Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Marin Mišur

Kompaktnost kompenzacijom

Diplomski rad

Zagreb, 27. lipnja 2012.

Predgovor

Cilj ovog rada je opisati osnovne rezultate teorije kompaknosti kompenzacije koju su prije četrdeset godina počeli razvijati Luc Tartar i François Murat. Njezini rezultati su doveli do novih uvida u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Prikazat ćemo neke klasične rezultate teorije o slabo-$*$ neprekidnim funkcijama na nizovima koji zadovoljavaju neke pretpostavke na derivacije.

Koristim priliku da se zahvalim mentoru prof. Nenadu Antoniću na nesebičnoj pomoći i moralnoj potpori koju sam imao tijekom pisanja ovog rada. Također se zahvaljujem prof. Krešimiru Burazinu, prof. Marku Vrdoljaku i asistentu Marku Ercegu na korisnim diskusijama te primjedbama koje su dovele do konačnog izgleda ovog rada. Na kraju bih se želio zahvaliti svojim roditeljima i bratu koji su mi uvijek bili podrška tijekom studiranja.

Sadržaj

I. Funkcijski prostori

1. Oznake

S $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ označavamo elemente prostora $\mathbf{R}^d$, a s $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ označavamo derivaciju po k-toj varijabli. Koristit ćemo Schwartzove oznake: *multiindeks* je d-torka prirodnih brojeva $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbf{N}_0^d$, čiju ćemo *duljinu* označavati s

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d,$$

a *faktorijel* s

$$\boldsymbol{\alpha}! := \alpha_1! \cdots \alpha_d!\,.$$

Za $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ definiramo $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_d)^{\alpha_d}$. Na skupu multiindeksa uvodimo parcijalni uređaj $\leqslant$ na način da je $\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}$ ako i samo ako za svaki $j \in 1...d$ vrijedi $\beta_j \leqslant \alpha_j$.

Binomni koeficijent definiramo formulom:

$$\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})!} & \text{za } \boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{\alpha} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Za derivacije ćemo koristiti oznaku

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}} = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial (x_1)^{\alpha_1} \cdots \partial (x_d)^{\alpha_d}}.$$

Koristeći upravo uvedene oznake, iskažimo Binomni teorem:

$$(\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d)(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d) \qquad (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{y}^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}\ ,$$

i Leibnizovu formulu:

$$(\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d)(\forall\, f, g \in \mathrm{C}^{\boldsymbol{\alpha}}(\Omega)) \qquad \partial_{\boldsymbol{\alpha}}(fg) = \sum_{\boldsymbol{\beta} \leqslant \boldsymbol{\alpha}} (\partial_{\boldsymbol{\beta}} f)(\partial_{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} g)\ ,$$

gdje je $\mathrm{C}^{\boldsymbol{\alpha}}(\Omega)$ prostor funkcija koje su klase C^{α_j} po varijabli x_j.

Kompleksni tenzorski produkt dva vektora, $\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}$, definiramo kao jedinstveni linearni operator koji na po volji odabrani vektor v djeluje na sljedeći način $(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{v} := (\mathsf{v} \cdot \mathsf{b})\mathsf{a}$, gdje je $\mathsf{v} \cdot \mathsf{b} = \sum_{j=1}^{d} v_j \bar{b_j}$ kompleksni skalarni produkt. Uz takav skalarni produkt s (e_i) označavamo kanonsku ortonormiranu bazu prostora $\mathbf{C}^d$, pri čemu e_i na i-tom mjestu ima 1, a na ostalim mjestima 0. Vrijedi:

Lema 1. *Za* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbf{C}^r$ *je* $\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}$ *linearan operator na* $\mathbf{C}^r$ *ranga 1 ukoliko vrijedi* $\mathsf{a}, \mathsf{b} \neq 0$, *dok je inače jednak trivijalnom operatoru. Pripadna operatorska norma tog operatora je jednaka* $|\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}| = |\mathsf{a}||\mathsf{b}|$, *matrični zapis je jednak* $(a_i \overline{b_j})_{ij}$, *te za njemu adjungirani operator imamo formulu:* $(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})^* = \mathsf{b} \otimes \mathsf{a}$.

Dem. Za po volji izabrane $\mathsf{v}, \mathsf{u} \in \mathbf{R}^r$ vrijedi:

$$|(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{v}| = |(\mathsf{v} \cdot \mathsf{b})\mathsf{a}| = |\mathsf{v} \cdot \mathsf{b}||\mathsf{a}| \leqslant |\mathsf{v}||\mathsf{b}||\mathsf{a}|\ ,$$

gdje smo koristili Cauchy-Schwartz-Bunjakowskijevu nejednakost za vektore. Gornjim računom smo dobili gornju ogradu. Sada za $\mathsf{v} = \mathsf{b}$ imamo

$$|(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})\mathsf{b}| = |\mathsf{b}||\mathsf{b}||\mathsf{a}|\ ,$$

pa smo ovime pokazali i donju ogradu, što povlači da vrijedi jednakost. Pogledajmo sada dimenziju jezgre operatora; neka je v takav da vrijedi

$$(\mathsf{a}\otimes\mathsf{b})\mathsf{v} = (\mathsf{v}\cdot\mathsf{b})\mathsf{a} = \mathsf{0}\ .$$

Ako je bilo $\mathsf{a} = \mathsf{0}$ ili $\mathsf{b} = \mathsf{0}$, onda je operator jednak nul-operatoru. Uzmimo sada da je $\mathsf{a}, \mathsf{b} \neq \mathsf{0}$. Gornja jednakost tada vrijedi ako i samo ako je $\mathsf{v}\cdot\mathsf{b} = 0$, tj. ako i samo ako je $\mathsf{v} \in \{\mathsf{b}\}^{\perp}$. Iz toga zaključujemo da je dimenzija jezgre $d-1$, pa je onda po teoremu o rangu i defektu rang operatora u ovom slučaju jednak 1. Na mjestu (i,j) u matričnom zapisu iz formule dobivamo:

$$(\mathsf{a}\otimes\mathsf{b})\mathsf{e}_j\cdot\mathsf{e}_i = \overline{b_j}a_i\ ,$$

$$(\mathsf{a}\otimes\mathsf{b})\mathsf{v}\cdot\mathsf{u} = (\mathsf{v}\cdot\mathsf{b})\mathsf{a}\cdot\mathsf{u} = \mathsf{v}\cdot\overline{(\mathsf{a}\cdot\mathsf{u})}\mathsf{b} = \mathsf{v}\cdot(\mathsf{u}\cdot\mathsf{a})\mathsf{b} = \mathsf{v}\cdot(\mathsf{b}\otimes\mathsf{a})\mathsf{u}\ .$$

Konačno, koristeći definiciju adjungiranog operatora dobivamo traženu tvrdnju.

Q.E.D.

2. Prostori funkcija i distribucija

Topološki vektorski prostor je kompleksan vektorski prostor V na kojemu je zadana topologija τ u kojoj su zbrajanje vektora i množenje skalarom neprekinuti. Za takvu topologiju kažemo da je usklađena s vektorskom strukturom i zovemo je vektorskom topologijom.

Neka je E vektorski prostor na kojemu je definirano preslikavanje $\|.\| : E \to \mathrm{R}^0_+$ takvo da vrijedi:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \quad \lambda \in \mathbf{C}$,
- $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Takvo preslikavanje zovemo *norma* na prostoru E, a uređeni par $(E, \|.\|)$ zovemo normirani prostor, topološki vektorski prostor čija je topologija zadana s normom $\|.\|$.

Normiran prostor u kojem svaki Cauchyjev niz konvergira zovemo Banachovim prostorom. Hilbertov prostor je Banachov prostor u kojem je norma generirana skalarnim produktom.

Kažemo da niz (x_n) *konvergira* k vektoru x u normiranom prostoru, u oznaci $x_n \to x$ ako vrijedi $\|x_n - x\| \to 0$. Tu konvergenciju često zovemo jakom za razliku od niže definirane slabe konvergencije.

Ponekad se normom ne može definirati prikladna topologija na vektorskom prostoru (na primjer, na $\mathrm{C}^k(\Omega)$), pa je zadajemo pomoću familije polunormi.

Preslikavanje $p : V \longrightarrow \mathbf{R}^+_0$ na vektorskom prostoru V zovemo *polunormom* ako je

a) apsolutno homogeno: $(\forall\,\lambda \in \mathrm{C})(\forall\,x \in V) \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;
b) subaditivno: $(\forall\,x, y \in V) \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor je topološki vektorski prostor V čija je topologija definirana familijom polunormi $\{p_i :\ i \in I\}$ koja razlikuje točke (tj. $(\forall i \in I) p_i(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$), kao najslabija topologija u kojoj je svaka polunorma p_i neprekidna. Vrijedi slijedeći teorem (za dokaz vidjeti [14]):

Teorem 1. *Hiperniz (x_λ) u lokalno konveksnom Hausdorffovu topološkom vektorskom prostoru V konvergira k x ako i samo ako $(\forall i \in I) \quad p_i(x_\lambda - x) \to 0$.* ∎

Dualni prostor V' topološkog vektroskog prostora V je vektorski prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala na V. Ponekad u kompleksnom slučaju tako označujemo i njemu izomorfan antidualni prostor svih neprekinutih antilinearnih funkcionala.

Iz Hahn-Banachovog teorema slijedi da su lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor V i njegov antidual V' u dualnosti s obzirom na formu ${}_{V'}\langle\, f, x\,\rangle_V := f(x)$. Za dani $f \in V'$, preslikavanje $p_f(x) = |{}_{V'}\langle\, f, x\,\rangle_V|$ je polunorma na V, pa familija $\{p_f,\ f \in V'\}$ definira lokalno konveksnu topologiju $\sigma(V, V')$ na V koju zovemo slaba topologija na V.

Analogno, familija $\{q_x : x \in V\}$, gdje je za dani $x \in V$ polunorma q_x u V' definirana sa $q_x(f) = |{}_{V'}\langle\, f, x\,\rangle_V|$, definirana lokalno konveksnu topologiju $\sigma(V', V)$ na V' koju zovemo slaba-$*$ topologija na V'. Koristeći prethodni teorem imamo:

- (x_n) slabo konvergira k x u V, u oznaci $x_n \rightharpoonup x$ ako i samo ako

$$(\forall f \in V') \quad \langle f, x_n\rangle \to \langle f,\ x\rangle.$$

- (f_n) slabo-$*$ konvergira k f u V', u oznaci $f_n \xrightharpoonup{*} f$ ako i samo ako

$$(\forall x \in V) \quad \langle f_n, x\rangle \to \langle f,\ x\rangle.$$

Limesi u slaboj i slaboj-$*$ topologiji su jedinstveni, jer je topologija Hausdorffova.

Teorem 2. *Ako je E Banachov prostor, onda je i njegov (anti)dual E' Banachov prostor s normom*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|_E}.$$

∎

Kažemo da je Banachov prostor E:

- *refleksivan*, ako je topološki izomorfan svom bidualu $E'' = (E')'$,
- *separabilan*, ako sadrži prebrojiv gust podskup,
- *jednoliko konveksan*, ako vrijedi slijedeće:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in K[0,1]) \quad \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \|\frac{x-y}{2}\| < 1 - \delta.$$

Svaki jednoliko konveksan Banachov prostor je refleksivan, a svaki Hilbertov prostor je jednoliko konveksan.

Teorem 3. **(Svojstva slabe konvergencije u Banachovom prostoru E)**

- *Ako niz (x_n) slabo konvergira k x u E, tada je (x_n) omeđen u E i vrijedi*

$$\|x\|_E \ \leq\ \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E.$$

- *Ako $x_n \to x$ u E onda* $\begin{cases} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\|_E \to \|x\|_E \end{cases}$. *Obrat vrijedi ako je E jednoliko konveksan.*
- *Ako je E refleksivan i (x_n) omeđen u E, tada postoji podniz (x_{n_m}) niza (x_n) i x iz E takvi da $x_{n_m} \rightharpoonup x$ u E.*
  Štoviše, ako svaki slabo konvergentni podniz niza (x_n) konvergira prema istom limesu x u E, tada cijeli niz (x_n) slabo konvergira prema x.
- $\begin{cases} x_n \rightharpoonup x & \text{u } E \\ f_n \to f & \text{u } E' \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad {}_{E'}\langle\, f_n, x_n\,\rangle_E \to {}_{E'}\langle\, f, x\,\rangle_E.$

∎

Teorem 4. **(Svojstva slabe-$*$ konvergencije u dualu Banachovog prostora E)**

- *Ako* $f_n \rightharpoonup f$ *u* E', *onda i* $f_n \xrightharpoonup{*} f$ *u* E'. *Obrat vrijedi ako je* E *refleksivan.*
- *Ako* $f_n \xrightharpoonup{*} f$ *u* E', *tada je* (f_n) *omeđen u* E' *i vrijedi*

$$\|f\|_{E'} \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{E'}.$$

- *Ako je* E *separabilan i* (f_n) *omeđen u* E', *tada postoji podniz* (f_{n_m}) *niza* (f_n) *i* $f \in E'$ *takvi da* $f_{n_m} \xrightharpoonup{*} f$ *u* E'.
  Štoviše, ako svaki slabo-$*$ konvergentan podniz niza (f_n) *ima isti limes* f, *tada cijeli niz* (f_n) *slabo-$*$ konvergira prema* f.
- $\begin{cases} x_n \to x & u\ E \\ f_n \xrightharpoonup{*} f & u\ E' \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad {}_{E'}\langle\, f_n, x_n \,\rangle_E \to {}_{E'}\langle\, f, x \,\rangle_E.$ ∎

Za dokaze gornjih teorema pogledati [4].

L^p prostori

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren, $p \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, a $f : \Omega \to \mathbf{R}$ izmjeriva funkcija u Lebesguevom smislu. Definirajmo:

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p \; d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty\rangle \\ \inf\{c \in \mathbf{R}_0^+ : \;\; |f| \leq c \text{ (s.s. na } \Omega)\}, & p = \infty, \end{cases}$$

gdje $d\mathbf{x}$ označuje integraciju s obzirom na Lebesgueovu mjeru na prostoru $\mathbf{R}^d$.

Označimo:

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} : \;\; \|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} < \infty\},$$

$$\mathcal{N}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbf{R} : \;\; \|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = 0\},$$

$$\mathrm{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}^p(\Omega).$$

Vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 5. $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *je Banachov prostor s normom* $\|.\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$, a $\mathrm{L}^2(\Omega)$ *je Hilbertov prostor uz skalarni produkt*

$$\langle f|g\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\bar{g}(\mathbf{x}) \; d\mathbf{x}, \qquad f, g \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

∎

S $\mathcal{K}(\Omega)$ označimo skup svih kompaktnih podskupova Ω. Skup svih glatkih funkcija s kompaktnim nosačem označavamo s $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\mathrm{C}_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) : \; \operatorname{supp} \varphi \in \mathcal{K}(\Omega)\}.$$

Često ćemo $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ označavati s $\mathcal{D}(\Omega)$ i nazivati ga prostorom probnih funkcija.

Kažemo da niz (φ_n) konvergira k φ u prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ ako postoji $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ takav da vrijedi:

$$\operatorname{supp} \varphi_n, \operatorname{supp} \varphi \subseteq K \quad \& \quad (\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d) \quad \max_{\mathbf{x}\in K} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi_n(\mathbf{x}) - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\mathbf{x})| \to 0.$$

Kažemo da je topološki vektorski prostor E uložen u topološki vektorski prostor F ako postoji neprekidna linearna injekcija $\imath : E \to F$, u oznaci $E \overset{\imath}{\hookrightarrow} F$. Reći ćemo da je E gusto uložen u F ako je još slika $\imath(E)$ gusta u F. Tada vrijedi:

$$x_n \to x \text{ u } E \ \Leftrightarrow \imath(x_n) \to \imath(x) \text{ u } F,$$

$$\imath(x) = 0 \text{ u } F \Leftrightarrow x = 0 \text{ u } E.$$

Teorem 6. (Svojstva L^p prostora)

- *Hölderova nejednakost: za* $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *i* $g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ *vrijedi*

$$\int_\Omega |f(\mathbf{x})\bar{g}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)}.$$

- $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(\Omega)$. *To ulaganje je gusto za* $p \in [1, \infty\rangle$.
- *Neka je* Ω *omeđen i* $p \leq q$. *Tada je* $\mathrm{L}^q(\Omega)$ *gusto uložen u* $\mathrm{L}^p(\Omega)$.
- *Neka je* $p < \infty$. *Tada*

$$(\forall f \in (\mathrm{L}^p(\Omega))')(\exists! g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega))(\forall \varphi \in \mathrm{L}^p(\Omega)) \quad {}_{(\mathrm{L}^p(\Omega))'}\langle f, \varphi \rangle_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \int_\Omega g(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Štoviše, $\|g\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega)} = \|f\|_{(\mathrm{L}^p(\Omega))'}$.

- *Za* $p \in [1, \infty\rangle$, $\mathrm{L}^p(\Omega)$ *je separabilan, a za* $p \in \langle 1, \infty\rangle$ *je i jednoliko konveksan.* ∎

Koristeći prethodni teorem, zapišimo što znači slaba, odnosno slaba-$*$ konvergencija u L^p prostorima:

Za $p \in \langle 1, \infty\rangle$ L^p je refleksivan, pa se slaba i slaba-$*$ konvergencija podudaraju:

$$f_n \rightharpoonup f \text{ u } \mathrm{L}^p(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varphi \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)) \int_\Omega f_n(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \to \int_\Omega f(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Također, svaki omeđeni niz ima konvergentan podniz.

Za $p = 1$ promatramo samo slabu konvergenciju:

$$f_n \rightharpoonup f \text{ u } \mathrm{L}^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)) \int_\Omega f_n(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \to \int_\Omega f(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Budući da $\mathrm{L}^1(\Omega)$ nije refleksivan, omeđeni nizovi ne moraju imaju konvergentan podniz. Za svaku funkciju f iz $\mathrm{L}^1(\Omega)$ formulom $\varphi \mapsto \int_\Omega \bar{\varphi} f d\mu$ definiran je neprekinut funkcional na prostoru $\mathrm{C}_0(\Omega)$. Po Rieszovom teoremu reprezentacije, dual prostora $\mathrm{C}_0(\Omega)$ je izomorfan prostoru $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}$, svih omeđenih Radonovih mjera, što povlači da je $\mathrm{L}^1(\Omega)$ uloženo u $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}$. Ograničen niz (f_n) ne mora nužno imati slabo konvergentan podniz, ali pridruženi niz μ_{f_n} je također ograničen pa, budući da je $C_0(\Omega)$ separabilan (jer je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ separabilan), postoji slabo-$*$ konvergentan podniz (u $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}$).

Za $p = \infty$ koristimo samo slabu-$*$ konvergenciju:

$$f_n \xrightharpoonup{*} f \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varphi \in \mathrm{L}^1(\Omega)) \int_\Omega f_n(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \to \int_\Omega f(\mathbf{x})\bar{\varphi}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Budući da je $\mathrm{L}^1(\Omega)$ separabilan, omeđeni nizovi u L^∞ imaju slabo-$*$ konvergentne podnizove.

Distribucije

Neprekinut antilinearan funkcional na $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ nazivamo distribucijom. Prostor svih distribucija opskrbljen sa slabom-$*$ topologijom označavamo s $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vrijedi slijedeća karakterizacija:

Lema 2. *Neka je T antilinearan funkcional na $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
a) T je distribucija;
b)

$$(\forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega))(\exists\, m \in \mathbf{N}_0)(\exists\, C > 0)(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}_K^\infty(\Omega)) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \max_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)};$$

c) Za svaki niz (φ_n) koji konvergira ka nuli u $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$, i $(\langle T, \varphi_n\rangle)$ konvergira ka nuli. ∎

Primjer. Svaka lokalno integrabilna funkcija f može se shvatiti kao distribucija:

$$\langle f, \varphi\rangle = \int f\bar{\varphi}\,.$$

To pridruživanje je ulaganje prostora $\mathrm{L}^1_{loc}(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$. ∎

Na $\mathcal{D}'(\Omega)$ možemo definirati i množenje glatkom funkcijom: za $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ i $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ produkt ψT je distribucija definirana s

$$\langle \psi T, \varphi\rangle := \langle T, \bar{\psi}\varphi\rangle,$$

gdje je φ test funkcija.

Lako se vidi da je ψT zaista distribucija; štoviše, to množenje je neprekinuto i linearno preslikavanje $\mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definiramo i deriviranje distribucija. Za $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$

$$\langle \partial^{\boldsymbol{\alpha}} T, \varphi\rangle := (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\langle T, \partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\rangle.$$

Derivacija distribucije je opet distribucija i deriviranje je neprekinuto i linearno na $\mathcal{D}'(\Omega)$. U slučaju da je T glatka funkcija, gore definirano množenje i deriviranje se podudaraju s klasičnim.

Teorem 7. **(Leibnizova formula za distribucije)** *Za $\psi \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, i $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d$ vrijedi*

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\psi T) = \sum_{\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}} \binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} \partial^{\boldsymbol{\beta}}\psi\, \partial^{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}} T\,.$$

∎

Kažemo da distribucija T isčezava na otvorenom skupu $U \subseteq \Omega$, ako je za svaki φ iz $\mathrm{C}_c^\infty(U)$, $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Nosačem distribucije T, u oznaci $\operatorname{supp} T$, nazivamo komplement unije svih otvorenih skupova na kojima T isčezava. Ako je T funkcija, tako definirani nosač se podudara s klasičnim. Također, za glatku funkciju ψ je $\operatorname{supp}\psi T = \operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} T$.

Ako s $\mathcal{E}'(\Omega)$ označimo prostor svih neprekinutih antilinearnih funkcionala na $\mathcal{E}(\Omega) = \mathrm{C}^\infty(\Omega))$, tada je $\mathcal{E}'(\Omega)$ neprekinuto uložen u $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorem 8. *$\mathcal{E}'(\Omega)$ je linearno izomorfan prostoru svih distribucija s kompaktnim nosačem.* ∎

Teorem 9. *Ako je (T_n) niz distribucija takav da za svaku test funkciju φ niz skalara $\langle T_n, \varphi\rangle$ konvergira, onda je T definiran formulom*

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_n \langle T_n, \varphi\rangle$$

također distribucija. Štoviše, ako su nosači svih T_n sadržani u nekom kompaktu K, tada je i nosač T sadržan u K. ∎

Teorem 10. *Niz distribucija (T_n) konvergira ka T slabo-$*$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ ako i samo ako za svaku test funkciju φ niz $(\langle T_n, \varphi\rangle)$ konvergira ka $\langle T, \varphi\rangle$.* ∎

Teorem 11. *Neka je $\mathrm{L}^p(\Omega), p < \infty$ opskrbljen sa slabom topologijom. Tada $\mathrm{L}^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.* ∎

Iz prethodnog teorema imamo:

$$f_n \rightharpoonup f \text{ u } \mathrm{L}^p(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_n \xrightarrow{\;*\;} f \text{ u } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Soboljevljevi prostori

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren, $m \in \mathbf{N}_0$ i $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definiramo

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) := \left\{ f \in \mathrm{L}^p(\Omega) \,:\, (\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}_0^d) \quad |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m \quad \Longrightarrow \quad \partial^{\boldsymbol{\alpha}} f \in \mathrm{L}^p(\Omega) \right\},$$

gdje je $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f$ distribucijska derivacija funkcije f. Na $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ definiramo normu

$$\|f\|_{\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)} := \Big(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$
$$\|f\|_{\mathrm{W}^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}.$$

Uz gornje norme, $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ su Banachovi prostori i nazivamo ih Soboljevljevim prostorima. $\mathrm{W}^{m,2}(\Omega)$ češće označavamo s $\mathrm{H}^m(\Omega)$; ti prostori su Hilbertovi prostori.

Prije nego li iskažemo slijedeći teorem, uvedimo pojam $\mathrm{C}^{0,1}$ domene (još kažemo domene s Lipschitzovim rubom): Neka je Ω otvoren i omeđen skup u $\mathbf{R}^d$. Kažemo da Ω ima Lipschitzov rub ako za svaki $\mathbf{p} \in \mathsf{Fr}\,\Omega$ postoji $r > 0$ i preslikavanje $h_{\mathbf{p}} : K(\mathbf{p}, r) \to K(\mathbf{0}, 1)$ takvo da

- $h_{\mathbf{p}}$ je bijekcija,
- $h_{\mathbf{p}}$ i $h_{\mathbf{p}}^{-1}$ su Lipschitzove funkcije,
- $h_{\mathbf{p}}(\mathsf{Fr}\,\Omega \cap K(\mathbf{p}, r)) = Q_0$,
- $h_{\mathbf{p}}(\Omega \cap K(\mathbf{p}, r)) = Q_+$,
  gdje su

$$Q_0 = \{\mathbf{x} \in K(\mathbf{0}, 1) : \; x_d = 0\},$$
$$Q_+ = \{\mathbf{x} \in K(\mathbf{0}, 1) : \; x_d > 0\}.$$

Za dokaz slijedeća dva teorema pogledati [1] ili [4].

Teorem 12.

- $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ *je separabilan za* $p \in [1, \infty\rangle$ *i jednoliko konveksan (pa onda i refleksivan) za* $p \in \langle 1, \infty\rangle$.
- *Za* $p \in [1, \infty\rangle$, $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ *je gusto u* $\mathrm{W}^{1,p}(\mathbf{R}^d)$. *Štoviše, ako* Ω *ima Lipschitzov rub, tada je* $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ *gusto u* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.
- *Neka je* Ω *omeđen s Lipschitzovim rubom. Tada postoji operator neprekidan proširenja* $P \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^1(\Omega); \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^d))$, *takav da vrijedi:*

$$(\forall u \in \mathrm{H}^1(\Omega)) \qquad (Pu)_{|\Omega} = u.$$

∎

Teorem 13. **(Soboljevljeva ulaganja)** *Neka je Ω omeđen s Lipschitzovim rubom. Tada vrijedi:*

- *Za $p \in [1, d\rangle$, $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega)$ za $q \in [1, p^*]$, gdje je $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$. Štoviše, za $q < p^*$ to ulaganje je kompaktno.*
- *Za $p = d$, $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q$ kompaktno za $q \in [1, \infty\rangle$.*
- *Za $p > d$, $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{C}(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ kompaktno.*

∎

Iz prethodnog teorema imamo da je $\mathrm{H}^1(\Omega)$ kompaktno uloženo u $\mathrm{L}^2(\Omega)$, a za $d = 1$ imamo da je $\mathrm{H}^1(\Omega)$ kompaktno uloženo u $\mathrm{C}(\mathsf{Cl}\,\Omega)$.

Označimo s Φ podskup $\mathcal{D}(\Omega)$ sa svojstvom da

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \Omega)(\exists\, \varphi \in \Phi) \quad \mathsf{Re}\,\varphi(\mathbf{x}) > 0$$

i definirajmo

$$\mathrm{W}^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \,:\, (\forall\, \varphi \in \Phi) \quad \varphi T \in \mathrm{W}^{m,p}(\Omega)\}\,.$$

Lako se vidi da je $\mathrm{W}^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ vektorski potprostor $\mathcal{D}'(\Omega)$. Na $\mathrm{W}^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ je zadana lokalno konveksna topologija familijom polunormi $(|\cdot|_\varphi)_{\varphi\in\Phi}$,

$$|T|_\varphi := \|\varphi T\|_{\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)}\,.$$

Lagano se vidi da definicija prostora $\mathrm{W}^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ i njegove topologije ne ovise o izboru familije Φ s gornjim svojstvom.

Vrijedi slijedeće:

Lema 3.

- *$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ je neprekinuto uloženo u $\mathrm{W}^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,*
- *Ulaganje $\mathrm{C}^\infty(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ je neprekinuto. Štoviše, za $p < \infty$ je $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ gusto u $\mathrm{W}^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

∎

Prostore $\mathrm{W}^{m,p}_0(\Omega)$ definiramo kao zatvarač prostora $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega)$ u topologiji prostora $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$.

Kad imamo domenu s dovoljno glatkim rubom (na primjer, Lipschitzovu domenu), tada možemo definirati L^p prostore na rubu domene. Vrijedi slijedeći teorem (v. [10]):

Teorem 14. **(Teorem o tragu)** *Neka je Ω Lipschitzova domena. Tada preslikavanje $\gamma_{\mathsf{Fr}\,\Omega}$ koje svakoj funkciji $u \in \mathrm{C}^1(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ pridružuje njenu restrikciju na $\mathsf{Fr}\,\Omega$ ima jedinstveno proširenje do linearnog i neprekidnog operatora*

$$\gamma_{\mathsf{Fr}\,\Omega} :\ \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\mathsf{Fr}\,\Omega).$$

Operator $\gamma_{\mathsf{Fr}\,\Omega}$ se zove operator traga i vrijedi $\mathrm{H}^1_0(\Omega) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) :\ \gamma_{\mathsf{Fr}\,\Omega} v = 0\}$. Sliku operatora traga označavamo s $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathsf{Fr}\,\Omega)$, i ona je kompaktno uložena u $\mathrm{L}^2(\mathsf{Fr}\,\Omega)$.

∎

Dualni prostor prostora $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ označavamo s $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, a dual protora $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathsf{Fr}\,\Omega)$ s $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathsf{Fr}\,\Omega)$. $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ sa slabom-$*$ topologijom je uložen u prostor distribucija. Vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 15. *Slijedeća ulaganja su kompaktna*

- $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$,
- $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathsf{Fr}\,\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\mathsf{Fr}\,\Omega) \hookrightarrow \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathsf{Fr}\,\Omega)$. ∎

Primijetimo da vrijedi:

- Dual prostora $\mathrm{H}^1(\Omega)$ nije uložen u prostor distribucija.
- Za $u \in \mathrm{L}^2(\mathsf{Fr}\,\Omega)$ i $v \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\mathsf{Fr}\,\Omega)$ vrijedi

$$
{}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, u, v \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} = \int_{\mathsf{Fr}\,\Omega} u\bar{v}.
$$

3. Fourierova pretvorba

Definirajmo linearno preslikavanje $\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d) \to \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$ formulom

$$
\mathcal{F}(u)(\boldsymbol{\xi}) := \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\ . \tag{1}
$$

Točnije, slika preslikavanja $\mathcal{F}$ sadržana je u prostoru $\mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$. Uvedimo prostor brzo opadajućih funkcija

$$
\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) := \{\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega) \ :\ (\forall\, k \in \mathbf{N}_0)\ \|\varphi\|_k < \infty\}\ ,
$$

pri čemu su polunorme $\|\cdot\|_k$ definirane na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} &:= \|\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\partial_{\boldsymbol{\beta}}\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\ ,\\
\|\varphi\|_k &:= \sup_{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant k} \|\varphi\|_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\ .
\end{aligned}
$$

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ nazivamo Schwartzovim prostorom i zajedno s prirodnom topologijom danom s pomoću familije polunormi $(\|\cdot\|_k\ ,\ k \in \mathbf{N}_0)$ imamo lokalno konveksan topološki vektorski prostor. Lagano se pokaže da je Schwartzov prostor zatvoren na deriviranje i množenje s C^∞ funkcijama najviše polinomijalnog rasta u beskonačnosti. Također vrijedi

$$
\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subseteq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)\ .
$$

Štoviše, probne funkcije su gusto uložene u Schwartzov prostor, a odatle je Schwartzov prostor gusto uložen u svaki L^p, $p \geq 1$. Restrikcija Fourierove pretvorbe $\mathcal{F}$ na prostor $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ je bijekcija te imamo formule inverzije

$$
\widehat{\widehat{\varphi}} = \tilde{\varphi}\ , \qquad \widehat{\widehat{\widehat{\varphi}}} = \mathcal{F}^{-1}\varphi\ , \tag{2}
$$

pri čemu je $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) := \varphi(-\mathbf{x})$, a

$$
\check{\varphi}(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{R}^d} e^{2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \varphi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}\ .
$$

Na Schwarzovu prostoru vrijedi Parsevalova formula:

$$
(3) \qquad (\forall\, u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)) \quad \langle\, \widehat{u} \mid \widehat{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{u}(\boldsymbol{\xi})\overline{\widehat{v}(\boldsymbol{\xi})}\, d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbf{R}^d} u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} = \langle\, u \mid v \,\rangle_{\mathrm{L}^2}
$$

odakle iz gustoće Schwartzovog prostora u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, na jedinstveni način proširujemo neprekidni operator $\mathcal{F}$ na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, te i za prošireni $\mathcal{F}$ vrijedi (3). Taj rezultat zovemo Plancherelovim teoremom.

Topološki dual prostora $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ nazivamo prostorom temperiranih distribucija i označavamo s $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Fourierovu pretvorbu proširujemo na prostor temperiranih distribucija na slijedeći način:

$$(\forall\, u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d))(\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)) \qquad \langle \widehat{u}, \varphi\rangle = \langle \tilde{u}, \widehat{\varphi}\rangle\ ,$$

pri čemu je $\langle \tilde{u}, \varphi\rangle = \langle u, \tilde{\varphi}\rangle$. Pokaže se da i temperirane distribucije zadovoljavaju formulu inverzije, što povlači da je proširenje $\mathcal{F}$ na $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ linearna bijekcija na $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$.

Za dokaze gornjih tvrdnji vidjeti [11] ili [16].

Prostori $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}$ i $\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}$

Neka je $\Omega \subseteq \mathrm{R}^d$ otvoren. Za glatko vektorsko polje $\mathsf{v} = (v^1, \dots, v^d)$ na Ω, operator $\mathsf{v} \mapsto \mathsf{div}\,\mathsf{v}$ je definiran formulom $\mathsf{div}\,\mathsf{v} = \mathsf{tr}\nabla\mathsf{v}$, ili koordinatno $\mathsf{div}\,\mathsf{v} = \sum_{i=1}^d \partial_i v_i$.

Definirajmo slijedeći prostor funkcija

$$\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega) = \{\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^d) : \mathsf{div}\,\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\},$$

gdje je $\mathsf{div}\,\mathsf{v}$ jedinstvena skalarna distribucija takva da vrijedi

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \quad \langle \mathsf{div}\,\mathsf{v},\ \varphi\rangle = -\langle \mathsf{v},\ \nabla\varphi\rangle.$$

Na $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$ uvodimo grafovsku normu:

(ND) $$\|\mathsf{v}\|^2_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)} = \|\mathsf{v}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^d)} + \|\mathsf{div}\,\mathsf{v}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Lema 4. $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$ *je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom određenim normom (ND):*

(SD) $$\langle \mathsf{u}|\mathsf{v}\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)} = \langle \mathsf{u}|\mathsf{v}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^d)} + \langle \mathsf{div}\,\mathsf{u}|\mathsf{div}\,\mathsf{v}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

Dem. Lagano se provjeri da je sa (SD) dan skalarni produkt koji generira normu (ND). Pokažimo jos potpunost: neka je (v_m) Cauchyjev niz u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$. Tada je Cauchyjev i u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^d)$, a zbog potpunosti L^2, v_m konvergira k v u L^2. Također, $u_m = \mathsf{div}\,\mathsf{v}_m$ je Cauchyjev niz u $\mathrm{L}^2(\Omega)$, pa konvergira k $\omega \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Sada iz neprekidnosti ulaganja $\mathrm{L}^2 \hookrightarrow \mathcal{D}'$ te neprekidnosti operatora $\mathsf{div} : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ slijedi $\omega = \mathsf{div}\,\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

Q.E.D.

Vrijedi slijedeći teorem:

Teorem 16. *Za domenu Ω klase $\mathrm{C}^{0,1}$, prostor $\mathcal{D}(\mathsf{Cl}\,\Omega; \mathbf{C}^d)$ je gust u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$.*

Dem. Radi jednostavnosti pokažimo teorem samo za realne funkcije (za kompleksne se lagano dopuni dokaz). Pokazat ćemo da je funkcional iz $(\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega))'$, koji je nula na svim elementima iz $\mathcal{D}(\mathsf{Cl}\,\Omega)$, nužno nul-funkcional na prostoru $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$.

Rieszov teorem reprezentacije daje jedinstven $\mathbf{f} \in \mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$ takav da za svaki $\mathsf{w} \in \mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$ vrijedi

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)'}\langle F, \mathsf{w}\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)} &= \langle \mathbf{f}|\mathsf{w}\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)} \\ &= \langle \mathbf{f}|\mathsf{w}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^d)} + \langle \mathsf{div}\,\mathbf{f}|\mathsf{div}\,\mathsf{w}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Sa $\tilde{\mathbf{g}}$ označimo proširenje nulom polja $\mathbf{g} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^d)$ na cijeli $\mathbf{R}^d$. Za $\mathsf{u} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$, njegova restrikcija na Ω je u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$. Uvrstimo tu restrikciju u gornji identitet:

$$0 = \langle \tilde{\mathbf{f}} | \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)} + \langle \widetilde{\mathsf{div}\,\mathbf{f}} | \mathsf{div}\,\mathsf{u} \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)} = {}_{\mathcal{D}'}\langle\, \tilde{\mathbf{f}} - \nabla(\widetilde{\mathsf{div}\,\mathbf{f}}), \mathsf{u}\,\rangle_{\mathcal{D}},$$

gdje smo u posljednoj jednakosti koristili da za glatki v parcijalnom integracijom imamo:

$$\int v \,\mathsf{div}\,\mathsf{u}\; d\mathbf{x} = -\int \nabla v \cdot \mathsf{u}\; d\mathbf{x}$$

što, zbog gustoće $\mathcal{D}$ u $\mathcal{D}^{'}$, možemo proširiti na

$${}_{\mathcal{D}'}\langle\, v, \mathsf{u}\,\rangle_{\mathcal{D}} = -{}_{\mathcal{D}'}\langle\, \nabla v, \mathsf{u}\,\rangle_{\mathcal{D}}.$$

Zbog proizvoljnosti $\mathsf{u} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ imamo $\nabla(\widetilde{\mathsf{div}\,\mathbf{f}}) = -\tilde{\mathbf{f}}$ u smislu distribucija, odakle slijedi da je $\omega = \widetilde{\mathsf{div}\,\mathbf{f}} \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n)$. Izvan Ω je $\omega = 0$, pa je trag ω po Ω izvana jednak 0, a iz regularnosti ruba $\mathsf{Fr}\,\Omega$ i trag iznutra je jednak 0, odakle imamo $\omega \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Neka je (ψ_m) niz u $\mathcal{D}(\Omega)$ koji konvergira k $\mathsf{div}\,\mathbf{f}$ u $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Za proizvoljni $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$ imamo:

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{div}\,\mathbf{f} | \mathsf{div}\,\mathsf{u} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} &= \lim_m \langle \psi_m | \mathsf{div}\,\mathsf{u} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \\
&= -\lim_m {}_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{R}^d)}\langle\, \nabla\psi_m, \mathsf{u}\,\rangle_{(\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{R}^d))'} \\
&= -\langle \nabla \mathsf{div}\,\mathbf{f} | \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Odatle imamo da je $F = 0$ na $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$:

$${}_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)'}\langle\, F, \mathsf{u}\,\rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)} = \langle \mathbf{f} - \nabla \mathsf{div}\,\mathbf{f} | \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^d)} = 0.$$

Q.E.D.

Uzmimo da je $d = 3$. Za vektorsko polje v, $\mathsf{rot}\,\mathsf{v}$ je jedinstveno vektorsko polje takvo da za svaki $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ vrijedi $\mathsf{rot}\,\mathsf{v} \times \mathbf{a} = (\nabla\mathsf{v} - \nabla\mathsf{v}^\top)\mathbf{a}$, tj. $\mathsf{rot}\,\mathsf{v}$ je aksijalni vektor antisimetričnog tenzora $\nabla\mathsf{v} - \nabla\mathsf{v}^\top$. U matričnom zapisu:

$$\mathsf{rot}\,\mathsf{v} = [\partial_2 v^3 - \partial_3 v^2,\ \partial_3 v^1 - \partial_1 v^3,\ \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1]^\top.$$

Definirajmo slijedeći prostor funkcija:

$$\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\Omega) = \{\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^3) : \mathsf{rot}\,\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^3)\},$$

gdje je $\mathsf{rot}\,\mathsf{v}$ u smislu distribucija, te uvedimo grafovsku normu na istom prostoru:

(NR) $$\|\mathsf{v}\|^2_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\Omega)} = \|\mathsf{v}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^3)} + \|\mathsf{rot}\,\mathsf{v}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^3)}.$$

Lema 5. $\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\Omega)$ *je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom određenim normom (NR):*

(*SR*) $$\langle \mathsf{u} | \mathsf{v} \rangle_{\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\Omega)} = \langle \mathsf{u} | \mathsf{v} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^3)} + \langle \mathsf{rot}\,\mathsf{u} | \mathsf{rot}\,\mathsf{v} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^3)}.$$

Dem. Lagano se provjeri da je sa (SR) dan skalarni produkt koji generira normu (NR). Pokažimo jos potpunost: neka je v_m Cauchyjev niz u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\Omega; \mathbf{C}^3)$. Tada je Cauchyjev i u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^3)$, a zbog potpunosti L^2, v_m konvergira k v u L^2. Također, $\mathsf{u}_m = \mathsf{rot}\,\mathsf{v}_m$ je Cauchyjev niz u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^3)$, pa konvergira k $\omega \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^3)$. Sada iz neprekidnosti ulaganja $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^3) \hookrightarrow \mathcal{D}^{'}(\Omega; \mathbf{C}^3)$ te neprekidnosti operatora $\mathsf{rot} : \mathcal{D}^{'}(\Omega; \mathbf{C}^3) \to \mathcal{D}^{'}(\Omega; \mathbf{C}^3)$ slijedi $\omega = \mathsf{rot}\,\mathsf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^3)$.

Q.E.D.

Kao i u slučaju $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$, funkcije iz $\mathcal{D}(\mathsf{Cl}\,\Omega;\mathbf{C}^3)$ su guste u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\Omega)$. Da bismo to pokazali, treba nam slijedeći rezultat:

Lema 6. $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\mathbf{R}^3) \cap \mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\mathbf{R}^3) = \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^3;\mathbf{C}^3)$.

Dem. Očito da za funkciju $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^3;\mathbf{C}^3)$ vrijedi da su divergencija i rotacija u L^2. Obratno, uzmimo $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\mathbf{R}^3) \cap \mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\mathbf{R}^3)$. Trebamo pokazati da je $\nabla\mathsf{u}$ u L^2.
Primijenimo Fourierovu transformaciju na $\nabla\mathsf{u}, \mathsf{div}\,\mathsf{u}$ i $\mathsf{rot}\,\mathsf{u}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\nabla\mathsf{u})(\boldsymbol{\xi}) &= 2\pi i(\boldsymbol{\xi}\otimes[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi})),\\ \mathcal{F}(\mathsf{div}\,\mathsf{u})(\boldsymbol{\xi}) &= 2\pi i(\boldsymbol{\xi}\cdot[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi})),\\ \mathcal{F}(\mathsf{rot}\,\mathsf{u})(\boldsymbol{\xi}) &= 2\pi i(\boldsymbol{\xi}\times[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

Rastavimo $\mathcal{F}\mathsf{u}$ na komponentu paralelnu s $\boldsymbol{\xi}$ i komponentu okomitu na $\boldsymbol{\xi}$. Imamo

$$|\boldsymbol{\xi}|[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}\cdot[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\xi}\times[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi}),$$

odakle imamo ocjenu:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\xi}\otimes[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi})\|^2_{\mathrm{L}^2} &\le |\boldsymbol{\xi}|^2\|[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi})\|^2_{\mathrm{L}^2}\\ &\le \|\boldsymbol{\xi}\cdot[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi})\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|\boldsymbol{\xi}\times[\mathcal{F}\mathsf{u}](\boldsymbol{\xi})\|^2_{\mathrm{L}^2},\end{aligned}$$

pa primjenom Plancherelovog teorema slijedi tvrdnja:

$$\|\nabla\mathsf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2} \le \|\mathsf{div}\,\mathsf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|\mathsf{rot}\,\mathsf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Q.E.D.

Koristeći istu ideju kao u dokazu gustoće prostora $\mathcal{D}(\mathsf{Cl}\,\Omega;\mathbf{C}^d)$ u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega)$, imamo slijedeći teorem:

Teorem 17. *Za domenu Ω klase $\mathrm{C}^{0,1}$, prostor $\mathcal{D}(\mathsf{Cl}\,\Omega;\mathbf{C}^3)$ je gust u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\Omega)$.* ∎

II. Maxwellove jednadžbe i div-rot lema

1. Maxwellove jednadžbe elektrodinamke

Promotrimo sustav Maxwellovih jednadžbi u nehomogenom sredstvu na prostornoj domeni $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$. S E i H označavamo električno i magnetno polje, a s D i B elektičnu i magnetnu indukciju. S ρ označavamo gustoću naboja, a s j jakost struje. Sve gornje veličine mogu ovisiti i o vremenskim i o prostornim varijablama. Maxwellov sustav glasi:

$$\partial_t \mathsf{B} + \mathsf{rot}\, \mathsf{E} = \mathsf{G}, \tag{1}$$

$$\mathsf{div}\, \mathsf{B} = 0, \tag{2}$$

$$\partial_t \mathsf{D} + \mathsf{j} - \mathsf{rot}\, \mathsf{H} = \mathsf{F}, \tag{3}$$

$$\mathsf{div}\, \mathsf{D} = \rho. \tag{4}$$

Svojstva sredstva možemo izraziti pomoću linearnih konstitucijskih jednadžbi:

$$\mathsf{D} = \boldsymbol{\epsilon}\mathsf{E},\ \mathsf{B} = \boldsymbol{\mu}\mathsf{H},$$

gdje uzimamo da tenzorska polja $\boldsymbol{\epsilon}$ i $\boldsymbol{\mu}$ ovise samo o prostornim varijablama. Razdvojimo j na dva dijela; jedan koji je proporcionalan elektičnom polju: $\mathsf{J} = \boldsymbol{\sigma}\mathsf{E}$; i drugi koji dolazi od vanjskih izvora: $\mathsf{j} = \mathsf{J} - \mathsf{j}_0$. Pretpostavimo da je j_0 uključen u izraz na desnoj strani F. F i G mogu ovisiti i o $\mathbf{x}$ i o t.

Pretpostavimo da su koeficijenti $\boldsymbol{\epsilon}$ i $\boldsymbol{\mu}$ pozitivno definitni i jednoliko omeđeni; a $\boldsymbol{\sigma}$ samo jednoliko omeđen. Točnije, da postoje konstante $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ takve da za svaki $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^3$ i skoro svaki $\mathbf{x} \in \Omega$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \alpha\|\mathsf{a}\|^2 \leq &\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})\mathsf{a}\cdot\mathsf{a} \leq \beta\|\mathsf{a}\|^2 \\ &\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathsf{a}\cdot\mathsf{a} \leq \beta\|\mathsf{a}\|^2 \\ \alpha\|\mathsf{a}\|^2 \leq &\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\mathsf{a}\cdot\mathsf{a} \leq \beta\|\mathsf{a}\|^2\ . \end{aligned}$$

Jednadžba (4) jedina sadrži nepoznanicu ρ pa je možemo uzeti za defniciju gustoće naboja i pojednostaviti sustav time što ćemo izostaviti posljednju jednadžbu. S druge strane, jednadžbu (2) možemo shvatiti kao ograničenje na B i uključiti je u definiciju funkcijskog prostora za polje B.

Ostale dvije jednadzbe (1) i (3) čine sustav dvije vektorske jednadžbe s pet vektorskih nepoznanica. Ako bismo htjeli imati formalno deterministički sustav, trebali bismo dodati još tri vektorske jednadžbe: konstitucijske zakone koji će povezivati D, J i B s E i H, preko svojstava sredstva.

Energija elektromagnetskog polja u trenutku t je dana izrazom:

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathsf{D}\cdot\mathsf{E} + \mathsf{B}\cdot\mathsf{H})d\mathbf{x}.$$

Prirodno je zahtijevati da je energija konačna u svakom trenutku t, pa se za prirodni prostor funkcija nameće $\mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^3))$ i $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_{3\times 3})$. Budući da se pojavljuju divergencije i rotacije odgovarajućih polja, prirodno je uzeti i

$$\mathsf{D}, \mathsf{B} \in \mathrm{L}^\infty([0,T];\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\Omega;\mathbf{R}^3)),$$

$$\mathsf{E}, \mathsf{H} \in \mathrm{L}^\infty([0,T]; \mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\Omega; \mathbf{R}^3)),$$
$$\mathsf{J} \in \mathrm{L}^\infty([0,T]; \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^3)).$$

Što se tiče izvora F i G, prirodno je zahtijevati da je ukupni rad konačan, odakle imamo $\mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathrm{L}^2([0,T]; \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$, što je posebno zadovoljeno i za $\mathrm{L}^\infty([0,T]; \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^3))$.

2. Div-rot lema u L^2

Promotrimo familiju sustava (na primjer, aproksimirajmo slabo rješenje gornjeg sustava):

$$\partial_t \mathsf{B}^n + \mathsf{rot}\, \mathsf{E}^n = \mathsf{G}^n,$$
$$\partial \mathsf{D}^n + \mathsf{J}^n - \mathsf{rot}\, \mathsf{H}^n = \mathsf{F}^n,$$

uz konstitucijske jednadžbe:

$$\mathsf{D}^n = \boldsymbol{\epsilon}^n \mathsf{E}^n, \quad \mathsf{B}^n = \boldsymbol{\mu}^n \mathsf{H}^n, \quad \mathsf{J} = \boldsymbol{\sigma} \mathsf{E},$$

gdje su $\mathsf{E}^n, \mathsf{H}^n, \mathsf{D}^n, \mathsf{B}^n, \mathsf{J}^n, \mathsf{F}^n, \mathsf{G}^n, \boldsymbol{\epsilon}^n, \boldsymbol{\mu}^n$ i $\boldsymbol{\sigma}$ iz odgovarajućih prostora. Pitamo se što možemo reći o energiji $e(t)$ ako znamo $e^n(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathsf{D}^n \cdot \mathsf{E}^n + \mathsf{B}^n \cdot \mathsf{H}^n) d\mathbf{x}$.

Za fiksni $t \in [0,T]$, uz promatranje samo prvog pribrojnika u integrandu, imamo slijedeći rezultat:

Lema 1. *Neka vrijedi:*

$$\mathsf{E}^n \rightharpoonup \mathsf{E} \text{ u } \mathrm{L}^2(\Omega),$$
$$\mathsf{D}^n \rightharpoonup \mathsf{D} \text{ u } \mathrm{L}^2(\Omega),$$
$$\mathsf{rot}\, \mathsf{E}^n,\ \mathsf{div}\, \mathsf{D}^n \text{ omeđeno u } \mathrm{L}^2(\Omega).$$

Tada

$$\mathsf{D}^n \cdot \mathsf{E}^n \rightharpoonup \mathsf{D} \cdot \mathsf{E}$$

u smislu distribucija.

Dem. Množenjem s $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi = 1$ na $\operatorname{supp}\phi$ i proširivanjem s nulom na ostatak $\mathbf{R}^3$, imamo slijedeće funkcije na $\mathbf{R}^3$:

$$\mathsf{e}_n = \phi \mathsf{E}^n,\ \mathsf{d}_n = \psi \mathsf{D}^n,$$
$$\mathsf{e} = \phi \mathsf{E},\ \mathsf{d} = \psi \mathsf{D}.$$

Iz uvjeta leme imamo da je e_n omeđeno u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{rot}}(\mathbf{R}^3)$, a d_n omeđeno u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\mathbf{R}^3)$, te

$$\mathsf{e}_n \rightharpoonup \mathsf{e}, \quad \mathsf{d}_n \rightharpoonup \mathsf{d} \text{ u } \mathrm{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3).$$

Primijetimo da zbog kompaktnosti nosača imamo slijedeće jednakosti:

$$\int_\Omega \mathsf{D}^n \cdot \mathsf{E}^n \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^3} \mathsf{d}_n \cdot \mathsf{e}_n \, d\mathbf{x}, \tag{1}$$

$$\int_\Omega \mathsf{D} \cdot \mathsf{E} \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^3} \mathsf{d} \cdot \mathsf{e} \, d\mathbf{x}. \tag{2}$$

Primijenimo Fourierovu transformaciju na d_n: zbog slabe konvergencije niza d_n prema D u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ dobivamo da je $\hat{\mathsf{d}}_n$ omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ te $\hat{\mathsf{d}}_n \rightharpoonup \hat{\mathsf{d}}$ u prostoru temperiranih distribucija $\mathcal{S}'$. Iz te dvije činjenice imamo jedinstvenost gomilišta: $\hat{\mathsf{d}}_n \rightharpoonup \hat{\mathsf{d}}$ u L^2. Iz omeđenosti niza d_n u $\mathrm{L}^2_{\mathsf{div}}(\mathbf{R}^3)$, nakon Fourierove transformacije, imamo da je niz $\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathsf{d}}_n$ omeđeno u L^2.

Analognim postupkom dobivamo da $\hat{\mathsf{e}}_n \rightharpoonup \mathsf{e}$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$, te da je $\boldsymbol{\xi} \times \hat{\mathsf{e}}_n$ omeđeno u L^2. Slično vrijedi i za limese: $\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathsf{d}}$ i $\boldsymbol{\xi} \times \hat{\mathsf{e}}$ su omeđeni u L^2.

Rastavimo $\hat{\mathsf{d}}$ i $\hat{\mathsf{e}}$ na komponente u smjeru $\boldsymbol{\xi}$: $\hat{\mathsf{d}}_\top, \hat{\mathsf{e}}_\top$ i na komponente okomite na $\boldsymbol{\xi}$: $\hat{\mathsf{d}}_\perp, \hat{\mathsf{e}}_\perp$

$$\hat{\mathsf{d}} = \hat{\mathsf{d}}_\top + \hat{\mathsf{d}}_\perp, \quad \hat{\mathsf{e}} = \hat{\mathsf{e}}_\top + \hat{\mathsf{e}}_\perp.$$

Iz prethodnih razmatranja imamo da su $|\boldsymbol{\xi}|\hat{\mathsf{d}}_\top$ i $|\boldsymbol{\xi}|\hat{\mathsf{e}}_\perp$ omeđeni u L^2, a iz $\|\hat{\mathsf{d}}_\top\|_{\mathrm{L}^2} \le \|\hat{\mathsf{d}}\|_{\mathrm{L}^2}$ i iz $\|\hat{\mathsf{e}}_\perp\|_{\mathrm{L}^2} \le \|\hat{\mathsf{e}}\|_{\mathrm{L}^2}$ primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti, slijedi:

$$|\boldsymbol{\xi}|\ \hat{\mathsf{d}}_\top \cdot \hat{\mathsf{e}}_\top \in \mathrm{L}^1,$$

$$|\boldsymbol{\xi}|\ \hat{\mathsf{d}}_\perp \cdot \hat{\mathsf{e}}_\perp \in \mathrm{L}^1,$$

odakle zbrajanjem dobivamo da je $|\boldsymbol{\xi}|\ \hat{\mathsf{d}} \cdot \hat{\mathsf{e}} \in \mathrm{L}^1$.

Analogno, jer su L^2 ocjene jednolike po n, dobivamo da je $|\boldsymbol{\xi}|\ \hat{\mathsf{d}}_n \cdot \hat{\mathsf{e}}_n$ omeđeno u L^1. Također, imamo:

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathsf{d}}_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^3)} &\le \|\mathsf{d}_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^3)} = \|\mathsf{d}_n\|_{\mathrm{L}^1(\omega;\mathbf{R}^3)} \\ &\le c_1\|\mathsf{d}_n\|_{\mathrm{L}^2(\omega;\mathbf{R}^3)} \le c_1\|\mathsf{d}_n\|_{\mathrm{L}^2(\omega;\mathbf{R}^3)} \le C,\end{aligned}$$

gdje je $\omega = \operatorname{supp}\psi$, a posljednja nejednakost slijedi iz slabe L^2 konvergencije niza (d_n). Iz slabe L^2 konvergencije niza d_n imamo i:

$$\hat{\mathsf{d}}_n(\boldsymbol{\xi}) = \int_\omega e^{-2\pi i x\cdot\boldsymbol{\xi}} \mathsf{d}_n(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} \to \int_\omega e^{-2\pi i x\cdot\boldsymbol{\xi}} \mathsf{d}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \hat{\mathsf{d}}(\boldsymbol{\xi}).$$

Analogno imamo $\|\hat{\mathsf{e}}_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^3)} \le C$ i $\hat{\mathsf{e}}_n(\boldsymbol{\xi}) \to \hat{\mathsf{e}}(\boldsymbol{\xi})$. Odatle, primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji, dobivamo za svaki omeđeni skup $B \subseteq \mathbf{R}^3$:

$$\hat{\mathsf{d}}_n \cdot \hat{\mathsf{e}}_n \to \hat{\mathsf{d}} \cdot \hat{\mathsf{e}} \ \text{ jako u } \mathrm{L}^1(B).$$

Zbog omeđenosti $|\boldsymbol{\xi}|\ \hat{\mathsf{d}}_n \cdot \hat{\mathsf{e}}_n$ i $|\boldsymbol{\xi}|\ \hat{\mathsf{d}} \cdot \mathsf{e}$ imamo:

$$\hat{\mathsf{d}}_n \cdot \mathsf{e}_n \to \hat{\mathsf{d}} \cdot \hat{\mathsf{e}} \ \text{ jako u } \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^3),$$

tj.

$$\int_{\mathbf{R}^3} \hat{\mathsf{d}}_n \cdot \hat{\mathsf{e}}_n\ \mathsf{d}\boldsymbol{\xi} \to \int_{\mathbf{R}^3} \hat{\mathsf{d}} \cdot \hat{\mathsf{e}}\ d\boldsymbol{\xi},$$

odakle koristeći Plancherelov teorem dobivamo

$$\int_{\mathbf{R}^3} \mathsf{d}_n \cdot \mathsf{e}_n\ d\mathbf{x} \to \int_{\mathbf{R}^3} \mathsf{d} \cdot \mathsf{e}\ d\mathbf{x}.$$

Tvrdnja leme sada slijedi iz jednakosti (1) i (2).

Q.E.D.

3. Div-rot lema u L^p

Div-rot lema se može poopćiti i na dualni produkt L^p i $\mathrm{L}^{p'}$. Prije nego li prijeđemo na sam dokaz, pokažimo slijedeću lemu.

Lema 2. *Neka je Ω otvoren i omeđen podskup $\mathbf{R}^d$, te neka su $p, p' > 1$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Ako su $\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^d)$ i $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{2,p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^d)$, onda za svaku probnu funkciju $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vrijedi:*

$$\int_\Omega \phi \triangle \mathsf{u} \cdot \triangle \mathsf{v} = -{}_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\langle\, \operatorname{div} \triangle \mathsf{u}, \phi \operatorname{div} \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega)} - \int_\Omega (\operatorname{div} \mathsf{u}) \nabla\phi \cdot \triangle \mathsf{v} + \int_\Omega (\operatorname{div} \mathsf{u}) \nabla \phi \cdot \nabla \operatorname{div} \mathsf{v} +$$

$$(5) \qquad - \int_\Omega (\operatorname{div} \mathsf{v}) \nabla\phi \cdot \nabla \operatorname{div} \mathsf{u} - \int_\Omega (\operatorname{rot} \mathsf{u}) \nabla \phi \cdot \triangle \mathsf{v} - \frac{1}{2}{}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}\langle\, \phi \operatorname{rot} \mathsf{u}, \operatorname{rot} \triangle \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}.$$

Dem. Najprije pokažimo da za funkcije u i v iz iskaza leme vrijedi jednakost:

$${}_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\langle\, \operatorname{div} \triangle \mathsf{u}, \phi \operatorname{div} \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega)} + \frac{1}{2}{}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}\langle\, \phi \operatorname{rot} \mathsf{u}, \operatorname{rot} \triangle \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)} =$$

$$(6) \qquad = - \int_\Omega \triangle \mathsf{u} \cdot \nabla(\phi \operatorname{div} \mathsf{v}) + \int_\Omega \triangle \mathsf{v} \cdot (\nabla \operatorname{div} \mathsf{u} - \triangle \mathsf{u})\phi - \int_\Omega (\operatorname{rot} \mathsf{u}) \nabla\phi \cdot \triangle \mathsf{v}.$$

Prisjetimo se formule

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}\mathsf{x}) = (\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathsf{x} + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathsf{x},$$

gdje je $\mathbf{A}$ matrična funkcija, a x vektorska funkcija. Sada iz Gaussovog teorema i činjenice da je $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ imamo slijedeću jednakost:

$$(7) \qquad {}_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\langle\, \operatorname{div} \triangle \mathsf{u}, \phi \operatorname{div} \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{W}^{1,p'}_0(\Omega)} = \int_\Omega (\operatorname{div} \triangle \mathsf{u}) \phi \operatorname{div} \mathsf{v} = - \int_\Omega \triangle \mathsf{u} \cdot \nabla(\phi \operatorname{div} \mathsf{v}).$$

Tvrdimo da vrijedi:

$$(8) \qquad \frac{1}{2}{}_{\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega)}\langle\, \phi \operatorname{rot} \mathsf{u}, \operatorname{rot} \triangle \mathsf{v}\,\rangle_{=} \int_\Omega \phi(\nabla \operatorname{div} \mathsf{u} - \triangle \mathsf{u}) \cdot \triangle \mathsf{v} - \int_\Omega (\operatorname{rot} \mathsf{u}) \nabla\phi \cdot \triangle \mathsf{v} \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega).$$

Da bismo to pokazali, pogledajmo (i,j)-ti član na lijevoj strani i raspišimo ga uzimajući u obzir da je $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int \phi (\operatorname{rot} \mathsf{u})_{i,j} \partial_j \mathsf{h}_i - \int \phi (\operatorname{rot} \mathsf{u})_{i,j} \partial_i \mathsf{h}_j =$$

$$= - \int \partial_j \phi (\operatorname{rot} \mathsf{u})_{i,j} \mathsf{h}_i - \int \phi \partial (\operatorname{rot} \mathsf{u})_{i,j} \mathsf{h}_i + \int \partial_i \phi (\operatorname{rot} \mathsf{u})_{i,j} \mathsf{h}_j + \int \phi \partial_i (\operatorname{rot} \mathsf{u})_{i,j} \mathsf{h}_j,$$

gdje smo označili $\mathsf{h} = \triangle \mathsf{v}$. Sad sumiranjem po i i po j, uvažavanjem činjenice da je rot antisimetričan operator te dijeljenjem s 2 slijedi formula (8).

Kombiniranjem (7) i (8) dobivamo formulu (6). Pregrupiranjem članova u formuli (6) te korištenjem

$$\int \triangle \mathsf{v} \cdot (\nabla \operatorname{div} \mathsf{u}) \phi = \int \triangle \mathsf{v} \cdot \nabla(\phi \operatorname{div} \mathsf{u}) - \int (\operatorname{div} \mathsf{u}) \triangle \mathsf{v} \cdot \nabla \phi,$$

dobivamo slijedeće:

$$\int_\Omega \phi\triangle\mathsf{u}\cdot\triangle\mathsf{v} = -{}_{\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)}\langle\, \mathsf{div}\,\triangle\mathsf{u}, \phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{W}_0^{1,p'}(\Omega)} - \int_\Omega \triangle\mathsf{u}\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}) + \int_\Omega \triangle\mathsf{v}\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{u}) +$$

$$(9)\qquad -\int_\Omega(\mathsf{div}\,\mathsf{u})\nabla\varphi\cdot\triangle\mathsf{v} - \int_\Omega(\mathsf{rot}\,\mathsf{u})\nabla\phi\cdot\triangle\mathsf{v} - \frac{1}{2}{}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)}\langle\, \phi\mathsf{rot}\,\mathsf{u}, \mathsf{rot}\,\triangle\mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega)}.$$

Primijetimo:

$$\int \triangle\mathsf{u}\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}) = -\int(\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{u} - \triangle\mathsf{u})\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}) + \int(\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{u})\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}),$$

i

$$\mathsf{div}\,(\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{u} - \triangle\mathsf{u}) = 0,$$

pa primjenom Gaussovog teorema imamo:

$$\int \triangle\mathsf{u}\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}) = \int(\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{u})\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}).$$

Analogno se dobije i:

$$\int \triangle\mathsf{v}\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{u}) = \int(\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{v})\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{u}).$$

Sličnim raspisom imamo:

$$-\int(\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{u})\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}) + \int(\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{v})\cdot\nabla(\phi\mathsf{div}\,\mathsf{u}) = \int_\Omega(\mathsf{div}\,\mathsf{u})\nabla\phi\cdot\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{v} - \int_\Omega(\mathsf{div}\,\mathsf{v})\nabla\phi\cdot\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{u},$$

odakle uvrštavanjem u (9) slijedi (5).

Q.E.D.

Teorem 1. *Neka je Ω otvoren i omeđen podskup $\mathbf{R}^d$, te neka su $p, p' > 1$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Neka su $\mathsf{a}^n \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^d)$ i $\mathsf{b}^n \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{R}^d)$ takvi da vrijedi:*
(i) $\mathsf{a}^n \rightharpoonup \mathsf{a}$ *u* $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{R}^d)$,
(ii) $\mathsf{b}^n \rightharpoonup \mathsf{b}$ *u* $\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{R}^d)$,
(iii) $\mathsf{div}\,\mathsf{a}^n$ *je sadržano u kompaktnom podskupu* $\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega)$,
(iv) $\mathsf{rot}\,\mathsf{b}^n$ *je sadržano u kompaktnom podskupu* $\mathrm{W}^{-1,p}(\Omega;\mathrm{M}_{d\times d})$
Tada $\mathsf{a}^n\cdot\mathsf{b}^n \rightharpoonup \mathsf{a}\cdot\mathsf{b}$ *u smislu distribucija.*

Dem. Za $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ označimo s Ω_ϕ otvoreni skup s glatkim rubom za kojeg vrijedi

$$\mathrm{supp}\,\phi \subseteq \Omega_\phi \subseteq \mathsf{Cl}\,\Omega_\phi \subseteq \Omega.$$

Definirajmo u^n i v^n kao slaba rješenja slijedećih zadaća:

$$(10)\qquad -\triangle\mathsf{u}^n = \mathsf{a}^n \text{ u } \Omega_\phi, \qquad \mathsf{u}^n = 0 \text{ na } \mathsf{Fr}\,\Omega_\phi,$$

$$-\triangle\mathsf{v}^n = \mathsf{b}^n \text{ u } \Omega_\phi, \qquad \mathsf{v}^n = 0 \text{ na } \mathsf{Fr}\,\Omega_\phi.$$

Zadaća (10) ima jedinstveno rješenje $\mathsf{u}^n \in \mathrm{W}^{2,p}(\Omega)_\phi$ koje zadovoljava ocjenu (v. [10], str. 241–4) $\|\mathsf{u}^n\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)_\phi} \leq c\|\mathsf{a}^n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_\phi)}$. Odatle imamo:

$$(\mathsf{u}^n) \text{ je omeđen u } \mathrm{W}^{2,p}(\Omega_\phi; \mathrm{M}_{d\times d}), \tag{11}$$

$$(\mathsf{v}^n) \text{ je omeđen u } \mathrm{W}^{2,p'}(\Omega_\phi; \mathrm{M}_{d\times d}). \tag{12}$$

Iz pretpostavki (i) i (ii) slijedi da:

$$\mathsf{u}^n \rightharpoonup \mathsf{u} \text{ slabo u } \mathrm{W}^{1,p}(\Omega_\phi; \mathbf{R}^d),$$

$$\mathsf{v}^n \rightharpoonup \mathsf{v} \text{ slabo u } \mathrm{W}^{1,p'}(\Omega_\phi; \mathbf{R}^d),$$

gdje su u i v jedinstvena rješenja zadaća:

$$-\triangle\mathsf{u} = \mathsf{a} \text{ u } \Omega_\phi, \qquad \mathsf{u} = 0 \text{ na } \mathsf{Fr}\,\Omega_\phi,$$

$$-\triangle\mathsf{v} = \mathsf{b} \text{ u } \Omega_\phi, \qquad \mathsf{v} = 0 \text{ na } \mathsf{Fr}\,\Omega_\phi.$$

Jednakost (5) sada glasi:

$$\int_{\Omega_\phi} \phi\mathsf{a}^n\cdot\mathsf{b}^n = \langle \mathsf{div}\,\mathsf{a}^n, \phi\mathsf{div}\,\mathsf{v}^n\rangle + \int_{\Omega_\phi}\mathsf{div}\,\mathsf{u}^n\nabla\phi\cdot\mathsf{b}^n + \int_{\Omega_\phi}\mathsf{div}\,\mathsf{u}^n\nabla\phi\cdot\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{v}^n +$$

$$-\int_{\Omega_\phi}\mathsf{div}\,\mathsf{v}^n\nabla\phi\cdot\nabla\mathsf{div}\,\mathsf{u}^n + \int_{\Omega_\phi}(\mathsf{rot}\,\mathsf{u}^n)\nabla\phi\cdot\triangle\mathsf{v} + \frac{1}{2}{}_{\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega_\phi)}\langle\,\phi\mathsf{rot}\,\mathsf{u}^n, \mathsf{rot}\,\triangle\mathsf{b}^n\,\rangle_{\mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega_\phi)}. \tag{13}$$

Sada iz (iii) i (iv), eventualnim prelaskom na podniz, imamo:

$$\mathsf{div}\,\mathsf{a}^n \to \mathsf{div}\,\mathsf{a} \text{ jako u } \mathrm{W}^{-1,p'}(\Omega_\phi), \tag{14}$$

$$\mathsf{rot}\,\mathsf{b}^n \to \mathsf{rot}\,\mathsf{b} \text{ jako u } \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega_\phi). \tag{15}$$

Koristeći neprekinutost deriviranja, kao i kompaktnost ulaganja Soboljevljevih prostora (v. [4], str. 285), primjećujemo da su svi članovi na desnoj strani jednakosti (13) oblika produkta jako konvergentnog i slabo konvergentnog niza, koji konvergiraju k izrazu koji je jednak $\int_{\Omega_\phi}\mathsf{a}\cdot\mathsf{b}\phi$. Iz jedinstvenosti limesa u prostoru distribucija slijedi tvrdnja teorema.

Q.E.D.

III. Kompaktnost kompenzacijom

1. Kompaktnost bez pretpostavki na derivacije

Za dokaz slijedeće leme vidjeti [6].

Lema 1. *Neka je D paralelepiped u $\mathbf{R}^d$ (razapet s d linearno nezavisnih vektora), i neka je $\varphi \in \mathrm{L}^p(D)$, $p \in [1,\infty]$. Ako funkciju φ periodički proširimo na cijeli $\mathbf{R}^d$, te označimo $\varphi_n(\mathbf{x}) := \varphi(n\mathbf{x})$, tada*

$$\varphi_n \rightharpoonup \fint_D \varphi \quad \text{slabo u } \mathrm{L}^p(D)\,, \quad \text{za } p \in [1,\infty\rangle$$

$$\varphi_n \rightharpoonup \fint_D \varphi \quad \text{slabo} * \text{ u } \mathrm{L}^\infty(D)\,, \quad \text{za } p = \infty\,,$$

gdje je $\fint_D \varphi = \frac{1}{\mathsf{vol}D}\int_D \varphi$ srednja vrijednost integrala funkcije φ na D. ∎

U daljnjem uzimamo da je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren skup.

Neka je (u^n) niz omeđenih izmjerivih funkcija na Ω, sa svojstvom

(P1) $$\mathsf{u}^n \rightharpoonup \mathsf{u} \quad \text{slabo} * \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^r)\,.$$

Ako je $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekinuta funkcija, te ako

$$f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup L \quad \text{slabo} * \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega)\,,$$

pitamo se što možemo reći o odnosu $f \circ \mathsf{u}$ i L? Što mora zadovoljavati funkcija f da bi pripadni operator $u \mapsto f \circ u$ bilo nizovno slabo-$*$ poluneprekidna odozdo; tj. da za svaki niz (u^n) koji zadovoljava (P1) vrijedi

$$L \geqslant f \circ \mathsf{u} \quad (\text{ss})\,.$$

Odnosno, koje funkcije f su nizovno slabo-$*$ neprekidne, što je ekvivalentno tome da za svaki niz (u^n) koji zadovoljava (P1) vrijedi i

$$L = f \circ \mathsf{u} \quad (\text{ss})\,.$$

Lema 2. *Neka je dana konveksna realna funkcija f na $\mathbf{R}^r$ za koju vrijedi $\mathsf{u}^n \rightharpoonup \mathsf{u}$ slabo-$*$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^r)$ i $f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup L$ slabo-$*$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Tada je $L \geqslant f \circ \mathsf{u}$.*

Dem. Definirajmo nadgraf fukcije f:

$$N := \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R} \,:\, z \geqslant f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbf{R}^{r+1}.$$

Iz neprekidnosti i konveksnosti slijedi da je N zatvoren i konveksan skup, dok iz Teorema 11.5. iz [18] slijedi da N možemo prikazati kao presjek familije zatvorenih poluprostora. Neka je $\mathcal{A}$ familija afinih funkcija na $\mathbf{R}^r$, takva da vrijedi

$$N = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R} \,:\, z \geqslant A(\mathbf{x})\}.$$

Odatle imamo:

$$f(\mathbf{x}) = \sup_{A\in\mathcal{A}} A(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^r\,.$$

Posebno, za $A \in \mathcal{A}$ je

$$f(\mathsf{u}^n(\mathbf{x})) \geqslant A(\mathsf{u}^n(\mathbf{x})),$$

pa na limesu slijedi

$$L(\mathbf{x}) \geqslant A(\mathsf{u}(\mathbf{x})) \quad (\text{ss } \mathbf{x}).$$

To daje

$$L \geqslant \sup_{A\in\mathcal{A}} A \circ \mathsf{u} = f \circ \mathsf{u} \qquad (\text{ss}).$$

Q.E.D.

Napomena 1. Ako je realna funkcija f na $\mathbf{R}^d$ konveksna, onda je ona i neprekidna na $\mathbf{R}^d$. Dokaz te tvrdnje može se naći u [18]. ∎

Pretpostavimo da niz (u^n) pored (P1) zadovoljava i

$$(\text{P2}) \qquad (\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad \mathsf{u}^n(\mathbf{x}) \in K \quad (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega)\,,$$

gdje je $K \subseteq \mathbf{R}^r$. Za kakve K vrijedi $\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in K$ (ss $\mathbf{x}$)? Odgovor na to pitanje daje slijedeći teorem kojeg navodimo bez dokaza (dokaz se može naći u [6]):

Teorem 1. *Neka je $K \subseteq \mathbf{R}^r$ omeđen, a (u^n) niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; K)$ koji slabo-$*$ konvergira k funkciji $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)$. Tada je nužno $\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in \mathsf{Cl}\,\mathrm{conv}K$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$).*

Obratno, ako je $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathsf{Cl}\,\mathrm{conv}K)$, onda postoji niz (u^n) u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; K)$ koji slabo-$*$ konvergira k u u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)$. ∎

Korolar 1. *Ako je $K \subseteq \mathbf{R}^r$ kompaktan i konveksan skup, te $\mathsf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^r$ izmjeriva funkcija koja skoro svuda poprima vrijednosti u K, tada postoji niz glatkih funkcija $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ koje poprimaju vrijednosti u K, takav da $\boldsymbol{\varphi}_n \rightharpoonup \mathsf{u}$ slabo-$*$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)$.*

Ukoliko je dodatno i $\mathsf{0} \in K$, tada funkcije $\boldsymbol{\varphi}_n$ možemo izabrati tako da imaju kompaktan nosač. ∎

Teorem 2. *Neka je $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekinuta funkcija te neka proizvoljni niz (u^n) zadovoljava (P1) i (P2). Tada vrijedi:*

a) $\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in K$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$), *ako i samo ako je K zatvoren i konveksan skup;*
b) $f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup L$ *slabo-$*$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ povlači $L \geqslant f \circ \mathsf{u}$, ako i samo ako je f konveksna na* $\mathsf{Cl}\,\mathrm{conv}K$*;*
c) $f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup f \circ \mathsf{u}$ *slabo-$*$ $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, ako i samo ako je f afina na* $\mathsf{Cl}\,\mathrm{conv}K$*.*

Dem.

a) Tvrdnja je jednostavna posljedica prethodnog teorema.
b) Smjer kad imamo konveksnu funkciju je pokazan u prethodnoj lemi. Obratno, za dani $m \in \mathbf{N}$ i $\vartheta_i \in [0,1]$, takve da je $\sum_{i=1}^m \vartheta_i = 1$, i za $j \in 1..m$ definirajmo periodičke funkcije $\psi_j : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, perioda 1, sa

$$\psi_j(z) = \begin{cases} 1\,, & \sum_{i=1}^{j-1} \vartheta_i < z < \sum_{i=1}^{j} \vartheta_i \\ 0\,, & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Za $\mathsf{a}_j \in K$, $j \in 1..m$, te fiksan $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$, definirajmo

$$\mathsf{v}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^m \psi_j(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\mathsf{a}_j\,,$$

$$\mathsf{u}^n(\mathbf{x}) := \mathsf{v}(n\mathbf{x})\,.$$

Iz Leme 1

$$\mathsf{u}^n \rightharpoonup \sum_{j=1}^m \vartheta_j \mathsf{a}_j \quad \text{slabo} * \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)\,,$$

a kako je

$$(f \circ \mathsf{u}^n)(\mathbf{x}) = (f \circ \mathsf{v})(n\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \psi_j(n\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) f(\mathsf{a}_j)\,,$$

iz Leme 1 slijedi

$$f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup \sum_{j=1}^{m} \vartheta_j f(\mathsf{a}_j)\,.$$

Sada iz pretpostavke teorema slijedi da je

$$\sum_{j=1}^{m} \vartheta_j f(\mathsf{a}_j) \geqslant f\Big(\sum_{j=1}^{m} \vartheta_j \mathsf{a}_j\Big)\,,$$

što daje konveksnost funkcije f na skupu $\mathrm{conv}\{\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, ..., \mathsf{a}_m\}$. Zbog proizvoljnosti $m \in \mathbf{N}$ i $\mathsf{a}_j \in K$ dobivamo da je f konveksna na $\mathrm{conv}K$, pa zbog neprekinutosti i na zatvaraču.

c) Iz $f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup f \circ \mathsf{u}$ očito imamo i $(-f) \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup (-f) \circ \mathsf{u}$, pa prema tvrdnji (b) teorema slijedi da su f i $-f$ konveksne na $\mathsf{Cl}\,\mathrm{conv}K$, što je jedino moguće ako je f afina na $\mathsf{Cl}\,\mathrm{conv}K$. Očito da za afinu funkciju f na $\mathsf{Cl}\,\mathrm{conv}K$ vrijedi $f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup f \circ \mathsf{u}$.

Q.E.D.

2. Kompaktnost kompenzacijom

U ovom odjeljku ćemo pokazati da pretpostavku na nizovnu slabu-$*$ (polu)neprekinutost (odozdo) funkcije f na nizovima (u^n) koji zadovoljavaju (P1) i (P2) možemo zamijeniti s odgovarajućim pretpostavkama na derivacije niza (u^n).

Pretpostavimo da niz (u^n) dodatno zadovoljava

$$\text{(P3)} \qquad \Big(\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{r} a_{ijk}\partial_k u_j^n\Big) \quad \text{je omeđen niz u } \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,, \quad i \in 1..q\,,$$

gdje su $a_{ijk} \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{N}$, te gornje derivacije shvaćamo u smislu distribucija. Ako s $\mathbf{A}^k \in \mathrm{M}_{q,r}(\mathbf{R})$, $k \in 1..d$ označimo matricu u kojoj se na (i,j) mjestu nalazi a_{ijk}, tada se uvjet (P3) može i ovako zapisati:

$$\Big(\sum_{k=1}^{d} \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u}^n\Big) \quad \text{je omeđen niz u } \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^q)\,.$$

Definirajmo skupove:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &:= \Big\{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^d \,:\, \sum_{k=1}^{d} \xi_k \mathbf{A}^k \boldsymbol{\lambda} = \mathsf{0}\Big\} \\
\mathcal{V}_0 &:= \{(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V} \,:\, \boldsymbol{\xi} \neq \mathsf{0}\} \\
\Lambda &:= \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r \,:\, (\exists \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}_0\}\,.
\end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi

- ako je $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}$, tada je i $(\alpha\boldsymbol{\lambda}, \alpha\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}$, za $\alpha \in \mathbf{R}$ proizvoljan;
- ako je $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}_1), (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}_2) \in \mathcal{V}$, tada je i $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) \in \mathcal{V}$;
- ako je $(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}$, tada je i $(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}$.

Kad nemamo pretpostavki na derivacije, tada je $\mathcal{V} = \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^d$, i $\Lambda = \mathbf{R}^r$.

Primjer. Ukoliko su svi nizovi parcijalnih derivacija $(\partial_k u_j^n)_n$ omeđeni u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, tada je $\Lambda = \{0\}$ (jer je $\lambda_j \xi_k = 0$, za sve j, k). Zbog omeđenosti nizovi parcijalnih derivacija slabo konvergiraju, pa imamo $\mathsf{u}^n \rightharpoonup \mathsf{u}$ slabo u $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, a što povlači $\mathsf{u}^n \longrightarrow \mathsf{u}$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r)$. ∎

Nužni uvjeti

Teorem 3. *Ako za svaki niz* (u^n) *koji zadovoljava (P1), (P2) i (P3) vrijedi da je* $\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in K$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$), *tada je* K *zatvoren, te*

$$(\forall\, \mathsf{a}, \mathsf{b} \in K) \quad \mathsf{b} - \mathsf{a} \in \Lambda \quad \Longrightarrow \quad [\mathsf{a}, \mathsf{b}] \subseteq K\,.$$

Dem. Kada K ne bi bio zatvoren, tada bi postojao niz (a_n) u K koji konvergira k $\mathsf{a} \notin K$. Tada niz $\mathsf{u}^n = \mathsf{a}_n$ zadovoljava (P1), (P2) i (P3), dok $\mathsf{u} = \mathsf{a} \notin K$.

Neka su sada $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in K$, te $\mathsf{b} - \mathsf{a} \in \Lambda$. Po definiciji skupa Λ možemo naći $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$, $\boldsymbol{\xi} \neq \mathsf{0}$, takav da

$$\sum_k \xi_k \mathbf{A}^k (\mathsf{b} - \mathsf{a}) = \mathsf{0}\,.$$

Neka je (φ_n) omeđen niz realnih funkcija i definirajmo

$$\mathsf{u}^n(\mathbf{x}) := \mathsf{a} + (\mathsf{b} - \mathsf{a})\varphi_n(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\,.$$

Tvrdimo da vrijedi

$$\sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u}^n = \mathsf{0}\,.$$

Zaista, za glatku φ_n vrijedi

$$\partial_k \mathsf{u}^n = (\mathbf{b} - \mathbf{a})\varphi_n'(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\xi_k\,,$$

pa je i

$$\sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u}^n = \varphi_n'(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) \sum_k \xi_k \mathbf{A}^k (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathsf{0}\,.$$

Ako φ_n nije glatka, tada je aproksimiramo nizom glatkih funkcija u slaboj-$*$ topologiji prostora $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$. Tada tvrdnja slijedi iz neprekinutosti deriviranja na prostoru distribucija.

Neka je $0 < \vartheta < 1$, te φ realna periodička funkcija perioda 1, definirana s

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1\,, & 0 \leqslant z < \vartheta \\ 0\,, & \vartheta \leqslant z < 1\,. \end{cases}$$

Uzmimo $\varphi_n(z) := \varphi(nz)$. Tada svaki u^n poprima samo vrijednosti $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, dakle unutar skupa K. Prema Lemi 1

$$\mathsf{u}^n \rightharpoonup (1 - \vartheta)\mathbf{a} + \vartheta\mathbf{b} \quad \text{slabo} - * \text{ u } \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)\,,$$

odakle

$$(1 - \vartheta)\mathbf{a} + \vartheta\mathbf{b} \in K\,.$$

Iz proizvoljnosti ϑ slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Korolar 2. *Ako neprekinuta funkcija* $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ *ima svojstvo da za svaki niz* (u^n) *za koji je ispunjeno (P1), (P2) i (P3), te* $f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup L$ *slabo-∗ u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *vrijedi i* $L \geqslant f \circ \mathsf{u}$, *tada je za svaku* m*-torku* $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, ..., \mathsf{a}_m \in K$, *za koju postoji* $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ *takav da je* $(\mathsf{a}_i - \mathsf{a}_j, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}$, $i, j \in 1..m$, f *nužno konveksna funkcija na* $\mathrm{conv}\{\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, ..., \mathsf{a}_m\}$.

Dem. Za $(\varphi_j^n)_n$ omeđene nizove u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ i $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d$ kao u iskazu teorema, analogno kao u prethodnom teoremu pokažemo da niz funkcija

$$\mathsf{u}^n(\mathbf{x}) := \mathsf{a}_1 + \sum_{j=1}^{m-1} (\mathsf{a}_{j+1} - \mathsf{a}_j)\varphi_j^n(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) \,,$$

zadovoljava:

$$\sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u}^n = 0 \,.$$

Sada analogno kao u dokazu tvrdnje *b*) Teorema 2 dobivamo da je f konveksna na $\mathrm{conv}\{\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, ..., \mathsf{a}_m\}$.

Q.E.D.

Na analogan način imamo i slijedeći rezultat:

Korolar 3. *Ako neprekinuta funkcija* $f : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ *ima svojstvo da za svaki niz* (u^n) *za koji je ispunjeno (P1), (P2) i (P3), vrijedi* $f \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup f \circ \mathsf{u}$ *slabo-∗ u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, *tada je za svaku* m*-torku brojeva* $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, ..., \mathsf{a}_m \in K$, *za koju postoji* $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ *takav da je* $(\mathsf{a}_i - \mathsf{a}_j, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}$, $i, j \in 1..m$, f *nužno afina na* $\mathrm{conv}\{\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, ..., \mathsf{a}_m\}$. ∎

Korolar 4.

a) *Ako vrijede pretpostavke Korolara 2, tada je* f *konveksna u smjerovima iz* Λ, *u smislu da je realna funkcija realne varijable* $t \mapsto f(\mathsf{a} + t\boldsymbol{\lambda})$ *konveksna za svaki* $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^r, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$

b) *Ako vrijede pretpostavke Korolara 3, tada je* f *afina u smjerovima iz* Λ, *u smislu da je funkcija* $t \mapsto f(\mathsf{a} + t\boldsymbol{\lambda})$ *afina za svaki* $\mathsf{a} \in \mathbf{R}^r$ *i* $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$.

Dem.

a) Neka je $K := \mathbf{R}^r$, te $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^r, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ proizvoljni. Tada je f konveksna na $[\mathsf{a}, \mathsf{a} + \boldsymbol{\lambda}]$, pa vrijedi

$$(1 - \vartheta)f(\mathsf{a}) + \vartheta f(\mathsf{a} + \boldsymbol{\lambda}) \geqslant f(\mathsf{a} + \vartheta\boldsymbol{\lambda}) \,, \quad \vartheta \in [0, 1] \,.$$

Za proizvoljne $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, u gornju nejednakost uvrstimo $\mathsf{a} + t_1\boldsymbol{\lambda}$ i $(t_2 - t_1)\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{aligned}(1 - \vartheta)f(\mathsf{a} + t_1\boldsymbol{\lambda}) + \vartheta f(\mathsf{a} + t_2\boldsymbol{\lambda}) &\geqslant f(\mathsf{a} + t_1\boldsymbol{\lambda} + \vartheta(t_2 - t_1)\boldsymbol{\lambda}) \\ &= f(\mathsf{a} + ((1 - \vartheta)t_1 + \vartheta t_2)\boldsymbol{\lambda}) \,,\end{aligned}$$

odakle imamo da je funkcija $t \mapsto f(\mathsf{a} + t\boldsymbol{\lambda})$ konveksna.

b) Analogno kao i a).

Q.E.D.

Napomena 2. Uočimo da, ukoliko je dodatno f klase C^2, tvrdnja (a) iz prethodnog korolara je ekvivalenta s

$$(\forall\, \mathsf{a} \in \mathbf{R}^r)(\forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda) \quad D^2 f(\mathsf{a})(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}) \geqslant 0 \,,$$

dok je tvrdnja (b) ekvivalentna s

$$(\forall\, \mathsf{a} \in \mathbf{R}^r)(\forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda) \quad D^2 f(\mathsf{a})(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \,.$$

∎

Primjeri

Primjer 1. Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren, $\mathsf{u}^n = (\mathsf{v}^n, \mathsf{w}^n)$, gdje su $\mathsf{v}^n, \mathsf{w}^n \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^d)$. Pretpostavimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathsf{v}^n &\rightharpoonup \mathsf{v} \quad \text{slabo} - * \, \mathrm{u}\, \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^d), \\ \mathsf{w}^n &\rightharpoonup \mathsf{w} \quad \text{slabo} - * \, \mathrm{u}\, \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^d)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathsf{v}^n) &\quad \text{je omeđeno u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega), \\ (\operatorname{rot} \mathsf{w}^n) &\quad \text{je omeđeno u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^{d\times d})\,. \end{aligned}$$

Pitamo se koji su uvjeti na funkciju f da bi ona bila nizovno slabo-$*$ neprekinuta na nizovima koji zadovoljavaju gornje uvjete.

Uočimo da iz gornjih uvjeta na derivacije dobivamo

$$\mathcal{V} = \Big\{ ((\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^{2d} \times \mathbf{R}^d \ : \ \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad \& \quad \boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\mu} = \mathsf{0} \Big\}\,.$$

Uz dogovor da je nul-vektor paralelan sa svakim vektorom, slijedi

$$\mathcal{V} = \Big\{ ((\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^{2d} \times \mathbf{R}^d \ : \ \boldsymbol{\lambda} \perp \boldsymbol{\xi} \quad \& \quad \boldsymbol{\mu} \parallel \boldsymbol{\xi} \Big\}\,,$$

pa je

$$\Lambda = \Big\{ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \ : \ \boldsymbol{\lambda} \perp \boldsymbol{\mu} \Big\}\,.$$

za proizvoljne $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^d$ definirajmo $\mathbf{a} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{b} = (\boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\mu})$. Tada je $\mathbf{b} - \mathbf{a} \in \Lambda$, pa koristeći Korolar 3 imamo da je f afina na segmentu $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Odatle slijedi da je za fiksan $\boldsymbol{\mu}$ funkcija f afina po varijabli $\boldsymbol{\lambda}$. Analogno se pokaže da je za fiksan $\boldsymbol{\lambda}$ funkcija f afina po $\boldsymbol{\mu}$, pa je f nužno oblika

$$f(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\mu} + e\,,$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_d(\mathbf{R})$; $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^d$ i $e \in \mathbf{R}$ konstante. Za svaki par a, b takvih da je $\mathsf{b} - \mathsf{a} \in \Lambda$ vrijedi

$$f(\vartheta \mathsf{a} + (1-\vartheta)\mathsf{b}) = \vartheta f(\mathsf{a}) + (1-\vartheta) f(\mathsf{b})\,, \quad \vartheta \in [0,1]\,,$$

pa posebno i za $\mathbf{b} = \mathsf{0}, \mathbf{a} = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \Lambda$, te uvrštavanjem dobivamo

$$(\forall\, (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \Lambda)(\forall\, \vartheta \in [0,1]) \quad \vartheta \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}\,.$$

Odatle imamo da za $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0$ vrijedi

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0\,,$$

odnosno

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = a\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu}\,.$$

Zaključujemo da je nizovno slabo neprekidna funkcija f nužno oblika:

$$f(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = a\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathsf{c} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathsf{d} \cdot \boldsymbol{\mu} + e\,,$$

gdje su $a, e \in \mathbf{R}$, te $\mathsf{c}, \mathsf{d} \in \mathbf{R}^d$ konstante.

Kasnije ćemo pokazati da je to i dovoljan uvjet da funkcija bude nizovno slabo neprekinuta na nizovima koji zadovoljavaju gornje uvjete. ∎

Primjer 2. Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, te neka vrijedi

$$\mathsf{u}^n \rightharpoonup \mathsf{u} \quad \text{slabo} - * \, \text{u} \; \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^2) \, .$$

Neka su uvjeti na derivacije dani s

$$(\partial_i \mathsf{u}_i^n) \quad \text{je omeđeno u} \quad \mathrm{L}^2_{\text{loc}}(\Omega) \, , \quad i = 1, 2 \, ,$$

odakle imamo

$$\mathcal{V} = \Big\{ \, (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \; : \; \lambda_1 \xi_1 = \lambda_2 \xi_2 = 0 \, \Big\} \, .$$

Pokaže se da je tada

$$\Lambda = \{ \, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^2 \; : \; \lambda_1 = 0 \quad \text{ili} \quad \lambda_2 = 0 \, \} \, .$$

Uzmimo a i b da imaju prvu komponentu jednaku: $\mathsf{a} = (\lambda, \lambda_1), \mathsf{b} = (\lambda, \lambda_2)$. Analogno kao u Primjeru 1 zaključujemo da ukoliko je f nizovno slabo-$*$ poluneprekidna odozdo na nizovima koji zadovoljavaju gornje uvjete na derivacije, tada prema Korolaru 2 slijedi da je f konveksna po drugoj varijabli. Da smo uzeli da a i b imaju jednake druge komponente dobili bismo da je f nužno konveksna po prvoj varijabli. Zaključujemo: nužan uvjet da bi f bila nizovno slabo-$*$ poluneprekidnaa odozdo je da je separirano konveksna.

Odatle imamo nužan uvjet da bi f bila nizovno slabo-$*$ neprekidna uz gornje uvjete: f mora biti oblika

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = a\lambda_1\lambda_2 + b\lambda_1 + c\lambda_2 + d \, ,$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ konstante. ∎

Analogno vrijedi i za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$: f je nizovno slabo-$*$ neprekidna na nizovima koji zadovoljavaju analogne uvjete na derivacije ako je, za fiksnu jednu varijablu, afina po preostale dvije. Funkcija sa takvim svojstvom je nužno afina.

Dovoljni uvjeti

U ovom odjeljku ćemo pokazati Tartarov Kvadratni teorem koji daje dovoljne uvjete da funkcija bude nizovno slabo-$*$ neprekidna na nizovima koji zadovoljavaju (P1), (P2) i (P3). Započnimo sa slijedećom lemom.

Lema 3. *Neka je skup Λ definiran kao prije:*

$$\Lambda := \Big\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^r \; : \; (\exists \, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}) \quad \sum_{k=1}^d \xi_k \mathbf{A}^k \boldsymbol{\lambda} = 0 \Big\} \, ,$$

za fiksne matrice $\mathbf{A}^k \in \mathrm{M}_{q,r}(\mathbf{R})$, $k \in 1..d$, te neka je $\mathbf{Q} \in \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ konstantna matrica takva da vrijedi

$$(\forall \, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda) \quad Q(\boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} \geqslant 0 \, .$$

Ako je $\tilde{Q}$ hermitsko proširenje kvadratne forme Q na $\mathbf{C}^r$ defirnirano s

$$\tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}) := \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} \, ,$$

tada vrijedi

$$(\forall \, \varepsilon > 0)(\exists \, C_\varepsilon \in \mathbf{R})(\forall \, \boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{C}^r)(\forall \, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^d)$$

$$|\boldsymbol{\eta}| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Re} \, \tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant - \, \varepsilon |\boldsymbol{\lambda}|^2 - C_\varepsilon \sum_{i=1}^q \Big| \sum_{j,k} a_{ijk} \lambda_j \eta_k \Big|^2 \, .$$

Dem. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $C_\varepsilon = n \in \mathbf{N}$ postoje $\boldsymbol{\lambda}^n \in \mathbf{C}^r$ i $\boldsymbol{\eta}^n \in \mathbf{R}^r$, takvi da je $|\boldsymbol{\eta}^n| = 1$ i

$$\text{(1)} \qquad \mathsf{Re}\, \tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}^n) < -\varepsilon|\boldsymbol{\lambda}^n|^2 - n\sum_{i=1}^{q}\Big|\sum_{j,k} a_{ijk}\lambda_j^n\eta_k^n\Big|^2 .$$

Skaliranjem gornje nejednakosti $\boldsymbol{\lambda}^n$ smo mogli izabrati tako da je $|\boldsymbol{\lambda}^n| = 1$. Tako odabran niz $(\boldsymbol{\lambda}^n)$ je relativno kompaktan, na podnizu imamo:

$$\boldsymbol{\lambda}^n \longrightarrow \boldsymbol{\lambda}$$
$$\boldsymbol{\eta}^n \longrightarrow \boldsymbol{\eta} .$$

Definirajmo bilinearnu formu β na $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r$ s $\beta(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) := \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda}_2$ Primijetimo da za $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \in \Lambda$ vrijedi

$$\tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 i) = Q(\boldsymbol{\lambda}_1) + Q(\boldsymbol{\lambda}_2) + (\beta(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_1))i .$$

Stoga je za $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 i \in \Lambda + i\Lambda$,

$$\mathsf{Re}\, \tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}) = Q(\boldsymbol{\lambda}_1) + Q(\boldsymbol{\lambda}_2) \geqslant 0 .$$

$\mathsf{Re}\, \tilde{Q}$ je neprekidna funkcija na jediničnoj sferi, pa iz (1) imamo

$$\sum_{i=1}^{q}\Big|\sum_{j,k} a_{ijk}\lambda_j^n\eta_k^n\Big|^2 \leqslant \frac{-\varepsilon - \mathsf{Re}\, \tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}^n)}{n} \leqslant \frac{C}{n} .$$

Na limesu imamo

$$\sum_{i=1}^{q}\Big|\sum_{j,k} a_{ijk}\lambda_j\eta_k\Big|^2 = 0 ,$$

a odatle je $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda + i\Lambda$, pa slijedi i

$$\mathsf{Re}\, \tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant 0 .$$

Sada iz (1) imamo

$$\mathsf{Re}\, \tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}) = \lim_n \mathsf{Re}\, \tilde{Q}(\boldsymbol{\lambda}^n) \leqslant -\varepsilon < 0 ,$$

što je kontradikcija.

Q.E.D.

Teorem 4. (**Kvadratni teorem**) *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren, $\Lambda \subseteq \mathbf{R}^r$ definiran kao u prethodnoj lemi, a Q realna kvadratna forma na $\mathbf{R}^r$ koja je nenegativna na Λ, tj.*

$$(\forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda) \quad Q(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant 0 .$$

Nadalje, neka niz funkcija (u^n) zadovoljava

$$\text{(P1')} \qquad \mathsf{u}^n \rightharpoonup \mathsf{u} \quad \textit{slabo u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r) ,$$

$$\text{(P3')} \qquad \Big(\sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{u}^n\Big) \quad \textit{je relativno kompaktno u} \quad \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^q) .$$

Tada svaki podniz niza $(Q \circ \mathsf{u}^n)$ koji konvergira u distribucijama ka svom limesu L, zadovoljava

$$L \geqslant Q \circ \mathsf{u}$$

u smislu distribucija.

Dem.
1. korak: Pretpostavimo da (nakon prelaska na podniz) $Q \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup L$ slabo u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Iz (P1') i (P3') za $\mathsf{v}^n := \mathsf{u}^n - \mathsf{u}$, imamo

$$\mathsf{v}^n \rightharpoonup \mathsf{0} \quad \text{slabo u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r)\,. \tag{2}$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{d} \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{v}^n\Big) \quad \text{je relativno kompaktno u} \quad \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^q)\,. \tag{3}$$

Neka je $\beta : \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ bilinearna forma definirana kao u prethodnoj lemi, tako da za svaki $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^r$ vrijedi

$$Q(\mathbf{a}) = \beta(\mathbf{a}, \mathbf{a})\,.$$

Odatle

$$Q(\mathsf{v}^n) = \beta(\mathsf{u}^n - \mathsf{u}, \mathsf{u}^n - \mathsf{u}) = Q(\mathsf{u}^n) - \beta(\mathsf{u}^n, \mathsf{u}) - \beta(\mathsf{u}, \mathsf{u}^n) + Q(\mathsf{u})\,,$$

skupa sa

$$\begin{aligned} Q(\mathsf{u}^n) &\rightharpoonup L \\ \beta(\mathsf{u}^n, \mathsf{u}) &\rightharpoonup \beta(\mathsf{u}, \mathsf{u}) = Q(\mathsf{u}) \\ \beta(\mathsf{u}, \mathsf{u}^n) &\rightharpoonup \beta(\mathsf{u}, \mathsf{u}) = Q(\mathsf{u})\,, \end{aligned}$$

u distribucijama, daje

$$Q \circ \mathsf{v}^n \rightharpoonup L - Q \circ \mathsf{u} =: m\,.$$

Teorem će biti dokazan ako pokažemo $m \geqslant 0$.
2. korak: Neka je φ realnu test funkciju na Ω, te definirajmo funkcije s kompaktnim nosačem $\mathsf{w}^n := \varphi \mathsf{v}^n$. Vrijedi

$$\mathsf{w}^n \rightharpoonup \mathsf{0} \quad \text{slabo u} \quad \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r) \tag{4}$$

te

$$\sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{w}^n = \varphi \sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{v}^n + \sum_k \partial_k \varphi\, \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{v}^n\,.$$

Oba niza u gornjoj sumi su relativno kompaktna u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega; \mathbf{R}^q)$ (drugi je omeđen u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^q)$ i nošen na kompaktu, pa je i on relativno kompaktan u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega; \mathbf{R}^q)$). Odatle imamo za lijevu stranu jednakosti:

$$\Big(\sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{w}^n\Big) \quad \text{je relativno kompaktno u} \quad \mathrm{H}^{-1}(\Omega; \mathbf{R}^q)\,,$$

pa na podnizu (bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to cijeli niz) vrijedi

$$\sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{w}^n \longrightarrow \tilde{L} \quad \text{jako u} \quad \mathrm{H}^{-1}(\Omega; \mathbf{R}^q)\,.$$

Ulaganjem u distribucije zbog neprekidnosti deriviranja iz (4) imamo da

$$(\forall\, k \in 1..d) \quad \partial_k \mathsf{w}^n \rightharpoonup \mathsf{0}$$

u distribucijama, a odatle je $\tilde{L} = \mathsf{0}$, tj.

$$\sum_k \mathbf{A}^k \partial_k \mathsf{w}^n \longrightarrow 0 \quad \text{jako u} \quad \mathrm{H}^{-1}(\Omega; \mathbf{R}^q)\,. \tag{5}$$

3. korak: Primijetimo da u distribucijama vrijedi

$$Q \circ \mathsf{w}^n = \varphi^2 Q \circ \mathsf{v}^n \rightharpoonup \varphi^2 m,$$

odnosno, za proizvoljni $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\mathbf{R}^d} Q \circ \mathsf{w}^n \psi \longrightarrow {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle\, \varphi^2 m, \psi \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \,.$$

Kako je

$${}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle\, \varphi^2 m, \psi \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle\, m, \psi\varphi^2 \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \,,$$

te

$$\operatorname{supp}(Q \circ \mathsf{w}^n) \subseteq \operatorname{supp}\varphi \,,$$

odabirom ψ tako da $\psi_{|\operatorname{supp}\varphi} = 1$, imamo

$$\int_{\mathbf{R}^d} Q \circ \mathsf{w}^n \longrightarrow {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle\, m, \varphi^2 \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \,.$$

Primijetimo da je za pokazati da je $m \geqslant 0$ u smislu distribucija, dovoljno pokazati

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} Q \circ \mathsf{w}^n \geqslant 0 \,. \tag{6}$$

4. korak: Neka je $\tilde{Q}$ hermitsko proširenje kvadratne forme Q kao u prethodnoj lemi. Proširimo w^n nulom van Ω, i uzmimo Fourierovu transformaciju te funkcije

$$\hat{\mathsf{w}}^n(\boldsymbol{\xi}) := \int_{\mathbf{R}^d} \mathsf{w}^n(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

Iz Plancherelovog teorema sada imamo:

$$\int_{\mathbf{R}^d} Q \circ \mathsf{w}^n = \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{Q} \circ \mathsf{w}^n = \int_{\mathbf{R}^d} \tilde{Q} \circ \hat{\mathsf{w}}^n = \int_{\mathbf{R}^d} \operatorname{\mathsf{Re}} \tilde{Q} \circ \hat{\mathsf{w}}^n \,,$$

pa je (6) ekvivalentno s

$$\lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \operatorname{\mathsf{Re}} \tilde{Q} \circ \hat{\mathsf{w}}^n \geqslant 0 \,. \tag{7}$$

5. korak: Budući da je $\operatorname{supp}\mathsf{w}^n \subseteq \operatorname{supp}\varphi =: K \in \mathcal{K}(\Omega)$, u izrazu za Fourierovu pretvorbu je dovoljno gledati integral po skupu K

$$\hat{\mathsf{w}}^n(\boldsymbol{\xi}) := \int_K \mathsf{w}^n(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \,.$$

Za fiksan $\boldsymbol{\xi}$ funkcija $\mathbf{x} \mapsto e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}}$ je iz $\mathrm{L}^2(K; \mathbf{C})$. To zajedo s konvergencijom $\mathsf{w}^n \rightharpoonup \mathsf{0}$ u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r)$ daje

$$\hat{\mathsf{w}}^n \longrightarrow \mathsf{0} \quad (\mathrm{ss}) \,.$$

Iz omeđenosti niza (w^n) u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r)$ i $\operatorname{supp}\mathsf{w}^n \subseteq K$, slijedi da je niz omeđen i u $\mathrm{L}^1(K; \mathbf{R}^r)$, pa zbog

$$|\hat{\mathsf{w}}^n(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \int_K |\mathsf{w}^n(\mathbf{x})| |e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{x})}| d\mathbf{x} = \int_K |\mathsf{w}^n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \,,$$

imamo da je niz
$$(\hat{\mathsf{w}}^n) \quad \text{omeđen u} \quad \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)\,.$$
Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji povlači da
$$\hat{\mathsf{w}}^n \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{jako u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)\,,$$
a iz kvadratičnosti forme $\tilde{Q}$, imamo

(8)
$$\int_{K(\mathsf{0},R)} \mathsf{Re}\,\tilde{Q}\circ\hat{\mathsf{w}}^n \longrightarrow 0\,,$$

gdje je R proizvoljan pozitivan broj.

Primjenom Fourierove pretvorbe na (5) dobivamo
$$\frac{2\pi i}{\sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}}\sum_k \xi_k \mathbf{A}^k \hat{\mathsf{w}}^n \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{jako u} \quad \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^q)\,.$$
Iz nejednakosti $\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}}$, za $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant 1$, uz oznaku $S := \mathbf{R}^d \setminus K(\mathsf{0},1)$, imamo

(9)
$$\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\sum_k \xi_k \mathbf{A}^k \hat{\mathsf{w}}^n \longrightarrow \mathsf{0} \quad \text{jako u} \quad \mathrm{L}^2(S;\mathrm{C}^q)\,.$$

Iz prethodne leme uz
$$\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathsf{w}}^n(\boldsymbol{\xi})\,, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\,,$$
imamo
$$\mathsf{Re}\,\tilde{Q}\circ\hat{\mathsf{w}}^n(\boldsymbol{\xi}) \geqslant -\varepsilon|\hat{\mathsf{w}}^n(\boldsymbol{\xi})|^2 - C_\varepsilon \sum_{i=1}^q \Big|\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\hat{w}_j^n(\boldsymbol{\xi})\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big|^2\,,$$
što nakon integracije daje

(10)
$$\int_S \mathsf{Re}\,\tilde{Q}\circ\hat{\mathsf{w}}^n(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \geqslant -\varepsilon\int_S |\hat{\mathsf{w}}^n(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} - C_\varepsilon \sum_{i=1}^q \int_S \Big|\sum_{j,k} a_{ijk}\frac{\hat{w}_j^n(\boldsymbol{\xi})\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big|^2 d\boldsymbol{\xi}\,.$$

Fourierova pretvorba je izometrija na $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, a niz (w^n) je slabo konvergentan, pa i omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$. Tada postoji konstanta $C \geqslant 0$, takva da vrijedi
$$\int_{\mathbf{R}^d} |\hat{\mathsf{w}}^n|^2 \leqslant C\,, n \in \mathbf{N}\,.$$
Prijelazom na limes u (10), iz (9) dobivamo
$$\lim_n \int_S \mathsf{Re}\,\tilde{Q}\circ\hat{\mathsf{w}}^n \geqslant -\varepsilon C\,.$$
Odatle imamo
$$\lim_n \int_S \mathsf{Re}\,\tilde{Q}\circ\hat{\mathsf{w}}^n \geqslant 0\,,$$
što zajedno s (8) daje tvrdnju.

Q.E.D.

Napomena 3. Uočimo da $(Q \circ \mathsf{u}^n)$ uvijek ima podniz koji konvergira u distribucijama. Zaista, kako je Q kvadratna forma, a (u^n) omeđeno u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, to je i $v^n := Q \circ \mathsf{u}^n$ omeđen niz u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dakle, za svaku probnu funkciju φ je (φv^n) omeđen niz u $\mathrm{L}^1(\Omega)$, pa i u $\mathcal{M}_b(\Omega)$. To povlači da postoji podniz koji slabo-$*$ konvergira u $\mathcal{M}_b(\Omega)$ (v. [3], str. 153), pa i u distribucijama. Štoviše, ukoliko je $\Phi \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ prebrojiv skup, tada Cantorovim dijagonalnim postupkom možemo izdvojiti podniz niza (v^n) (koji jednako označavamo), tako da za svaki $\varphi \in \Phi$, (φv^n) konvergira u distribucijama. Neka skup Φ sadrži niz funkcija (φ_n), sa svojstvom da je φ_n identički jednaka jedan na skupu

$$\left\{\mathbf{x} \in \Omega \;:\; d(\mathbf{x}, \mathsf{Fr}\,\Omega) > \frac{1}{n}\right\} \cap K(\mathsf{0}, n)\,.$$

Tada

$$(\forall\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega))(\exists\, n_0 \in \mathbf{N}) \quad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_n\big|_{\mathrm{supp}\,\psi} = 1\,,$$

pa ako za fiksan $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ s n_ψ označimo najmanji n_0 s gornjim svojstvom, tada za $n \geqslant n_\psi$ vrijedi

$${}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle\, v^n, \psi\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle\, \varphi_{n_\psi} v^n, \psi\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \longrightarrow l_\psi\,.$$

Ako definiramo

$${}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle\, v, \psi\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} := l_\psi\,,$$

lako se vidi da $v^n \rightharpoonup v$ u distribucijama. ∎

Korolar 5. *Uz pretpostavke Kvadratnog teorema, neka kvadaratna forma Q dodatno zadovoljava*

$$(\forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda) \quad Q(\boldsymbol{\lambda}) = 0\,.$$

Tada za svaki niz (u^n) koji zadovoljava (P1') i (P3'), vrijedi i

$$Q \circ \mathsf{u}^n \rightharpoonup Q \circ \mathsf{u} \quad u \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Dem. Primjenjujući Kvadratni teorem na kvadratne forme Q i $-Q$ dobivamo da svaki podniz niza $(Q \circ \mathsf{u}^n)$ koji konvergira u distribucijama, nužno konvergira ka $Q \circ \mathsf{u}$. Prema gornjoj napomeni svaki podniz niza $(Q \circ \mathsf{u}^n)$ ima slabo konvergentan podniz u distribucijama, pa slijedi i da cijeli niz konvergira ka $Q \circ \mathsf{u}$.

Q.E.D.

Iako smo je već pokazali u prethodnom poglavlju, div-rot lema u L^2 lagano slijedi iz Kvadratnog teorema, pa je ovdje opet navodimo:

Korolar 6. *(**Div-rot lema**) Neka nizovi funkcija (v^n) i (w^n) zadovoljavaju*

$$\begin{aligned}
\mathsf{v}^n &\rightharpoonup \mathsf{v} \quad \textit{slabo u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^d)\,,\\
\mathsf{w}^n &\rightharpoonup \mathsf{w} \quad \textit{slabo u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^d)\,,\\
(\mathsf{div}\,\mathsf{v}^n) &\quad \textit{je relativno kompaktno u} \quad \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,,\\
(\mathsf{rot}\,\mathsf{w}^n) &\quad \textit{je relativno kompaktno u} \quad \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^{d\times d})\,.
\end{aligned}$$

Tada vrijedi

$$\mathsf{v}^n \cdot \mathsf{w}^n \rightharpoonup \mathsf{v} \cdot \mathsf{w} \quad \textit{slabo u} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Dem. U Primjeru 1 smo već pokazali

$$\Lambda = \left\{ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \ : \ \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0 \right\},$$

pa kako je pripadni $Q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}$, to vrijede pretpostavke prethodnog korolara kojeg primjenimo uz $\mathsf{u}^n = (\mathsf{v}^n, \mathsf{w}^n)$ i slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Napomena 4. Iz Primjera 1 možemo zaključiti da je $Q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = a\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\nu}$, $a \in \mathbf{R}$, jedina neafina funkcija (do na afinu funkciju) koja je nizovno slabo-$*$ neprekinuta na nizovima koji zadovoljavaju uvjete gornjeg korolara. ∎

IV. Poopćenje div-rot leme na diferencijalne forme

1. Definicija i osnovna svojstva diferencijalnih formi na $\mathbf{R}^d$

Neka je $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d$. S $\mathbf{R}^d_{\mathbf{p}}$ označimo tangencijalni prostor na $\mathbf{R}^d$ u točki $\mathbf{p}$, a sa $(\mathbf{R}^d_{\mathbf{p}})'$ njegov dualni prostor. S $\Lambda^k(\mathbf{R}^d_{\mathbf{p}})'$ označimo prostor svih k-linearnih alternirajućih preslikavanja (linearnih po svakom argumentu, a zamjenom dva argumenta φ mijenja predznak)

$$\varphi : \underbrace{\mathbf{R}^d_{\mathbf{p}} \times \ldots \times \mathbf{R}^d_{\mathbf{p}}}_{k \text{ puta}} \to \mathbf{R}.$$

Neka je $x_i : \mathbf{R}^d_{\mathbf{p}} \to \mathbf{R}$ i-ta koordinatna projekcija. Tada je skup $\{(dx_i)_{\mathbf{p}} : i \in 1..d\}$ dualna baza kanonske baze za $\mathbf{R}^d_{\mathbf{p}}$. S $(\mathsf{e}_i)_{i=1}^d$ označavamo kanonsku bazu prostora $\mathbf{R}^d$. Radi jednostavnosti zapisa, izostavljamo indeks $\mathbf{p}$ kad je iz konteksta jasno o kojoj točki $\mathbf{p}$ prostora $\mathbf{R}^d$ se radi. Vrijedi slijedeći rezultat:

Lema 1. *Skup $B = \{(dx_{i_1})_{\mathbf{p}} \wedge \ldots \wedge (dx_{i_k})_{\mathbf{p}} : 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d\}$ je baza za $\Lambda^k(\mathbf{R}^d_{\mathbf{p}})'$.*

Dem. Primijetimo da za $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ i $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ vrijedi:

$$(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})(\mathsf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{e}_{j_k}) = \begin{cases} 1, & \text{ako } i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pokažimo da su elementi skupa B linearno neovisni. Neka je

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0.$$

Primijenivši tu formu na

$$(\mathsf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{e}_{j_k}), \quad j_1 < \ldots < j_k,$$

dobivamo:

$$0 = \sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})(\mathsf{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathsf{e}_{j_k}) = a_{j_1\ldots j_k}.$$

Neka je $f \in \Lambda^k(\mathbf{R}^d_{\mathbf{p}})'$. Tvrdimo da ga možemo prikazati u slijedećem zapisu:

$$f = \sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Da bismo to pokazali, definirajmo $g = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f(\mathsf{e}_{i_1}, \ldots, \mathsf{e}_{i_k}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. Primijetimo da je $g \in \Lambda^k(\mathbf{R}^d_{\mathbf{p}})'$, te da vrijedi

$$g(\mathsf{e}_{i_1}, \ldots, \mathsf{e}_{i_k}) = f(\mathsf{e}_{i_1}, \ldots, \mathsf{e}_{i_k}),$$

za svaku k-torku $i_1 \le \ldots \le i_k$. Odatle slijedi $f = g$, a stavljanjem $a_{i_1\ldots i_k} = f(\mathsf{e}_{i_1}, \ldots, \mathsf{e}_{i_k})$ dobivamo traženi zapis za f

Q.E.D.

Vanjska k-forma na $\mathbf{R}^d$ je preslikavanje ω koje svakom $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d$ pridružuje $\omega(\mathbf{p}) \in \Lambda^k(\mathbf{R}^d_\mathbf{p})'$. Prema prethodnoj lemi, ω možemo zapisati kao

$$\omega(\mathbf{p}) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{p})(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_\mathbf{p},$$

gdje su $a_{i_1\ldots i_k}$ realne funkcije na $\mathbf{R}^d$. Kada su $a_{i_1\ldots i_k}$ diferencijabilne, ω zovemo diferencijalnom k-formom. Radi jednostavnosti zapisa, s I ćemo označavati k-torku $(i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq d$ i koristiti slijedeću oznaku

$$\omega = \sum_I a_I dx_I.$$

Također ćemo dogovorno uzeti da je diferencijalna 0-forma diferencijabilna funkcija $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$.

Neka je ω k-forma, a ψ s-forma:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I,$$

$$\psi = \sum_J b_J dx_J.$$

Njihov *vanjski produkt* je $(k+s)$-forma definirana formulom

$$\omega \wedge \psi = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Vrijedi slijedeće:

Lema 2. *Neka je ω k-forma, ψ s-forma i θ r-forma. Tada vrijedi:*
a) $(\omega \wedge \psi) \wedge \theta = \omega \wedge (\psi \wedge \theta)$,
b) $\omega \wedge \psi = (-1)^{ks}\psi \wedge \omega$,
c) $\omega \wedge (\psi + \theta) = \omega \wedge \psi + \omega \wedge \theta$, *ako je* $r = s$.

∎

2. Povlak diferencijalnih formi

Korisno je znati kako se diferencijalne forme ponašaju u međudjelovanju s diferencijabilnim preslikavanjima.

Neka je $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ diferencijabilno preslikavanje. Tada funkciji f možemo pridružiti f^*, preslikavanje koje k-formu na $\mathbf{R}^m$ preslikava u k-formu na $\mathbf{R}^d$: neka je ω k-forma na $\mathbf{R}^m$, tada je $f^*\omega$ k-forma na $\mathbf{R}^d$ dana s

$$(f^*\omega)(\mathbf{p})(\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_k) = \omega(f(\mathbf{p}))(df_\mathbf{p}(\mathsf{v}_1), \ldots, df_\mathbf{p}(\mathsf{v}_k)),$$

gdje je $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d, \mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_k \in \mathbf{R}^d_\mathbf{p}$, a $df_\mathbf{p} : \mathbf{R}^d_\mathbf{p} \to \mathbf{R}^m_{f(\mathbf{p})}$ diferencijal preslikavanja f u točki $\mathbf{p}$. Dogovorno uzimamo da je povlak 0-forme g kompozicija s f: $f^*(g) = g \circ f$. Neka svojstva povlaka dana su u slijedećoj lemi.

Lema 3. *Neka je $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ diferencijabilno preslikavanje, ω i φ k-forme na $\mathbf{R}^m$ i $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ 0-forma na $\mathbf{R}^m$. Tada vrijedi:*
a) $f^*(\omega + \varphi) = f^*\omega + f^*\varphi$,
b) $f^*(g\omega) = f^*(g)f^*(\omega)$,
c) *Ako su $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ 1-forme na $\mathbf{R}^m$, onda je $f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) = f^*(\varphi_1) \wedge \dots \wedge f^*(\varphi_k)$.*

Dem. Neka je $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d$ i $\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_k \in \mathbf{R}^d_{\mathbf{p}}$. Tada

a)
$$\begin{aligned} f^*(\omega + \varphi)(\mathbf{p})(\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_k) &= (\omega + \varphi)(f(\mathbf{p}))(df_{\mathbf{p}}(\mathsf{v}_1), \dots, df_{\mathbf{p}}(\mathsf{v}_k)) \\ &= (f^*\omega)(\mathbf{p})(\mathsf{v}_1, \dots \mathsf{v}_k) + (f^*\varphi)(\mathbf{p})(\mathsf{v}_1, \dots \mathsf{v}_k) \\ &= (f^*\omega + f^*\varphi)(\mathbf{p})(\mathsf{v}_1, \dots \mathsf{v}_k). \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f^*(g\omega)(\mathbf{p})(\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_k) &= (g\omega)(f(\mathbf{p}))(df_{\mathbf{p}}(\mathsf{v}_1), \dots, df_{\mathbf{p}}(\mathsf{v}_k)) \\ &= (g \circ f)(\mathbf{p}) \cdot f^*\omega(\mathbf{p})(\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_k) \\ &= f^*g(\mathbf{p}) \cdot f^*\omega(\mathbf{p})(\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_k). \end{aligned}$$

c) Radi jednostavnosti izostavimo $\mathbf{p}$ iz raspisa:
$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_k) &= (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(df_p(\mathsf{v}_1), \dots, df_p(\mathsf{v}_k)) \\ &= \det(\varphi_i(df(\mathsf{v}_j))) = \det(f^*\varphi_i(\mathsf{v}_j)) \\ &= (f^*\varphi_1 \wedge \dots \wedge f^*\varphi_k)(\mathsf{v}_1, \dots, \mathsf{v}_k). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Djelovanja povlaka f^* na formama možemo shvatiti i kao zamjenu varijabli: neka su $(x_1, \dots, x_d)$ koordinate u $\mathbf{R}^d$, a $(y_1, \dots, y_m)$ u $\mathbf{R}^m$. Zapišimo $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ u obliku

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_d).$$

Neka je $\omega = \sum_I a_I dy_I$ k-forma na $\mathbf{R}^m$. Koristeći svojstva povlaka, imamo:

$$f^*\omega = \sum_I f^*(a_I)(f^*dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^*dy_{u_k}).$$

Budući da vrijedi

$$f^*(dy_i)(v) = dy_i(df(v)) = d(y_i \circ f)(v) = df_i(v),$$

to imamo $f^*\omega = \sum_I a_I(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$.

Vrijedi slijedeći teorem.

Teorem 1. *Neka je $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^m$ diferencijabilno preslikavanje. Tada vrijedi:*
a) *$f^*(\omega \wedge \varphi) = (f^*\omega) \wedge (f^*\varphi)$, gdje su ω i φ proizvoljne forme na $\mathbf{R}^m$.*
b) *$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$, gdje je $g : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^d$ diferencijabilno preslikavanje.*

Dem.

a) Koristeći oznake $(y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_d), \dots, f_m(x_1, \dots, x_d))$, $\omega = \sum_I a_I dy_I$ i $\varphi = \sum_J b_J dy_J$ imamo

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \varphi) &= f^*(\sum_{I,J} a_I b_J \; dy_I \wedge dy_J) \\ &= \sum_{I,J} a_I(f_1, \dots, f_m) b_J(f_1, \dots, f_m) \; df_I \wedge df_J \\ &= \sum_I a_I(f_1, \dots, f_m) df_I \;\wedge\; \sum_J b_J(f_1, \dots, f_m) df_J \\ &= f^*\omega \wedge f^*\varphi. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(f\circ g)^*\omega &= \sum_I a_I((f\circ g)_1,\dots,(f\circ g)_m)\ d(f\circ g)_I\\ &= \sum_I a_I(f_1(g_1,\dots,g_d),\dots,f_m(g_1,\dots,g_d))\ df_I(dg_1,\dots,dg_d)\\ &= g^*(f^*(\omega)).\end{aligned}$$

Q.E.D.

3. Vanjska derivacija

Ako je $g:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ diferencijabilno preslikavanje (0-forma na $\mathbf{R}^d$), onda je njezin diferencijal $dg=\sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i$ 1-forma. Analogno definiramo vanjsku derivaciju k-forme $\omega=\sum a_I dx_I$ na $\mathbf{R}^d$ kao $(k+1)$-formu

$$d\omega=\sum_I da_I\wedge dx_I.$$

Vanjska derivacija ima slijedeća svojstva:

Teorem 2.

a) $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$, *gdje su* ω_1 *i* ω_2 *k-forme,*

b) $d(\omega\wedge\varphi)=d\omega\wedge\varphi+(-1)^{ks}\omega\wedge\varphi$, *gdje je* ω *k-forma, a* φ *s-forma,*

c) $d(d\omega)=d^2\omega=0$,

d) $d(f^*\omega)=f^*(d\omega)$, *gdje je* ω *k-forma na* $\mathbf{R}^m$, *a* $f:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^m$ *diferencijabilno preslikavanje.*

Dem.

a) Tvrdnja je očigledna.

b) Neka je $\omega=\sum_I a_I dx_I$ i $\varphi=\sum_J b_J dx_J$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\varphi) &= \sum_{I,J} d(a_I b_j)\wedge dx_I\wedge dx_J\\ &= \sum_{I,J} b_j\ da_I\wedge dx_I\wedge dx_J+\sum_{I,J} a_I\ db_j\wedge dx_I\wedge dx_J\\ &= d\omega\wedge\varphi+(-1)^k\sum_{I,J} a_I\ dx_I\wedge db_j\wedge dx_J\\ &= d\omega\wedge\varphi+(-1)^k\omega\wedge d\varphi.\end{aligned}$$

c) Najprije pretpostavimo da je ω 0-forma. Tada imamo:

$$d(df)=d\Big(\sum_{j=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_j}\ dx_j\Big)=\sum_{j=1}^d d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)\wedge dx_j=\sum_{j=1}^d\Big(\sum_{i=1}^d\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j\Big).$$

Budući da je $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ i $dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i$, za $i\neq j$, to imamo:

$$d(df)=\sum_{i<j}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\Big)\ dx_i\wedge dx_j=0.$$

Sada možemo uzeti $\omega = \sum a_I \; dx_I$, a po dijelu (a) dovoljno je promatrati samo $\omega = a_I \; dx_I$, gdje je $a_I \neq 0$. Iz tvrdnje (b) tada imamo $d\omega = da_I \wedge dx_I + a_I \; d(dx_I)$, no $d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0$, odakle je

$$d(d\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d(da_i) \wedge dx_I + da_I \wedge d(dx_I) = 0.$$

d) Najprije tvrdnju pokažimo za 0-formu $g : \mathrm{R}^m \to \mathbf{R}$:

$$f^*(dg) = f^*(\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_j \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(g \circ f) = d(f^* g).$$

Neka je sada $\omega = \sum_I a_I dx_I$ k-forma. Koristeći gornje i činjenicu da f^* komutira s vanjskom derivacijom, imamo slijedeće:

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d\Big(\sum_I f^*(a_I) \; f^*(dx_I)\Big) \\ &= \sum_I d\Big(f^*(a_I) \wedge f^*(dx_I)\Big) = \sum_I f^*(da_I) \wedge f^*(dx_I) \\ &= f^*\Big(\sum_I da_I \wedge dx_I\Big) = f^*(d\omega). \end{aligned}$$

Q.E.D.

4. Diferencijalni operatori na diferencijalnim formama

U ovom poglavlju ćemo prešutno koristiti kanonski izomorfizam između $\mathbf{R}^d_p$ i njegovog duala $(\mathbf{R}^d_p)'$, uspostavljen pomoću standardnog skalarnog produkta $\langle \cdot | \cdot \rangle$: za $\mathsf{v}_1 = \sum a_i \mathsf{e}_i \in \mathbf{R}^d_p$ i $\mathsf{v}_2 = \sum b_i \mathsf{e}_i \in \mathbf{R}^d_p$, je $\langle \mathsf{v}_1 | \mathsf{v}_2 \rangle = \sum a_i b_i$. Kanonski izomorfizam će vektoru $\mathsf{v} \in \mathbf{R}^d_p$ pridružiti $\omega \in (\mathbf{R}^d_p)'$ definiran s $\omega(\mathsf{u}) = \langle \mathsf{v} | \mathsf{u} \rangle$ za $\mathsf{u} \in \mathbf{R}^d_p$. Time smo uspostavili bijektivnu korespondenciju između vektorskih polja u $\mathbf{R}^d$ i vanjskih 1-formi na $\mathbf{R}^d$.

Neka je ν d-forma na $\mathbf{R}^d$ definirana s $\nu(\mathsf{e}_1, \ldots, \mathsf{e}_d) = 1$. Tada za $\mathsf{v}_i = \sum a_{ij} \mathsf{e}_j$ vrijedi

$$\nu(\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_d) = \det(a_{ij}) = \mathsf{vol}(\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_d)$$

$$\nu = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d.$$

Formu ν zovemo volumni element $\mathbf{R}^d$.

Neka je $\omega = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ k-forma na $\mathbf{R}^d$. Definiramo $(d-k)$-formu $*\omega$ na $\mathbf{R}^d$ na slijedeći način

$$*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = (-1)^\sigma (dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{d-k}}),$$

gdje je $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_{d-k}$, $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{d-k})$ je permutacija skupa $(1, \ldots, d)$, a σ je 0 ili 1 ovisno da li je permutacija parna ili neparna. Linearno proširimo definiciju na sve k-forme na $\mathbf{R}^d$.

Za danu diferencijabilnu funkciju $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, definiramo vektorsko polje ∇f na $\mathbf{R}^d$

$$\langle \nabla f(\mathbf{p}) | \mathsf{u} \rangle = df_{\mathbf{p}}(\mathsf{u})$$

za sve $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d$ i sve $\mathsf{u} \in \mathbf{R}^d_{\mathbf{p}}$. Polje ∇f je kanonskim izomorfizmom pridruženo 1-formi df i zovemo ga gradijent f. Vrijedi

$$\nabla f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathsf{e}_i.$$

Diferencijabilno vektorsko polje v u $\mathbf{R}^d$ možemo promatrati kao diferencijabilno preslikavanje $\mathsf{v} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$. Imajući to na umu, definiramo funkciju $\mathsf{div}\,\mathsf{v} : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, koju zovemo divergencija od v, na slijedeći način:

$$(\mathsf{div}\,\mathsf{v})(\mathbf{p}) = \mathsf{tr}(d\mathsf{v})_{\mathbf{p}}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^d,$$

gdje je $(d\mathsf{v})_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^d_{\mathbf{p}} \to \mathbf{R}^d$ diferencijal v u $\mathbf{p}$. Ako je $\mathsf{v} = \sum a_i \mathsf{e}_i$, onda vrijedi:

$$\mathsf{div}\,\mathsf{v} = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Za dano difrencijabilno preslikavanje $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, definiramo laplacean f, $\triangle f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ s

$$\triangle f = \mathsf{div}\,(\nabla f).$$

Pokaže se da vrijedi:

$$\triangle f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

$$\triangle(fg) = f \triangle g + g \triangle f + 2\langle \nabla f | \nabla g \rangle,$$

gdje je $g : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ diferencijabilno preslikavanje.

Neka je v diferencijabilno vektorsko polje na $\mathbf{R}^d$. Rotacija $\mathsf{rot}\,\mathsf{v}$ je $(d-2)$-forma definirana s

$$\mathsf{v} \mapsto \omega \to d\omega \to *(d\omega) = \mathsf{rot}\,\mathsf{v},$$

gdje je $\mathsf{v} \mapsto \omega$ bijektivna korespondencija između 1-formi i vektorskih polja na $\mathbf{R}^d$. Vrijedi $\mathsf{rot}\,(\nabla f) = 0$. Za $d = 3$, 1-forma $\mathsf{rot}\,\mathsf{v}$ korespondira vektorskom polju $\mathsf{rot}\,\mathsf{v}$, te vrijedi $\mathsf{div}\,(\mathsf{rot}\,\mathsf{v}) = 0$ i

$$\mathsf{rot}\,\Big(\sum_{i=1}^{3} a_i \mathsf{e}_i\Big) = \Big(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\Big)\mathsf{e}_1 + \Big(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\Big)\mathsf{e}_2 + \Big(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\Big)\mathsf{e}_3.$$

5. Osnovni teorem i neke primjene

Teorem 3. *Neka su $\alpha_1^n, \dots, \alpha_l^n$ diferencijalne forme na $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ stupnjeva, redom, $s_1, \dots, s_l$ tako da je $s_1 + \dots + s_l \leq d$. Pretpostavimo da vrijedi*

$$\alpha_i^n \rightharpoonup \bar{\alpha}_i \text{ u } \mathrm{L}^{p_i}(\Omega),$$

gdje je $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_l} = 1$ i

$$d\alpha_i^n \text{ je sadržano u kompaktnom skupu u } \mathrm{W}_{\mathrm{loc}}^{-1,p_i}(\Omega), i = 1, \dots, l.$$

Tada imamo

$$\alpha_1^n \wedge \dots \wedge \alpha_l^n \rightharpoonup \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge \bar{\alpha}_l$$

u smislu distribucija. ∎

Dokaz ćemo dati kasnije. Pogledajmo nekoliko primjena gornjeg teorema:

Lema 4. *Neka su $\mathsf{u}^n = (u_1^n, \dots, u_d^n)$ i $\mathsf{v}^n = (v_1^n, \dots, v_d^n)$ nizovi funkcija na $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ takvi da*

$$\mathsf{u}^n \rightharpoonup \bar{\mathsf{u}} \text{ u } \mathrm{L}^2(\Omega)$$
$$\mathsf{v}^n \rightharpoonup \bar{\mathsf{v}} \text{ u } \mathrm{L}^2(\Omega)$$

i

$$\operatorname{div} \mathsf{u}^n, \operatorname{rot} \mathsf{v}^n \text{ su sadržani u kompaktnom skupu u } \mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{-1}(\Omega).$$

Tada

$$\mathsf{u}^n \cdot \mathsf{v}^n \rightharpoonup \mathsf{u} \cdot \mathsf{v}$$

u smislu distribucija.

Dem. Definirajmo slijedeću $(d-1)$-formu i 1-formu

$$\alpha_1^n(\mathbf{x}) = u_1^n(\mathbf{x})\ dx_{[1]} + \dots + u_d^n(\mathbf{x})\ dx_{[d]},$$
$$\alpha_2^n(\mathbf{x}) = v_1^n(\mathbf{x})\ dx_1 + \dots + v_d^n(\mathbf{x})\ dx_d,$$

gdje je

$$dx_{[i]} = *(dx_i) = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d.$$

Primijetimo

$$d\alpha_1^n = \sum_i \frac{\partial u_i^n}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d = \operatorname{div} \mathsf{u}^n\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d,$$

te

$$d\alpha_2^n = \sum_{i \neq j} \Big(\frac{\partial v_i^n}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j^n}{\partial x_i} \Big) dx_i \wedge dx_j.$$

Iz uvjeta leme slijedi da su $d\alpha_1^n$ i $d\alpha_2^n$ sadržani u kompaktnom skupu u $\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^{-1}(\Omega)$. Ako definiramo $\bar{\alpha}_1 = \sum_i \bar{u}_i\ dx_{[i]}$ i $\bar{\alpha}_2 = \sum_i \bar{v}_i\ dx_i$, onda uvjete leme možemo zapisati kao $\alpha_i^n \rightharpoonup \bar{\alpha}_i$ u L^2, za $i = 1, 2$. Također,

$$\alpha_1^n \wedge \alpha_2^n = (\mathsf{u}^n \cdot \mathsf{v}^n)\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d,$$
$$\bar{\alpha}_1 \wedge \bar{\alpha}_2 = (\bar{\mathsf{u}} \cdot \bar{\mathsf{v}})\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

Iz osnovnog teorema sada slijedi tvrdnja leme.

Q.E.D.

Lema 5. *Neka funkcije* $\mathsf{E}^n, \mathsf{D}^n, \mathsf{B}^n, \mathsf{H}^n : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *zadovoljavaju*

$$\frac{\partial \mathsf{B}^n}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathsf{E}^n = 0, \ \operatorname{div} \mathsf{B}^n = 0,$$

$$\frac{\partial \mathsf{D}^n}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathsf{H}^n = -\mathsf{J}^n, \ \operatorname{div} \mathsf{D}^n = \rho^n,$$

za proizvoljne nizove podataka ρ^n *i* J^n *iz kompaktnog skupa u* $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}$. *Tada su* $\mathsf{B}\cdot\mathsf{H}-\mathsf{D}\cdot\mathsf{E}$, $\mathsf{B}\cdot\mathsf{E}$ *i* $\mathsf{H}\cdot\mathsf{D}$ *slabo neprekidni: ako* $(\mathsf{E}^n, \mathsf{D}^n, \mathsf{B}^n, \mathsf{H}^n) \rightharpoonup (\bar{\mathsf{E}}, \bar{\mathsf{D}}, \bar{\mathsf{B}}, \bar{\mathsf{H}})$ *u* L^2, *onda*

$$\begin{aligned} \mathsf{B}^n \cdot \mathsf{H}^n - \mathsf{D}^n \cdot \mathsf{E}^n &\rightharpoonup \bar{\mathsf{B}} \cdot \bar{\mathsf{H}} - \bar{\mathsf{D}} \cdot \bar{\mathsf{E}}, \\ \mathsf{B}^n \cdot \mathsf{E}^n &\rightharpoonup \bar{\mathsf{B}} \cdot \bar{\mathsf{E}}, \\ \mathsf{H}^n \cdot \mathsf{D}^n &\rightharpoonup \bar{\mathsf{H}} \cdot \bar{\mathsf{D}} \end{aligned}$$

u smislu distribucija.

Dem. Uz oznaku $x_0 = t$, prostor-vrijeme pomatramo kao četverodimenzionalni euklidski prostor. Definiramo slijedeće 2-forme:

$$\mathsf{F}^n = E_1^n dx_1 \wedge dx_0 + E_2^n dx_2 \wedge dx_0 + E_3^n dx_2 \wedge dx_0 + B_1^n dx_2 \wedge dx_3 + B_2^n dx_3 \wedge dx_1 + B_3^n dx_1 \wedge dx_2$$

$$\mathsf{M}^n = -H_1^n dx_1 \wedge dx_0 - H_2^n dx_2 \wedge dx_0 - H_3^n dx_2 \wedge dx_0 + D_1^n dx_2 \wedge dx_3 + D_2^n dx_3 \wedge dx_1 + D_3^n dx_1 \wedge dx_2$$

te 1-formu $\mathsf{J}^n = \rho^n x_0 + J_1^n dx_1 + J_2^n dx_2 + J_3^n dx_3$. Analogno definiramo 2-forme $\bar{\mathsf{F}}$ i $\bar{\mathsf{M}}$. Primijetimo da je

$$*\mathsf{J}^n = \rho^n dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - J_1^n dx_0 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - J_2^n dx_0 \wedge dx_3 \wedge dx_1 - J_3^n dx_0 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

u kompaktnom skupu $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}$, po pretpostavci leme. Također vrijedi $\mathsf{F}^n \rightharpoonup \bar{\mathsf{F}}$ i $\mathsf{M}^n \rightharpoonup \bar{\mathsf{M}}$ u L^2. Deriviranjem formi F^n i M^n dobivamo $\mathbf{d}\mathsf{F}^n = 0$, $\mathbf{d}\mathsf{M}^n = *\mathsf{J}^n$, koji su sadržani u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}$. Jednostavnim računom se pokaže da vrijedi:

$$-\mathsf{F}^n \wedge \mathsf{F}^n = \mathsf{B}^n \cdot \mathsf{E}^n,$$

$$\mathsf{M}^n \wedge \mathsf{M}^n = \mathsf{H}^n \cdot \mathsf{D}^n,$$

$$\mathsf{F}^n \wedge \mathsf{M}^n = \mathsf{B}^n \cdot \mathsf{H}^n - \mathsf{E}^n \cdot \mathsf{D}^n.$$

Primjenom osnovnog teorema slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

6. Div-rot lema u $\mathbf{R}^3$

Lema 6. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ *otvoren skup, te neka niz funkcija* $(\mathsf{u}^n, \mathsf{v}^n) : \Omega \to \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ *zadovoljava*

$$\mathsf{u}^n \rightharpoonup \bar{\mathsf{u}} \ \text{u } \mathrm{L}^2(\Omega),$$

$$\mathsf{v}^n \rightharpoonup \bar{\mathsf{v}} \ \text{u } \mathrm{L}^2(\Omega),$$

i

$\operatorname{div} \mathsf{u}^n$ *je sadržan u kompaktnom podskupu u* $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

$\operatorname{rot} \mathsf{v}^n$ *je sadržan u kompaktnom podskupu u* $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Tada vrijedi:

$$\mathsf{u}^n \cdot \mathsf{v}^n \to \bar{\mathsf{u}} \cdot \bar{\mathsf{v}}$$

u smislu distribucija.

Dem. Da bismo pokazali da za svaki $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ vrijedi

$$\int_\Omega \mathsf{u}^n \cdot \mathsf{v}^n \varphi dx \to \int \bar{\mathsf{u}} \cdot \bar{\mathsf{v}} \varphi dx,$$

možemo pretpostaviti da u^n i v^n imaju kompaktan nosač, jer u gornjim integralima možemo u^n i v^n zamijeniti s $\tilde{\phi}\mathsf{u}^n$ i $\tilde{\phi}\mathsf{v}^n$ gdje je $\tilde{\phi} \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ režuća funkcija jednaka 1 na nosaču funkcije φ. Tada iz pretpostavki imamo slijedeće

$$\tilde{\phi}\mathsf{u}^n \rightharpoonup \tilde{\phi}\bar{\mathsf{u}} \text{ u } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3),$$

$$\tilde{\phi}\mathsf{v}^n \rightharpoonup \tilde{\phi}\bar{\mathsf{v}} \text{ u } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3).$$

Tvrdimo da vrijedi:

$$\operatorname{div}(\tilde{\phi}\mathsf{u}^n) = \tilde{\phi} \operatorname{div} \mathsf{u}^n + \nabla\tilde{\phi} \cdot \mathsf{u}^n \rightharpoonup \operatorname{div}(\tilde{\phi}\bar{\mathsf{u}}) \text{ u } \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3),$$

$$\operatorname{rot}(\tilde{\phi}\mathsf{v}^n) = \tilde{\phi} \operatorname{rot} \mathsf{v}^n + \nabla\tilde{\phi} \times \mathsf{v}^n \rightharpoonup \operatorname{rot}(\tilde{\phi}\bar{\mathsf{v}}) \text{ u } \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{R}^3).$$

Iz pretpostavki znamo da su $\operatorname{div} \mathsf{u}^n$ i $\operatorname{rot} \mathsf{v}^n$ sadržani u kompaktu u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, odakle slijedi da postoje podnizovi takvi da $\operatorname{div} \mathsf{u}^{n_p}$ i $\operatorname{rot} \mathsf{v}^{n_m}$ konvergiraju jako u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je podniz cijeli niz. Iz definicije $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}$,

$$\operatorname{div} \mathsf{u}^n, \operatorname{rot} \mathsf{v}^n \in \mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}} \quad \iff \quad (\forall \phi \in \mathrm{C}_c^\infty) \quad \phi \operatorname{div} \mathsf{u}^n,\ \phi \operatorname{rot} \mathsf{v}^n \in \mathrm{H}^{-1},$$

uz $\phi = \tilde{\phi}$, imamo da su $\tilde{\phi} \operatorname{div} \mathsf{u}^n$ i $\tilde{\phi} \operatorname{rot} \mathsf{v}^n$ konvergentni u H^{-1}. Sad iz činjenice da je $\mathrm{L}^2(\Omega)$ kompaktno uloženo u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, te slabe-L^2 konvergencije nizova u^n, v^n dobivamo $\mathsf{u}^n \to \bar{\mathsf{u}}$, $\mathsf{v}^n \to \bar{\mathsf{v}}$ jako u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Odatle imamo slijedeće jake-H^{-1} konvergencije:

$$\nabla\tilde{\phi} \cdot \mathsf{u}^n \to \nabla\tilde{\phi} \cdot \bar{\mathsf{u}},$$

$$\nabla\tilde{\phi} \times \mathsf{v}^n \to \nabla\tilde{\phi} \times \bar{\mathsf{v}},$$

$$\tilde{\phi} \operatorname{div} \mathsf{u}^n \to \tilde{\phi} \operatorname{div} \bar{\mathsf{u}},$$

$$\tilde{\phi} \operatorname{rot} \mathsf{v}^n \to \tilde{\phi} \operatorname{rot} \bar{\mathsf{v}},$$

odakle slijedi naša tvrdnja.

U slijedećem koraku rastavimo u^n i v^n na slabo i jako konvergentni dio u L^2. Tvrdimo da postoje $\psi^n,\ \bar{\psi}, \eta^n,\ \bar{\eta} : \Omega \to \mathbf{R}$ i $\boldsymbol{\gamma}^n,\ \bar{\boldsymbol{\gamma}},\ \boldsymbol{\chi}^n,\ \bar{\boldsymbol{\chi}} : \Omega \to \mathbf{R}^3$ takvi da vrijedi:

$$\mathsf{u}^n = \nabla\psi^n + \operatorname{rot} \boldsymbol{\gamma}^n, \quad \bar{\mathsf{u}} = \nabla\bar{\psi} + \operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{\gamma}},$$

$$\mathsf{v}^n = \nabla\eta^n + \operatorname{rot} \boldsymbol{\chi}^n, \quad \bar{\mathsf{v}} = \nabla\bar{\eta} + \operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{\chi}},$$

$$\nabla\psi^n \to \nabla\bar{\psi}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\chi}^n \to \operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{\chi}} \text{ u } \mathrm{L}^2,$$

$$\nabla\eta^n \rightharpoonup \nabla\bar{\eta}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\gamma}^n \rightharpoonup \operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \text{ u } \mathrm{L}^2,$$

$$\boldsymbol{\gamma}^n \to \bar{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \eta^n \to \bar{\eta} \text{ u } \mathrm{L}^2.$$

Da bismo to pokazali, proširimo u^n nulom na cijeli $\mathbf{R}^3$. Tada je $\mathsf{u}^n \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3) \equiv \mathrm{H}^0(\mathbf{R}^3)$. Definirajmo $\boldsymbol{\omega}^n$ kao rješenje $-\triangle\boldsymbol{\omega}^n = \mathsf{u}^n$. Budući da je $\triangle^{-1} : \mathrm{H}^r_{\mathrm{loc}} \to \mathrm{H}^{r+2}_{\mathrm{loc}}$

neprekidan za $r = -1, 0, 1, \ldots$, slijedi da je $\omega^n \in \mathrm{H}^2$. Sada definiramo $\psi^n = -\mathsf{div}\, \boldsymbol{\omega}^n$ i $\boldsymbol{\gamma}^n = \mathsf{rot}\, \boldsymbol{\omega}^n$. Očito je $\psi^n, \boldsymbol{\gamma}^n \in \mathrm{H}^1$, a $\nabla\psi^n, \mathsf{rot}\, \boldsymbol{\gamma}^n \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$, te vrijedi:

$$\nabla\psi^n + \mathsf{rot}\, \boldsymbol{\gamma}^n = -\nabla\mathsf{div}\, \boldsymbol{\omega}^n + \mathsf{rot}\,\mathsf{rot}\, \boldsymbol{\omega}^n = -(\nabla\mathsf{div}\, \boldsymbol{\omega}^n - \mathsf{rot}\,\mathsf{rot}\, \boldsymbol{\omega}^n) = -\triangle\boldsymbol{\omega}^n = \mathsf{u}^n.$$

Pokažimo sad da operatori div i rot komutiraju s $\triangle^{-1}$ na L^2. Dovoljno je to pokazati na Schwartzovom prostoru $\mathcal{S}$ koji je gust u L^2:

$$\begin{aligned}\triangle^{-1}\mathsf{div}\, \mathsf{f} &= \triangle^{-1}\mathsf{div}\, \triangle\triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \triangle^{-1}(\nabla\mathsf{div} - \mathsf{rot}\,\mathsf{rot})\triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \triangle^{-1}\mathsf{div}\, \nabla\mathsf{div}\, \triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \triangle^{-1}\triangle\mathsf{div}\, \triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \mathsf{div}\, \triangle^{-1}\mathsf{f},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle^{-1}\mathsf{rot}\, \mathsf{f} &= \triangle^{-1}\mathsf{rot}\, \triangle\triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \triangle^{-1}\mathsf{rot}\, (\nabla\mathsf{div} - \mathsf{rot}\,\mathsf{rot})\triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \triangle^{-1}(-\mathsf{rot}\,\mathsf{rot}\,\mathsf{rot})\triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \triangle^{-1}(\nabla\mathsf{div} - \mathsf{rot}\,\mathsf{rot})\mathsf{rot}\, \triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \triangle^{-1}\triangle\mathsf{rot}\, \triangle^{-1}\mathsf{f}\\ &= \mathsf{rot}\, \triangle^{-1}\mathsf{f},\end{aligned}$$

gdje smo koristili identitet $\triangle = \nabla\mathsf{div} - \mathsf{rot}\,\mathsf{rot}$. Sada imamo

$$\psi^n = -\mathsf{div}\, \boldsymbol{\omega}^n = \mathsf{div}\, \triangle^{-1}\mathsf{u}^n = \triangle^{-1}\mathsf{div}\, \mathsf{u}^n.$$

Kao što smo već komentirali, budući da je $\mathsf{div}\, \mathsf{u}^n$ sadržano u kompaktnom skupu u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}$, imamo konvergentan podniz u $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}$. Mi ćemo zlorabiti oznake i uzeti da je cijeli niz konvergentan. Prisjećajući se definicje $\mathrm{H}^{-1}_{\mathrm{loc}}$ prostora i uzimajući $\tilde{\phi} = 1$ na nosaču u^n, te koristeći neprekidnost operatora $\triangle^{-1} : \mathrm{H}^{-1} \to \mathrm{H}^1$ i $\nabla : \mathrm{H}^1 \to \mathrm{L}^2$, imamo:

$$\nabla\psi^n = \nabla(\triangle^{-1}\mathsf{div}\, \mathsf{u}^n) \to \nabla(\triangle^{-1}\mathsf{div}\, \bar{\mathsf{u}}) = \nabla\bar{\psi} \text{ u } \mathrm{L}^2.$$

Raspisujući

$$\mathsf{rot}\, \boldsymbol{\gamma}^n = \mathsf{rot}\,\mathsf{rot}\, \boldsymbol{\omega}^n = \nabla\mathsf{div}\, \boldsymbol{\omega}^n - \triangle\boldsymbol{\omega}^n = \nabla\mathsf{div}\, \boldsymbol{\omega}^n + \mathsf{u}^n = -\nabla\psi^n + \mathsf{u}^n,$$

te koristeći slabu L^2 konvergenciju niza (u^n) i jaku L^2 konvergenciju niza $(\nabla\psi^n)$, dobivamo $\mathsf{rot}\, \boldsymbol{\gamma}^n \rightharpoonup \mathsf{rot}\, \bar{\boldsymbol{\gamma}}$ u L^2.

Ostaje još za pokazati da $\boldsymbol{\gamma}^n \to \bar{\boldsymbol{\gamma}}$ u L^2. Iz slabe L^2 konvergencije niza (u^n) imamo njegovu omeđenost u L^2, a iz neprekidnosti operatora $\triangle^{-1} : \mathrm{L}^2 \to \mathrm{H}^2$, imamo omeđenost niza $(\triangle^{-1}\mathsf{u}^n)$ u H^2:

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathrm{N}) \qquad \|\triangle^{-1}\mathsf{u}^n\|_{\mathrm{H}^2} < M$$

$$\Leftrightarrow \|\triangle^{-1}u^n\|_{\mathrm{L}^2} + \|\nabla\triangle^{-1}u^n\|_{\mathrm{L}^2} + \|\nabla\nabla\triangle^{-1}u^n\|_{\mathrm{L}^2} < M,$$

koristeći gornje i činjenicu $\|\mathsf{rot}\, g\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|g\|_{\mathrm{L}^2}$ dobivamo da je $(\boldsymbol{\gamma}^n)$ omeđen u H^1. Zbog toga postoji slabo H^1 konvergentan podniz, koji je zbog kompaktnosti ulaganja H^1 u L^2 jako L^2 konvergentan, što smo i trebali pokazati.

Na analogan način dobivamo traženi rastav za v^n.

Vratimo se na početak: želimo pokazati

$$(\forall\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)) \qquad \int_\Omega \mathsf{u}^n \cdot \mathsf{v}^n \varphi dx \to \int \bar{\mathsf{u}} \cdot \bar{\mathsf{v}} \varphi dx.$$

Raspišimo lijevu stranu:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathsf{u}^n \cdot \mathsf{v}^n \varphi dx &= \int_\Omega (\nabla\psi^n + \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n) \cdot (\nabla\eta^n + \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\chi}^n)\varphi dx \\
&= \int_\Omega \nabla\psi^n \cdot \nabla\eta^n\varphi + \nabla\psi^n \cdot \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\chi}^n\varphi + \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n \cdot \nabla\eta^n\varphi + \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n \cdot \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\chi}^n\varphi.
\end{aligned}$$

Sad imamo:

- $\int_\Omega \nabla\psi^n \cdot \nabla\eta^n\varphi\; dx = \langle \nabla\psi^n\varphi \mid \nabla\eta^n\rangle_{\mathrm{L}}^2 \to \langle \nabla\bar{\psi}\varphi \mid \nabla\bar{\eta}\rangle_{\mathrm{L}}^2$,
- $\int_\Omega \nabla\psi^n \cdot \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\chi}^n\varphi\; dx = \langle \nabla\psi^n\varphi \mid \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\chi}^n\rangle_{\mathrm{L}}^2 \to \langle \nabla\bar{\psi}\varphi \mid \mathsf{rot}\,\bar{\chi}\rangle_{\mathrm{L}}^2$,
- $\int_\Omega \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n \cdot \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\chi}^n\varphi\; dx = \langle \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\chi}^n\varphi \mid \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n\rangle_{\mathrm{L}}^2 \to \langle \mathsf{rot}\,\bar{\boldsymbol{\chi}}\varphi \mid \mathsf{rot}\,\bar{\gamma}\rangle_{\mathrm{L}}^2$,

jer vrijedi:

$$x_n \rightharpoonup x, \quad f_n \to f \text{ u } \mathrm{L}^2 \quad \Longrightarrow \quad \langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle.$$

Ostaje za pokazati $\int_\Omega \nabla\eta^n \cdot \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n\varphi\; dx \to \int_\Omega \nabla\bar{\eta} \cdot \mathsf{rot}\,\bar{\boldsymbol{\gamma}}\varphi\; dx$. Kad parcijalno integriramo lijevu stranu dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\eta^n \cdot \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n\varphi\; dx &= -\int_\Omega \eta^n \mathsf{div}\,(\varphi\ \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n)\; dx \\
&= -\int_\Omega \eta^n\nabla\varphi \cdot \mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n\; dx - \int_\Omega \eta^n\varphi\ \mathsf{div}\,\mathsf{rot}\,\boldsymbol{\gamma}^n\; dx \\
&= -\int_\Omega \eta^n\nabla\varphi \cdot \mathsf{rot}\,\gamma^n\; dx \\
&= -\langle \eta^n\nabla\varphi \mid \mathsf{rot}\,\gamma^n\rangle_{\mathrm{L}^2} \to -\langle \bar{\eta}\nabla\varphi \mid \mathsf{rot}\,\bar{\boldsymbol{\gamma}}\rangle_{\mathrm{L}^2},
\end{aligned}$$

što je upravo desna strana nakon što provedemo parcijalnu integraciju.

Q.E.D.

7. Dokaz osnovnog teorema

Primijetimo da je pogodan rastav slabo konvergentnih nizova bio ključan u prethodnoj lemi. Slijedeća lema nam daje Hodgeov rastav slabo konvergentnih nizova koji će nam biti potreban u dokazu osnovnog teorema:

Lema 7. (Hodgeov rastav slabo konvergentnih nizova) *Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$, te pretpostavimo da vrijedi slijedeće:*

a) $\alpha^n : \Omega \to \Lambda^k(\Omega)$ imaju kompaktan nosač u Ω,
b) $\alpha^n \rightharpoonup \bar{\alpha}$ u $\mathrm{L}^p(\Omega)$, te
c) $d\alpha^n$ je sadržano u kompaktnom skupu u $\mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Tada postoje funkcije $\chi^n, \bar{\chi}, \psi^n$ i $\bar{\psi}$ takve da

$$\begin{aligned}
\chi^n &\to \bar{\chi} \text{ u } \mathrm{L}^p(\Omega), \\
\psi^n &\to \bar{\psi} \text{ u } \mathrm{L}^p(\Omega), \\
d\psi^n &\rightharpoonup d\bar{\psi} \text{ u } \mathrm{L}^p(\Omega)
\end{aligned}$$

i

$$\alpha^n = d\psi^n + \chi^n \rightharpoonup d\bar{\psi} + \bar{\chi} = \bar{\alpha}.$$

Dem. Prvo pokažimo da d i $\triangle^{-1}$ komutiraju. Djelujući s $\triangle^{-1}d$ na jednakost $\alpha^n = \triangle\triangle^{-1}\alpha^n = d\delta\triangle^{-1}\alpha^n + \delta d\triangle^{-1}\alpha^n$ i koristeći $dd\beta = 0$ za proizvoljnu formu β, imamo:

$$\begin{aligned}
\triangle^{-1}d\alpha^n &= \triangle^{-1}dd\delta\triangle^{-1}\alpha^n + \triangle^{-1}d\delta d\triangle^{-1}\alpha^n \\
&= \triangle^{-1}d\delta d\triangle^{-1}\alpha^n \\
&= \triangle^{-1}d\delta d\triangle^{-1}\alpha^n + \triangle^{-1}\delta dd\triangle^{-1}\alpha^n \\
&= \triangle^{-1}(d\delta + \delta d)d\triangle^{-1}\alpha^n \\
&= \triangle^{-1}\triangle d\triangle^{-1}\alpha^n \\
&= d\triangle^{-1}\alpha^n.
\end{aligned}$$

Dakle, sad imamo

$$\alpha^n = \triangle\triangle^{-1}\alpha^n = d\delta\triangle^{-1}\alpha^n + \delta d\triangle^{-1}\alpha^n = d\delta\triangle^{-1}\alpha^n + \delta\triangle^{-1}d\alpha^n.$$

Sada definiramo $\chi^n = \delta\triangle^{-1}d\alpha^n$. Iz svojstava operatora $\triangle^{-1}$, imamo slijedeći niz implikacija

$$d\alpha^n \in \mathrm{W}^{-1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \triangle^{-1}d\alpha^n \in \mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \chi^n \in \mathrm{L}^p(\Omega).$$

Definiramo $\psi^n = \delta\triangle^{-1}\alpha^n$. Koristeći činjenicu da je $\operatorname{supp}\alpha^n$ kompaktan skup, imamo:

$$\alpha^n \in \mathrm{L}^p(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \triangle^{-1}\alpha^n \in \mathrm{W}^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \psi^n \in \mathrm{W}^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \psi^n, d\psi^n \in \mathrm{L}^p(\Omega).$$

Sada imamo $\alpha^n = \chi^n + d\chi^n \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ i želimo pokazati da su χ^n i ψ^n sadržani u kompaktnom skupu u $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Koristeći neprekidnost operatora $\triangle^{-1} : \mathrm{W}^{-1,p}(\Omega) \to \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ i $\delta : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to \mathrm{L}^p(\Omega)$, imamo redom da je $\triangle^{-1}d\alpha^n$ sadržano u kompaktnom skupu u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$, kao i da je $\chi^n = \delta\triangle^{-1}d\alpha^n$ u kompaktnom skupu u $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Iz slabe $\mathrm{L}^p(\Omega)$ konvergencije niza (α^n) imamo njegovu omeđenost u $\mathrm{L}^p(\Omega)$, a iz neprekidnosti operatora $\triangle^{-1} : \mathrm{W}^{0,p}(\Omega) \to \mathrm{W}^{2,p}(\Omega)$ imamo omeđenost niza $(\triangle^{-1}\alpha^n)$ u $\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)$, odakle iz neprekidnosti operatora $\delta : \mathrm{W}^{2,p}(\Omega) \to \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ imamo omeđenost niza $\psi^n = \delta\triangle^{-1}\alpha^n$ u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$. Iz kompaktnosti ulaganja $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^p(\Omega)$ slijedi da je (ψ^n) kompaktno sadržano u $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Sada ćemo pokazati odgovarajuće rezultate o konvergenciji nizova (χ^n) i (ψ^n). Zbog kompaktnosti možemo naći podnizove $\chi^{n_m} \to \tilde{\chi}$ i $\psi^{n_m} \to \tilde{\psi}$ u $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Iz jake konvergencije, imamo i slabu $\mathrm{L}^p(\omega)$ konvergenciju niza (ψ^{n_m}), a odatle u konvergenciju u smislu distribucija prema istom limesu. Iz slabe $\mathrm{L}^p(\Omega)$ konvergencije niza (α^n) i neprekidnosti operatora $\triangle^{-1}$ imamo slabu $\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)$ konvergenciju $\triangle^{-1}\alpha^n \rightharpoonup \triangle^{-1}\bar{\alpha}$, a to nam daje konvergenciju u smislu distribucija. Sad zbog neprekidnosti δ na distribucijama, imamo $\psi^n = \delta\triangle^{-1}\alpha^n \rightharpoonup \delta\triangle^{-1}\bar{\alpha} = \bar{\psi}$ u smislu distribucija. Zbog jedinstvenosti limesa u smislu distribucija, imamo $\tilde{\psi} = \bar{\psi}$.

Analogno dobivamo $\tilde{\chi} = \delta\triangle^{-1}d\bar{\alpha}$. Sada iz $d\psi^n = \alpha^n - \chi^n$ slijedi slaba konvergencija $d\psi^n \rightharpoonup d\bar{\psi} = \bar{\alpha} - \bar{\chi}$ u $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Q.E.D.

U slijedećoj lemi pokazujemo da vanjski produkt slabo konvergentnih nizova i sam slabo konvergira.

Lema 8. *Za* $\chi_i^n : \Omega \to \Lambda^{s_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$, *pretpostavimo*

$$\chi_i^n \to \bar{\chi}_i \text{ u } \mathrm{L}^{p_i}(\Omega)$$

$$d\chi_i^n \rightharpoonup \bar{d}\chi_i \text{ u } \mathrm{L}^{p_i}(\Omega)$$

gdje $1 \leq 1/q_k = 1/p_1 + \ldots + 1/p_k$. *Tada*

$$d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n \rightharpoonup d\bar{\chi}_1 \wedge \ldots d\bar{\chi}_k \text{ u smislu distribucija,}$$

a ako je još i $q_k > 1$, *tada vrijedi*

$$d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n \rightharpoonup d\bar{\chi}_1 \wedge \ldots d\bar{\chi}_k \text{ u } \mathrm{L}^{q_k}(\Omega).$$

Dem. Dokaz provodimo indukcijom po k. Slučaj $k = 1$ je očit.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki k. Definirajmo $1/q_{k+1} = 1/q_k + 1/p_{k+1}$ gdje je $p_{k+1} > 0$. Uzmimo $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty$, $\varphi : \Omega \to \Lambda^{n-s_1-\ldots-s_k}$. Parcijalnom integracijom i koristeći da je φ nula na $\mathsf{Fr}\,\Omega$, imamo:

$$\begin{aligned}\int_\Omega d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_{k+1}^n \wedge \varphi &= \int_\Omega d(d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n \wedge \varphi) \wedge \chi_{k+1}^n \\ &= \int_\Omega d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n \wedge d\varphi \wedge \chi_{k+1}^n \\ &= {}_{\mathrm{L}^{p_k'}}\langle\, d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n \wedge d\varphi,\ \chi_{k+1}^n \,\rangle_{\mathrm{L}^{p_k}}.\end{aligned}$$

Po pretpostavci indukcije $d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n \rightharpoonup d\bar{\chi}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{\chi}_k$ u L^{q_k}, gdje je $q_k > 1$, a $\chi_{k+1}^n \to \bar{\chi}_{k+1}$ u $\mathrm{L}^{p_{k+1}}$, pa imamo

$${}_{\mathrm{L}^{p_k'}}\langle\, d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n \wedge d\varphi,\ \chi_{k+1}^n \,\rangle_{\mathrm{L}^{p_k}} \longrightarrow {}_{\mathrm{L}^{p_k'}}\langle\, d\bar{\chi}_1^n \wedge \ldots \wedge d\bar{\chi}_k^n \wedge d\varphi,\ \bar{\chi}_{k+1}^n \,\rangle_{\mathrm{L}^{p_k}}.$$

Raspis kao gore daje:

$$\int_\Omega d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_{k+1}^n \wedge \varphi \quad \longrightarrow \quad \int_\Omega d\bar{\chi}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{\chi}_{k+1}\varphi,$$

odakle imamo konvergenciju u smislu distribucija.

Promotrimo slučaj kad je $q_{k+1} > 1$. Tvrdimo da je $(d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_{k+1}^n)$ omeđen u $\mathrm{L}^{q_{k+1}}$. Imamo:

$$\frac{1}{q_{k+1}} = \frac{1}{q_k} + \frac{1}{p_{k+1}} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{q_{k+1}}{q_k} + \frac{q_{k+1}}{p_{k+1}},$$

te formalnim računom koristeći Hölderovu nejednakost imamo

$$\|d\chi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n \wedge d\chi_{k+1}^n\|_{\mathrm{L}^{q_{k+1}}} \leq \|d\psi_1^n \wedge \ldots \wedge d\chi_k^n\|_{\mathrm{L}^{q_k}} \|d\chi_{k+1}^n\|_{\mathrm{L}^{p_{k+1}}}.$$

Desna strana je omeđena zbog svojstava slabe konvergencije, pa je i lijeva strana omeđena. Odatle možemo naći podniz takav da

$$d\chi_1^{n_m} \wedge \ldots \wedge d\chi_{k+1}^{n_m} \rightharpoonup \bar{\chi} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^{q_{k+1}}$$

odakle imamo konvergenciju u smisli distribucije prema $\bar{\chi}$. No, iz jedinstvenosti distribucijskog limesa imamo da:

$$d\chi_1^{n_m} \wedge \ldots \wedge d\chi_{k+1}^{n_m} \rightharpoonup d\bar{\chi}_1^n \wedge \ldots \wedge d\bar{\chi}_{k+1}^n \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^{q_{k+1}}.$$

Q.E.D.

Sad možemo prijeći na dokaz osnovnog teorema:
Želimo pokazati

$$(\forall\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)) \quad \int_\Omega \alpha_1^n \wedge \ldots \wedge \alpha_l^n \wedge \varphi \longrightarrow \int_\Omega \bar{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\alpha}_l \wedge \varphi.$$

Kao i u dokazu div-rot leme u $\mathbf{R}^3$, dovoljno je pokazati tvrdnju za forme α_i^n s kompaktnim nosačem u Ω. Tada nam Hodgeov rastav daje slijedeće:

$$\alpha_i^n = \chi_i^n + d\psi_i^n \rightharpoonup \bar{\chi}_i + \bar{\psi}_i = \bar{\alpha}_i \quad \text{u} \ \ \mathrm{L}^{p_i},$$

$$\psi_i^n \to \bar{\psi}_i \quad \text{u} \ \ \mathrm{L}^{p_i},$$

$$\chi_i^n \to \bar{\chi}_I \quad \text{u} \ \ \mathrm{L}^{p_i},$$

$$d\psi_i^n \rightharpoonup d\bar{\psi}_i \quad \text{u} \ \ \mathrm{L}^{p_i}.$$

Kad to uvrstimo u željeni izraz, dobijemo integrande oblika:
a) $\chi_1^n \wedge \ldots \wedge \chi_l^n \wedge \varphi$,
b) $d\psi_1^n \wedge \ldots \wedge d\psi_l^n \varphi$,
c) $\chi_{i_1}^n \wedge \ldots \wedge \chi_{i_k}^n \wedge d\psi_{j_1}^n \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_m}^n \wedge \varphi$.
Produkt u (a) očito konvergira jako u L^1 prema $\bar{\chi}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\chi}_l \wedge \varphi$, pa onda posebno

$$\chi_1^n \wedge \ldots \wedge \chi_l^n \rightharpoonup \bar{\chi}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\chi}_l$$

u smislu distribucija. Prethodna lema nam daje

$$d\psi_1^n \wedge \ldots \wedge d\psi_l^n \rightharpoonup d\bar{\psi}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{\psi}_l$$

u smislu distribucija, te

$$d\psi_{j_1}^n \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_m}^n \rightharpoonup d\bar{\psi}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{\psi}_{j_m} \quad \text{u} \ \ \mathrm{L}^q,$$

gdje je $1/q = 1/p_{j_1} + \ldots + 1/p_{j_m}$, $\;1/q' = 1/p_{i_1} + \ldots + 1/p_{i_k}$ i $\;1/q + 1/q' = 1$. Sada za svaki $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega)$ imamo

$$\int_\Omega \chi_{i_1}^n \wedge \ldots \wedge \chi_{i_k}^n \wedge d\psi_{j_1}^n \wedge \ldots \wedge d\psi_{j_m}^n \wedge \varphi \to \int_\Omega \bar{\chi}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\chi}_{i_k} \wedge d\bar{\psi}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{\psi}_{j_m} \wedge \varphi,$$

jer je to produkt jako konvergentnog niza u $\mathrm{L}^{q'}$ i slabo konvergentnog niza u L^q.
Ovime smo dokazali tvrdnju teorema.

Literatura

[1] ROBERT A. ADAMS: *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.

[2] NENAD ANTONIĆ, KREŠIMIR BURAZIN: *On certain properties of spaces of locally Sobolev functions*, u *Proceedings of the Conference on applied mathematics and scientific computing*, pp. 109–120, Z. Drmač et al. (eds.), Springer, 2005.

[3] NENAD ANTONIĆ, MARKO VRDOLJAK: *Mjera i integral*, PMF—Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[4] HAÏM BREZIS: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[5] MARC BRIANE, JUAN CASADO-DIAZ, FRANÇOIS MURAT: *The div-curl lemma "trente ans apres": an extension and an application to the G-convergence of unbounded monotone operators*, *Journal de mathèmatiques pures et appliques* **91** (2009) 476–494.

[6] KREŠIMIR BURAZIN: *Primjena kompaktnosti kompenzacijom u teoriji hiperboličkih sustava*, magistarski rad, Zagreb, 2004.

[7] MANFREDO P. DO CARMO: *Differential forms and applications*, Springer, 1994.

[8] LAWRENCE CRAIG EVANS: *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, American Mathematical Society, 1990.

[9] LAWRENCE CRAIG EVANS: *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 2010.

[10] DAVID GILBARG, NEIL S. TRUDINGER: *Eliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1983.

[11] SIGERU MIZOHATA: *The theory of partial differential equations*, Cambridge University Press, 1973.

[12] FRANÇOIS MURAT: *Compacite par compensation*; *Annali della Scuola Normale Superiore Pisa* **5** (1978) 489–507.

[13] FRANÇOIS MURAT: *A survey on compensated compactness*, u *Contributions to the modern calculus of variations*, pp. 145–183, L. Cesari (Ed.), Pitman, 1987.

[14] LAWRENCE NARICI, EDWARD BECKENSTEIN: *Topological vector spaces*, CRC Press, 2011.

[15] DAN POLIŠEVSKI: *The div-curl lemma revisited*, *arXiv:0712.2133v1* (2007) 5 pp.

[16] JEFREY RAUCH: *Partial differential equations*, Springer, 1991.

[17] JOEL W. ROBIN, ROBERT C. ROGERS, BLAKE TEMPLE: *On weak continuity and the Hodge decomposition*, *Transactions of the American Mathematical Society* **303** (1987) 609–618.

[18] R. TYRRELL ROCKAFELLAR: *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.

[19] LAURENT SCHWARTZ: *Théorie des distributions,* Hermann, 1957.

[20] LUC TARTAR: *The general theory of homogenization: A personalized introduction*, Springer, 2009.

[21] Frank W. Warner: *Foundations of the differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, 1983.
[22] Kôsaku Yosida: *Functional analysis*, Springer, 1980.

Sažetak

U ovom radu opisani su različiti rezultati teorije kompaktnosti kompenzacije. Posebnu pažnju smo posvetili div-rot lemi kao jednom od najčešće korištenih rezultata te teorije.

Rad se sastoji od četiri poglavlja. U prvom poglavlju je dan kratki pregled funkcijskih prostora i rezultata koje ćemo koristiti u kasnijim poglavljima.

U drugom poglavlju dajemo opis Maxwellovih jednadžbi u sredstvu, te dokaz div-rot leme koja se prirodno javlja pri promatranju energije elektromagnetskog polja.

U trećem poglavlju dani su glavni rezultati teorije kompaktnosti kompenzacijom u L^2: krenuli smo s nužnim uvjetima na funkciju da bi bila slabo-$*$ poluneprekidna na nizovima funkcija koji zadovoljavaju dodatne pretpostavke na derivacije, da bismo na kraju dokazali Tartarov Kvadratni teorem koji daje dovoljne uvjete za slučaj kvadratnih funkcionala i div-rot lemu kao njegovu posljedicu.

U četvrtom poglavlju smo poopćili div-rot lemu na diferencijalne forme. Na početku smo dali kratki uvod o diferencijalnim formama te smo definirali diferencijalne operatore na njima. Zatim smo dali nekoliko primjena osnovnog teorema četvrtog poglavlja čiji smo dokaz dali na kraju koristeći Hodgeov rastav slabo konvergentnih nizova. Za ilustraciju ideje Hodgeovog rastava dokazali smo div-rot lemu.

Summary

In this thesis we describe various results of compactness by compensation theory with emphasis on the div-rot lemma.

The thesis consists of four chapters. A short overview of functions spaces that are to be used in later chapters is given in the first one.

In the second chapter we start with a short description of system of the Maxwell's equations in a medium. We prove the div-rot lemma which arises naturally in the study of energy of electromagnetic field.

The main results of the compactness by compensation theory are given in the third chapter: we started with necessary conditions on a function to be weakly-$*$ semicontinuous on sequences of functions that satisfy some additional assumptions on their derivates. At the end of the chapter, a proof of Tartar's Quadratic theorem is given and div-rot lemma is derived from it.

At the beginning of the last chapter a short overview of differential forms is given and the defintions of some differential operators are extended to differential forms. The proof of the central theorem of this chapter using Hodge's decomposition of weakly convergent sequences has been given at the end. We have illustrated the idea of Hodge's decomposition in the proof of div-rot lemma.

Životopis

Rođen sam 18. prosinca 1988. godine u Splitu. Živio sam u Metkoviću, gdje sam završio osnovnu školu i gimnaziju. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao sam na natjecanjima iz matematike i fizike na kojima sam osvojio više nagrada. 2007. godine sam primio nagradu kao najbolji učenik generacije Gimnazije Metković.

Iste godine upisao sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Tijekom studija sam sudjelovao na međunarodnom natjecanju za studente matematike IMC, te sam bio demonstrator iz više kolegija. 2010. godine sam primio Pohvalu Fakultetskog vijeća Prirodoslovno- matematičkog fakulteta za izuzetan uspjeh u studiju te Povelju za najboljeg studenta Preddiplomskog sveučilišnog studija Matematika.

2011. godine upisao sam Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika. Tijekom druge godine studija bio sam član poslijediplomskog Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu. Pored redovnog studija, uspješno sam završio petotjednu ljetnu školu u Perugiai, te prisustvovao na četiri jednotjedne poslijediplomske škole.

Slijedeće akademske godine namjeravam upisati Poslijediplomski znanstveni studij matematike na Sveučilištu u Zagrebu.