$; P_*' od $t, \mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}_*'$; a P' od $t, \mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}'$; gdje je

$$\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}), \quad \boldsymbol{\xi}_* = \boldsymbol{\xi}_* + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}), \quad \text{a} \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_* \ .$$

III. Pregled analitičkih rezultata

1. L^p prostori

Budući da ćemo rješenje Boltzmannove jednadžbe tražiti u prostoru L^1, najprije se nameće potreba iskazivanja definicije L^p prostora.

Za $p \in [1, \infty]$ *Lebesgueov prostor* $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ definiramo kao Banachov prostor svih (klasa skoro svuda jednakih) izmjerivih funkcija na $\mathbf{R}^d$, s normom

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p} := \left(\int_{\mathbf{R}^d} |u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}, p \in [1, \infty\rangle$$
$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} := \inf\{M \in \mathbf{R} : |u(\mathbf{x})| \leqslant M (\mathrm{ss}\, \mathbf{x})\} .$$

Analogno se definiraju L^p prostori i na svakom Lebesgue–izmjerivom podskupu $A \subseteq \mathbf{R}^d$.

Često ćemo koristiti i prostor $\mathrm{L}^p_{loc}(\mathbf{R}^d)$ kojeg sačinjavaju sve funkcije u sa svojstvom da se za svaki kompaktan skup K, njihova restrikcija na $K \subseteq \mathbf{R}^d$ nalazi u $\mathrm{L}^p(K)$. Tome je ekvivalentna tvrdnja da je za svaku funkciju $\psi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d)$ produkt $\psi u \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$. Umjesto proizvoljne funkcije ψ možemo se u definiciji ograničiti na prikladan niz takvih funkcija (ψ_n). Tada je s $\|u_n\| := \|\psi_n u\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)}$ dan niz polunormi koji određuju topologiju prostora $\mathrm{L}^p_{loc}(\mathbf{R}^d)$. S tom je topologijom $\mathrm{L}^p_{loc}(\mathbf{R}^d)$ Fréchetov prostor, odnosno potpun metrizabilan lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor.

Za eksponent p definiramo njegov *konjugirani eksponent* p' preko relacije:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

(formalno, $1/\infty = 0$, pa je $1' = \infty$).

Lema 1. *(***Hölderova nejednakost***) Neka je $p \in [1, \infty]$, a p' njegov konjugirani eksponent. Ako su f i g izmjerive funkcije na $\mathbf{R}^d$, onda vrijedi*

$$\|fg\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^d)} .$$

∎

Neka je $p \in [1, \infty]$, a p' pripadni konjugirani eksponent ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Po Hölderovoj nejednakosti svaki $g \in \mathrm{L}^{p'}$ određuje neprekinut linearni funkcional $G \in (\mathrm{L}^p)'$:

$$G(f) := \int f \bar{g} ,$$

Važno je da se na gornji način može prikazati svaki funkcional iz dualnog prostora $(\mathrm{L}^p)'$, štoviše ako su $p, p' \in \langle 1, \infty \rangle$ konjugirani eksponenti, onda vrijedi

$$(\forall \varphi \in (\mathrm{L}^p)')(\exists g \in \mathrm{L}^{p'})(\forall f \in \mathrm{L}^p) \quad \varphi(f) = \int fg$$

i

$$\|g\|_{\mathrm{L}^{p'}} = \|\varphi\|_{(\mathrm{L}^p)'} ,$$

pa je $(\mathrm{L}^p)'$ izometrički izomorfan s $\mathrm{L}^{p'}$. U tom slučaju se identificira dualni prostor $(\mathrm{L}^p)'$ s prostorom $\mathrm{L}^{p'}$. Ako je $p = 1$ ($p' = \infty$), rezultat vrijedi uz dodatnu pretpostavku da je μ σ-konačna mjera. Za $p = \infty$ vrijedi da njegov dual strogo sadrži L^1.

Na kraju navedimo još iskaz jednog teorema kojeg ćemo koristiti u sljedećim poglavljima.

Teorem 1. (**Egorov**) *Neka je* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *prostor konačne mjere, a* f_n *i* f *neka su izmjerive kompleksne funkcije na* X*. Ako* $f_n \longrightarrow f$ (ss), *onda*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, A \in \mathfrak{M}) \quad \mu(A) < \varepsilon \;\&\; f_n|_{X \setminus A} \rightrightarrows f|_{X \setminus A} \;.$$

∎

2. Distribucije

Za otvoreni skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ definirajmo $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ kao skup svih C^∞ funkcija čiji je nosač kompaktan. Posebno, ukoliko je $\Omega = \mathbf{R}^d$ pisati ćemo $\mathcal{D} = \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Sljedeći prostor koji ćemo uvesti je *Schwartzov prostor* $\mathcal{S}$ brzoopadajućih funkcija. U tu svrhu najprije definirajmo familije polunormi

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} &:= \|\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\beta}} \varphi\|_{\mathrm{C}} \;, \\ \|\varphi\|_k &:= \sup_{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \leqslant k} \|\varphi\|_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \;. \end{aligned}$$

Schwartzov prostor $\mathcal{S}$ je prostor svih C^∞ funkcija φ za koje je $\|\varphi\|_k < \infty$, za svaki $k \in \mathbf{N}_0$. Na njemu možemo definirati prirodnu topologiju kao najslabiju topologiju u kojoj su sve polunorme $\|\varphi\|_k$ neprekidne. Vrijedi da je Schwartzov prostor $\mathcal{S}$, zajedno s prirodnom topologijom Fréchetov prostor. Metrika na $\mathcal{S}$ se može zadati s

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|\varphi - \psi\|_k}{1 + \|\varphi - \psi\|_k} \;.$$

Nadalje, za svaki $p \in [1, \infty]$ je $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$.

Za dokaz osnovnog teorema u četvrtom poglavlju trebat će nam funkcije koje pomnožene s funkcijom iz $\mathcal{S}$ opet daju brzoopadajuću funkciju. U tu svrhu uvedimo skup funkcija *najviše polinomijalnog rasta u beskonačnosti*, kojeg označujemo s $\mathcal{O}$. Skup $\mathcal{O}$ definiramo na sljedeći način: $\varphi \in \mathcal{O} \subseteq \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ ako

$$(\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d)(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\exists\, n \in \mathbf{N})(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d) \quad |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\mathbf{x})| \leqslant C(1 + |\mathbf{x}|^2)^n \;.$$

Nama je važna činjenica da je $\mathcal{S}$ je zatvoren na množenje s funkcijama iz $\mathcal{O}$.

Posebno nas zanimaju topološki duali uvedenih prostora.

Za otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ definira se *distribucija* ili *poopćena funkcija* u na Ω kao linearan funkcional na $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ koji je neprekinut (ograničen) u sljedećem smislu (s $\mathcal{K}_\Omega$ označujemo klasu svih kompaktnih podskupova skupa Ω):

$$\begin{gathered} (\forall\, K \in \mathcal{K}_\Omega)(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\exists\, n \in \mathbf{N})(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)) \\ \operatorname{supp} \varphi \subseteq K \Longrightarrow |\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant n} \sup_{\mathbf{x} \in K} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\mathbf{x})| \;. \end{gathered}$$

Prostor distribucija na Ω je topološki dual prostora $\mathcal{D}(\Omega) = \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ i označujemo ga s $\mathcal{D}'(\Omega)$ (posebno je $\mathcal{D}' := \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)$).

Ako postoji broj $n_0 \in \mathbf{N}_0$ takav da gornja nejednakost vrijedi za svaki K s tim brojem namjesto n, onda je distribucija *konačnog reda*. Najmanji takav broj n_0 zovemo *redom distribucije* u. Distribucije reda nula nazivamo *Radonovim mjerama*. Prostor Radonovih mjera označuje se s $\mathcal{M}$ i on je u dualnosti s prostorom C_c.

Specijalan primjer distribucije je Diracova masa, δ_a, definirana na sljedeći način:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a) \ .$$

Dual prostora $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ se sastoji od takozvanih *temperiranih distibucija*. To su linearni funkcionali na $\mathcal{S}$ neprekinuti u sljedećem smislu

$$(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\exists\, N \in \mathbf{N})(\forall\, \varphi \in \mathcal{S}) \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C\|\varphi\|_N \ .$$

Za uvedene prostore vrijedi sljedeći niz relacija

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}' \ .$$

Definirajmo sada neka preslikavanja na prostoru $\mathcal{S}$ koja ćemo koristiti u dokazu osnovnog teorema.

Za proizvoljnu funkciju $u \in \mathcal{S}$ možemo definirati Fourierovu pretvorbu $\mathcal{F}u := \hat{u}$ formulom:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \ .$$

Pretvorba $\hat{u}$ je ograničena i neprekinuta funkcija iz $\mathcal{S}$. Nas će zanimati moguća proširenja Fourierove pretvorbe $\mathcal{F}$.

Teorem 2. (**Plancherel**) *Fourierova se pretvorba na jedinstven način proširuje sa $\mathcal{S}$ do unitarnog operatora s $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ na samog sebe.* ∎

Štoviše, za $1 \leqslant p \leqslant 2$, Fourierova pretvorba se proširuje do ograničenog linearnog operatora s $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ u $\mathrm{L}^{p'}(\mathbf{R}^d)$, norme manje ili jednake 1.

Za $f, g \in \mathcal{S}$ definiramo *konvoluciju* $f * g$ formulom

$$(f * g)\,(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \ .$$

Za svaku funkciju $f \in \mathcal{S}$, preslikavanje $g \mapsto f * g$ je neprekinuto preslikavanje prostora $\mathcal{S}$ na samog sebe. Značajno je da kod deriviranja konvolucije možemo prebaciti derivaciju na bilo koju njenu komponentu, točnije rečeno vrijedi da za svaki $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ je $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(f * g) = (\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f) * g = f * (\partial^{\boldsymbol{\alpha}} g)$.

Poznavajući Fourierovu pretvorbu, možemo definirati Soboljevljev prostor H^s, $s \in \mathbf{R}^+$ (koji se još označuje i s $\mathrm{W}^{s,2}(\mathbf{R}^d)$) kao skup svih izmjerivih funkcija $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ za koje vrijedi:

$$\|u\|^2_{\mathrm{H}^s} := \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s |\hat{u}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} < \infty \ .$$

Niz funkcija (ρ_n) je *izglađujući niz* ako vrijedi:

i) $\operatorname{supp} \rho_n \to \{0\}$

ii) $\int |\rho_n(x)| dx \leqslant C$ i $\int \rho_n(x) dx \to 1$.

Posebno, za

$$\rho(x) := \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & , |x| \leqslant 1 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

(C je konstanta birana tako da je $C \int e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dx = 1$), definiramo izglađujući niz $\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$.

Svaki izglađujući niz konvergira slabo * u Radonovim mjerama k Diracovoj mjeri δ_0, to jest za svaku funkciju φ iz prostora $\mathrm{C}_c(\mathbf{R}^d)$ $\langle \rho_n, \varphi \rangle \to \varphi(0)$.

3. Slaba kompaktnost u L^p

Podsjetimo se Dunford-Pettisovog kriterija slabe kompaktnosti u L^1. Neka je $(f_n)_{n\in N}$ niz u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$. Tada je slaba (nizovna) kompaktnost niza $(f_n)_{n\in N}$ ekvivalentna sljedećim tvrdnjama:

a) (f_n) je ograničen u $L^1(\mathbf{R}^d)$.

b) $(\forall\epsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,\big(\forall E\in\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)\big)$

$$\lambda(E)<\delta \Rightarrow \sup_n \int_E |f_n| d\mathbf{x} \leqslant \epsilon\ .$$

c) $(\forall\epsilon>0)\,\big(\exists K\in\mathcal{K}(\mathbf{R}^d)\big)$

$$\sup_n \int_{\mathbf{R}^d\setminus K} |f_n| d\mathbf{x} \leqslant \epsilon\ .$$

Mi ćemo upotrebljavati kriterij na sljedeći način. Ako su $h\in \mathrm{C}(\mathbf{R}^+;\mathbf{R}^+)$ i $\omega\in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}^+)$ takvi da $\lim_{t\to\infty}\frac{h(t)}{t}=\infty$ i $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\omega(\mathbf{x})=\infty$, onda nejednakost

$$\sup_n \int_{\mathbf{R}^d} [h(|f_n|)+|f_n|(1+\omega)] d\mathbf{x} < \infty \tag{1}$$

povlači da (f_n) zadovoljava (a) - (c).

Osnovni problem sa slabom kompaktnošću je što nelinearne funkcije nisu općenito slabo neprekidne. Standardni primjer toga je niz $\sin(nx)\cdot\chi_{[0,1]}(x)$, koji konvergira slabo u 0, dok niz $\sin(nx)^2\cdot\chi_{[0,1]}(x)$ konvergira k $\frac{1}{2}\chi_{[0,1]}(x)$. Međutim, korisno je što su konveksne funkcije barem odozdo poluneprekidne. Ako je $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ konveksna i ako $f_n\rightharpoonup f$ u L^1, onda je

$$\int F\circ f dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} F\circ f_n dx\ .$$

Dokaz toga se može naći u [D, str. 74].

Činjenica koju ću koristiti je da za slabo konvergentan niz funkcija $f_n\rightharpoonup f$ u L^1, i omeđen niz funkcija (g_n)u L^∞, takvih da $g_n\to g$ (ss) , vrijedi da je niz produkata $f_n g_n$ slabo konvergentan u L^1; štoviše,

$$f_n g_n \rightharpoonup fg \quad \text{u } L^1\ . \tag{2}$$

Dokaz se zasniva na pomoćnoj tvrdnji, koja uz gore navedene uvjete, tvrdi da za svaki $\epsilon>0$ postoji kompaktan skup K takav da je

$$\sup_n \int_{\mathbf{R}^d\setminus K} (|f_n g_n| + |fg|)\, dx \leqslant \epsilon\ , \tag{3}$$

te na Egorovljevom teoremu, koji nam osigurava postojanje proizvoljnog malog skupa $E\subseteq K$, takvog da $g_n\to g$ jednoliko na $K\setminus E$. Po tvrdnji b) iz Dunford-Pettisovog teorema će za E dovoljno malen vrijediti da je $\sup_n\int_E|f_n|dx\leq\epsilon$. Koristeći to, uzmimo proizvoljnu funkciju $\psi\in\mathrm{L}^\infty$ i rastavimo integral $\int|(f_n g_n\psi - fg\psi)|dx$ na tri integrala s područjima integracije $\mathbf{R}\setminus K$, $K\setminus E$ i E, kako bismo dobili sljedeće ocjene

$$\begin{aligned}\int |f_n g_n\psi - fg\psi|\,d\mathbf{x} \leqslant ||\psi||_{\mathrm{L}^\infty}\int_{\mathbf{R}\setminus K}(|f_n g_n| - |fg)|)\,d\mathbf{x} + \int_{K\setminus E}|(f_n g_n - fg_n + fg_n - fg)\psi|d\mathbf{x}\\ + \int_E |(f_n g_n - f_n g + f_n g - fg)\psi|d\mathbf{x}\\ \leqslant q||\psi||_{\mathrm{L}^\infty}\epsilon + \int_{K\setminus E}(|g_n||(f_n - f)\psi|)\,d\mathbf{x} + \int_{K\setminus E}(|f||g_n - g||\psi|)\,d\mathbf{x}\\ + \int_E (|f_n||g_n - g||\psi|)\,d\mathbf{x} + \int_E (|g||(f_n - f)\psi|)\,d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Sad redom ocjenjujemo integrale u zadnjoj nejednakosti. Integrali $\int_{K\setminus E}(|g_n||(f_n - f)\psi|)$ i $\int_E(|g||(f_n - f)\psi|)$ teže k nuli kad $n\to\infty$ zbog slabe konvergencije niza f_n i omeđenosti niza g_n u L^∞. Integral $\int_{K\setminus E}(|f||g_n - g||\psi|)$ teži k nuli zbog uniformne ograničenosti niza g_n. Zadnji integral je omeđen linearno s ϵ, uniformno po n. Tako je dokazana tvrdnja (2).

Za dokazati nejednakost (3) uočimo da zbog omeđenosti niza g_n, niz $f_n g_n$ također zadovoljava Dunford-Pettiseve kriterije, pa iz (c) imamo egzistenciju kompaktnog skupa K_1 takvog da $\sup_n \int_{\mathbf{R}^d\setminus K_1}|f_n g_n| \leqslant q\epsilon/2$. Kako je produkt $fg\in\mathrm{L}^1$, također postoji kompaktan skup K_2 takav da je $\int_{\mathbf{R}^d\setminus K_2}|fg| \leqslant q\epsilon/2$. Definirajmo $K = K_1\cap K_2$ i time smo dokazali (3).

Pokažimo, nadalje, da za svaki slabo kompaktan niz (f_n) u L^1 vrijedi

(4) $$\sup_n \int_{f_n\geqslant R} f_n d\mathbf{x} \to 0 \quad \text{kad} \quad R\to\infty\ .$$

Zbog uniformne ograničenosti niza (f_n) imamo ocjenu

$$R\cdot\lambda\{f_n\geqslant R\} \leqslant \int_{f_n\geqslant R} f_n d\mathbf{x} \leqslant C\ ,$$

odnosno

$$\lambda\{f_n\geqslant R\} \leqslant \frac{C}{R}\ ,$$

koja vrijedi uniformno po n. Po drugom uvjetu Dunford-Pettisovog teorema za dani $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takav da za svaki skup E, čija je mjera manja od δ, integrali $\int_E f_n$ su manji od ϵ. Uzmimo R takav da je $\frac{C}{R}\leqslant\delta$, slijedi da je $\sup_n \lambda\{f_n\geqslant R\}\leqslant\delta$ i time je dokazana tvrdnja (4).

4. Prijenosni teorem

Nakon što smo uveli i opisali osnovne pojmove, sposobni smo iste iskoristiti za dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 3. **(prijenosni)** *Neka su* $f, h\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ *i pretpostavimo da je*

(5) $$Tf = h$$

u smislu distribucija.

Tada je $f^\sharp(\cdot,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ *apsolutno neprekidna obzirom na* t *za skoro svaki* $\mathbf{x}$ *i* $\boldsymbol{\xi}$, $h^\sharp(\cdot,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ *i vrijedi*

(6) $$f^\sharp(t_2) - f^\sharp(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} h^\sharp(s)ds$$

za sve $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$.

Obratno, ako je f *apsolutno neprekidna obzirom na* t *za skoro svaki* $\mathbf{x}$ *i* $\boldsymbol{\xi}$, *a* $h^\sharp \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, *onda (6) povlači (5)*

Dem. Uzmimo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d), \rho \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ i pomnožimo (5) s $\psi(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\xi}) \cdot \rho(t)$. Koristeći činjenice da su $f, h \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ i da funkcije ψ i ρ imaju kompaktne nosače, dobiveni izraz možemo integrirati. Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned}\int\!\!\int\!\!\int \psi(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\xi})\rho(t) h d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} dt &= -\int\!\!\int\!\!\int fT(\psi(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\xi})\rho(t)) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} dt \\ &= -\int\!\!\int\!\!\int \psi(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\xi})\rho'(t) f d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} dt \ .\end{aligned}$$

Zamjena varijabli $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \to (t, \mathbf{x} + t\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$ nam daje

$$\int\!\!\int\!\!\int \Big\{(\rho'(t) f^\sharp + \rho(t) h^\sharp) dt\Big\} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} = 0 \ ,$$

to jest

$$\int (\rho'(t) f^\sharp + \rho(t) h^\sharp) dt = 0$$

u smislu distribucija, za svaki $\rho \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Za završetak dokaza koristiti ćemo niz izglađujućih funkcija ρ_n, kojima će aproksimirati karakterističnu funkciju skupa $[t_1, t_2]$. Definirajmo funkciju $\chi := \chi_{[t_1, t_2]}$ koju ćemo aproksimirati nizom glatkih funkcija definiranih $\chi_n := \rho_n * \chi$. Nađimo derivaciju funkcije χ (u smislu distribucija):

$$\langle \chi', \varphi \rangle = -\langle \chi, \varphi' \rangle = -\int_{t_1}^{t_2} \varphi'(s) ds = -(\varphi(t_2) - \varphi(t_1)) = \langle \delta_{t_1} - \delta_{t_2}, \varphi \rangle \ ;$$

sa δ_a smo označili Diracovu mjeru u točki a. Dokazali smo

$$\chi' = \delta_{t_1} - \delta_{t_2}$$

(u smislu distribucija). Uz oznake $T_x\varphi(y) := \varphi(x - y)$ (translacija za vektor x) i $\tilde{\rho}(y) = \rho(-y)$, imamo da je rezultat konvolucije Diracove funkcije i glatke funkcije φ dana izrazom

$$\rho * \delta_a = \langle \delta_a, T_x\tilde{\rho} \rangle = \langle T_x\tilde{\rho} \rangle(a) = \rho(x - a) \ .$$

Na osnovu toga možemo zaključiti

$$\chi_n' = \rho_n * \delta_{t_1} - \rho_n * \delta_{t_2} = \rho_n(t - t_1) - \rho_n(t - t_2) \ .$$

Iz konvergencije $\rho_n \to \delta$ u odgovarajućem prostoru slijedi

$$\int \rho_n(t - t_i) f(t) \to f(t_i) \qquad (i = 1, 2) \ ,$$

i time smo dokazali jedan smjer teorema.

ii) Za dokaz obrata uzmimo $t_1 = t$ i $t_2 = t + h$ i podijelimo (6) s h. Gledajući limes desne strane dobivene jednakosti kad $h \to 0$ dobivamo

$$\lim \int_t^{t+h} h^\sharp \to h^\sharp \text{ (ss)}$$

No budući je gornji integral zbog $h^\sharp \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ omeđen u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, možemo primjeniti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji iz kojeg slijedi:

$$\frac{df^\sharp}{dt} = h^\sharp$$

u smislu distribucija.

Relacija (1)se sada lako dobije množeći gornju jednakost glatkim test funkcijama i koristeći zamjenu varijabli.

Q.E.D.

IV. Cauchyjeva zadaća za Boltzmannovu jednadžbu

1. Prve ocjene rješenja

U ovom poglavlju ćemo pokušati opisati uvjete koji nam osiguravaju egzistenciju rješenja Boltzmannove jednadžbe. Član $|\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}|$ u Boltzmannovoj jednadžbi zvat ćemo *jezgrom sudara*. Iz tehničkih razloga mi ćemo proučavati mnogo općenitije jezgre sudara i označavat ćemo ih s q. Na taj način dolazimo do generalizirane Boltzmannove jednadžbe:

$$(\partial_t + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_{\mathbf{x}})f = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{S^{d-1}} q(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*,\mathbf{n})[f'f'_* - ff_*]d\mathbf{n}d\boldsymbol{\xi}_* \,. \tag{1}$$

Desna strana jednadžbe sadrži kvadratni izraz $Q(f,f)$, definiran s

$$Q(f,f) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{S^{d-1}} q(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*,\mathbf{n})[f'f'_* - ff_*]d\mathbf{n}d\boldsymbol{\xi}_* \,.$$

Ovaj izraz se zove *integral sudara*, a kvadratični operator Q *operator sudara*. Izraz ćemo često rastavljati na sljedeći način

$$Q(f,f) = Q_+(f,f) - Q_-(f,f) = Q_+(f,f) - fR(f)\,,$$

gdje su

$$Q_+(f,f) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{S^{d-1}} qf'f'_*d\mathbf{n}d\boldsymbol{\xi}_*\,,$$
$$Q_+(f,f) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{S^{d-1}} qff_*d\mathbf{n}d\boldsymbol{\xi}_*$$

i

$$R(f) = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{S^{d-1}} qf_*d\mathbf{n}d\boldsymbol{\xi}_*\,.$$

Lema 1. *Pretpostavimo da je q nenegativna funkcija u $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times S^{d-1})$ koja ovisi samo o $\mathbf{x}$, $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*|$ i $|(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)\cdot\mathbf{n}|$, te ima najviše polinomijalni rast s obzirom na $\mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*$ u beskonačnosti. Ako je $f\in\mathrm{C}^1(\mathbf{R}^+_0;\mathcal{S}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d))$ nenegativno rješenje Boltzmannove jednadžbe takvo da $|\ln f|$ ima najviše polinomijalni rast po $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ u beskonačnosti, uniformno na kompaktnim (vremenskim) intervalima u $\mathbf{R}^+_0$, onda vrijede sljedeće jednakosti:*

$$\int\int f(t,\cdot)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} = \int\int f(0,\cdot)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\,, \tag{2}$$

$$\int\int f(t,\cdot)\boldsymbol{\xi}^2d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} = \int\int f(0,\cdot)\boldsymbol{\xi}^2d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\,, \tag{3}$$

$$\int\int f(t,\cdot)|\mathbf{x}-t\boldsymbol{\xi}|^2d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} = \int\int f(0,\cdot)\mathbf{x}^2d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \tag{4}$$

i

$$\int\int f\ln f(t,\cdot)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} + \int_0^t\int\int e(f)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}ds = \int\int f\ln f(0,\cdot)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\,, \tag{5}$$

gdje je

$$e(f)(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\int\int q(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*,\mathbf{n})(f'f'_* - ff_*)\ln\left(\frac{f'f'_*}{ff_*}\right)(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_*,\mathbf{n})d\boldsymbol{\xi}_*d\mathbf{n}\,.$$

Ove jednakosti povlače sljedeće ocjene:

$$\int\int f \ln f(t,\cdot)(1+|\mathbf{x}|^2+|\boldsymbol{\xi}|^2)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \leqslant \int\int f(0,\cdot)(1+2|\mathbf{x}|^2+(2t+1)|\boldsymbol{\xi}|^2)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \tag{6}$$

i

$$\begin{aligned}\int\int f(t,\cdot)|\ln f(t,\cdot)|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} + \int_0^t \int\int e(f)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}ds \\ \leqslant \int\int f(0,\cdot)(|\ln f(0,\cdot)| + 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\boldsymbol{\xi}|^2)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} + C_d ,\end{aligned} \tag{7}$$

gdje je C_d konstanta koja ovisi jedino o dimenziji prostora d.

Dem. Ako jezgra sudara q ima gore iskazana svojstva, te je $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^d)$, a $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$(obje funkcije u varijabli $\boldsymbol{\xi}$), onda je dobro definiran integral

$$\int Q(g,g)\varphi d\boldsymbol{\xi}$$

kao integral produkta brzoopadajuće funkcije i funkcija najviše polinomomijalnog rasta u beskonačnosti. Taj integral možemo ekvivalentno zapisati na još nekoliko načina. Najprije u desnoj strani jednakosti

$$\int Q(g,g)\varphi d\boldsymbol{\xi} = \int\int\int (g'g'_* - gg_*)\varphi(\boldsymbol{\xi})qd\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\xi}_*d\mathbf{n} , \tag{8}$$

napravimo zamjenu varijabli $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_*) \to (\boldsymbol{\xi}_*,\boldsymbol{\xi})$ iz čega slijedi

$$\int Q(g,g)\varphi d\boldsymbol{\xi} = \int\int\int (g'g'_* - gg_*)\varphi(\boldsymbol{\xi}_*)qd\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\xi}_*d\mathbf{n} . \tag{9}$$

Slično, zamjenom $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_*) \to (\boldsymbol{\xi}'_*,\boldsymbol{\xi}')$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int Q(g,g)\varphi d\boldsymbol{\xi} &= \int\int\int (gg_* - g'g'_*)\varphi(\boldsymbol{\xi}')qd\boldsymbol{\xi}'d\boldsymbol{\xi}'_*d\mathbf{n} \\ &= \int\int\int (gg_* - g'g'_*)\varphi(\boldsymbol{\xi}')qd\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\xi}_*d\mathbf{n} ,\end{aligned} \tag{10}$$

pri čemu smo za posljednju jednakost koristili činjenicu da je apsolutna vrijednost jakobijana zamjene $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_*) \to (\boldsymbol{\xi}'_*,\boldsymbol{\xi}')$ jednaka jedan, pa možemo pisati $d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\xi}_*$ umjesto $d\boldsymbol{\xi}'d\boldsymbol{\xi}'_*$.

Na kraju napravimo opet zamjenu $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_*) \to (\boldsymbol{\xi}_*,\boldsymbol{\xi})$, što nam daje

$$\int Q(g,g)\varphi d\boldsymbol{\xi} = \int\int\int (gg_* - g'g'_*)\varphi(\boldsymbol{\xi}'_*)qd\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\xi}_*d\mathbf{n} . \tag{11}$$

Zbrajanjem jednakosti (8), (9), (10) i (11) nalazimo

$$\int Q(g,g)\varphi d\boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{4}\int\int\int (g'g'_* - gg_*)(\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*)qd\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\xi}_*d\mathbf{n} . \tag{12}$$

Desna strana jednakosti je jednaka nuli ukoliko je φ invarijantna na sudare (to jest ako je $\varphi' + \varphi'_* = \varphi + \varphi_*$).

Pretpostavimo sada da je $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ takav da su φ i $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ najviše polinomijalnog rasta po $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, uniformno po t na kompaktnim skupovima. Pretpostavljajući da je i $T\varphi = 0$, slijedi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\int f\varphi d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} &= \int\int (Tf)\varphi d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int\int Q(f,f)\varphi d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\ .\end{aligned}$$

Ako je k tome za svaki (t, $\mathbf{x}$) funkcija $\varphi(t, \mathbf{x}, \cdot)$ invarijantna na sudare, onda je

$$\frac{d}{dt}\int\int f\varphi d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} = 0\ .$$

Jednakosti (2) – (4) sada slijede birajući redom $\varphi = 1, |\boldsymbol{\xi}|^2, |\mathbf{x} - t\boldsymbol{\xi}|^2$. Izbor $\varphi = 1$ dovodi do zakona sačuvanja mase, $\varphi = |\boldsymbol{\xi}|^2$ do zakona sačuvanja energije, a $\varphi = |\mathbf{x} - t\boldsymbol{\xi}|^2$ do sačuvanja momenta inercije. Slično, računamo

$$\frac{d}{dt}\int\int f\ln f d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} = \int\int (1+\ln f)Q(f,f)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\ ,$$

stavljamo $\varphi = \ln f$ u (12) i koristimo da je $\varphi = 1$ invarijantan na sudare:

$$\frac{d}{dt}\int\int f\ln f d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{4}\int\int\int (f'f'_* - ff_*)\ln\left(\frac{f'f'_*}{ff_*}\right) d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\xi}_*d\mathbf{n}d\mathbf{x}\ .$$

Integrirajući gornju jednakost po vremenskoj varijabli dobivamo (5). Nejednakost (6) slijedi iz (2) – (4), te iz ocjene

$$|\mathbf{x}|^2 \leqslant 2|\mathbf{x} - t\boldsymbol{\xi}|^2 + 2t^2|\boldsymbol{\xi}|^2\ ,$$

koja se lako provjeri. Da bismo dokazali posljednju nejednakost u lemi, dokazat ćemo najprije pomoćnu ocjenu

(13) $$\int\int_{f\leqslant 1} f|\ln f| \leqslant \int\int_{\Omega} f|\ln f| + C'_d\ ,$$

gdje je $\Omega = \left\{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}); e^{-|\mathbf{x}-t\boldsymbol{\xi}|^2-|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leqslant 1\right\}$.

Označimo s Ω' skup $\left\{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) : f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leqslant e^{-|\mathbf{x}-t\boldsymbol{\xi}|^2-|\boldsymbol{\xi}|^2}\right\}$. Tada imamo

$$\int\int_{\Omega'} f|\ln f| = \int\int_{\Omega'} f\left(\ln\frac{1}{f}\right)\ ,$$

a kako je $t\ln(1/t) \leqslant C_0\sqrt{t}$ za $t \in \langle 0, 1\rangle$ i $C_0 \geqslant 0$, koristeći činjenicu da je $e^{-|\mathbf{x}|^2}$ brzoopadajuća funkcija, zaključujemo da je

$$\int\int_{\Omega'} f|\ln f| \leqslant C_0\int\int e^{-(|\mathbf{x}-t\boldsymbol{\xi}|^2-|\boldsymbol{\xi}|^2)/2} \leqslant C'_d\ ,$$

gdje konstanta C'_d ne ovisi o funkciji f.

Kako na skupu Ω vrijedi $|\ln f| \leqslant |\mathbf{x}-t\boldsymbol{\xi}|^2+|\boldsymbol{\xi}|^2$, to je integral na desnoj strani u (13) omeđen s $\int\int(|\mathbf{x}-t\boldsymbol{\xi}|^2+|\boldsymbol{\xi}|^2)f d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}$. Sad to koristimo da bismo dokazali nejednakost (7):

$$\begin{aligned}\int\!\!\int f(t,\cdot)|\ln f(t,\cdot)|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} + \int_0^t\!\!\int\!\!\int e(f)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}ds = 2\int\!\!\int_{f\leqslant 1} f(t,\cdot)|\ln f(t,\cdot)|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \\ + \int\!\!\int_{f\geqslant 1} f(t,\cdot)|\ln f(t,\cdot)|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} + \int_0^\infty\!\!\int\!\!\int_{f\geqslant 1} e(f)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}ds \\ - \int\!\!\int_{f\leqslant 1} f(t,\cdot)|\ln f(t,\cdot)|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} + \int_0^\infty\!\!\int\!\!\int_{f\leqslant 1} e(f)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}ds\,.\end{aligned}$$

Na osnovu nejednakosti (5) gornju sumu možemo ocijeniti s

$$\int\!\!\int_{f\leqslant 1}(|\mathbf{x}-t\boldsymbol{\xi}|^2+|\boldsymbol{\xi}|^2)f+2C'_d+\int\!\!\int_{f\geqslant 1} f(t,\cdot)|\ln f(0,\cdot)|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}+\int\!\!\int_{f\leqslant 1} f(t,\cdot)|\ln f(0,\cdot)|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\ ,$$

što je zbog (3) i (4) manje od

$$\int\int f(0,\cdot)\Big(|\ln f(0,\cdot)|+2|\mathbf{x}|^2+2|\boldsymbol{\xi}|^2\Big)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}+C_d\ ,$$

i time je dokazana nejednakost (7).

Q.E.D.

2. Osnovni teorem

Sada ćemo odrediti pretpostavke na jezgru sudara $q(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*,\mathbf{n})$ za koju će opći rezultat biti dokazan. Označimo $\mathbf{V}=\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*$. Pretpostavimo da je $q\in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\times S^{d-1})$, $q\geqslant 0$, i da q ovisi samo o $|\mathbf{V}|$ i $|\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}|$. Definirajmo

$$A(\mathbf{V})=\int_{S^{d-1}} q(\mathbf{V},\mathbf{n})d\mathbf{n}\,.$$

Pretpostavimo, nadalje, da za svaki $R>0$ vrijedi

$$\frac{1}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}\int_{|\boldsymbol{\xi}_*|\leqslant R} A(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)d\boldsymbol{\xi}_*\to 0 \quad \text{kad} \quad |\boldsymbol{\xi}|\to\infty\ , \tag{14}$$

te da je

$$A\in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)\ . \tag{15}$$

Lako se provjeri da jezgra sudara za čvrste kugle

$$q=|(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)\cdot\mathbf{n}|\ ,$$

koja predstavlja najvažniji slučaj u ovom radu, zadovoljava gornja dva uvjeta.

Podsjetimo se da smo definirali operator $R(f)$ pomoću rastava $Q(f,f)=Q_+(f,f)-fR(f)$; taj je operator upravo konvolucijski operator s novouvedenom funkcijom A kao jezgrom ($R(f)=A*f$).

Egzistencija globalnog klasičnog rješenja Boltzmannove jednadžbe nije dokazana. Zato ćemo sada definirati neke alternativne pojmove rješenja te jednadžbe. Pri tom ćemo rabiti oznaku

$$g^\sharp(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=g(t,\mathbf{x}+t\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})$$

za svaku izmjerivu funkciju g na $[0, \infty\rangle \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$.

Kažemo da je izmjeriva funkcija f definirana na $[0, \infty\rangle \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ *blago rješenje* Cauchyeve zadaće za Boltzmannovu jednadžbu s početnom vrijednošću f_0 ako za skoro svaki $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$

$$Q_\pm(f, f)^\sharp(\cdot, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0, \infty\rangle) \;,$$

i ako za svaki $t \geqslant 0$ vrijedi

$$f^\sharp(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \int_0^t Q(f, f)^\sharp(s, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) ds \;.$$

Jedna od ključnih ideja Ronalda DiPerne i Pierre-Louis Lionsa je bila uvesti pojam jačeg rješenja (i dalje bitno slabijeg od klasičnog), kako bi se ocjene (6) i (7) mogle najbolje iskoristiti, a zatim opet prelaskom na limes dobiti blago rješenje. Ojačano rješenje su nazvali *renormaliziranim*, i ono je definirano na sljedeći način.

Funkcija $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+_0; \mathrm{L}^1_+(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d))$ je *renormalizirano rješenje* Boltzmannove jednadžbe ako su

$$\frac{Q_\pm(f, f)}{1 + f} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+_0 \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d) \tag{16}$$

i ako za svaku Lipschitzovu funkciju $\beta : \mathbf{R}^+_0 \to \mathbf{R}$, koja zadovoljava uvjet $|\beta'(t)| \leqslant \frac{C}{1+t}$ za svaki $t \geqslant 0$, vrijedi

$$T\beta(f) = \beta'(F) Q(f, f) \tag{17}$$

u smislu distribucija.

Zanimljivo je da se definicija renormaliziranog rješenja može znatno pojednostaviti. Umjesto svih funkcija β s gore navedenim svojstvima, dovoljno je gledati samo jednu: funkciju $\beta(t) = \ln(1 + t)$. DiPerna i Lions su to čak uzeli kao definiciju renormaliziranog rješenja, a zatim pokazali da iz toga slijedi (17), za gore naveden skup funkcija β (dokaz toga se može naći u [DL1, str. 331]).

Lema 2. *Neka je $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$.*

i) Ako f zadovoljava (16) i (17) s $\beta(t) = \ln(1 + t)$, onda je f blago rješenje Boltzmannove jednadžbe.

ii) Ako je f blago rješenje Boltzmannove jednadžbe i $\frac{Q_\pm(f,f)}{1+f} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, onda je f renormalizirano rješenje.

Dem. i) Pretpostavljamo da vrijedi

$$T(\ln(1 + f)) = \frac{Q(f, f)}{1 + f}$$

u smislu distribucija.

Za $\delta > 0$ uvedimo funkciju $\beta_\delta(y) := \frac{1}{\delta} \ln(1 + \delta(e^y - 1))$ definiranu na $\mathbf{R}^+$. Po pretpostavci je $T(\ln(1 + f)) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+_0 \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, a zbog ocjene $0 \leqslant \ln(1 + f) \leqslant f$ i pretpostavke $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+_0 \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, slijedi i da je $\ln(1 + f) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+_0 \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. Kako je $\beta'_\delta(\ln(1 + f)) = \frac{1+f}{1+\delta f}$, to slijedi

$$\begin{aligned} T\beta_\delta(\ln(1 + f)) &= \beta'_\delta(\ln(1 + f)) \cdot T(\ln(1 + f)) \\ &= \frac{Q(f, f)}{1 + \delta f} \end{aligned}$$

u smislu distribucija. S druge strane je $\beta_\delta(\ln(1+f)) = \frac{1}{\delta}\ln(1+f)$, pa imamo da je

$$T\frac{1}{\delta}\ln(1+f) = \frac{Q(f,f)}{1+\delta f}$$

u smislu distribucija za svaki $\delta > 0$.

Definirajmo $g_\delta := \frac{1}{\delta}\ln(1+f)$. Iz ocjene $g_\delta \leqslant \frac{1}{\delta}\cdot\delta f = f$ i činjenice da je $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$, slijedi i da je $g_\delta \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$, pa možemo primijeniti prijenosni teorem (III.3) iz kojeg zaključujemo da je $g^\sharp_\delta$ za skoro svaki $\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}$ i svaki $\delta > 0$ apsolutno neprekidna po t, te da su $\frac{Q_\pm(f,f)^\sharp}{1+\delta f^\sharp}$ lokalno integrabilni po vremenskoj varijabli. Kako je $f^\sharp = e^{g^\sharp_1} - 1$, $f^\sharp$ je također apsolutno neprekidna po t za skoro svaki $\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}$; pa su $Q_\pm(f,f)^\sharp(\cdot,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty\rangle)$ za skoro svaki $\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}$. Koristeći transportni teorem imamo da za svaki $t > \delta$ vrijedi:

$$g^\sharp_\delta(t) - g^\sharp_\delta(s) = \int_s^t \frac{Q(f,f)^\sharp}{1+\delta f^\sharp}d\sigma\ ,$$

pa prijelazom na limes kad $\delta \searrow 0$ dobivamo

$$f^\sharp(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) - f^\sharp(s,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \int_s^t Q(f,f)^\sharp(\sigma,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})d\sigma\ .$$

ii) Ako je f blago rješenje, onda je $f^\sharp$ apsolutno neprekidna po t za skoro svaki $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, pa je to također i funkcija $\ln(1+f^\sharp)$. Zato što funkcija $g = \ln(1+f)$ zadovoljava $g^\sharp(t) - g^\sharp(s) = \int_s^t \frac{1}{1+f^\sharp}Q(f,f)^\sharp d\tau$, koristeći transportni teorem vidimo da vrijedi

$$T(\ln(1+f)) = \frac{1}{1+f}Q(f,f)\ ,$$

pa na osnovu napomena koje su prethodile iskazu Leme zaključujemo da je f renormalizirano rješenje.

Q.E.D.

Preostali dio ovog rada posvećen je dokazu sljedećeg teorema.

Teorem 1. **(DiPerna i Lions [DL1])** *Pretpostavimo da je $f_0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ nenegativna funkcija koja zadovolja*

$$\int\int f_0(1+|\mathbf{x}|^2+|\boldsymbol{\xi}|^2)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} < \infty$$

i

$$\int\int f_0|\ln f_0|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} < \infty\ .$$

Tada postoji renormalizirano rješenje Boltzmannove jednadžbe $f \in \mathrm{C}(\mathbf{R}^+_0;\mathrm{L}^1_+(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d))$ takvo da je $f_{|t=0} = f_0$, te da zadovoljava ocjene (6) i (7). ∎

3. Klasična rješenja pomoćne Cauchyeve zadaće iterativnim postupkom

Renormalizirano rješenje f naći ćemo kao limes funkcija koje zadovoljavaju jednadžbu dobivenu rezanjem. Za neki $\delta > 0$ i modificiranu nenegativnu jezgru sudara $\bar{q} \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d\times S^{d-1})$ takvu da $\bar{q}$ iščezava za $(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}^*)\cdot\mathbf{n} < \delta$, definiramo:

$$\bar{Q}(g,g) := \int\int \bar{q}(g'g'_* - gg_*)d\mathbf{n}d\boldsymbol{\xi}_*$$

i

$$\tilde{Q}(g,g) := \frac{\bar{Q}(g,g)}{1+\delta\int |g| d\boldsymbol{\xi}}\ . \tag{18}$$

Lema 3. *Neka je $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ nenegativna funkcija takva da $|\ln f_0|$ ima najviše polinomijalni rast u beskonačnosti. Tada Cauchyeva zadaća*

$$\begin{cases} Tf = \tilde{Q}(f,f) \\ f\big|_{t=0} = f_0 \end{cases} \tag{19}$$

ima jedinstveno globalno rješenje f koje zadovoljava hipoteze Leme 1. Ono također zadovoljava ocjene (6) i (7).

Dem. Za dokaz leme trebat će nam sljedeće ocjene:

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\tilde{Q}(g,g)| d\boldsymbol{\xi} \leqslant C_\delta \int_{\mathbf{R}^d} |g| d\boldsymbol{\xi}\ , \tag{20}$$

$$\|\tilde{Q}(g,g)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}})} \leqslant C_\delta \|g\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}})}\ , \tag{21}$$

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\tilde{Q}(g,g) - \tilde{Q}(f,f)| d\boldsymbol{\xi} \leqslant C_\delta \int_{\mathbf{R}^d} |f-g| d\boldsymbol{\xi}\ , \tag{22}$$

i

$$\|\tilde{Q}(g,g) - \tilde{Q}(f,f)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}})} \leqslant C_\delta \|g-f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}})}\ , \tag{23}$$

pri čemu C_δ označuje razne konstante neovisne o g i f.

Da bismo dokazali prvu od gore navedenih ocjena, pokažimo da vrijedi

$$\int\int\int |\bar{q} g g_*| d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_* dx \leqslant C_1 \left(\int |g| d\boldsymbol{\xi}\right)\left(1+\delta\int |g| d\boldsymbol{\xi}\right)\ . \tag{24}$$

Budući da je $\bar{q} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d \times S^{d-1})$, to možemo $\bar{q}$ ograničiti odozgo nekom konstantom $M > 0$, to jest vrijedi $\bar{q} < M$. Na osnovu toga zaključujemo

$$\begin{aligned}\int\int\left(\int_{S^{d-1}} |\bar{q}| d\mathbf{n}\right) |g g_*| d\boldsymbol{\xi}_* dx &\leqslant \left(\int_{S^{d-1}} M d\mathbf{n}\right)\int |g| \left(\int |g_*| d\boldsymbol{\xi}_*\right) d\boldsymbol{\xi} \\ &= C_1 \left(\int |g| d\boldsymbol{\xi}\right)\left(\int |g_*| d\boldsymbol{\xi}_*\right) \\ &\leqslant C_1 \left(\int |g| d\boldsymbol{\xi}\right)\left(1+\int |g| d\boldsymbol{\xi}\right)\ .\end{aligned}$$

Na istovjetan način se pokaže i da je

$$\int\int\int |\bar{q} g' g'_*| d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_* dx \leqslant C_2 \left(\int |g| d\mathbf{x}\right)\left(1+\delta\int |g| d\boldsymbol{\xi}\right)\ , \tag{25}$$

pa se zbrajanjem (24) i (25) dobije ocjena (20), jer konstante C_1 i C_2 očito ne ovise o g.

Za dokaz nejednakosti (21) dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\Big| \int_{\mathbf{R}^d} \int_{S^{d-1}} \bar{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*, \mathbf{n}) g(\boldsymbol{\xi}') d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_* \Big| \leqslant C_0 \|g\|_{\mathrm{L}^1_{\boldsymbol{\xi}}} \,. \tag{26}$$

Naime

$$\begin{aligned}
|\tilde{Q}(g,g)| &\leqslant \frac{1}{1+\delta \int |g|} \Big| \int \int \bar{q} g' g'_* \Big| + \frac{1}{1+\delta \int |g|} \Big| \int \int \bar{q} g g_* \Big| \\
&\leqslant \frac{1}{1+\delta \int |g|} \|g\|_{L^\infty} \Big| \int \int \bar{q} g'_* \Big| + \frac{1}{1+\delta \int |g|} \|g\|_{L^\infty} \Big| \int \bar{q} \int g_* \Big| \\
&\leqslant \frac{\|g\|_{L^\infty} C_0 \int |g|}{1+\delta \int |g|} + \frac{1}{1+\delta \int |g|} \|g\|_{L^\infty} C \int |g_*| \\
&\leqslant C_1 \|g\|_{L^\infty} + C_2 \|g\|_{L^\infty} \,,
\end{aligned}$$

iz čega slijedi (21).

Tvrdnju (26) dokažimo najprije za slučaj $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$. Označimo $v = |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}_*|$. Tada ćemo v interpretirati kao radijalni dio varijable $\boldsymbol{\xi}_*$ u polarnim koordinatama, dok ćemo s n označavati njezin smjer. Zamijenimo integral $\int_{S^{d-1}} \int_{\mathbf{R}^d} \bar{q} g d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_*$ u (26) s integralom $\int_{S^{d-1}} \int_0^\infty \int_W \bar{q} g dw dv d\mathbf{n}$, gdje W označuje ravninu kroz točku $\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}_*)$ okomitu na $\mathbf{n}$. Primijetimo da smo formalno smanjili područje integracije, ono više nije cijeli $\mathbf{R}^d$, ali integral se time nije promijenio, jer $\bar{q}$ iščezava za $(\boldsymbol{\xi}_* \cdot \mathbf{n}) > 0$. Sada integral u (26) možemo pisati u obliku

$$\int_{S^{d-1}} \int_0^\infty \int_W \frac{\bar{q}}{v^{d-1}} g(v, \mathbf{n}) v^{d-1} dw dv d\mathbf{n} \,.$$

Zbog pretpostavke $\bar{q} \in \mathrm{C}_c^\infty$, postoji $R > 0$ takav da je $\operatorname{supp} \bar{q} \subseteq B_R$, te uz oznaku $M = \max \bar{q}$ vrijedi

$$\int_W \frac{\bar{q}}{v^2} dw \leqslant \int_{B_R} \frac{M}{\delta^2} dw \leqslant C_0 \,.$$

Zaključujemo da je

$$\int_{S^{d-1}} \int_0^\infty \int_W \frac{\bar{q}}{v^2} g(v, \mathbf{n}) v^2 dw dv d\mathbf{n} \leqslant C_0 \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty g(v, \mathbf{n}) v^{d-1} dv d\mathbf{n} \,.$$

Integral na desnoj strani je upravo integral $\int |g| d\boldsymbol{\xi}$, samo zapisan u polarnim koordinatama (jakobijan transformacije je v^{d-1}). Time je (26) dokazan za slučaj $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, to jest vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}^d} \int_{S^{d-1}} \bar{q}(-\boldsymbol{\xi}_*, \mathbf{n}) g(-\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}_*)) d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_* \leqslant C_0 \|g\|_{\mathrm{L}^1_{\boldsymbol{\xi}}} \,. \tag{27}$$

Uzmimo sada $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ i u integralu

$$\int_{\mathbf{R}^d} \int_{S^{d-1}} \bar{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*, \mathbf{n}) g(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*)) d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_*$$

napravimo zamjenu varijabli $(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*) \to \boldsymbol{\eta}_*$. Dobivamo integral

$$\int_{\mathbf{R}^d} \int_{S^{d-1}} \bar{q}(\boldsymbol{\eta}_*, \mathbf{n}) g(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\eta}_*))) d\mathbf{n} d\boldsymbol{\eta}_* \,.$$

Definirajmo funkciju $f(\boldsymbol{\eta}) := g(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})$ i uvrstimo je u gornji integral. Slijedi

$$\int_{\mathbf{R}^d} \int_{S^{d-1}} \bar{q}(\boldsymbol{\eta}_*, \mathbf{n}) f(\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta}_*)) d\mathbf{n} d\boldsymbol{\eta}_* \ ,$$

a to je upravo integral na lijevoj strani nejednakosti (27), pa je on omeđen s $C_0 \|f\|_{\mathrm{L}^1_{\boldsymbol{\xi}}}$. Kako očigledno g i f imaju jednake norme u $\mathrm{L}^1_{\boldsymbol{\xi}}$, to slijedi da (26) vrijedi za svaki $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$.

Za dokaz ocjena (21) i (22), vidjeti [CIP, str. 145].

Pretpostavke (20)–(23) nam služe da bismo pokazali da iteracije

$$\left\{ \begin{aligned} Tf^0 &= 0 \\ Tf^{n+1} &= \tilde{Q}(f^n, f^n) \\ f^n_{|t=0} &= f_0 \end{aligned} \right. \tag{28}$$

konvergiraju u prostoru $\mathrm{C}([0,T]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d))$. Najprije, označimo sa S operator koji funkciji g pridružuje funkciju u dobivenu kao rješenje linearne hiperboličke jednadžbe prvog reda s konstantnim koeficijentima

$$\left\{ \begin{aligned} Tu &= \tilde{Q}(g,g) \\ u_{|t=0} &= f_0 \ . \end{aligned} \right.$$

S je dobro definiran operator s prostora $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d}))$ u $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d}))$. Za svaku omeđenu neprekinutu funkciju v možemo napisati eksplicitni izraz za Sv:

$$Sv(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_0(\mathbf{0}, \mathbf{x} - t\boldsymbol{\xi}) + \int_0^t \tilde{Q}(v,v)(s, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) ds \ . \tag{29}$$

Ako pokažemo da je S kontrakcija, onda možemo primijeniti Banachov teorem o fiksnoj točki. Za $f, g \in \mathrm{C}([0,\mathrm{T}]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d}))$ označimo $u := Sf$ i $v := Sg$. Uz oznaku $\|f - g\|_M := \max_{t \in [0,T]} \|f - g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)}$ imamo sljedeće ocjene

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)}(t) &= \int\int \Big| \int_0^t \Big(\tilde{Q}(f,f) - \tilde{Q}(g,g) \Big) (s, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) ds \Big| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &\leqslant \int_0^t \int\int \Big| \Big(\tilde{Q}(f,f) - \tilde{Q}(g,g) \Big) (s, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \Big| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \\ &\leqslant \int_0^t \int\int C_\delta \Big| (f-g)(s, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \Big| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} ds \\ &= \int_0^t C_\delta \|f - g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)}(s) ds \leqslant C_\delta t \|f - g\|_M \end{aligned}$$

Predzadnja nejednakost je zaključena na osnovu (22). Iz ocjene koju smo dobili slijedi da S ne mora nužno biti kontrakcija; međutim, ako primijenimo operator S više puta, dobijamo ocjenu

$$\|S^m f - S^m g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)}(t) \leqslant C_\delta^m \frac{t^m}{m!} \|f - g\|_M \ .$$

Ocjena vrijedi uniformno po $t \in [0,T]$, pa slijedi da je operator S^m kontrakcija u $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d}))$ za dovoljno veliki m.

Na potpuno analogan način, koristeći (23), zaključujemo da je $S^{m'}$, za dovoljno veliki m', kontrakcija u $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d}))$, odnosno da je $S^{mm'}$ kontrakcija u prostoru $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d})\cap\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d}))$. Zato ćemo u nizu (f^n) prijeći na podniz, koji ćemo jednako označavati, a koji je dobiven relacijom $f^{n_j}=S^p f^{n_{j-1}}$, gdje je $p=mm'$.

Sada na osnovu Banachovog teorema o fiksnoj točki možemo zaključiti da postoji jedinstveno rješenje problema $S^p f=f$ u prostoru $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d})\cap\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d}))$. Naravno, mi želimo pokazati da vrijedi $Sf=f$. Međutim, to neće biti problem postići, budući da analognim zaključivanjem dobivamo i da preslikavanje S^{p+1} ima fiksnu točku, i ona je jednaka fiksnoj točki preslikavanja S^p, pa imamo

$$f=S^{p+1}f=S(S^pf)=Sf\ .$$

Dobili smo jedinstveno rješenje problema (20) u $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d})\cap\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d}))$. DiPerna i Lions su pokazali da iterativni postupak konvergira i u $\mathrm{C}([0,\mathrm{T}];\mathcal{S}(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d}))$. Mi želimo pokazati i više, to jest da se naše rješenje nalazi u prostoru $\mathrm{C}^1([0,\mathrm{T}];\mathcal{S}(\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d}))$. U tu svrhu primijetimo da za svaku funkciju f_n iz našeg iterativnog niza vrijedi $f_n\in\mathrm{C}^1([0,\mathrm{T}]\times\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d})$ (zato što je $\bar{q}_n\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d\times S^{d-1})$ i $f_0\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$). Koristeći Weierstrassov teorem o konvergenciji niza funkcija dobijemo da je i $f\in\mathrm{C}^1([0,\mathrm{T}]\times\mathbf{R}^\mathrm{d}\times\mathbf{R}^\mathrm{d})$. Budući da za svaki $t\in[0,T]$ vrijedi

$$\partial_t f(t,\cdot)=-\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_x f+\tilde{Q}(f,f)\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)\ ,$$

naša je tvrdnja dokazana.

Ostaje nam još za provjeriti da rješenje f Cauchyeve zadaće (19) zadovoljava uvjete Leme 1, odnosno da je f nenegativna, te da je $|\ln f|$ ograničeno polinomom u beskonačnosti. Iz pretpostavke da $|\ln f_0|$ ima najviše polinomijalni rast u beskonačnosti lako se pokaže da vrijedi

$$f_0(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\geqslant Ke^{-C_1(|\mathbf{x}|^k+|\boldsymbol{\xi}|^k)}$$

za neke konstante $K>0, C_1>0$ i $k\in\mathbf{N}$. Također, ako je f^n nenegativna (što zbog stroge pozitivnosti funkcije f_0 i formule (29) možemo uvijek zaključiti barem za male vrijednosti vremenske varijable t), imamo

$$Tf^{n+1}\geqslant-\frac{\bar{A}*f^n}{1+\delta\int f^n d\boldsymbol{\xi}}\cdot f^n\geqslant-C_2f^n\ ,$$

pri čemu je $\bar{A}(\mathbf{V})=\int_{S^{d-1}}\bar{q}(\mathbf{V},\mathbf{n})d\mathbf{n}$ i $C_2\geqslant 0$. Gledajući limes gornje nejednakosti kad $n\to\infty$ dobivamo

$$Tf\geqslant-C_2f\ .$$

Ovo povlači da je

$$f(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\geqslant Ke^{-C_1(|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}t|^k+|\boldsymbol{\xi}|^k)}\cdot e^{-C_2t}\ ,$$

iz čega slijedi pozitivnost rješenja i ograničenost $|\ln f|$ polinomom u beskonačnosti.

Q.E.D.

4. Aproksimativna rješenja

Neka je (q_n) niz nenegativnih funkcija u $C_c^\infty(\mathbf{R}^d \times S^{d-1})$ koji zadovoljava (16) i (17) (uniformno po n) i pretpostavimo da $q_n \to q$ skoro svuda (pri tom q ima svojstva iskazana u prvom dijelu ovog poglavlja). Nadalje, aproksimirajmo funkciju f_0 u $L^1_+(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ nizom funkcija (f_0^n) u $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ takvih da

$$(\forall n \in \mathbf{N})\,(\exists \mu_n > 0) \qquad f_0^n \geqslant \mu_n e^{-|\mathbf{x}|^2 - |\boldsymbol{\xi}|^2} ,$$

te da vrijedi:

$$\int\int f_0^n (1 + |\mathbf{x}|^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \to \int\int f_0 (1 + |\mathbf{x}|^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2) ,$$

$$\int\int f_0^n |\ln f_0^n| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \to \int\int f_0 |\ln f_0| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} .$$

To je moguće zbog pretpostavke na rast $|\ln f_0|$ u beskonačnosti (vidi dokaz Leme 3).

Neka $\delta_n \searrow 0$, i neka je Q^n jednak $\tilde{Q}$ (definiranim relacijom (18) s $\delta = \delta_n, \bar{q} = q_n$). Onda Lema 3 osigurava egzistenciju niza (f^n) takvog da je

$$\begin{cases} T f^n = Q^n(f^n, f^n) \\ f^n_{|t=0} = f_0^n , \end{cases}$$

pa pomoću (6) i (7), te gornjih zahtjeva na niz početnih vrijednosti dobijamo

$$(\forall T > 0) \sup_{t \in [0,T]} \sup_n \int\int f^n (1 + |\mathbf{x}|^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} < \infty , \tag{30}$$

$$(\forall T > 0) \sup_{t \in [0,T]} \sup_n \int\int f^n |\ln f^n| d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} < \infty , \tag{31}$$

$$\sup_n \int_0^\infty \int\int e_n(f^n) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} dt < \infty , \tag{32}$$

gdje je

$$e_n(f^n) = \frac{1}{4}\left(1 + \delta_n \int f^n d\boldsymbol{\xi}\right)^{-1} \int\int q_n (f^{n\prime} f_*^{n\prime} - f^n f_*^n) \ln\left(\frac{f^{n\prime} f_*^{n\prime}}{f^n f_*^n}\right) d\boldsymbol{\xi}_* d\mathbf{n} . \tag{33}$$

Predefinirajmo sada jezgre sudara q_n tako da one ovise i o prostornoj varijabli $\mathbf{x}$ i vremenskoj varijabli t, na sljedeći način

$$\tilde{q}_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{V}, \mathbf{n}) := \frac{1}{1 + \delta_n \int f_n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}} q_n(\mathbf{V}, \mathbf{n}) .$$

Integral sudara ćemo sada definirati izrazom

$$\begin{aligned} Q(f^n, f^n)(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{S^{d-1}} \tilde{q}_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{V}, \mathbf{n}) [f' f'_* - f f_*] d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_* \\ &= \frac{1}{1 + \delta_n \int f_n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}} \int_{\mathbf{R}^d} \int_{S^{d-1}} q_n(\mathbf{V}, \mathbf{n}) [f' f'_* - f f_*] d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_* . \end{aligned}$$

Nasuprot tome s A_n ćemo i dalje označavati funkciju od samo jedne varijable $A_n(\mathbf{V}) := \int_{S^{d-1}} q_n(\mathbf{V}, \mathbf{n}) d\mathbf{n}$. Sad smo spremni dokazati sljedeću lemu.

Lema 4. *Za svaki $T > 0, R > 0$ nizovi*

$$\frac{Q_+^n(f_n, f_n)}{1 + f_n} \quad \text{i} \quad \frac{Q_-^n(f_n, f_n)}{1 + f_n}$$

su sadržani u slabo kompaktnom podskupu od $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times B_R)$.

Dem. Za Q_-^n imamo $0 \leqslant \frac{Q_-^n(f_n,f_n)}{1+f_n} \leqslant A_n * f_n$. Provjerit ćemo Dunford-Pettisov kriterij za $A_n * f_n$, koristeći ocjene (14), (30) i (31) (koje vrijede uniformno po n za sve A_n).

Da bismo pokazali (a) primijetimo da koristeći (14) imamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R} A_n * f^n d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R}\int_{\mathbf{R}^d} A_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) f^n(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R} A_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\xi} f^n(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} d\mathbf{x} \\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} C_1(1 + |\boldsymbol{\eta}|^2) f^n(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} d\mathbf{x} \leqslant C\,.
\end{aligned}$$

Za dokaz tvrdnji (b) i (c) gledajmo prvo jednostavniji slučaj kad je A integrabilan, to jest $\|A\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)} < \infty$. Onda zbog pretpostavke da $q_n \to q$ skoro svuda, koristeći eksplicitnu konstrukciju aproksimacije konvolucijom s izglađujućim nizom, možemo postići da $a_n := \|A_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)} \to \|A\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)}$, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti ograničenost niza a_n.

Definirajmo funkciju

$$\phi(t) = \begin{cases} t \ln t, & t \geqslant 1 \\ 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Funkcija ϕ je konveksna i zadovoljava nejednakost

$$\phi(L) \leqslant a\phi\Big(\frac{L}{a}\Big) + L|\ln a|$$

za svaki $a > 0$. Koristeći tu činjenicu dobivamo

$$\int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R} \phi(A_n * f^n) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \leqslant a_n \int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R} \phi\Big(\frac{A_n * f^n}{a_n}\Big) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + |\ln a_n| a_n \|f^n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)}\,.$$

Budući da je ϕ konveksna funkcija, možemo primijeniti Jensenovu nejednakost na prvi sumand na desnoj strani u gornjem retku:

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\frac{A_n * f^n}{a_n}\Big) &= \phi\left(\int_{\mathbf{R}^d} \frac{A_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*) f^n(\boldsymbol{\xi}_*)}{a_n} d\boldsymbol{\xi}_*\right) \\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}^d} \frac{A_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*)}{a_n} \phi(f^n(\boldsymbol{\xi}_*)) d\boldsymbol{\xi} = \frac{A_n * \phi(f_n)}{a_n}\,.
\end{aligned}$$

Pri tom je po Radon-Nikodymovom teoremu integrabilna funkcija $\frac{A_n(\boldsymbol{\xi})}{a_n}$ shvaćena kao gustoća normirane mjere na $\mathbf{R}^d$ (s obzirom na Lebesgueovu mjeru).

Na osnovu toga slijede ocjene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R} \phi(A_n * f^n) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} &\leqslant \int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R} A_n * \phi(f^n) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + |\ln a_n| a_n \|f^n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)} \\
&\leqslant a_n \int_{\mathbf{R}^d}\int_{R_d} \phi(f^n) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + |\ln a_n| a_n \|f^n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

Sada uvjet (b) slijedi iz ocjene za $\int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R}\phi(A_n * f^n)d\boldsymbol{\xi}d\mathbf{x}$.

Da bismo provjerili posljednji uvjet u Dunford-Pettisovom teoremu razmotrimo član $\int_{\mathbf{R}^d}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant K} A_n * f^n d\boldsymbol{\xi}$ i ocijenimo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d}\int_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant K} A_n * f^n d\boldsymbol{\xi} \leqslant & \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} A_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)f^n(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_*)\chi_{\{|\boldsymbol{\xi}_*|\geqslant K/2\}}d\boldsymbol{\xi}_* d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\
& + \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} \chi_{\{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant K\}}\chi_{\{|\boldsymbol{\xi}_*|\geqslant K/2\}}A_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)f^n(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_*)d\boldsymbol{\xi}_* d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\
& \leqslant \frac{4a_n}{K^2}\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} |\boldsymbol{\xi}^2| f^n(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_*)d\boldsymbol{\xi}_* d\mathbf{x} + \left(\int_{|z|\geqslant K/2} A_n(z)dz\right)\cdot \|f^n\|_{\mathrm{L}^1}
\end{aligned}
$$

Desna strana teži uniformno k nuli po n i t kad $K \to \infty$, i (c) slijedi.

U sljedećem koraku odstupamo od zahtjeva uniformne integrabilnosti niza (A_n). Sve što smo do sada pokazali vrijedi ako A_n ima nosač sadržan u kompaktnom skupu, tj. ako vrijedi

$$A_n(\boldsymbol{\xi}) = A_n(\boldsymbol{\xi})\cdot\chi_{\{|\boldsymbol{\xi}|\leqslant K\}}\ .$$

U suprotnom, definirajmo $A_{n,K}$ kao desnu stranu gornje jednakosti. Slaba kompaktnost niza $(A_n * f^n)$ će slijediti ako pokažemo

$$\sup_n \|A_{n,K} * f^n - A_n * f^n\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T];L^1(\mathbf{R}^d\times B_R))} \to 0 \quad \text{kad} \quad K\to\infty\ .$$

Očito, A_n će tada zadovoljavati treći uvjet Dunford-Pettisovog teorema, a to jedino trebamo pokazati, budući da za prva dva uvjeta je dokaz valjan i kad je varijabla brzine $\boldsymbol{\xi}$ neograničena.

Za dokaz gornje konvergencije, primijetimo da je

$$\|A_{n,K} * f^n - A_n * f^n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d\times B_R)} = \int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R}\int_{\mathbf{R}^d} A_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)\chi_{\{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*|\geqslant K\}} f^n(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_*)d\boldsymbol{\xi}_* d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x}\ ,$$

pa pomoću (14) imamo

$$\int_{B_R} A_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)d\boldsymbol{\xi} \leqslant \epsilon(1+|\boldsymbol{\xi}|^2) + C_\epsilon\ .$$

Uz to je $\{\boldsymbol{\xi}_* : |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*| \geqslant K\} \subseteq \{\boldsymbol{\xi}_* : |\boldsymbol{\xi}_*| \geqslant K-R\}$ za $|\boldsymbol{\xi}| < R$, jer je $|\boldsymbol{\xi}_*| \geqslant |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*| - |\boldsymbol{\xi}| \geqslant K-R$.

Slijedi

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^d}\int_{B_R}\int_{\mathbf{R}^d} A_n(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)\cdot\chi_{\{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*|\geqslant K\}} f^n(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_*,t)d\boldsymbol{\xi}_* d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\
&\leqslant \int\int (1+|\boldsymbol{\xi}_*|^2) f^n + \frac{C_\epsilon}{(K-R)^2}\int\int (|\boldsymbol{\xi}_*|^2) f^n\ ,
\end{aligned}
$$

pa tvrdnja slijedi puštajući $K\to\infty$, te $\epsilon \searrow 0$.

Da bismo dokazali slabu kompaktnost niza $\left(\frac{Q_+^n(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)$ u $\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$, najprije ga ocijenimo nizom $\big(Q_-^n(f_n,f_n)\big)$:

$$Q_+^n(f_n,f_n) \leqslant K Q_-^n(f_n,f_n) + \frac{4}{\ln K} e_n(f_n)\ , \tag{34}$$

gdje je

$$e_n(f^n) = \int\int q_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*, \mathbf{n})(f^{n'} f_*^{n'} - f^n f_*^n) \ln\left(\frac{f^{n'} f_*^{n'}}{f^n f_*^n}\right) d\boldsymbol{\xi}_* d\mathbf{n} \ ,$$

i $K > 1$. Dokaz tvrdnje (34) ćemo provesti na kraju leme. Na osnovu (5), niz $(e_n(f^n))$ je ograničen u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ uniformno po n, pa budući da smo već provjerili slabu kompaktnost za $\frac{Q_-^n(f_n,f_n)}{1+f_n}$, pomoću (34) imamo da je niz $\big(Q_+^n(f_n,f_n)\big)$ uniformno omeđen u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. Time smo provjerili uvjet (a).

Kako bismo pokazali da vrijede i preostala dva uvjeta uzmimo proizvoljni izmjeriv skup $A \subseteq \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$, kuglu B_R u $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ i ocijenimo

$$\begin{aligned}
&\sup_n \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} (\chi_A(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + \chi_{\{|\mathbf{x}|+|\boldsymbol{\xi}|\geqslant R\}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}))\frac{Q_+^n(f_n,f_n)}{1+f_n} d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} dt \\
&\quad \leqslant \sup_n K \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d} (\chi_A(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + \chi_{\{|\mathbf{x}|+|\boldsymbol{\xi}|\geqslant R\}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}))\frac{Q_-^n(f_n,f_n)}{1+f_n} d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} dt + \frac{C_T}{\ln K} \ .
\end{aligned}$$

Uzmimo K dovoljno velik takav da je $\frac{C_T}{\ln K} \leqslant \epsilon/2$ (to možemo, budući da relacija (34) vrijedi za svaki $K > 1$). Budući da je niz $\left(\frac{Q_-^n(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)$ slabo kompaktan, možemo uzeti dovoljno veliki R i malen $\delta > 0$ takav da za svaki skup A mjere manje od δ je integral u desnoj strani gornje nejednakosti manji od $\epsilon/2K$. Time smo dokazali slabu kompaktnost niza $\left(\frac{Q_+^n(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)$.

Za dokaz relacije (34), označimo s $A_K^n = \left\{(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}_*,\mathbf{n}) : f^{n'} f_*^{n'} \geqslant K f^n f_*^n\right\}$ i $B_K^n = cA_K^n$, pa onda vrijedi

$$\begin{aligned}
Q_+^n &= \int\int q_n f^{n'} f_*^{n'} \\
&\leqslant K \int\int q_n f^n f_*^n \chi_{B_K^n} + \int\int q_n \chi_{A_K^n}(f^{n'} f_*^{n'} - f^n f_*^n) + \int\int q_n f^n f_*^n \chi_{A_K^n} \ .
\end{aligned}$$

Na skupu A_K^n je $\ln \frac{f^{n'} f_*^{n'}}{f^n f_*^n} \geqslant \ln K$, pa (34) lako slijedi.

Q.E.D.

Na isti način kao i (34) može se dokazati i da vrijedi

$$Q_-^n(f_n,f_n) \leqslant K Q_+^n(f_n,f_n) + \frac{4}{\ln K} e_n(f_n) \ .$$

5. Prijelaz na slabo konvergentan podniz i prva svojstva limesa

Zato što funkcije f_n imaju uniformno ograničene entropije i druge momente (relacije (30) i (31)) iz kriterija relativne kompaktnosti (III.3) slijedi da je za svaki $t \in [0,T]$ niz $(f_n(t,\cdot))$ slabo relativno kompaktan u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. Također, vrijedi da (f_n) ima podniz (kojeg ćemo isto označavati s f^n) koji konvergira slabo u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, čiji limes označimo s f. Definirajmo $g_\delta^n := \frac{1}{\delta}\ln(1+\delta f^n)$. Tada vrijedi

$$(35) \qquad \sup_{t\in[0,T]} \sup_n \|f^n(t,\cdot) - g_\delta^n(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)} \to 0 \qquad \text{kad} \qquad \delta \to 0 \ .$$

Za dokaz te tvrdnje definirajmo funkciju $\beta_\delta(t) := \frac{1}{\delta}\ln(1+\delta t)$ koja zadovoljava $0 \leqslant \beta_\delta(t) \leqslant t$ i

$$t - \beta_\delta(t) \leqslant \varepsilon_R(\delta)t + t\chi_{\{t \geqslant R\}} \ ,$$

za $t \in [0,\infty\rangle, R < \infty$, i funkciju ε_R takvu da $\varepsilon_R(\delta) \to 0$ kad $\delta \searrow 0$. Gornja nejednakost se lako pokaže koristeći razvoj u red člana $\ln(1+\delta t)$ (pri tom se uzme $\delta < 1/R$, kako bi produkt $|\delta \cdot t|$ bio manji od 1, što nam onda omogućuje razvoj). Vidi se da možemo uzeti funkciju $\varepsilon_R(\delta) = \frac{\delta t}{2}$, koja očigledno zadovoljava tražene uvjete.

Sada možemo izvesti sljedeće ocjene

$$\begin{aligned}\int\int |g_\delta^n - f^n| d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} &\leqslant \int\int |\varepsilon_R(\delta)f^n| d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} + \int\int |f^n\chi_{\{f^n \geqslant R\}}| d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \\ &= \varepsilon_R(\delta)\int\int |f^n| d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} + \int\int_{|f^n| \geqslant R} |f^n| d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \ .\end{aligned}$$

Budući da je niz (f_n) slabo konvergentan, koristeći (30) dobivamo ocjenu (35) gledajući limes kad $R \to \infty$ i $\delta \searrow 0$. Također, na osnovu prijenosnog teorema (III.3), zbog

$$Tg_\delta^n = \frac{1}{1+\delta f^n} Q^n(f^n, f^n)$$

dobivamo

$$g_\delta^{n\sharp}(t+h) - g_\delta^{n\sharp}(t) = \int_t^{t+h} \frac{Q^n(f^n, f^n)^\sharp(s)}{1+\delta f^{n\sharp}(s)} ds \ .$$

Na osnovu slabe predkompaktnosti niza $\left(\frac{Q^n(f_n,f_n)}{1+f_n}\right)$ u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, dokazane u prethodnoj lemi, slijedi i da je niz $\left(\frac{Q^n(f_n,f_n)}{1+\delta f_n}\right)$ slabo predkompaktan. Zbog toga je niz funkcija

$$F_n := \int\int \frac{Q^n(f_n, f_n)}{1+\delta f_n} d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}$$

slabo predkompaktan u $\mathrm{L}^1[0,T]$, za svaki $\delta \in [0,1]$. Na osnovu rečenog možemo zaključiti da je za svaki $T > 0$ i $R > 0$

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \sup_n \|g_\delta^{n\sharp}(t+h) - g_\delta^{n\sharp}(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^d \times B_R)} &\leqslant \sup_{t\in[0,T]} \sup_n \int_t^{t+h} \int\int \left|\frac{Q^n(f^n, f^n)^\sharp(s)}{1+\delta f^{n\sharp}(s)}\right| \\ &\leqslant \sup_{t\in[0,T]} \sup_n \int_t^{t+h} \left|F^{n\sharp}(t)\right| \quad \longrightarrow \quad 0 \ ,\end{aligned}$$

kad $h \to 0$.

Koristeći (35) dobivamo

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f^{n\sharp}(t+h) - f^{n\sharp}(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)} \leqslant O(\delta) + \sup_{t\in[0,T]} \|g_\delta^{n\sharp} t+h) - g_\delta^{n\sharp}(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^d \times B_R)} \ .$$

Iz ovoga lako slijedi

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_n \|f^{n\sharp}(t+h) - f^{n\sharp}(t)\|_{L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)} \to 0 \quad \text{kad} \quad h \to 0 \ ,$$

i koristeći Arzèla-Ascolijev teorem dobijemo da (slabi) limes $f^\sharp$ niza $\left(f_n^\sharp\right)$ zadovoljava

$$f^\sharp \in \mathrm{C}(\mathbf{R}_0^+; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d})) \ ,$$

i da za svaki $T > 0$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f^\sharp(t+h) - f^\sharp(t)\|_{L^1} \to 0 \quad \text{kad} \quad h \to 0 \ .$$

Zapravo, provodeći zamjenu varijabli pokaže se da je

$$f \in \mathrm{C}(\mathbf{R}_0^+; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\mathrm{d} \times \mathbf{R}^\mathrm{d})) \ .$$

Također, koristeći konveksnost funkcije $z \mapsto z \cdot \max\{\ln z, 0\}$, za svaki $t \in \mathbf{R}_0^+$ vrijedi

$$\begin{aligned}(36)\qquad &\int\!\!\int f|\ln f| d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + \limsup_n \int_0^t \int\!\!\int e_n(f^n) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \\ &\qquad \leqslant \int\!\!\int f_0\Big(|\ln f_0| + 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\boldsymbol{\xi}|^2\Big) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} + C_d\end{aligned}$$

i

$$\int\!\!\int f\Big(1 + |\mathbf{x}|^2 + |\boldsymbol{\xi}|^2\Big) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \leqslant \int\!\!\int f_0\Big(1 + 2|\mathbf{x}|^2 + (2t^2+1)|\boldsymbol{\xi}|^2\Big) d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{x} \ .$$

Lema 5. *Neka $u \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ ima kompaktan nosač i pretpostavimo da je $Tu \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$. Onda je funkcija*

$$\int u(\cdot, \cdot, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

u prostoru $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$, i njezina norma ovisi samo o $\|u\|_{L^2}$,$\|Tu\|_{L^2}$ i nosaču funkcije u.

Dem. Neka je $\hat{u}(\tau, \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ Fourierova transformacija funkcije u obzirom na varijable t i $\mathbf{x}$:

$$\hat{u}(\tau, \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z} + t\tau)} u(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} dt \ .$$

Zbog Plancherelovog teorema i jednakosti:$((\partial_t + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_x)u)^\wedge = 2\pi i(\tau + \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{z})\hat{u}$, $\hat{u}$ i $(\tau + \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{z})\hat{u}$ su funkcije u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ i imaju kompaktan nosač obzirom na $\boldsymbol{\xi}$. Rastavimo integral

$$\int \hat{u}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi} = I_1 + I_2 \ .$$

Označimo $\rho = (\tau^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/2}$, $\tau_0 := \frac{\tau}{\rho}$, $\mathbf{z}_0 := \frac{\mathbf{z}}{\rho}$, te definirajmo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\{|\tau_0 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0| \leqslant \frac{1}{\rho}\}} \hat{u} d\boldsymbol{\xi} \\ I_2 &= \int_{\{|\tau_0 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0| \geqslant \frac{1}{\rho}\}} \hat{u} d\boldsymbol{\xi} \ . \end{aligned}$$

Za ocjenu prvog člana koristit ćemo činjenicu da za svaki kompaktan skup $K \subseteq \mathbf{R}^d$ postoji $\epsilon_0 > 0$ i $C > 0$ takvi da za svaki $\epsilon \in \langle 0, \epsilon_0\rangle$

$$\sup_{(\tau_0, \mathbf{z}_0)\in S^d} \lambda\{\boldsymbol{\xi} \in K : |\tau_0 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0| \leqslant \epsilon\} \leqslant C\epsilon \ .$$

Ta se relacija dokazuje tako da na zbroj $\tau_0 + \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{z}_0$ gledamo kao na skalarni produkt vektora $(1, \boldsymbol{\xi})$ i $(\tau_0, \mathbf{z}_0)$ u $\mathbf{R}^{d+1}$, pri čemu je drugi vektor jediničan. Označimo s $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbf{R}^d$ vektor za koji je $|\tau_0 + \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \mathbf{z}_0| = 0$. Za proizvoljan $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ napravimo rastav $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi}'$, pa zaključujemo

$$|\tau_0 + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z}_0| \leqslant |\tau_0 + (\boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi}') \cdot \mathbf{z}_0| \leqslant |\boldsymbol{\xi}' \cdot \mathbf{z}_0| \leqslant |\boldsymbol{\xi}'| \,.$$

Ako sa B_d označimo volumen jedinične kugle u $\mathbf{R}^d$, onda vrijedi

$$\sup_{(\tau_0,\mathbf{z}_0)\in S^d} \lambda\{\boldsymbol{\xi} \in K : |\tau_0 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0| \leqslant \epsilon\} \leqslant \lambda\{\boldsymbol{\xi} \in K : \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi}', |\boldsymbol{\xi}'| \leqslant \epsilon\} \leqslant B_d \epsilon \,.$$

Stavljajući $\epsilon = \frac{1}{\rho}$ u upravo dokazanoj relaciji i koristeći Cauchy-Schwartzovu nejednakost, dobijamo:

$$|I_1|^2 \leqslant \Big(\int_{\{|\tau_0+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0|\leqslant\frac{1}{\rho}\}} 1 d\boldsymbol{\xi}\Big)\cdot\Big(\int |\hat{u}|^2 d\boldsymbol{\xi}\Big) \leqslant \frac{C}{\rho}\int |\hat{u}|^2 d\boldsymbol{\xi}$$

i

$$\begin{aligned}
|I_2|^2 &= \int_{\{\boldsymbol{\xi}\in K:|\tau_0+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0|\geqslant\frac{C}{\rho}\}} \frac{|\tau + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}|^2}{|\tau_0 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0|\rho^2} |\hat{u}|^2 d\boldsymbol{\xi} \\
&\leqslant \frac{1}{\rho^2}\Big(\int_{\{\boldsymbol{\xi}\in K:|\tau_0+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0|\geqslant\frac{C}{\rho}\}} |\tau_0 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0|^{-2} d\boldsymbol{\xi}\Big)\cdot\Big(\int |\tau + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}|^2 |\hat{u}|^2 d\boldsymbol{\xi}\Big) \\
&\leqslant \frac{C}{\rho}\int |\tau + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}|^2 |\hat{u}|^2 d\boldsymbol{\xi} \,.
\end{aligned}$$

Zadnja jednakost slijedi iz elementarne integracije

$$\int_{\{\boldsymbol{\xi}\in K:|\tau_0+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0|\geqslant\frac{1}{\rho}\}} |\tau_0 + \boldsymbol{\xi}\mathbf{z}_0|^{-2} d\boldsymbol{\xi} \leqslant C' \cdot \rho \,.$$

Konstanta C' ovisi o nosaču funkcije $\hat{u}$ u varijabli $\boldsymbol{\xi}$. Zbog toga što su $\hat{u}, (\tau + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{z})\hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ ocjene za I_1 i I_2 impliciraju

$$\int\int \rho(|I_1|^2 + |I_2|^2) d\mathbf{z} d\tau = \int\int (\tau^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/2} \Big|\int \hat{u}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi}\Big|^2 d\mathbf{z} d\tau < \infty \,. \tag{37}$$

Sada jedino preostaje dokazati da zadnja nejednakost povlači

$$\int u d\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{H}^{1/2} \,.$$

Norma funkcije f u prostoru $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$ je dana izrazom

$$\|f\|^2_{\mathrm{H}^{1/2}} = \Big(\int\int \Big(1 + (\tau^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/8}\Big)^2 |\hat{f}(\tau, \mathbf{z})|^2 d\mathbf{z} d\tau\Big) \,,$$

pa imamo da za $f := \int u d\boldsymbol{\xi}$ vrijedi

$$\|\int u d\boldsymbol{\xi}\|_{\mathrm{H}^{1/2}} = \int\int \Big(1 + 2(\tau^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/8} + (\tau^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/4}\Big) \Big|\int \hat{u}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi}\Big| d\mathbf{z} d\tau \,.$$

Pomoću (37) zaključujemo

$$\begin{aligned}
\int\int (\tau^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/4} \Big|\int \hat{u} d\boldsymbol{\xi}\Big| d\mathbf{z} d\tau &\leqslant \int\int_{\{\tau^2+|\mathbf{z}|^2\leqslant 1\}} \Big|\int \hat{u} d\boldsymbol{\xi}\Big| d\mathbf{z} d\tau \\
&\quad + \int\int_{\{\tau^2+|\mathbf{z}|^2\geqslant 1\}} (\tau^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/2} \Big|\int \hat{u} d\boldsymbol{\xi}\Big| d\mathbf{z} d\tau \\
&\leqslant \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} |\hat{u}| d\boldsymbol{\xi} d\mathbf{z} d\tau \\
&\quad + \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}^d} (\tau^2 + |\mathbf{z}|^2)^{1/2} \Big|\int \hat{u} d\boldsymbol{\xi}\Big| d\mathbf{z} d\tau \\
&< \infty \,.
\end{aligned}$$

Slično se pokaže i da vrijedi ocjena $\int\int(\tau^2+|\mathbf{z}|^2)^{1/8}\Big|\int \hat{u}d\boldsymbol{\xi}\Big|d\mathbf{z}d\tau < \infty$, dok nejednakost $\int\int\Big|\int \hat{u}d\boldsymbol{\xi}\Big|d\mathbf{z}d\tau < \infty$ slijedi trivijalno iz činjenice da je $\hat{u} \in \mathrm{L}^2$. Time smo dokazali da je $\|\int ud\boldsymbol{\xi}\|_{\mathrm{H}^{1/2}} < \infty$, odnosno $\int ud\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{H}^{1/2}$.

Q.E.D.

6. Jaka konvergencija

Lemu 5 ćemo koristiti za prijelaz sa slabe na jaku konvergenciju koji vršimo u sljedećoj lemi. Ona će biti ključna u završavanju dokaza glavnog teorema.

Lema 6. *Pretpostavimo da je* $g_n \subseteq \mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ *slabo relativno kompaktan i da je* Tg_n *slabo relativno kompaktan u* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$*. Ako je* ψ_n *omeđen niz u* $\mathrm{L}^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ *koji konvergira* (ss)*, tada je* $(\int g_n\psi_n d\boldsymbol{\xi})$ *kompaktan u normiranoj topologiji* $\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d)$.

Dem. Budući da na osnovu (III.3) za svaki $\epsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K \subseteq (0,T)\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ takav da za svaki n

$$\int\int\int_{cK}(|g_n\psi_n| + |g\psi|) < \epsilon \ ,$$

možemo pretpostaviti da svi g_n (uključujući i g) imaju nosač sadržan u kompaktnom skupu. Također, zbog Egorovljevog teorema $\psi_n \to \psi$ uniformno, osim na skupu proizvoljno male mjere, pa možemo uzeti $\psi_n = \psi$ za svaki n. Štoviše, dovoljno je uzeti $\psi = 1$: naime, ako je ψ dovoljno glatka, tada $g_n\psi$ zadovoljava iste zahtjeve kao i g_n, a ako je ψ u L^∞, možemo je aproksimirati s C^∞ funkcijama ψ_k takvim da $\|\psi_k-\psi\|_{L^1}\to 0$ i $\sup_k\|\psi_k\|_{L^\infty} < \infty$. Onda vrijedi

$$\int\int\Big|\int\psi_k g_n d\boldsymbol{\xi} - \int\psi g_n d\boldsymbol{\xi}\Big|d\mathbf{x}dt \leqslant \int\int\int|\psi_k-\psi||g_n|dtd\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} \ .$$

Zbog omeđenosti niza $\Big|\psi_k-\psi\Big|$ u L^∞, prema teoremu Banach-Alaouglu-Bourbakia on je kompaktan u slaboj * topologiji. Kako je L^1 separabilan prostor, to slijedi da su omeđeni skupovi u L^∞ metrizabilni u slaboj * topologiji, pa je zato kompaktnost niza $\Big|\psi_k-\psi\Big|$ ekvivalentna posjedovanju slabo * konvergentnog podniza, kojeg ćemo jednako označavati. Međutim, konvergencija $\psi_k-\psi\to 0$ (ss) povlači $|\psi_k-\psi|\xrightarrow{*}0$, stoga

$$\int\int\int|\psi_k-\psi||g_n|dtd\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\to 0 \ ,$$

pa smo time dokazali da je dovoljno razmatrati slučaj $\psi = 1$.

Definirajmo sada funkcije u_n i h_n na sljedeći način:

$$\begin{cases} Tu_n = Tg_n\cdot\chi_{\{(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t);|Tg_n|\leqslant M\}} \\ u_n|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Th_n = Tg_n\cdot\chi_{\{(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t);|Tg_n|\geqslant M\}} \\ h_n|_{t=0} = 0 \ . \end{cases}$$

Očito je $g_n = u_n + h_n$, jer $T(u_n+h_n) = Tg_n$, a g_n je jedinstveno rješenje Cauchyeve zadaće $Tf = Tg_n$, $f_{|_{t=0}} = 0$.

Zbog slabe kompaktnosti niza (Tg_n) možemo iskoristiti ocjenu (III.4), pa koristeći eksplicitnu formulu za funkciju h

$$h_n(\mathbf{x}+t\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},t)=\int_0^t Tg_n(\mathbf{x}+t\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},t)\chi_{\{|Tg_n|\geqslant M\}}(\mathbf{x}+t\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi},t)d\tau\ ,$$

slijedi

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}^d}\int_{\mathbf{R}^d}|h_n(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)|d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}dt\to 0.$$

Niz (Tu_n) je ograničen u prostoru L^∞, pa iz eksplicitne formule za funkcije u_n zaključujemo da su i one ograničene u L^∞. Međutim, iz uniformne kompaktnosti nosača niza (g_n) slijedi da su (u_n) i (Tu_n) omeđeni nizovi u L^2, što nam omogućuje korištenje Leme 5, po kojoj zaključujemo da je $\left(\int u_n d\boldsymbol{\xi}\right)$ omeđen u $\mathrm{H}^{1/2}$. Zbog kompaktnosti ulaganja prostora $\mathrm{H}^{1/2}$ u L^2, slijedi da je $\left(\int u_n d\boldsymbol{\xi}\right)$ kompaktan u L^2. Zato što smo pretpostavili da niz (g_n) ima uniformno kompaktan nosač slijedi da i niz $\left(\int u_n d\boldsymbol{\xi}\right)$ ima isto svojstvo. Njegov nosač označimo s K. Budući da je za svaki kompaktan skup $\mathrm{L}^2(K)$ uloženo u $\mathrm{L}^1(K)$, i pri tom je to ulaganje neprekidno, imamo da je niz $\left(\int u_n d\boldsymbol{\xi}\right)$ kompaktan u L^1 i time je dokaz završen.

Q.E.D.

Korolar 1. *Uz pretpostavke Leme 6, ako* $g_n \rightharpoonup g$ *u* $\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ *i* $\psi_n\to\psi$ (ss), *onda vrijedi*

$$\Big|\Big|\int g_n\psi_n d\boldsymbol{\xi}-\int g\psi d\boldsymbol{\xi}\Big|\Big|_{\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d)}\to 0\ .$$

Dem. Lema nam već osigurava egzistenciju jakog limesa niza $(\int g_n\psi_n d\boldsymbol{\xi})$, kojeg ćemo označiti s L, a ono što treba provjeriti je da je taj limes jednak $\int g\psi d\boldsymbol{\xi}$. Dokaz se zasniva na relaciji (III.2), koja kaže da $g_n\psi_n\rightharpoonup g\psi$ u $\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$. Tada za proizvoljnu funkciju $\phi\in\mathrm{L}^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ imamo

$$\int\!\!\int\!\!\int g_n\psi_n\phi dtd\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\to\int\!\!\int\!\!\int g\psi\phi dtd\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}$$

i

$$\int\!\!\int\!\!\int g_n\psi_n\phi dtd\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}\to\int\!\!\int L\phi dtd\mathbf{x}\ .$$

Zbog jedinstvenosti limesa slijedi

$$\left\langle\int g\psi,\phi\right\rangle=\langle L,\phi\rangle\ ,$$

to jest $\int g\psi$ i L su jednaki u smislu distribucija, i time je dokaz završen zbog uloženosti prostora L^1 u prostor distribucija.

Q.E.D.

Lema 7. *Neka je* (f_n) *relativno slabo kompaktan niz u* $\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ *i pretpostavimo da postoji familija realnih, uniformno Lipschitzovih funkcija* $(\beta_\delta;\delta>0)$, $\beta_\delta(0)=0$ *za svaki* δ, *takvih da*

i) $\beta_\delta(s)\to s$ *kad* $\delta\to 0$, *uniformno na kompaktnim podskupovima od* $\mathbf{R}_0^+$,

ii) *niz* $T(\beta_\delta(f^n))$ *je za svaki* δ *slabo relativno kompaktan u* $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$.

Ako uz to $f^n\rightharpoonup f$, *i ako je* (ψ_n) *omeđen u* $\mathrm{L}^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$ *i* $\psi_n\to\psi$ (ss), *onda vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\Big|\int f_n\psi_n d\boldsymbol{\xi}-\int f\psi d\boldsymbol{\xi}\Big|\Big|_{\mathrm{L}^1}=0\ .$$

Dem. Po pretpostavci je (f_n) slabo kompaktan, pa pomoću (III.4) zaključujemo da je za dovoljno veliki R izraz $\sup_n \int_{\{f^n \geqslant R\}} |f^n|$ proizvoljno malen. Slično, po Dunford-Pettisovom teoremu možemo ocijeniti $\sup_n \int_{\mathbf{R}^d \setminus K} |f^n|$ za neki kompaktan skup K. Iskoristit ćemo također Lipschitzovo svojstvo funkcija β_δ, tako da iz jednakosti $\beta_\delta = 0$ dobijemo $|\beta_\delta(f^n)| \leqslant C|f^n|$. Iz toga neposredno zaklučujemo da je niz $(\beta_\delta(f^n))$ slabo kompaktan u L^1, i jedno njegovo gomilište označimo sa g_δ (podniz ćemo i dalje označavati jednako kao i limes).

Pokušajmo sada ocijeniti integral $\int\int\int |f^n - \beta_\delta(f^n)| dt d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi}$. Rastavimo ga na sljedeći način

$$
\begin{aligned}
\int\int\int |f^n - \beta_\delta(f^n)| dt d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \leqslant & \int\int\int_{\{f^n \leqslant R\}\setminus K} |f^n - \beta_\delta(f^n)| dt d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\
& + \int\int\int_{\{f^n \leqslant R\}\cap K} |f^n - \ beta_\delta(f^n)| dt d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\
& + \int\int\int_{\{f^n \geqslant R\}} |f^n - \beta_\delta(f^n)| dt d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\
\leqslant & \int\int\int_{\{f^n \leqslant R\}\setminus K} (C+1)|f^n| dt d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\
& + \int\int\int_{\{f^n \leqslant R\}\cap K} |f^n - \beta_\delta(f^n)| dt d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\
& + \int\int\int_{\{f^n \geqslant R\}} (C+1)|f^n| dt d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \; .
\end{aligned}
$$

Zbog toga što $\beta_\delta(s) \to s$ uniformno na kompaktnim skupovima, zaključujemo da

$$
\sup_n \|f^n - \beta_\delta(f^n)\|_{\mathrm{L}^1} \to 0 \; , \tag{38}
$$

kad $\delta \to 0$. Sada možemo primjeniti Lemu 6 na niz funkcija $g_\delta^n := \beta_\delta(f^n)$ iz čega slijedi

$$
\begin{aligned}
\Big\| \int f_n \psi_n d\boldsymbol{\xi} - \int f \psi d\boldsymbol{\xi} \Big\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant & \Big\| \int f_n \psi_n d\boldsymbol{\xi} - \int \beta_\delta(f^n) \psi_n d\boldsymbol{\xi} \Big\|_{\mathrm{L}^1} \\
& + \Big\| \int \beta_\delta(f^n) \psi_n d\boldsymbol{\xi} - \int g_\delta \psi d\boldsymbol{\xi} \Big\|_{\mathrm{L}^1} + \Big\| \int g_\delta \psi d\boldsymbol{\xi} - \int f \psi d\boldsymbol{\xi} \Big\|_{\mathrm{L}^1}
\end{aligned}
$$

Dokaz leme će biti potpun ako pokažemo da $\|f - g_\delta\|_{\mathrm{L}^1} \to 0$ kad $\delta \to 0$. To se pak lako pokaže koristeći relaciju (38) i

$$
\|f - g_\delta\|_{\mathrm{L}^1} = \sup_{\phi, \|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant 1} \int (f - g_\delta) \cdot \phi \; ,
$$

i

$$
\sup_{\phi \in \mathrm{L}^\infty} \lim_n \int (f - \beta_\delta(f^n)) \phi \leqslant \liminf_n \sup_{\phi \in \mathrm{L}^\infty} (f - \beta_\delta(f^n)) \phi \; .
$$

Q.E.D.

7. Limes je renormalizirano rješenje

Lema 8. *Neka je (f^n) niz aproksimativnih rješenja Boltzmannove jednadžbe definiranih u prethodnom odjeljku. Tada on ima podniz sa svojstvom da za svaki $T > 0$ vrijedi*

i) $\int f^n d\boldsymbol{\xi} \to \int f d\boldsymbol{\xi}$ *u* $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d)$, *kao i za skoro svaki* $(t, \mathbf{x})$,

ii) $A_n * f^n \to A * f$ *u* $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times B_R)$ *za svaki* $R > 0$, *kao i za skoro svaki* $(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$,

iii) za svaku funkciju $\phi \in \mathrm{L}^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ *s kompaktnim nosačem vrijedi*

$$\frac{\int Q^n_\pm(f^n, f^n)\phi d\boldsymbol{\xi}}{1 + n\int f^n d\boldsymbol{\xi}} \longrightarrow \frac{\int Q^n_\pm(f, f)\phi d\boldsymbol{\xi}}{1 + n\int f d\boldsymbol{\xi}}$$

u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d)$.

Dem. i) Definirajmo funkciju $\beta_\delta(s) = \frac{1}{\delta}\ln(1 + \delta s)$. Na osnovu Leme 4 je $T(\beta_\delta(f^n))$ slabo konvergentan u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, a kako uz to β_δ zadovoljava i sve ostale pretpostavke Leme 7, primjenjujući nju uz $\psi_n = 1$ dobivamo konvergenciju niza $\left(\int f^n d\boldsymbol{\xi}\right)$ u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d)$. To povlači postojanje podniza koji konvergira skoro svuda i time je dokazana prva tvrdnja.

ii) Dokaz ove tvrdnje je sličan dokazu prethodne, a detaljno raspisan može se pronaći u [DL1, str. 340].

iii) Za dokaz konvergencije $Q^n_- = \frac{f^n A_n * f^n}{1+\int f d\boldsymbol{\xi}} \cdot \phi$ definirajmo $\psi_n := \frac{A_n * f^n}{1+\int f d\boldsymbol{\xi}} \cdot \phi$. Iz (i) i (ii) slijedi da $\psi_n \to \psi$ (ss), pa nam Lema 7 opet daje tvrdnju. Za slučaj Q_+ provode se slična razmatranja. Koristeći zamjenu varijabli, možemo napisati

$$\frac{\int Q^n_+(f^n, f^n)\phi d\boldsymbol{\xi}}{1 + n\int f^n d\boldsymbol{\xi}} = \frac{\int\int\int q_n f^n f^n_* \phi'}{1 + n\int f^n d\boldsymbol{\xi}} .$$

Označimo

$$\psi_n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \frac{\int_{\mathbf{R}^d}\int_{S^{d-1}} q_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*, \mathbf{n}) f^n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_*)\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}', t) d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_*}{\left(1 + n\int f^n d\boldsymbol{\xi}\right)} .$$

Želimo pokazati da ψ_n zadovoljava uvjete Leme 7 kako bismo iz nje dobili traženu tvrdnju. Za to pokazati, koristit ćemo se opet Lemom 7. Uz oznaku

$$\tilde{\psi}_n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\int_{\mathbf{R}^d}\int_{S^{d-1}} q_n(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*, \mathbf{n})\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}', t) d\mathbf{n} d\boldsymbol{\xi}_*}{\left(1 + n\int f^n d\boldsymbol{\xi}\right)} ,$$

zbog tvrdnje (i) i svojstava niza (q_n) slijedi da $\tilde{\psi}_n \to \tilde{\psi}$ (ss), pa primjenom Leme 7 zaključujemo da $\psi_n \to \psi$ u L^1. Jaka konvergencija povlači konvergenciju skoro svuda (uz prijelaz na podniz), pa nam Lema 7 daje tvrdnju.

Q.E.D.

Definirajmo sada operator T^{-1} koji funkciji g pridružuje rješenje Cauchyevog problema

$$\begin{cases} Tu = g \\ u_{|t=0} = 0 . \end{cases}$$

Eksplicitan izraz za funkciju $T^{-1}g$ je

$$T^{-1}g(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_0^t g(s, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) ds \; .$$

Lako se provjeri da je T^{-1} neprekidan operator iz prostora $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$ u $\mathrm{C}([0,T]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc}))$, te da za nenegativnu funkciju g vrijedi da je $T^{-1}g$ nenegativno. Uzmimo $F \in \mathrm{C}([0,T]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc}))$, $F \geqslant 0$ te definirajmo operator $T_F^{-1} := e^{-F}T^{-1}e^F$. Iz svojstava funkcije F slijedi da je T_F^{-1} također neprekidan iz $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$ u $\mathrm{C}([0,T]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc}))$.

Za omeđeni niz (F_n) u $\mathrm{C}([0,T]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc}))$ za koji vrijedi $F_n \geqslant 0, F_n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \to F(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ za svaki t i skoro svaki $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, ako $g_n \rightharpoonup g$ u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$ onda imamo da za svaki $t \in [0,T]$ vrijedi

$$T_{F_n}^{-1} g_n(t) \rightharpoonup T_F^{-1} g(t) \tag{39}$$

u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$. Za dokaz relacije (39) uočimo da je

$$T_{F_n}^{-1} g_n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_0^t e^{-F_n(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})} e^{F_n(s,\mathbf{x}-(t-s)\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})} g_n(s, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) ds \; .$$

Uzmimo proizvoljnu funkciju $h \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$ i pokažimo da

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int_0^t e^{-F_n(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})} e^{F_n(s,\mathbf{x}-(t-s)\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})} g_n(s, \mathbf{x} - (t-s)\ \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) ds \cdot h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \\ &\qquad \to \int\!\!\int\!\!\int_0^t e^{-F(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})} e^{F(s,\mathbf{x}-(t-s)\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})} g(s, \mathbf{x} - (t-s)\ \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) ds \cdot h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\xi} \; . \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da za svaki s, t vrijedi $F_n(s, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - F_n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leqslant 0$. Tada će naime za funkciju

$$H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := e^{F_n(s,\mathbf{x}-(t-s)\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) - F_n(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})} \cdot h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$$

vrijediti $H \in \mathrm{L}^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$, pa će zbog slabe konvergencije niza (g_n) u prostoru $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$ dokaz biti završen. Međutim, tražena nejednakost se lako dokaže:

$$\begin{aligned} F_n(s, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - F_n(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= F_n(0, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) + \int_0^s TF_n(\tau, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi} - (s-\tau)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) d\tau \\ &\quad - F_n(0, \mathbf{x} - (t-s)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) - \int_0^t TF_n(\tau, \mathbf{x} - (t-\tau)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) d\tau \\ &= -\int_s^t TF_n(\tau, \mathbf{x} - (t-\tau)\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) d\tau \ \leqslant 0 \; . \end{aligned}$$

Označimo $F_n = T^{-1}(A_n * f_n)$ i iskoristimo (39) za dokaz egzistencije renormaliziranog rješenja Boltzmannove jednadžbe:

$$Tf^n + (A_n * f_n) f_n = Q_+^n(f_n, f_n) \; .$$

Množeći jednadžbu s e^{F_n} zaključujemo da vrijedi

$$T(f^n e^{F_n}) = (Tf^n) e^{F_n} + f^n (TF_n) e^{F_n} = e^{F_n} Q_+^n(f_n, f_n).$$

Djelovanjem operatora T^{-1} na gornju jednakost slijedi

$$T^{-1}\left(T(f^n e^{F_n})\right) = f^n e^{F_n} - f_0^n e^{F_n{}^0} = T^{-1}\left(e^{F_n} Q_+^n(f_n, f_n)\right),$$

odnosno, zbog $F_n^0 = 0$

(40) $$f^n = f_0^n e^{-F_n} + T_{F_n}^{-1} Q_+^n(f_n, f_n) .$$

Na osnovu Leme 8 zaključujemo da je (F_n) omeđen niz u $\mathrm{C}([0,T]; \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$, te da za svaki $t \in \mathbf{R}_0^+$ vrijedi

$$F_n \to F = T^{-1}(A * f) \text{ (ss)} .$$

Lema 9. *Za svaki* $t \in \mathbf{R}_0^+$ *je* $T_F^{-1} Q_+(f,f) \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$ *i*

$$f = f_0 e^{-F} + T_F^{-1} Q_+(f,f) .$$

Dem. Definirajmo $\beta_m(t) = \min\{t, m\}$ za $t \geqslant 0$ i $m \in \mathbf{N}$. Po Dunford-Pettisovom teoremu možemo zaključiti da

$$g_m^n := \beta_m \circ f^n \rightharpoonup g_m$$

u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$, pa na osnovu dokaza Leme 7 slijedi da

$$g_m \to f \quad \text{kad} \quad m \to \infty$$

u $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d{}_{loc})$. Na osnovu Leme 4 i relacija

$$T g_m^n = Q_n(f^n, f^n) \cdot \chi_{\{f^n \leqslant m\}} \leqslant (m+1) \frac{Q_n(f^n, f^n)}{1 + f^n}$$

imamo da niz (g_m^n) zadovoljava uvjete Leme 7, pa na potpuno analogan način kao u dokazu tvrdnje (iii) Leme 8, zaključujemo da $Q_+^n(g_m^n, g_m^n) \rightharpoonup Q_+(g_m, g_m)$ u $\mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times B_R)$, za svaki $R > 0$.Kako je (g_m^n) niz rastućih funkcija omeđenih odozgo funkcijom f_n, što povlači nejednakost $Q_+^n(g_m^n, g_m^n) \leqslant Q_+^n(f^n, f^n)$, pa pomoću (40) zaključujemo

$$f^n \geqslant f_0^n e^{-F_n} + T_{F_n}^{-1} Q_+^n(g_m^n, g_m^n) .$$

Gledajući slabi limes gornje nejdnakosti iz (39) slijedi

$$f \geqslant f_0 e^{-F} + T_F^{-1} Q_+(g_m, g_m) .$$

Iz Lebesgueovog teorema o monotonoj konvergenciji zaključujemo da $T_F^{-1} Q_+(g_m, g_m) \to T_F^{-1} Q_+(f,f)$ pa na osnovu zadnje nejednakosti možemo zaključiti da je $T_F^{-1} Q_+(f,f) \in \mathrm{L}^1([0,T] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ i

(41) $$f \geqslant f_0 e^{-F} + T_F^{-1} Q_+(f,f) .$$

Za dokaz suprotne nejednakosti definirajmo

$$h_m^n := m \ln(1 + f^n/m) .$$

Koristeći račun sličan onom kojeg smo koristili za dobivanje (40), lako se dobije

$$
\begin{aligned}
h_m^n = m\ln(1+f_0^n/m) + T_{F_n}^{-1}\left(\frac{Q_+^n(f^n,f^n)}{1+f^n/m}\right) \\
+ T_{F_n}^{-1}\left(A_n * f^n\left(h_m^n - \frac{f^n}{1+f^n/m}\right)\right) .
\end{aligned} \tag{42}
$$

Zaključujući na jednak način kao i prije, te prelaskom na podniz po potrebi, možemo pisati

$$
\begin{array}{rlcc}
h_m^n \rightharpoonup h_m, & h_m \to f & \text{u} & \mathrm{L}^1 \\
\dfrac{f^n}{1+f^n/m} \rightharpoonup l_m, & l_m \to f & \text{u} & \mathrm{L}^1 .
\end{array}
$$

Pri tom smo pri zaključivanju zadnje konvergencije koristili Lemu 4 i ocjenu

$$
\frac{Q}{(1+f_n/m)^2} \leqslant \frac{Q}{1+f_n/m} .
$$

Također vrijedi

$$
\frac{Q_+^n(f^n,f^n)}{1+f^n/m} \rightharpoonup Q_{+,m} . \tag{43}
$$

Podsjetimo se da na temelju Leme8 (iii) vrijedi

$$
\frac{\int Q_+^n(f^n,f^n)\phi d\boldsymbol{\xi}}{1+\int f^n d\boldsymbol{\xi}} \to \frac{\int Q_+(f,f)\phi d\boldsymbol{\xi}}{1+\int f d\boldsymbol{\xi}} \tag{44}
$$

za svaku funkciju $\phi \in \mathrm{L}^\infty$ s kompaktnim nosačem. Pomnožimo lijevu stranu (43) s $\frac{\phi d\boldsymbol{\xi}}{1+n\int f d\boldsymbol{\xi}}$, $(\phi \geqslant 0)$ i integrirajmo po varijabli $\boldsymbol{\xi}$. Dobiveni niz konvergira k $\frac{\int Q_{+,m}\phi d\boldsymbol{\xi}}{1+\int f d\boldsymbol{\xi}}$. Zbog ocjene (44) ovaj limes je manji od $\frac{\int Q_+(f,f)\phi d\boldsymbol{\xi}}{1+\int f d\boldsymbol{\xi}}$, pa iz toga zaključujemo

$$
Q_{+,m} \leqslant Q_+(f,f) \quad \text{(ss)} .
$$

Gledajući slabi limes kad $n \to \infty$ u (42), nalazimo

$$
h_m \leqslant m\ln\left(1+\frac{f^n}{m}\right)e^{-F} + T_F^{-1}Q_+(f,f) + T_F^{-1}(A * f(h_m - l_m)) .
$$

Uzimajući opet limes, ovaj put po m, dobivamo traženu nejednakost

$$
f \leqslant f_0 e^{-F} + T_F^{-1}Q_+(f,f) ,
$$

koja zajedno s nejednakošću (42) implicira tvrdnju ove leme:

$$
f = f_0 e^{-F} + T_F^{-1}Q_+(f,f) . \tag{45}
$$

Q.E.D.

Zadnja jednakost nam već govori da funkcija f zadovoljava Boltzmannovu jednadžbu u nekom smislu. Mi ćemo sada po kriterijima danim u poglavlju (IV.2) jednostavno provjeriti da je to traženo renormalizirano rješenje.

Prvo, koristeći pretpostavke na A i relaciju

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_n \int\int f^n(1+|\mathbf{x}|^2+|\boldsymbol{\xi}|^2)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi} < \infty \;,$$

lako se pokaže da je za svaki $T<\infty$

$$\frac{Q_-(f,f)}{1+f} \in \mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times{\mathbf{R}^d}_{loc}) \;. \tag{46}$$

Za dokazati analognu tvrdnju za $Q_+(f,f)$, prisjetimo se da na osnovu (36) imamo

$$\frac{Q^n_\pm(f^n,f^n)}{1+\delta\int f^n d\boldsymbol{\xi}} \leqslant 2Q^n_\mp(f^n,f^n)1+\delta\int f^n d\boldsymbol{\xi} + \frac{4e_n}{\ln 21+\delta\int f^n d\boldsymbol{\xi}} \;.$$

Budući da je $e_n(f^n)$ nenegativan i da vrijedi

$$\sup_n \int_0^\infty \int\int e_n(f^n)d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}ds < \infty \;,$$

možemo pretpostaviti da $e_n(f^n)$ konvergira slabo (u $\mathcal{D}'$) k ograničenoj nenegativnoj mjeri μ. Lema 8 nam daje slabu konvergenciju preostala dva člana u L^1, pa prijelaskom na slabi limes dobijamo

$$\frac{Q_\pm(f,f)}{1+\delta\int f d\boldsymbol{\xi}} \leqslant \frac{2Q_\mp(f,f)}{1+\delta\int f d\boldsymbol{\xi}} + \frac{4}{\ln 2(1+\delta\int f d\boldsymbol{\xi})}\mu \;.$$

Gornja nejednakost će i dalje vrijediti ukoliko mjeru μ zamijenimo s njezinim apsolutno neprekidnim dijelom $e\in\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$, pa promatrajući limes kad $\delta\searrow 0$, slijedi da je

$$Q_\pm(f,f) \leqslant 2Q_\mp(f,f)+E \;, \tag{47}$$

pri čemu je $E\in\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$. Relacije (46) i (47) nam daju

$$\frac{Q_+(f,f)}{1+f} \in \mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times{\mathbf{R}^d}_{loc}) \;.$$

Za pokazati da je $Q_+(f,f)(\cdot,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{L}^1([0,T])$ za skoro svaki $\mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}$, iskoristimo Lemu 9 na osnovu koje je za svaki t, funkcija $T_F^{-1}Q_+(f,f)\in\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d\times{\mathbf{R}^d}_{loc})$ i $F(t,\cdot)\in\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d\times{\mathbf{R}^d}_{loc})$. Eksplicitno, vrijedi

$$\int_0^t Q_+(f,f)^\sharp e^{-(F^\sharp(t)-F^\sharp(s))}ds \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d\times{\mathbf{R}^d}_{loc})$$

za svaki t, pa zbog toga što je $F^\sharp$ nenegativna, rastuća po varijabli t, slijedi da je $Q_+(f,f)^\sharp\in\mathrm{L}^1([0,T])$ za skoro svaki $\mathbf{x}$ i $\boldsymbol{\xi}$. Za Q_- isti zaključak slijedi na osnovu (47).

Množeći relaciju (45) s e^F i djelovanjem s operatorom T^{-1}, koristeći transportni teorem (III.3) dobivamo

$$f^\sharp(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = f_0(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) + \int_0^t Q(f,f)(s,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})ds \;.$$

Time je pokazano da je f renormalizirano rješenje Boltzmannove jednadžbe.

Jedino nam preostaje pokazati da f zadovoljava ocjenu entropije (8). Da bismo to zaključili, iskoristimo dokaz Leme 8 iz kojeg slijedi da za svaki $\delta > 0$ vrijedi

$$\frac{f^n f^n_*}{1+\delta\int f^n d\boldsymbol{\xi}} \rightharpoonup \frac{f f_*}{1+\delta\int f d\boldsymbol{\xi}}$$
$$\frac{f^{n'} f^{n'}_*}{1+\delta\int f^n d\boldsymbol{\xi}} \rightharpoonup \frac{f' f'_*}{1+\delta\int f d\boldsymbol{\xi}}$$

u $\mathrm{L}^1([0,T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times S^{d-1})$. Koristeći konveksnost funkcije

$$(x,y)\to(x-y)\ln\frac{x}{y}$$

na $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$, vidimo da je za svaki $T>0$

$$\int_0^T\int\int\frac{e(f)}{1+\delta\int f d\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}dt \leqslant \liminf\int_0^T\int\int\frac{e_n(f^n)}{1+\delta\int f^n d\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x}d\boldsymbol{\xi}dt\ .$$

Ocjena entropije sada slijedi iz (38) i Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Time je završen dokaz teorema 1.

Literatura

[AB] Nenad Antonić, Neven Balenović: Fourierova pretvorba, rukopis

[AV] Nenad Antonić, Marko Vrdoljak: L^p prostori, rukopis

[B] Haïm Brezis: Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983.

[C] Carlo Cercignani: The Boltzmann equation and its applications, Springer-Verlag, 1988.

[CIP] Carlo Cercignani, Reinhard Illner, Mario Pulvirenti: The mathematical theory of dilute gases, Springer-Verlag, 1994.

[D] Bernard Dacorogna: Direct methods in the calculus of variations, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[DL1] Ronald J. DiPerna, Pierre Louis Lions: On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability, Annals of Mathematics **130** (1989) 321-366

[DL2] Ronald DiPerna, Pierre Louis Lions: Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, Inventiones Mathematicæ **98** (1989) 511–547

[DL3] Ronald J. DiPerna, Pierre Louis Lions: Global solutions of Boltzmann's equation and the entropy inequality, Archive for Rational Mechanics and Analysis **114** (1991) 47–55

[H] Aleksandr Ja. Hinčin: Statistical mechanics, Dover, 1949.

[R] Xavier Saint Raymond: Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators, CRC Press, 1991.

[S] Jon Schnute: Entropy and kinetic theory for a confined gas, Canadian Journal of Mathematics **27** (1975) 1271–1315

[ST] Daniel W. Strook: A concise introduction to the theory of integration, Birkhäuser, 1994.

[T] Colin J. Thompson: Mathematical statistical mechanics, Princeton University Press, 1972.

[W] J. Wloka: Partial differential equations, Cambridge University Press, 1987.