Sveučilište u Zagrebu

PMF–Matematički odjel

Ivan Ivec

SOBOLJEVLJEVE NEJEDNAKOSTI I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:

doc. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, siječnja 2001.

Zahvaljujem svojem mentoru doc. dr. sc. Nenadu Antoniću na pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.

Sadržaj

§1. Uvod 1

§2. L^p–prostori 4

§3. Fourierova pretvorba 18

§4. Distribucije 26

§5. Soboljevljev prostor $H^1(\mathbb{R}^d)$ 31

§6. Soboljevljeve nejednakosti 35

§7. Jedna primjena Soboljevljeve nejednakosti 38

Literatura 43

§1. UVOD

Ambijent u kojem radimo je d–dimenzionalni euklidski prostor $\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \ : \ x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\}$ s normom $|x| := \left(\sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Prisjetimo se da je skup $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.

S $C^k(\Omega)$ označavamo skup kompleksnih funkcija definiranih na nekom otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ koje su k puta neprekidno diferencijabilne tj. koje imaju neprekidne parcijalne derivacije k–tog reda, a s $C^\infty(\Omega)$ označavamo skup funkcija koje su u $C^k(\Omega)$ za svaki $k \in \mathbb{N}_0$.

Za $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ i funkciju $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definiramo njezin nosač $\operatorname{supp} f := \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^d}\{x \in \Omega \ : \ f(x) \neq 0\}$. Sada s $C_c^\infty(\Omega)$ označimo skup funkcija iz $C^\infty(\Omega)$ takvih da im je nosač kompaktan i sadržan u Ω. Klasičan primjer funkcije iz $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ je funkcija

$$j(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{1-|x|^2}\right], & \text{ako je} \quad |x| < 1 \\ 0, & \text{ako je} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Mjera s kojom radimo je restrikacija Lebesgueove mjere λ^d na σ–algebru Borelovih skupova u $\mathbb{R}^d$ (koja je generirana množinom otvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$ i koju označavamo s $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$). Ta mjera je translacijski invarijantna i podudara se s klasičnim volumenom na kuglama (i kvadrima) tj. $\lambda^d(K(x,r)) = \frac{1}{d}|\mathbb{S}^{d-1}|r^d$,gdje je $|\mathbb{S}^{d-1}| = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$ ploština jedinične sfere $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |x| = 1\}$.

Ako je $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, onda Lebesgueov integral izmjerive funkcije $f : B \longrightarrow [0, \infty]$, odnosno sumabilne funkcije $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ označavamo s $\int\limits_B f(x)dx$, ili kraće s $\int\limits_B f dx$.

$\int\limits_B f(x)dx$ definiramo i onda kada je funkcija f definirana samo skoro svuda na B. Tada definiramo $\int\limits_B f(x)dx := \int\limits_{B \setminus Z} f(x)dx$, gdje je Z neki zanemariv skup takav da je f definirana (svuda) na $B \setminus Z$. Nije teško vidjeti da ta definicija ne ovisi o izboru skupa Z.

Funkcija $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ je sumabilna ako i samo ako je $|f|$ sumabilna. Nadalje, ako su $f, g : B \longrightarrow \mathbb{C}$ sumabilne funkcije i ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, onda vrijedi $\left|\int\limits_B f(x)dx\right| \leq \int\limits_B |f|(x)dx$ i $\int\limits_B (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int\limits_B f(x)dx + \beta \int\limits_B g(x)dx$.

Navedimo sada (bez dokaza) osnovne teoreme o konvergenciji Lebesgueovog integrala, Fubinijev teorem, te teorem o zamjeni varijabli.

Teorem 1.1 *(o monotonoj konvergenciji)*
Neka je $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ i neka je (f_n) rastući niz izmjerivih funkcija s B u $[0, \infty]$. Tada je

$$\lim_n \int\limits_B f_n(x)dx = \int\limits_B \lim_n f_n(x)dx.$$

Lema 1.2 *(Fatou)*
Neka je $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ i neka je (f_n) niz izmjerivih funkcija s B u $[0, \infty]$. Tada je

$$\liminf_n \int\limits_B f_n(x)dx \geq \int\limits_B \liminf_n f_n(x)dx.$$

Teorem 1.3 *(o dominiranoj konvergenciji)*
Neka je $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ i neka je (f_n) niz izmjerivih funkcija s B u $\mathbb{C}$ koji skoro svuda konvergira k izmjerivoj funkciji $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$. Ako postoji sumabilna funkcija $g : B \longrightarrow [0, \infty]$ koja dominira niz (f_n) u smislu da je $|f_n(x)| \leq g(x)$ (ss) za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je i funkcija f sumabilna te je

$$\lim_n \int\limits_B f_n(x)dx = \int\limits_B f(x)dx.$$

Teorem 1.4 *(Fubini)*
Neka je $B_1 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_1}}$, $B_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_2}}$ i neka je $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ izmjeriva funkcija na $B_1 \times B_2$, gdje je $x \in B_1$, a $y \in B_2$. Ako je $f(B_1 \times B_2) \subseteq [0, \infty]$ ili f kompleksna sumabilna, onda su sljedeća tri integrala jednaka:

$$\int\limits_{B_1 \times B_2} f(x, y)d(x, y), \quad \int\limits_{B_2} \int\limits_{B_1} f(x, y)dxdy, \quad \int\limits_{B_1} \int\limits_{B_2} f(x, y)dydx.$$

Teorem 1.5 *(o zamjeni varijabli)*
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *otvoren i neka je* $G : \Omega \longrightarrow G(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$ *difeomorfizam. Ako je* f *izmjeriva funkcija na* $G(\Omega)$*, onda je i* $f \circ G$ *izmjeriva funkcija. Nadalje, ako je* $f(G(\Omega)) \subseteq [0, \infty]$ *ili* f *kompleksna sumabilna, onda vrijedi*

$$\int\limits_{G(\Omega)} f(x)dx = \int\limits_{\Omega} (f \circ G)(x)|\det DG(x)|dx.$$

Što se oznaka tiče, s $\tau(X)$ označavamo topologiju prostora X, $\mathcal{K}(X)$ je množina kompaktnih podskupova topološkog prostora X, a $K[x, r]$ je oznaka za zatvorenu kuglu u metričkom prostoru.

Na kraju, spomenimo jedan nama važan rezultat(vidi [3]:Propozicija 2.53):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left[-a|x|^2\right] dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}}, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

§2. L^{p}–PROSTORI

Neka je $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ i neka je $p \in [1, \infty\rangle$. Definiramo prostor

$$L^p(B) := \Big\{ f \in \mathbb{C}^B \ : \ f \text{ je izmjeriva i } |f|^p \text{ je sumabilna} \Big\},$$

s tim da poistovjećujemo funkcije koje su jednake (ss). Nadalje, definiramo i prostor

$$\begin{aligned} L^\infty(B) \ := \ & \Big\{ f \in \mathbb{C}^B \ : \ f \text{ je izmjeriva i postoji konačna konstanta} \\ & K \text{ takva da je } |f(x)| \leq K \ (ss) \Big\}, \end{aligned}$$

s tim da poistovjećujemo funkcije koje su jednake (ss). Iz nejednakosti $(\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C})\ |\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1} \left(|\alpha|^p + |\beta|^p \right)$ slijedi da je za $p \in [1, \infty]$ $L^p(B)$ kompleksan vektorski prostor. Za $p \in [1, \infty\rangle$ na $L^p(B)$ definiramo normu

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_B |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

a na $L^\infty(B)$ definiramo normu

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf \left\{ K \in \mathbb{R}_0^+ \ : \ |f(x)| \leq K \ (ss) \right\}.$$

Prema definiciji infimuma imamo

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \Big(\ |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{n} \ (ss) \Big),$$

a odatle (jer je prebrojiva unija zanemarivih skupova zanemariv skup) imamo i

$$(\forall\, f \in L^\infty(B)) \Big(|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \ (ss) \Big). \tag{1}$$

Neka je sada $p \in [1, \infty]$. Ako je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, onda kažemo da je q konjugirani eksponent za p, tj. kažemo da su p i q (međusobno) konjugirani eksponenti.

Lema 2.1
Za $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ i $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi nejednakost

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda) b,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$.

Dokaz:
Tvrdnja je trivijalna ako je $a = 0$ ili $b = 0$. Za $a, b > 0$ tvrdnja slijedi logaritmiranjem uz korištenje stroge konkavnosti funkcije ln.

Q.E.D.

Teorem 2.2 *(Hölderova nejednakost)*
Neka su $p, q \in [1, \infty]$ konjugirani eksponenti te neka je $f \in L^p(B)$, $g \in L^q(B)$. Tada je $fg \in L^1(B)$ i vrijedi

$$\left| \int_B fg dx \right| \leq \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{2}$$

Nadalje, prva nejednakost u (2) je jednakost ako i samo ako je $f(x)g(x) = e^{i\varphi}|f(x)||g(x)|$ (ss) za neki $\varphi \in \mathbb{R}$.
Konačno, ako je $f \neq 0$, $g \neq 0$ i $p \in \langle 1, \infty \rangle$, druga nejednakost u (2) je jednakost ako i samo ako je

$$|f(x)|^p = \alpha |g(x)|^q \ (ss) \quad \textit{za neki } \alpha \neq 0.$$

Dokaz:
Dokazujemo samo drugu nejednakost u (2) (odatle slijedi $fg \in L^1(B)$) i promatramo samo slučajeve jednakosti u toj drugoj nejednakosti, a ostalo smatramo poznatim iz teorije Lebesgueovog integrala.

Traženi rezultat je očigledan ako je $f = 0$ ili $g = 0$, a u slučaju $p \in \{1, \infty\}$ lako se dokazuje uz pomoć (1). Neka je dakle $f \neq 0$, $g \neq 0$ i $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Uvrštavanjem

$$a := \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{L^p}} \right|^p, \quad b := \left| \frac{g(x)}{\|g\|_{L^q}} \right|^q \quad \text{i} \quad \lambda := \frac{1}{p}$$

u nejednakost iz Leme 2.1 dobivamo

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \int\limits_B |f|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q \int\limits_B |g|^q dx}. \tag{3}$$

Integriranjem nejednakosti (3) slijedi

$$\frac{\|fg\|_{L^1}}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

i to je tražena nejednakost iz teorema, a jednakost vrijedi ako i samo ako u (3) vrijedi jednakost skoro svuda, a prema Lemi 2.1 to vrijedi ako i samo ako je

$$\|g\|_{L^q}^q |f(x)|^p = \|f\|_{L^p}^p |g(x)|^q \ (ss).$$

Q.E.D.

Korolar 2.3
Neka su $p, q, r \in [1, \infty]$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ i neka je $f \in L^p(B)$, $g \in L^q(B)$. Tada je $fg \in L^r(B)$ i vrijedi

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Dokaz:
Ako je $p, q, r < \infty$, tvrdnja slijedi primjenom Teorema 2.2 na konjugirane eksponente $\frac{p}{r}$ i $\frac{q}{r}$ i funkcije $|f|^r \in L^{\frac{p}{r}}(B)$, $|g|^r \in L^{\frac{q}{r}}(B)$. U ostalim slučajevima tvrdnja lako slijedi uz pomoć (1).

Q.E.D.

Korolar 2.4 *(Interpolacijska nejednakost)*
Neka je $1 \leq p < q \leq \infty$ i neka je $f \in L^p(B) \cap L^q(B)$. Tada je $(\forall\, r \in \langle p, q \rangle)$ $f \in L^r(B)$ i vrijedi

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

pri čemu je $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ jednoznačno dan s $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Dokaz:
Neka je $q < \infty$. Uz $p_1 := \frac{p}{\alpha}$ i $q_1 := \frac{q}{1-\alpha}$ imamo $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r}$ pa tvrdnja slijedi primjenom Korolara 2.3 na funkcije $|f|^{\alpha}$ i $|f|^{1-\alpha}$. U slučaju $q = \infty$ tvrdnja lako slijedi uz pomoć (1).

Q.E.D.

Uvodimo i kompleksan vektorski prostor

$$L^p(B; \mathbb{C}^c) := \Big\{ f = (f_1, \ldots, f_c) : B \longrightarrow \mathbb{C}^c \ : \ f_i \in L^p(B),\ i = 1, \ldots, c \Big\},$$

s tim da poistovjećujemo funkcije koje su jednake (ss), i na njemu normu $\|f\|_{L^p} := \Big(\sum\limits_{i=1}^{c} \|f_i\|_{L^p}^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ za $p < \infty$ te $\|f\|_{L^\infty} := \max\{\|f_1\|_{L^\infty}, \dots, \|f_c\|_{L^\infty}\}$ za $p = \infty$.

Očito $f_n \longrightarrow f$ u $L^p(B;\mathbb{C}^c)$ ako i samo ako za svaki $i \in \{1, \dots, c\}$ $(f_n)_i \longrightarrow f_i$ u $L^p(B)$. Nadalje, obično i $L^p(B;\mathbb{C}^c)$ označavamo jednostavno s $L^p(B)$.

U tekstu koristimo sljedeće dvije nevažne nedosljednosti. Prvo, za izmjerivu funkciju $f : B \longrightarrow [0, \infty]$ kažemo da je u $L^p(B)$ ako je f^p sumabilna za $p < \infty$ $(\infty^p := \infty)$, odnosno ako postoji konačna konstanta K takva da je $f(x) \leq K$ (ss) za $p = \infty$. Za takvu funkciju je uvijek $f(x) < \infty$ (ss). Drugo, za izmjerivu funkciju $f : B \setminus Z \longrightarrow \mathbb{C}$, gdje je Z zanemariv skup kažemo da je u $L^p(B)$ ako je u $L^p(B)$ njeno proširenje nulom na B.

Teorem 2.5

Neka je (f_n) Cauchyjev niz u $L^p(B)$. Tada postoji (jedinstvena) funkcija $f \in L^p(B)$ takva da $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$. Nadalje, postoji podniz (f_{n_m}) takav da je $\lim\limits_m f_{n_m}(x) = f(x)$ (ss).

Dokaz:

Prvu tvrdnju teorema dokazujemo samo za $p < \infty$.

Odaberimo $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|f_{n_1} - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$ za svaki $n \geq n_1$. Nadalje, odaberimo $n_2 > n_1$ takav da je $\|f_{n_2} - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{4}$ za svaki $n \geq n_2$, i tako dalje. Dobivamo podniz (f_{n_m}) takav da je $\|f_{n_m} - f_{n_{m+1}}\|_{L^p} \leq 2^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Promotrimo sada rastući niz (F_l) nenegativnih funkcija na B zadanih formulom $F_l(x) := \sum\limits_{m=1}^{l} |f_{n_m}(x) - f_{n_{m-1}}(x)|$, gdje uzimamo $f_{n_0}(x) := 0$. Prema nejednakosti trokuta imamo

$$\|F_l\|_{L^p} \leq \|f_{n_1}\|_{L^p} + \sum_{m=2}^{l} 2^{-(m-1)} \leq \|f_{n_1}\|_{L^p} + 1, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Definirajmo na B i nenegativnu funkciju F formulom $F(x) := \lim\limits_l F_l(x) \in [0, \infty]$. Prema (4), uz pomoć Teorema 1.1 (o monotonoj konvergenciji) za $p < \infty$, slijedi da je F u $L^p(B)$. Posebno je $F(x) < \infty$ (ss), tj. red $\sum(f_{n_m}(x) - f_{n_{m-1}}(x))$ (u $\mathbb{C}$) apsolutno konvergira za svaki $x \in B \setminus Z$, gdje je Z neki zanemariv skup. Tada taj red i konvergira, tj. možemo definirati funkciju $f : B \setminus Z \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) := \lim\limits_m f_{n_m}(x)$. Ta funkcija je izmjeriva kao limes (po točkama) niza izmjerivih funkcija. Nadalje, uz pomoć nejednakosti trokuta lako slijedi da je $(\forall m \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in B)$ $|f_{n_m}(x)| \leq F_m(x) \leq F(x)$ i sada, uz pomoć Teorema 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) za $p < \infty$, slijedi da je f u $L^p(B)$, tj. u $L^p(B)$ je proširenje funkcije f nulom na B. To proširenje označimo također s f i time je druga tvrdnja teorema dokazana (ako dokažemo prvu za tu funkciju f).

Budući da je $|f_{n_m}(x) - f(x)| \leq F(x) + |f(x)|$, to uz pomoć Teorema 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) slijedi (za $p < \infty$) da $\|f_{n_m} - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$.

Konačno, iz nejednakosti $\|f_n - f\|_{L^p} \leq \|f_n - f_{n_m}\|_{L^p} + \|f_{n_m} - f\|_{L^p}$ i činjenice da je (f_n) Cauchyjev niz slijedi (za $p < \infty$) da $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$.

Q.E.D.

Definirajmo sada pojam slabe konvergencije u L^p–prostorima. Kao prvo, s $L^p(B)'$ označimo kompleksan vektorski prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala $L : L^p(B) \longrightarrow \mathbb{C}$.

Neka je sada (f_n) niz u $L^p(B)$. Kažemo da (f_n) slabo konvergira prema $f \in L^p(B)$ i pišemo $f_n \rightharpoonup f$ u $L^p(B)$ ako je $(\forall L \in L^p(B)')$ $\lim\limits_n L(f_n) = L(f)$. Očito je da (jaka) konvergencija u $L^p(B)$ povlači slabu konvergenciju u $L^p(B)$.

Ako su $p, q \in [1, \infty]$ konjugirani eksponenti i ako je $g \in L^q(B)$, onda se uz pomoć Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost) lako dokazuje da je s $L_g(f) := \int\limits_B g(x)f(x)dx$ definiran $L_g \in L^p(B)'$. Postavlja se pitanje da li su na taj način dani svi elementi skupa $L^p(B)'$. Pokazuje se da je u slučaju $p \in [1, \infty\rangle$ odgovor potvrdan.

Dakle, u slučaju $p < \infty$ vrijedi: $f_n \rightharpoonup f$ u $L^p(B)$ ako i samo ako $(\forall g \in L^q(B))$ $\lim\limits_n \int\limits_B g f_n dx = \int\limits_B g f dx$, gdje je q konjugirani eksponent za p.

Teorem 2.6

Neka je $p \in [1, \infty\rangle$ i neka $f_n \rightharpoonup f$ u $L^p(B)$. Tada je $\liminf\limits_n \|f_n\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^p}$.

Dokaz:
Promatrajmo funkcional $L(h) = \int\limits_B ghdx$, gdje je

$$g(x) := \begin{cases} |f(x)|^{p-2}\overline{f(x)}, & \text{ako je} \quad f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{ako je} \quad f(x) = 0. \end{cases}$$

Lako se pokazuje da je $g \in L^q(B)$, gdje je q konjugirani eksponent za p.

Sada uz pomoć Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost) slijedi $\|f\|_{L^p}^p = L(f) = \lim\limits_n L(f_n) = \lim\limits_n |L(f_n)| \leq \|g\|_{L^q} \liminf\limits_n \|f_n\|_{L^p}$ pa, jer $f \neq 0 \implies \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}^{p-1}$, slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Teorem 2.7
Neka je (f_n) niz u $L^p(B)$ takav da je za svaki $L \in L^p(B)'$ niz $(L(f_n))$ omeđen. Tada postoji $C \in \mathbb{R}^+$ takav da je $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $\|f_n\|_{L^p} < C$.

Dokaz:
Teorem dokazujemo za $p \in \langle 1, \infty \rangle$, a slično se dokazuje i za $p \in \{1, \infty\}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da niz $(\|f_n\|_{L^p})$ nije omeđen. Nadalje, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\|f_n\|_{L^p} = 4^n$. Naime, uvijek možemo izabrati podniz niza (f_n) (koji također označavamo s (f_n)) takav da je $\|f_n\|_{L^p} \geq 4^n$ i tada niz (F_n) zadan s $F_n := \frac{4^n}{\|f_n\|_{L^p}} f_n$ zadovoljava pretpostavku teorema te je $\|F_n\|_{L^p} = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definirajmo sada funkcije $T_n : B \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n(x) := \begin{cases} \|F_n\|_{L^p}^{1-p} |F_n(x)|^{p-2}\overline{F_n(x)}, & \text{ako je} \quad F_n(x) \neq 0 \\ 0, & \text{ako je} \quad F_n(x) = 0. \end{cases}$$

Nadalje, definirajmo brojeve $\sigma_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$: $\sigma_1 := 1$ i dalje rekurzivno, tj. zahtijevamo da je $|\sigma_n| = 1$ i da $\sigma_n \int\limits_B T_n F_n dx$ ima isti argument kao $\sum\limits_{j=1}^{n-1} 3^{-j} \sigma_j \int\limits_B T_j F_n dx$. Prema tome,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} 3^{-j} \sigma_j \int_B T_j F_n dx \right| \geq 3^{-n} \int\limits_B T_n F_n dx = 3^{-n} \|F_n\|_{L^p} = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Definirajmo sada linearan funkcional $L : L^p(B) \longrightarrow \mathbb{C}$ formulom $L(f) := \sum\limits_{j=1}^{\infty} 3^{-j}\sigma_j \int\limits_B T_j f dx$. Uz pomoć Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost) i činjenice da je $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $\|T_n\|_{L^q} = 1$ (q je konjugirani eksponent za p) lako se pokazuje da je L neprekidan.

Na kraju,

$$\begin{aligned} |L(F_n)| &\geq \left|\sum_{j=1}^{n} 3^{-j}\sigma_j \int_B T_j F_n dx\right| - \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} 3^{-j}\right) 4^n \geq \\ &\geq 3^{-n}4^n - 3^{-n}4^n \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

i to je kontradikcija s omeđenošću niza $(L(F_n))$.

Q.E.D.

Uvedimo sada pojam konvolucije. Neka su $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ dvije funkcije. Definiramo njihovu konvoluciju, tj. funkciju $f * g$ formulom $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$ (ukoliko navedeni integral postoji). Uz pomoć Teorema 1.5 (o zamjeni varijabli) lako se vidi da je uvijek kada je definirano $f * g$ definirano i $g * f$ te da je tada $f * g = g * f$.

Teorem 2.8
Neka je $j \in L^1(\mathbb{R}^d)$, neka je $\operatorname{supp} j$ *kompaktan i neka je $\int\limits_{\mathbb{R}^d} j dx = 1$. Nadalje, za $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ definirajmo $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, tako da je $\int\limits_{\mathbb{R}^d} j_\varepsilon dx = 1$ i $\|j_\varepsilon\|_{L^1} = \|j\|_{L^1}$. Neka je sada $p \in [1, \infty\rangle$ i neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ te neka je $f_\varepsilon := j_\varepsilon * f$. Tada vrijedi:*

$$f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad i \quad \|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|j\|_{L^1}\|f\|_{L^p}, \tag{5}$$

$$f_\varepsilon \longrightarrow f \quad u \quad L^p(\mathbb{R}^d) \quad kad \quad \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{6}$$

Nadalje, ako je $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, onda je $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ i vrijedi

$$D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha j_\varepsilon) * f\,, \tag{7}$$

gdje je $D^\alpha g = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} g$ za proizvoljan izbor nenegativnih cijelih brojeva $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$.

Primjedba.
Gornji teorem vrijedi i za $f \in L^p(B)$. Tada naime možemo definirati $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ formulom $\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ako je} \quad x \in B \\ 0, & \text{ako je} \quad x \in B^c. \end{cases}$ Nadalje, definiramo $f_\varepsilon := j_\varepsilon * \widetilde{f}$. Sada vrijedi

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(B)} \leq \|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|j\|_{L^1}\|\widetilde{f}\|_{L^p} = \|j|_B\|_{L^1}\|f\|_{L^p},$$

tj. vrijedi prva tvrdnja teorema. Druga tvrdnja teorema vrijedi zbog $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \|f_\varepsilon - \widetilde{f}\|_{L^p}$. Ako je B otvoren, vrijedi i treća tvrdnja teorema (s $C^\infty(B)$ umjesto $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $\widetilde{f}$ umjesto f).

Dokaz:
Neka je $J_\varepsilon := |j_\varepsilon|$ i $F := |f|$. Tada je $|f_\varepsilon| \leq J_\varepsilon * F$ i prema Teoremu 2.2 (Hölderova nejednakost), Teoremu 1.4 (Fubini) i Teoremu 1.5 (o zamjeni varijabli) za $p > 1$ imamo (pritom pišemo $J_\varepsilon = J_\varepsilon^{\frac{1}{q}} J_\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\begin{aligned} (8) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |f_\varepsilon|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon(y) F(x-y) dy \right]^p dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon dx \right)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon(y) F(x-y)^p dy \right\} dx = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon dx \right)^{1+\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^d} F^p dx = \|j\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

i (5) je dokazano.
Za $p = 1$ dokaz je još jednostavniji (nije potrebna primjena Hölderove nejednakosti). Nadalje, slijedeći upravo provedeni dokaz uz pomoć Fubinijevog teorema zaključujemo da je $(J_\varepsilon * F)(x) < \infty$ (ss $x \in \mathbb{R}^d$), tj. da je funkcija f_ε dobro definirana skoro svuda.

Rastavljanjem funkcije f na realni i imaginarni dio te daljnjim rastavljanjem na pozitivne i negativne dijelove lako se pokazuje da je (6) dovoljno dokazati za nenegativnu funkciju $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dakle, neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ nenegativna funkcija i definirajmo niz (f_n) u $L^p(\mathbb{R}^d)$ formulom

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f(x) < n \ \text{ i } \ |x| < n \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Prema Teoremu 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) dobivamo $\lim_n \|f_n - f\|_{L^p} = 0$ i dalje, prema (5), $\|(f_n)_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|j\|_{L^1}\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$. Sada zbog nejednakosti $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \|f_\varepsilon - (f_n)_\varepsilon\|_{L^p} + \|(f_n)_\varepsilon - f_n\|_{L^p} + \|f_n - f\|_{L^p}$ slijedi da je (6) dovoljno dokazati za nenegativnu funkciju f koja je odozgo omeđena nekom konstantom $C \in \mathbb{R}^+$ i koja identički iščezava izvan kugle $B_r := K(0, r)$ za neki $r \in \mathbb{R}^+$. Takva je funkcija očito u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Kako je $|f_\varepsilon(x)| \leq C\|j\|_{L^1}$ (ss), za $p > 2$ imamo $|f_\varepsilon(x) - f(x)|^p \leq [C(1 + \|j\|_{L^1})]^{p-2} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^2$. Ako je pak $p < 2$, možemo iskoristiti činjenicu da za dovoljno mali ε f_ε identički iščezava izvan kugle B_{r+1} pa prema Korolaru 2.3 dobivamo (za dovoljno mali ε) $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p} \leq \lambda^d(B_{r+1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|f_\varepsilon - f\|_{L^2}$. Dakle, (6) je dovoljno dokazati za $p = 2$.

Sada $\int_{\mathbb{R}^d} j_\varepsilon dx = 1$ povlači $f_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} j_\varepsilon(y)[f(x - y) - f(x)]dy$ pa slično kao u (8) dobivamo $\|f_\varepsilon - f\|_{L^2}^2 \leq 2\|j\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon(y)G(y)dy$, gdje je $G(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)[f(x) - f(x - y)]dx$. Tvrdimo da je tako definirana funkcija $G : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ neprekidna u $y = 0$. Ako to dokažemo, onda je (6) dokazano jer prema Teoremu 2.2 (Hölderova nejednakost) i Teoremu 1.5 (o zamjeni varijabli) imamo $|G(y)| \leq 2\|f\|_{L^2}^2$ pa prema Teoremu 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) dobivamo $\int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon(y)G(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} J(y)G(\varepsilon y)dy \longrightarrow 0$ kad $\varepsilon \longrightarrow 0$ $(J := |j|)$.

Dakle, trebamo dokazati da $I(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)f(x - y)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f^2 dx$ kad $y \longrightarrow 0$. Očito je $I(y) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f^2 dx$ (Teorem 2.2) pa je dovoljno pokazati da je $\liminf_{y\to 0} I(y) \geq \int_{\mathbb{R}^d} f^2 dx$. Ako raspišemo tu nejednakost koristeći formulu $f(x) = \int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x)dt$, uz pomoć Teorema 1.4 (Fubini) i Leme 1.2 (Fatou) dobivamo da je dovoljno dokazati $\liminf_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x)\chi_B(x + y)dx \geq \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x)\chi_B(x)dx$, gdje su A i B proizvoljni Borelovi skupovi konačne (Lebesgueove) mjere. Za svaki $\delta \in \mathbb{R}^+$ vrijedi $(\exists O \in \tau(\mathbb{R}^d))(B \subseteq O \;\&\; \lambda^d(O \setminus B) \leq \delta)$. Prema tome, prema Teoremu 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) i činjenici da je $(\forall\, x \in O)\ \lim\limits_{y\to 0} \chi_O(x+y) = \chi_O(x) = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned}\liminf_{y\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x)\chi_B(x+y)dx &\geq \liminf_{y\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x)\chi_O(x+y)\chi_B(x)dx - \delta = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x)\chi_B(x)dx - \delta\end{aligned}$$

i tako je tražena tvrdnja dokazana.

Preostaje dokazati treću tvrdnju teorema. Dokazat ćemo da je $\partial_i f_\varepsilon = \partial_i j_\varepsilon * f$ i da je ta funkcija neprekidna. To će povlačiti da je $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^d)$, a budući da je $\partial_i j_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, induktivno slijedi i $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. No, pomoću Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost) moguće je provjeriti uvjete Teorema 1.3 (o dominiranoj konvergenciji), tj. obje tražene tvrdnje slijede uz pomoć Teorema 1.3.

Q.E.D.

Lema 2.9 *(Urysohnova lema)*
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan. Tada postoji funkcija $J_K \in C_c^\infty(\Omega)$ takva da je $J_K(\Omega) \subseteq [0,1]$ i da je $(\forall\, x \in K)\ J_K(x) = 1$.

Dokaz:
Kako je K kompaktan, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\widetilde{K} := \{x \in \mathbb{R}^d \ :\ (\exists\, y \in K)\ |x-y| \leq 2\varepsilon\} \subseteq \Omega$ (to slijedi iz činjenice da funkcija $x \longmapsto d(x, \Omega^c)$ postiže na K minimum $m > 0$ (neprekidna funkcija na kompaktu)). Sličnom tehnikom pokazuje se i to da su skupovi $\widetilde{K}$ i $K_+ := \{x \in \mathbb{R}^d \ :\ (\exists\, y \in K)\ |x-y| \leq \varepsilon\} \subseteq \Omega$ kompaktni. Fiksirajmo sada neku funkciju $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takvu da je $\operatorname{supp} j \subseteq K[0,1]$, $j(\mathbb{R}^d) \subseteq [0,1]$ i $\int\limits_{\mathbb{R}^d} j dx = 1$ (vidi primjer na stranici 1). Konačno, definirajmo, kao u Teoremu 2.8, $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ i $J_K := j_\varepsilon * \chi_{K_+}$. Prema primjedbi nakon Teorema 2.8 imamo $J_K \in C^\infty(\Omega)$, a ostale tražene tvrdnje lako se provjeravaju (npr. $\operatorname{supp} J_K \subseteq \widetilde{K}$).

Q.E.D.

Teorem 2.10
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren, $p \in [1, \infty\rangle$ i $f \in L^p(\Omega)$. Tada postoji niz (h_n) u $C_c^\infty(\Omega)$ takav da $\|h_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$.

Dokaz:
Kao prvo, prema primjedbi nakon Teorema 2.8 postoji niz (f_n) u $C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ takav da $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$. Definirajmo sada rastući niz (K_n) kompaktnih skupova u Ω formulom $K_n := \left\{x \in \Omega \ : \ d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} \ \text{ i } \ |x| \leq n\right\}$ te $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $g_n := J_{K_n}$, gdje je J_{K_n} kao u Lemi 2.9. Na kraju, definirajmo niz (h_n) u $C_c^\infty(\Omega)$ formulom $h_n := g_n f_n$. Budući da je $(\forall\, n \in \mathbb{N})(g_n(\Omega) \subseteq [0,1] \ \& \ g_n|_{K_n} = 1)$ te kako $(\forall\, x \in \Omega)$ $(\exists\, n(x) \in \mathbb{N})$ $x \in K_{n(x)}$, uz pomoć Teorema 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) slijedi

$$
\begin{aligned}
\|h_n - f\|_{L^p} &\leq \|g_n f_n - g_n f\|_{L^p} + \|g_n f - f\|_{L^p} \leq \\
&\leq \|f_n - f\|_{L^p} + \left(\int_\Omega |f|^p \chi_{\Omega \setminus K_n} dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Lema 2.11 *(separabilnost L^p–prostorâ)*
Postoji prebrojiv skup funkcija $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ sa sljedećim svojstvom:

$$
(\forall\, p \in [1, \infty\rangle)(\forall\, f \in L^p(B))(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\, \varphi_n \in \mathcal{F})\|f - \varphi_n\|_{L^p} < \varepsilon.
$$

Na primjer, možemo uzeti $\mathcal{F} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{(p\chi_{K[0,n]})|_B \ : \ p \in P^d\left[\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}\right]\right\}$, gdje je $P^d\left[\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}\right]$ skup svih polinoma na $\mathbb{R}^d$ s koeficijentima oblika $q_1 + \mathrm{i}q_2$, pri čemu su $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$.

Dokaz:
Tvrdnju je dovoljno dokazati za $B = \mathbb{R}^d$ jer svaku funkciju iz $L^p(B)$ možemo nulom proširiti do funkcije iz $L^p(\mathbb{R}^d)$. Dakle, neka su $p \in [1, \infty\rangle$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ zadani. Prema Teoremu 2.10 postoji funkcija $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da je $\|f - g\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{supp} g \subseteq K[0,n]$.

Uz pomoć [4]:Teorem III.4.9 dobivamo da za svaki $\varepsilon' > 0$ postoji polinom p s kompleksnim koeficijentima takav da vrijedi $\|g - p\chi_{K[0,n]}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon'$; pritom možemo uzeti $p \in P^d\left[\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}\right]$(jer svaki otvoren interval realnih brojeva sadrži racionalan broj).

Sada prema Korolaru 2.3 imamo

$$
\|g - p\chi_{K[0,n]}\|_{L^p} \leq \|\chi_{K[0,n]}\|_{L^p}\|g - p\chi_{K[0,n]}\|_{L^\infty} \leq \lambda^d(K[0,n])\varepsilon'
$$

pa za dovoljno mali ε' dobivamo

$$\|f - p\chi_{K[0,n]}\|_{L^p} \leq \|f - g\|_{L^p} + \|g - p\chi_{K[0,n]}\|_{L^p} < \varepsilon$$

i dokaz je gotov jer, iz činjenica da je $\mathbb{Q}$ prebrojiv te da su prebrojiva unija i konačan Kartezijev produkt prebrojivih skupova ponovno prebrojivi, lako slijedi da je skup $\mathcal{F} := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{p\chi_{K[0,n]} : p \in P^d\left[\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}\right]\right\}$ prebrojiv.

Q.E.D.

Teorem 2.12
Neka je $p \in \langle 1, \infty\rangle$ i neka je (f_n) omeđen niz u $L^p(B)$. Tada postoji podniz (f_{n_m}) i funkcija $f \in L^p(B)$ takvi da $f_{n_m} \rightharpoonup f$ u $L^p(B)$.

Dokaz:
Dokazujemo da postoji podniz (f_{n_m}) takav da za svaki $g \in L^q(B)$ konvergira niz $\left(\int\limits_B f_{n_m} g dx\right)$ (q je konjugirani eksponent za p). Nakon toga je dokaz teorema gotov jer ako pripadni limes označimo s $L(g)$, uz pomoć Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost) lako se pokazuje da je time zadan $L \in L^q(B)'$, tj. da postoji $f \in L^p(B)$ takva da je $(\forall\, g \in L^q(B))\ L(g) = \int\limits_B fg dx$.

Uz pomoć Hölderove nejednakosti slijedi $\left|\int\limits_B (f_{n_m} - f_{n_l}) g dx\right| \leq \left|\int\limits_B (f_{n_m} - f_{n_l})\varphi_n dx\right| + (\|f_{n_m}\|_{L^p} + \|f_{n_l}\|_{L^p})\|g - \varphi_n\|_{L^q}$ pa Lema 2.11 povlači da je dovoljno dobiti konvergenciju niza $\left(\int\limits_B f_{n_m}\varphi_n dx\right)$ za svaku funkciju φ_n iz Leme 2.11.

Krenimo od niza $\left(\int\limits_B f_n\varphi_1 dx\right)$ koji je omeđen (prema Hölderovoj nejednakosti) i koji stoga ima konvergentan podniz $\left(\int\limits_B f_{n_1(m)}\varphi_1 dx\right)$ s limesom C_1. Nadalje, promatramo omeđen niz $\left(\int\limits_B f_{n_1(m)}\varphi_2 dx\right)$ i neki njegov konvergentan podniz $\left(\int\limits_B f_{n_2(m)}\varphi_2 dx\right)$ s limesom C_2, i tako dalje. Na kraju definiramo niz (f_{n_m}) formulom $f_{n_m} := f_{n_{m(m)}}$. Lako se provjeri da je $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $\lim\limits_m \int\limits_B f_{n_m}\varphi_n dx = C_n$.

Q.E.D.

Teorem 2.13 *(Youngova nejednakost)*
Neka je $p, q, r \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *i* $h \in L^r(\mathbb{R}^d)$. *Tada je*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(g*h)(x)dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x-y)h(y)dxdy \right| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^r}.$$

Primjedba.
Primijetimo da je prema gornjem teoremu s $f \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(g*h)dx$ zadan neprekidan linearan funkcional na $L^p(\mathbb{R}^d)$, tj. za $p < \infty$ postoji $l \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$($p'$ je konjugirani eksponent za p) takva da je $(\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d))$ $\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(g * h)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} fldx$. Posebno je $\int\limits_B g * hdx = \int\limits_B ldx$ za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ takav da je $\lambda^d(B) < \infty$ i sada lagano razmatranje teorije Lebesgueovog integrala(vidi [3]:Propozicija 2.23(b)) pokazuje da je u stvari $(g * h)(x) = l(x)$ (ss), tj. $g * h \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. Za $p = \infty$ ta tvrdnja slijedi iz formule $\|g * h\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^1}\|h\|_{L^1}$, koja se lako dobiva pomoću Teorema 1.4 (Fubini) i Teorema 1.5 (o zamjeni varijabli). Nadalje, pokažimo da i za $p < \infty$ vrijedi formula $\|g * h\|_{L^{p'}} \leq \|g\|_{L^q}\|h\|_{L^r}$, koja se također naziva Youngova nejednakost (primijetimo da je $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{p'}$). Za $p = 1$ formula $\|g * h\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^q}\|h\|_{L^r}$ slijedi uz pomoć Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost). Konačno, promotrimo slučaj $p \in \langle 1, \infty \rangle$. Neka je za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ $(g * h)(x) = e^{i\varphi(x)}|(g * h)(x)|$ i $f(x) := e^{-i\varphi(x)}|(g * h)(x)|^{\frac{p'}{p}}$. Sada direktnim računom dobivamo $\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)(g * h)(x)dx\right| = \|f\|_{L^p}\|g * h\|_{L^{p'}}$ pa tražena tvrdnja slijedi uz pomoć gornjeg teorema.

Dokaz:
Dovoljno je dokazati nejednakost jer jednakost tada lako slijedi uz pomoć Teorema 1.4 (Fubini). Označimo dvostruki integral iz teorema s $I(f, g, h)$. Traženu nejednakost dovoljno je dokazati za nenegativne funkcije f, g, h jer tada imamo $|I(f, g, h)| \leq I(|f|, |g|, |h|) \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\|h\|_{L^r}$.

Neka su dakle f, g i h nenegativne funkcije, $p, q, r \in [1, \infty\rangle$ i neka su p', q' i r' konjugirani eksponenti za p, q i r redom. Označimo $I(f, g, h) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \alpha(x, y)\beta(x, y)\gamma(x, y)dxdy$, gdje je $\alpha(x, y) = f(x)^{\frac{p}{r'}} g(x - y)^{\frac{q}{r'}}$, $\beta(x, y) =$

$g(x-y)^{\frac{q}{p'}}h(y)^{\frac{r}{p'}}$ i $\gamma(x,y) = f(x)^{\frac{p}{q'}}h(y)^{\frac{r}{q'}}$. Uz pomoć Teorema 1.4 (Fubini) i Teorema 1.5 (o zamjeni varijabli) lako slijedi $\|\alpha\|_{L^{r'}} = \|f\|_{L^p}^{p/r'}\|g\|_{L^q}^{q/r'}$, $\|\beta\|_{L^{p'}} = \|g\|_{L^q}^{q/p'}\|h\|_{L^r}^{r/p'}$ i $\|\gamma\|_{L^{q'}} = \|f\|_{L^p}^{p/q'}\|h\|_{L^r}^{r/q'}$. Konačno, kako je $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1$, uz pomoć Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost), Korolara 2.3 i Teorema 1.4 (Fubini) dobivamo

$$\begin{aligned} |I(f,g,h)| &\leq \|\alpha\|_{L^{r'}}\|\beta\gamma\|_{L^r} \leq \|\alpha\|_{L^{r'}}\|\beta\|_{L^{p'}}\|\gamma\|_{L^{q'}} = \\ &= \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\|h\|_{L^r}. \end{aligned}$$

Ako je pak $p=\infty$, $q=\infty$ ili $r=\infty$, tražena nejednakost lako slijedi uz pomoć (1), Teorema 1.4 (Fubini) i Teorema 1.5 (o zamjeni varijabli).

Q.E.D.

Slijede dva teorema bez dokaza(za dokaze vidi [1]:Teorem 4.3 te [3]:Teorem 6.27).

Teorem 2.14 *(nejednakost Hardy–Littlewood–Soboljeva)*
Neka su $p, r \in \langle 1,\infty\rangle$, $\lambda \in \langle 0,d\rangle$ za $d\in\mathbb{N}$ i neka je $\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{d}+\frac{1}{r}=2$. Tada postoji konstanta $C(d,\lambda,p)\in\mathbb{R}_0^+$ takva da vrijedi

$$\begin{aligned} &(\forall\, f\in L^p(\mathbb{R}^d))\ (\forall\, h\in L^r(\mathbb{R}^d)) \\ &\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)|x-y|^{-\lambda}h(y)dxdy\Big| \leq C(d,\lambda,p)\|f\|_{L^p}\|h\|_{L^r}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ako je $p=r=\frac{2d}{2d-\lambda}$, onda je najbolja ocjena u (9) dana s

$$C(d,\lambda,p) = C(d,\lambda) = \pi^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(d-\frac{\lambda}{2}\right)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(d)}\right\}^{-1+\frac{\lambda}{d}}. \tag{10}$$

U tom slučaju u (9) vrijedi jednakost ako i samo ako su f i h višekratnici funkcije $(\gamma^2+(x-a)^2)^{-\frac{2d-\lambda}{2}}$ za neki $\gamma\in\mathbb{R}^+$ i neki $a\in\mathbb{R}^d$.

Teorem 2.15 *(Riesz–Thorin)*
Neka je $B_1\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_1}}$, $B_2\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_2}}$ i neka su $p_0,p_1,q_0,q_1\in[1,\infty]$. Nadalje, neka su p_t i q_t za $t\in\langle 0,1\rangle$ definirani formulama $\frac{1}{p_t} := \frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1}$, $\frac{1}{q_t} := \frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}$. Ako je $T: L^{p_0}(B_1)+L^{p_1}(B_1)\longrightarrow L^{q_0}(B_2)+L^{q_1}(B_2)$ linearan operator takav da $(\forall\, f\in L^{p_0}(B_1))$ $(\exists\, M_0\in\mathbb{R}_0^+)$ $\|Tf\|_{L^{q_0}}\leq M_0\|f\|_{L^{p_0}}$ i $(\forall\, f\in L^{p_1}(B_1))$ $(\exists\, M_1\in\mathbb{R}_0^+)$ $\|Tf\|_{L^{q_1}}\leq M_1\|f\|_{L^{p_1}}$, onda $(\forall\, t\in\langle 0,1\rangle)$ $(\forall\, f\in L^{p_t}(B_1))$ $\|Tf\|_{L^{q_t}}\leq M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_{L^{p_t}}$.

§3. FOURIEROVA PRETVORBA

Neka je $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Fourierova pretvorba funkcije f je funkcija $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ dana s

$$\widehat{f}(k) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(k,x)} f(x)dx,$$

gdje je $(k,x) = \sum\limits_{i=1}^{d} k_i x_i$.

Lako se dokazuje da je $\widehat{f}$ neprekidna omeđena funkcija, da je $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$, da je preslikavanje $f \longmapsto \widehat{f}$ linearno i da je

$$\widehat{\tau_h f}(k) = e^{-2\pi i(k,h)} \widehat{f}(k), \ h \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

$$\widehat{\delta_\lambda f}(k) = \lambda^d \widehat{f}(\lambda k), \ \lambda > 0, \tag{2}$$

gdje je $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$ i $(\delta_\lambda f)(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Neka su sada $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Prema Teoremu 1.4 (Fubini) slijedi $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ i

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(k,x)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dydx = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(k,y)} g(y) \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(k,x-y)} f(x-y)dxdy = \\ &= \widehat{f}(k)\widehat{g}(k). \end{aligned} \tag{3}$$

Teorem 3.1
Za $\lambda > 0$ definiramo $g_\lambda : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ formulom $g_\lambda(x) := \exp\left[-\pi\lambda|x|^2\right]$. Tada je $\widehat{g_\lambda}(k) = \lambda^{-\frac{d}{2}} \exp\left[-\pi|k|^2/\lambda\right]$.

Dokaz:
Prema (2) tvrdnju je dovoljno dokazati za $\lambda = 1$. Nadalje, budući da je $g_1(x) = \prod\limits_{i=1}^{d} \exp\left[-\pi(x_i)^2\right]$, uz pomoć Teorema 1.4 (Fubini) zaključujemo da je tvrdnju dovoljno dokazati za $d = 1$. Dakle,

$$\widehat{g_1}(k) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ikx} \exp\left[-\pi x^2\right] dx = g_1(k)f(k),$$

gdje je

$$f(k) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\pi(x+ik)^2\right] dx. \tag{4}$$

Uz pomoć Teorema 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) vidi se da u (4) možemo prijeći s derivacijom pod integral proizvoljno mnogo puta. Dakle, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ i

$$\begin{aligned} \frac{df}{dk}(k) &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} (x+ik) \exp\left[-\pi(x+ik)^2\right] dx = \\ &= i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \exp\left[-\pi(x+ik)^2\right] dx = \\ &= i \exp\left[-\pi(x+ik)^2\right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \end{aligned}$$

tj.(uz pomoć formule sa stranice 3)

$$(\forall\, k \in \mathbb{R})\ f(k) = f(0) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\pi x^2\right] dx = 1.$$

Q.E.D.

Teorem 3.2 *(Plancherel)*
Ako je $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, *onda je* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *i vrijedi sljedeća Plancherelova formula:*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \tag{5}$$

Preslikavanje $f \longmapsto \widehat{f}$ *može se na jedinstven način proširiti do neprekidnog linearnog operatora s* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *u* $L^2(\mathbb{R}^d)$, *kojeg također označavamo kao* $f \longmapsto \widehat{f}$ *i za kojeg isto vrijedi Plancherelova formula (5). Konačno, za* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *vrijedi sljedeća Parsevalova formula:*

$$(f,g) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}dk = (\widehat{f}, \widehat{g}). \tag{6}$$

Dokaz:
Neka je $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Kako je $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, to je

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \exp\left[-\varepsilon\pi|k|^2\right] dk \tag{7}$$

konačan za $\varepsilon > 0$. Budući da je $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, prema Fubinijevom teoremu funkcija $(x, y, k) \longmapsto \overline{f(x)} f(y) \exp[-\varepsilon\pi|k|^2]$ je iz $L^1(\mathbb{R}^{3d})$. Prema Fubinijevom teoremu i Teoremu 3.1 možemo (7) izraziti kao

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{3d}} \overline{f(x)} f(y) e^{2\pi i(k, x-y)} \exp\left[-\varepsilon\pi|k|^2\right] d(x, y, k) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{2d}} \varepsilon^{-\frac{d}{2}} \exp\left[-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}\right] \overline{f(x)} f(y) d(x, y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{d}} h_\varepsilon(x) \overline{f(x)} dx,$$

gdje je

$$h_\varepsilon(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^{d}} \varepsilon^{-\frac{d}{2}} \exp\left[-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}\right] f(y) dy.$$

Prema Teoremu 2.8 $h_\varepsilon \longrightarrow f$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ kad $\varepsilon \longrightarrow 0$ i sada iz

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(x) \overline{f(x)} dx - \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} (h_\varepsilon - f) \overline{f} dx \right| \le \|h_\varepsilon - f\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$$

(posljednja nejednakost slijedi iz Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost)) slijedi da (7) konvergira prema $\|f\|_{L^2}^2$ kad $\varepsilon \longrightarrow 0$. S druge strane, prema Teoremu 1.1 (o monotonoj konvergenciji) (7) konvergira prema $\|\widehat{f}\|_{L^2}^2$ kad $\varepsilon \longrightarrow 0$, tj. $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ i posebno $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Neka je sada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Prema Teoremu 2.10 $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ je gust u $L^2(\mathbb{R}^d)$, tj. postoji niz (f_n) u $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ takav da $\|f_n - f\|_{L^2} \longrightarrow 0$. Prema (5) je $\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_{L^2} = \|f_n - f_m\|_{L^2}$ i stoga je $(\widehat{f_n})$ Cauchyjev niz u $L^2(\mathbb{R}^d)$, koji prema Teoremu 2.5 konvergira u $L^2(\mathbb{R}^d)$ prema funkciji koju nazovimo $\widehat{f}$. Pretpostavimo sada da za neki drugi niz (g_n) u $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ koji konvergira u $L^2(\mathbb{R}^d)$ prema f $\widehat{g_n} \longrightarrow \widehat{g}$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Tada je, uz pomoć (5),

$$\begin{aligned}
\|\widehat{g} - \widehat{f}\|_{L^2} &\le \|\widehat{g} - \widehat{g_n}\|_{L^2} + \|\widehat{g_n} - \widehat{f_n}\|_{L^2} + \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2} = \\
&= \|\widehat{g} - \widehat{g_n}\|_{L^2} + \|g_n - f_n\|_{L^2} + \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2} \le \\
&\le \|\widehat{g} - \widehat{g_n}\|_{L^2} + \|g_n - f\|_{L^2} + \|f - f_n\|_{L^2} + \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

tj. $\widehat{g} = \widehat{f}$, tj. $\widehat{f}$ ne ovisi o izboru niza (f_n). Dakle, dobili smo proširenje $f \longmapsto \widehat{f}$ s $L^2(\mathbb{R}^d)$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nadalje, iz (5) slijedi i

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \lim_n \|\widehat{f_n}\|_{L^2} = \lim_n \|f_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Linearnost tog proširenja lako slijedi iz linearnosti polaznog preslikavanja, a neprekidnost je sada ekvivalentna omeđenosti, tj. slijedi iz Plancherelove formule. Konačno, jedinstvenost traženog proširenja slijedi iz činjenice da je $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ gust u $L^2(\mathbb{R}^d)$(Teorem 2.10) i iz neprekidnosti traženog proširenja.

Na kraju, Parsevalova formula (6) slijedi iz (5) i jednakosti

$$(f,g) = \frac{1}{2}\left\{\|f+g\|_{L^2}^2 - i\|f+ig\|_{L^2}^2 - (1-i)\|f\|_{L^2}^2 - (1-i)\|g\|_{L^2}^2\right\}.$$

Q.E.D.

Za $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ funkcija $\widehat{f}$ definirana Teoremom 3.2 naziva se također Fourierova pretvorba funkcije f. Pokazuje se da je preslikavanje $f \longmapsto \widehat{f}$ bijekcija s $L^2(\mathbb{R}^d)$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$. Sljedećim teoremom dana je eksplicitna formula za inverzno preslikavanje te bijekcije.

Teorem 3.3
Za $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ definiramo $\check{f}(x) := \widehat{f}(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Tada je $f = (\widehat{f})\check{}$.

Dokaz:
Dokažimo prvo da za $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vrijedi sljedeća formula:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g_\lambda}(y-x) f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} g_\lambda(k)\widehat{f}(k)e^{2\pi i(k,x)}dk, \tag{8}$$

gdje je $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda > 0$, $g_\lambda(k) = \exp\left[-\pi\lambda|k|^2\right]$ i (prema Teoremu 3.1) $\widehat{g_\lambda}(y - x) = \lambda^{-\frac{d}{2}}\exp\left[-\pi|x-y|^2/\lambda\right]$. U tu svrhu odaberimo (kao u dokazu Teorema 3.2) niz (f_n) u $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ takav da $\|f_n - f\|_{L^2} \longrightarrow 0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, prema Fubinijevom teoremu za f_n vrijedi (8), tj. vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g_\lambda}(y-x) f_n(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} g_\lambda(k)\widehat{f_n}(k)e^{2\pi i(k,x)}dk. \tag{9}$$

Imamo $g_\lambda, \widehat{g_\lambda}, f, \widehat{f}, f_n, \widehat{f_n} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $\|f_n - f\|_{L^2} \longrightarrow 0$, a odatle prema Teoremu 3.2 (Plancherel) imamo i $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^2} \longrightarrow 0$. Sada prema Teoremu 2.2 (Hölderova nejednakost) slijedi da integrali u (8) postoje (kao kompleksni brojevi) i da lijeva strana od (9) konvergira prema lijevoj strani od (8), a isto to vrijedi i za desne strane od (8) i (9). Tako je (8) dokazano.

Lijeva strana od (8) (kao funkcija varijable x) teži, prema Teoremu 2.8, prema f u $L^2(\mathbb{R}^d)$ kad $\lambda \longrightarrow 0$. Sada vidimo da je dovoljno pokazati da desna strana od (8) (kao funkcija varijable x) teži prema $(\widehat{f})\check{}$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ kad $\lambda \longrightarrow 0$. No, desna strana od (8) jednaka je $(g_\lambda \widehat{f})\check{}(x)$ pa je prema Teoremu 3.2 (Plancherel) i Teoremu 1.5 (o zamjeni varijabli) dovoljno dokazati da $g_\lambda \widehat{f} \longrightarrow \widehat{f}$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ kad $\lambda \longrightarrow 0$. To pak lako slijedi uz pomoć Teorema 1.3 (o dominiranoj konvergenciji).

Q.E.D.

Teorem 3.4 *(Hausdorff–Youngova nejednakost)*
Neka je $p \in \langle 1, 2\rangle$ i neka je $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$. Tada je

$$\|\widehat{f}\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}, \quad \text{gdje je } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}. \tag{10}$$

Analogno kao u dokazu Teorema 3.2 (Plancherel) zaključujemo da se preslikavanje $f \longmapsto \widehat{f}$ može na jedinstven način proširiti do neprekidnog linearnog operatora s $L^p(\mathbb{R}^d)$ u $L^q(\mathbb{R}^d)$, kojeg isto označavamo kao $f \longmapsto \widehat{f}$ i za kojeg također vrijedi (10). Za $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ funkcija $\widehat{f}$ definirana ovim teoremom naziva se također Fourierova pretvorba (u $L^p(\mathbb{R}^d)$) funkcije f. Konačno, zaključujemo da (10) vrijedi za svaki $p \in [1, 2]$ i za svaki $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dokaz:
Vidi [6]:stranice 179–208.

Q.E.D.

Primjedba.
Neka je $1 < p < q \leq 2$ i neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$. Uz pomoć Teorema 2.15 (Riesz–Thorin) lako se pokazuje da $\widehat{f}$ ne ovisi o tome da li na f gledamo kao na funkciju iz $L^p(\mathbb{R}^d)$ ili kao na funkciju iz $L^q(\mathbb{R}^d)$.

Teorem 3.5
Neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ i neka je $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Pretpostavimo nadalje da je $p, q, r \in [1, 2]$. Tada je $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Dokaz:
Prema primjedbi nakon Teorema 2.13 (Youngova nejednakost) vrijedi $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$. Neka su p', q' i r' konjugirani eksponenti za p, q i r redom. Prema Teoremu 3.4 vrijedi $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{g} \in L^{q'}(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f * g} \in L^{r'}(\mathbb{R}^d)$, i prema tome, prema Korolaru 2.3, vrijedi $\widehat{f}\widehat{g} \in L^{r'}(\mathbb{R}^d)$. Ako je dodatno $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, onda je tražena tvrdnja dokazana pod (3). U protivnom odaberimo (kao u dokazu Teorema 3.2) niz (f_n) u $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ takav da $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$ i niz (g_n) u $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ takav da $\|g_n - g\|_{L^q} \longrightarrow 0$. Sada prema (3), Teoremu 3.4, primjedbi nakon Teorema 2.13 (Youngova nejednakost) i Korolaru 2.3 imamo

$$
\begin{aligned}
&\|\widehat{f * g} - \widehat{f}\widehat{g}\|_{L^{r'}} \leq \\
&\leq \|\widehat{f * g} - \widehat{f_n * g_n}\|_{L^{r'}} + \|\widehat{f_n * g_n} - \widehat{f_n}\widehat{g_n}\|_{L^{r'}} + \|\widehat{f_n}\widehat{g_n} - \widehat{f}\widehat{g}\|_{L^{r'}} \leq \\
&\leq \|f * g - f_n * g_n\|_{L^r} + \|\widehat{f_n}\widehat{g_n} - \widehat{f}\widehat{g}\|_{L^{r'}} = \\
&= \|f * (g - g_n) + (f - f_n) * g_n\|_{L^r} + \|\widehat{f_n}(\widehat{g_n} - \widehat{g}) + (\widehat{f_n} - \widehat{f})\widehat{g}\|_{L^{r'}} \leq \\
&\leq \|f\|_{L^p}\|g - g_n\|_{L^q} + \|f - f_n\|_{L^p}\|g_n\|_{L^q} + \\
&+ \|\widehat{f_n}\|_{L^{p'}}\|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_{L^{q'}} + \|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^{p'}}\|\widehat{g}\|_{L^{q'}} \leq \\
&\leq (\|f\|_{L^p} + \|f_n\|_{L^p})\, \|g - g_n\|_{L^q} + \|f - f_n\|_{L^p}\, (\|g_n\|_{L^q} + \|g\|_{L^q}) \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

i odatle slijedi tražena tvrdnja.

Q.E.D.

Teorem 3.6
Neka je $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, neka je $\alpha \in \langle 0, d\rangle$ i neka je $c_\alpha := \pi^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Tada je $c_\alpha(|k|^{-\alpha}\widehat{f}(k))\check{}(x) = c_{d-\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |x - y|^{\alpha - d} f(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^d$, gdje se operator $\check{}$ definira kao u Teoremu 3.3 i za funkcije koje nisu iz $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Dokaz:
Krećemo od elementarne formule

$$
(11) \qquad c_\alpha |k|^{-\alpha} = \int_0^\infty \exp\left[-\pi|k|^2\lambda\right] \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} d\lambda, \quad k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.
$$

Pokazuje se da je funkcija $k \longmapsto |k|^{-\alpha}\widehat{f}(k)$ iz $L^1(\mathbb{R}^d)$ i sada uz pomoć (11), Fubinijevog teorema, Teorema 3.5 i Teorema 3.3 imamo

$$\begin{aligned} c_\alpha(|k|^{-\alpha}\widehat{f}(k))\check{}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(k,x)}\left\{\int\limits_0^\infty \exp\left[-\pi|k|^2\lambda\right]\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}d\lambda\right\}\widehat{f}(k)dk = \\ &= \int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(k,x)}\exp\left[-\pi|k|^2\lambda\right]\widehat{f}(k)dk\right\}\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}d\lambda = \\ &= \int\limits_0^\infty \lambda^{-\frac{d}{2}}\lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\left[-\pi|x-y|^2/\lambda\right]f(y)dy\right\}d\lambda = \\ &= c_{d-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x-y|^{-d+\alpha}f(y)dy. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Korolar 3.7
Neka je $\alpha \in \left\langle 0, \frac{d}{2}\right\rangle$, neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, gdje je $p = \frac{2d}{d+2\alpha}$ i neka je c_α kao u Teoremu 3.6. Tada je funkcija $g := c_{d-\alpha}|x|^{\alpha-d} * f$ iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ i vrijedi $\widehat{g} = c_\alpha|k|^{-\alpha}\widehat{f}$. Također,

$$c_{2\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|k|^{-2\alpha}\left|\widehat{f}(k)\right|^2dk = c_{d-2\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\overline{f(x)}f(y)|x-y|^{2\alpha-d}dydx.$$

Dokaz:
Prema Teoremu 2.10 postoji niz (f_n) u $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takav da $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$. Uz pomoć Teorema 2.14, koristeći Fubinijev teorem, činjenicu (koja se može provjeriti uz pomoć (11)) da vrijedi

$$(12)\ (\forall\,\alpha,\beta,\alpha+\beta \in \langle 0,d\rangle)\ \int\limits_{\mathbb{R}^d}|z|^{\alpha-d}|y-z|^{\beta-d}dz = \frac{c_{d-\alpha-\beta}c_\alpha c_\beta}{c_{\alpha+\beta}c_{d-\alpha}c_{d-\beta}}|y|^{\alpha+\beta-d}$$

i Teorem 1.5 (o zamjeni varijabli), pokazuje se da je $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Analogno se može vidjeti da su i funkcije $g_n := c_{d-\alpha}|x|^{\alpha-d} * f_n$ iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ kao i činjenica da $\|g_n - g\|_{L^2} \longrightarrow 0$. Sada uz pomoć Teorema 3.4 dobivamo $\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{L^q} \longrightarrow 0$, gdje je $q = \frac{2d}{d-2\alpha}$, i $\|\widehat{g_n} - \widehat{g}\|_{L^2} \longrightarrow 0$. Prema Teoremu 2.5 postoje nadalje podnizovi $(\widehat{f_{n_m}})$ i $(\widehat{g_{n_m}})$ takvi da je $\lim\limits_m \widehat{f_{n_m}}(k) = \widehat{f}(k)$ (ss) i $\lim\limits_m \widehat{g_{n_m}}(k) = \widehat{g}(k)$ (ss). Konačno, prema Teoremu 3.6 imamo

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \lim_m \widehat{g_{n_m}}(k) = \lim_m \left(c_\alpha |k|^{-\alpha} \widehat{f_{n_m}}(k) \right) = c_\alpha |k|^{-\alpha} \lim_m \widehat{f_{n_m}}(k) = \\ &= c_\alpha |k|^{-\alpha} \widehat{f}(k) \quad (ss),\end{aligned}$$

tj. $\widehat{g} = c_\alpha |k|^{-\alpha} \widehat{f}$.

Prema Plancherelovoj formuli (Teorem 3.2) i upravo dokazanoj jednakosti imamo

$$c_\alpha^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |k|^{-2\alpha} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk = \|\widehat{g}\|_{L^2}^2 = \|g\|_{L^2}^2$$

i sada posljednja tvrdnja teorema slijedi uz pomoć Fubinijevog teorema, formule (12) i Teorema 1.5 (o zamjeni varijabli).

Q.E.D.

§4. DISTRIBUCIJE

U ovom paragrafu definiramo distribucije za proizvoljan neprazni otvoren skup Ω u $\mathbb{R}^d$, iako će nam u daljnjem trebati samo slučaj $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Kompleksan vektorski prostor test funkcija $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ opremljen je sljedećim pojmom konvergencije: niz (φ_n) konvergira u $\mathcal{D}(\Omega)$ prema funkciji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ako i samo ako postoji kompaktan skup $K \subseteq \Omega$ takav da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi) \subseteq K$ i da za svaki izbor nenegativnih cijelih brojeva $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ vrijedi $\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} \varphi_n \longrightarrow \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} \varphi$ uniformno na K. Pritom činjenica da niz neprekidnih funkcija (ψ_n) konvergira uniformno na K prema ψ znači da $\sup\limits_{x \in K} |\psi_n(x) - \psi(x)| \longrightarrow 0$.

Distribucija T je neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$, $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, s tim da neprekidnost znači da iz $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ slijedi $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$. Distribucije tvore kompleksan vektorski prostor $\mathcal{D}'(\Omega)$, dualni prostor za $\mathcal{D}(\Omega)$.

U $\mathcal{D}'(\Omega)$ uvodimo sljedeći pojam konvergencije: niz distribucija (T_n) konvergira u $\mathcal{D}'(\Omega)$ prema $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ako za svaku $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ niz $(T_n(\varphi))$ konvergira prema $T(\varphi)$.

Najistaknutiji primjer distribucija su one koje potječu od funkcija i koje onda poistovjećujemo s funkcijama. U tu svrhu uvodimo kompleksan vektorski prostor $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \left\{ f \in \mathbb{C}^\Omega \ : \ f \text{ je izmjeriva i } (\forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega))\ f|_K \in L^1(K) \right\},$$

s tim da poistovjećujemo funkcije koje su jednake (ss). Pomoću Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost) lako se dokazuje da je $(\forall\, p \in [1, \infty])\ L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Neka je dakle $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Za svaku $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definirano je $T_f(\varphi) := \int\limits_\Omega f\varphi dx$ i T_f je očito linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$. Dokažimo da je T_f distribucija, tj. da je neprekidan. No, ako $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ u $\mathcal{D}(\Omega)$, vrijedi

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n)| &= \left| \int_\Omega (\varphi(x) - \varphi_n(x)) f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sup_{x \in K} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int_K |f(x)| dx \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

(zbog uniformne konvergencije niza (φ_n)). Dakle, $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i kažemo da je distribucija T_f funkcija f, a ta terminologija bit će opravdana sljedećim teoremom. Prije toga spomenimo samo još jedan važan primjer distribucije, tzv. Diracovu delta–funkciju δ_x za proizvoljni $x \in \Omega$, $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$.

Teorem 4.1
Neka su f i g iz $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ i neka je $T_f = T_g$, tj. $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \int\limits_\Omega f\varphi dx = \int\limits_\Omega g\varphi dx$. Tada je $f = g$, tj. $f(x) = g(x)$ (ss).

Dokaz:
Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\Omega_n := \left\{x \in \Omega \ : \ K\left[x, \frac{1}{n}\right] \subseteq \Omega\right\}$ i to je otvoren skup. Neka je $j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da je $\operatorname{supp} j \subseteq K[0,1]$ i $\int\limits_{\mathbb{R}^d} j dx = 1$. Definirajmo $j_n(x) := n^d j(nx)$. Fiksirajmo $N \in \mathbb{N}$. Ako je $n \geq N$, onda iz uvjeta teorema uz $\varphi(y) = j_n(x-y)$ dobivamo $(\forall x \in \Omega_N)$ $(j_n * f)(x) = (j_n * g)(x)$. Slično kao u primjedbi nakon Teorema 2.8 slijedi $j_n * f \longrightarrow f$ i $j_n * g \longrightarrow g$ u $L^1_{\text{loc}}(\Omega_N)$ (tj. u $L^1(K)$ za svaki $K \in \mathcal{K}(\Omega_N)$). Prema tome, $f(x) = g(x)$ $(ss\ x \in \Omega_N)$. Na limesu $N \longrightarrow \infty$ slijedi tvrdnja.

Q.E.D.

Sada ćemo definirati pojam distribucijske ili slabe derivacije. Neka je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ nenegativni cijeli brojevi. Definirajmo distribuciju $\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} T$, kraće označenu s $D^\alpha T$,

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) \ (D^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi),$$

gdje je $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^d \alpha_i$ i $D^\alpha \varphi = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} \varphi$.

$\partial_i T$ označava $D^\alpha T$ u slučaju kada je $\alpha_i = 1$ i $\alpha_j = 0$ za $j \neq i$, a ∇T označava $(\partial_1 T, \dots, \partial_d T)$, tj. to je distribucijski gradijent distribucije T.

Ako je $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, onda klasičnom parcijalnom integracijom dobivamo $(D^\alpha T_f)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha \varphi) f dx = \int_\Omega (D^\alpha f) \varphi dx =: T_{D^\alpha f}(\varphi)$. Dakle, pojam slabe derivacije proširuje pojam klasične derivacije i podudara se s njim u slučaju kada postoje neprekidne klasične parcijalne derivacije dotičnog reda. Nadalje, glavna vrlina teorije distribucija je u tome što je u tom slabom smislu svaka distribucija beskonačno puta derivabilna. Također, primijetimo da distribucijska derivacija funkcije ne mora nužno biti funkcija.

Dokažimo još da je $D^\alpha T$ zaista distribucija. $D^\alpha T$ je očito linearan funkcional pa preostaje za dokazati njegovu neprekidnost. Neka $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ u $\mathcal{D}(\Omega)$. Tada i $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ jer je $\mathrm{supp}(D^\alpha\varphi_n - D^\alpha\varphi) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi_n - \varphi) \subseteq K$ i jer $D^\beta(D^\alpha\varphi_n) = D^{\beta+\alpha}\varphi_n \longrightarrow D^{\beta+\alpha}\varphi = D^\beta(D^\alpha\varphi)$ uniformno na K. Dakle, neprekidnost od T daje

$$(D^\alpha T)(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi_n) \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi) = (D^\alpha T)(\varphi)$$

i imamo $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definirajmo sada produkt ψT funkcije $\psi \in C^\infty(\Omega)$ i distribucije $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$(\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega))\ (\psi T)(\varphi) := T(\psi\varphi).$$

Da je $\psi T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ slijedi lako iz činjenice da $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ u $\mathcal{D}(\Omega)$ povlači da $\psi\varphi_n \longrightarrow \psi\varphi$ u $\mathcal{D}(\Omega)$. Iz definicije distribucijske derivacije i Leibnizove formule za C^∞–funkcije ($\partial_i(\psi\varphi) = \varphi\partial_i\psi + \psi\partial_i\varphi$) lako se dobiva produktno pravilo za derivaciju distribucije ψT:

$$\partial_i(\psi T) = \psi(\partial_i T) + (\partial_i\psi)T. \tag{1}$$

Uvedimo sada za naše potrebe prostor $I^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$.

$$I^{1,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ : \ \nabla f \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Teorem 4.2
Neka je $f \in I^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1,\infty\rangle$. Tada je $|f| \in I^{1,p}(\Omega)$ i

$$(\nabla|f|)(x) = \begin{cases} \frac{1}{|f|(x)}(R(x)\nabla R(x) + I(x)\nabla I(x)), & \textit{ako je} \quad f(x) \neq 0 \\ 0, & \textit{ako je} \quad f(x) = 0; \end{cases}$$

ovdje R i I označavaju realni i imaginarni dio funkcije f. Posebno, ako je f realna,

$$(\nabla|f|)(x) = \begin{cases} \nabla f(x), & \textit{ako je} \quad f(x) > 0 \\ -\nabla f(x), & \textit{ako je} \quad f(x) < 0 \\ 0, & \textit{ako je} \quad f(x) = 0. \end{cases}$$

Dokaz:
Vidi [1]:Teorem 6.17.

Q.E.D.

Korolar 4.3
Neka su f i g realne funkcije iz $I^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty\rangle$. Tada su funkcije $x \longmapsto \min\{f(x), g(x)\}$ i $x \longmapsto \max\{f(x), g(x)\}$ također iz $I^{1,p}(\Omega)$ i

$$(2) \qquad \nabla \min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} \nabla g(x), & \textit{ako je} \quad f(x) > g(x) \\ \nabla f(x), & \textit{ako je} \quad f(x) < g(x) \\ \nabla f(x) = \nabla g(x), & \textit{ako je} \quad f(x) = g(x), \end{cases}$$

$$(3) \qquad \nabla \max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} \nabla f(x), & \textit{ako je} \quad f(x) > g(x) \\ \nabla g(x), & \textit{ako je} \quad f(x) < g(x) \\ \nabla f(x) = \nabla g(x), & \textit{ako je} \quad f(x) = g(x). \end{cases}$$

Dokaz:
Iz formula $\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$ i $\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$ te Teorema 4.2 slijedi sve što se traži ako dokažemo

$$(4) \qquad \nabla f(x) = \nabla g(x) \quad (ss\ x \in \{y \in \Omega \ : \ f(y) = g(y)\}).$$

Definirajmo funkciju $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$h(x) := \max\{f(x) - g(x), 0\} = \frac{1}{2}[f(x) - g(x) + |f(x) - g(x)|].$$

Prema Teoremu 4.2 $\nabla h(x) = \frac{1}{2}(\nabla(f - g))(x)$ ako je $f(x) = g(x)$, a zbog $|h| = h$, opet prema Teoremu 4.2, $\nabla h(x) = \nabla|h|(x) = 0$ ako je $f(x) \leq g(x)$. Dakle, slijedi (4).

Q.E.D.

Korolar 4.4
Neka je f realna funkcija iz $I^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty\rangle$. Tada je $\nabla f(x) = 0$ ($ss\ x \in \{y \in \Omega \ : \ f(y) = 0\}$).

Dokaz:
Tvrdnja slijedi iz (4) za $g = 0$.

Q.E.D.

Spomenimo na kraju jedan važan rezultat (koji će nam trebati u §7, a koji nije baš tako lako dokazati(vidi [1]:Teorem 6.11)).

Teorem 4.5
Neka je $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*, gdje je* Ω *povezan i neka je* $\partial_i T = 0$ *za* $i = 1, \ldots, d$*. Tada postoji konstanta* $C \in \mathbb{C}$ *takva da je* $(\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega))\ T(\varphi) = C \int\limits_{\Omega} \varphi(x)dx$*.*

§5. SOBOLJEVLJEV PROSTOR $H^1(\mathbb{R}^d)$

Funkcija $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ je iz $H^1(\mathbb{R}^d)$ ako je $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ako je njen distribucijski gradijent ∇f funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Prisjetimo se da $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ znači da postoji d skalarnih funkcija $b_1, \ldots, b_d$ iz $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\nabla f = (b_1, \ldots, b_d)$, takvih da za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^d} b_i(x) \varphi(x) dx, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Prostor $H^1(\mathbb{R}^d)$ je linearan, a uz normu

$$\|f\|_{H^1} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdje je $|\nabla f(x)|^2 = \sum\limits_{i=1}^{d} |b_i(x)|^2$ taj prostor je Banachov, dapače Hilbertov (norma zadovoljava relaciju paralelograma).

Lema 5.1
Neka je $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ i neka je $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ omeđena funkcija s omeđenim (prvim) parcijalnim derivacijama. Tada je $\psi f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ i u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi f) = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f + \psi \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{1}$$

Dokaz:
Formula (1) slijedi iz produktnog pravila §4(1), a $\psi f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ slijedi iz (1) i omeđenosti ψ i njenih derivacija.

Q.E.D.

Teorem 5.2 *(Gustoća skupa $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$)*
Ako je $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$, onda postoji niz funkcija $(f^{(i)})$ u $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takav da

$$\|f - f^{(i)}\|_{H^1} \longrightarrow 0.$$

Dokaz:
Neka je $j : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ iz $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da je $\int\limits_{\mathbb{R}^d} j dx = 1$ i neka je za $\varepsilon > 0$ $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, kao u Teoremu 2.8. Sada prema tom teoremu, budući da su f i ∇f iz $L^2(\mathbb{R}^d)$, $f_\varepsilon := j_\varepsilon * f \longrightarrow f$ i $g_\varepsilon := j_\varepsilon * \nabla f \longrightarrow \nabla f$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ kad $\varepsilon \longrightarrow 0$. Dakle, ako je $g_\varepsilon = \nabla f_\varepsilon$, imamo $f_\varepsilon \longrightarrow f$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$. I zaista, $g_\varepsilon = \nabla f_\varepsilon$ prema Teoremu 2.8(7) i činjenici da vrijednosti pripadnih konvolucija u točki možemo pročitati kao djelovanje distribucije–funkcije na odgovarajuću test funkciju.

Prema Teoremu 2.8 $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, no mi trebamo funkcije iz $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Da bismo to postigli krenimo od funkcije $k : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]$ iz $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takve da je $k(x) = 1$ za $|x| \leq 1$ (takva funkcija postoji prema Urysohnovoj lemi (Lema 2.9)).

Definirajmo za $i \in \mathbb{N}$ $g^{(i)}(x) := k\left(\frac{x}{i}\right) f(x)$. Prema Lemi 5.1 $g^{(i)} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ i $\nabla g^{(i)}(x) = \frac{1}{i} f(x) \nabla k\left(\frac{x}{i}\right) + k\left(\frac{x}{i}\right) \nabla f(x)$. Nadalje, ako označimo $C := \max\{|\partial_i k(x)| \ : \ x \in \mathbb{R}^d,\ i = 1, \ldots, d\}$, prema Teoremu 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) vrijedi $\|f - g^{(i)}\|_{L^2}^2 \leq \int\limits_{|x|>i} |f(x)|^2 dx \longrightarrow 0$ i $\|\nabla f - \nabla g^{(i)}\|_{L^2}^2 \leq \int\limits_{|x|>i} |\nabla f(x)|^2 dx + \frac{2dC}{i} \|\nabla f\|_{L^2} \|f\|_{L^2} + \frac{dC^2}{i^2} \|f\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0$. Dakle, $g^{(i)} \longrightarrow f$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Konačno, za $i \in \mathbb{N}$ definirajmo $f^{(i)}(x) := k\left(\frac{x}{i}\right) f_{\frac{1}{i}}(x)$. To su funkcije iz $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ i tvrdimo da $f^{(i)} \longrightarrow f$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$. No,

$$\|f - f^{(i)}\|_{L^2} \leq \|f - g^{(i)}\|_{L^2} + \|g^{(i)} - f^{(i)}\|_{L^2} \leq \|f - g^{(i)}\|_{L^2} + \|f - f_{\frac{1}{i}}\|_{L^2} \longrightarrow 0$$

i

$$\begin{aligned} \|\nabla f - \nabla f^{(i)}\|_{L^2} &\leq \|\nabla f - \nabla g^{(i)}\|_{L^2} + \|\nabla g^{(i)} - \nabla f^{(i)}\|_{L^2} \leq \\ &\leq \|\nabla f - \nabla g^{(i)}\|_{L^2} + \Big(\|\nabla f - \nabla f_{\frac{1}{i}}\|_{L^2}^2 + \\ &+ \frac{2dC}{i} \|\nabla f - \nabla f_{\frac{1}{i}}\|_{L^2} \|f - f_{\frac{1}{i}}\|_{L^2} + \frac{dC^2}{i^2} \|f - f_{\frac{1}{i}}\|_{L^2}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\longrightarrow 0$ (jer $f_{\frac{1}{i}} \longrightarrow f$ u $H^1(\mathbb{R}^d)$).

Q.E.D.

Teorem 5.3
Neka je $f \in I^{1,2}(\mathbb{R}^d)$. Tada vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\nabla|f|(x)\Big|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 dx. \tag{2}$$

Dokaz:
Prema Teoremu 4.2 je $|f| \in I^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ i

$$(\nabla|f|)(x) = \begin{cases} \frac{1}{|f|(x)}(R(x)\nabla R(x) + I(x)\nabla I(x)), & \text{ako je} \quad f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{ako je} \quad f(x) = 0; \end{cases}$$

ovdje R i I označavaju realni i imaginarni dio funkcije f. Sada se uz pomoć Korolara 4.4 lako uočava sljedeća jednakost

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\nabla|f|\Big|^2 dx + \int_{f\neq 0} \frac{|I\nabla R - R\nabla I|^2}{|f|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 dx,$$

a odatle očito slijedi (2).

Q.E.D.

Teorem 5.4 *(Fourierova karakterizacija prostora $H^1(\mathbb{R}^d)$)*
Neka je $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Tada je $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako je funkcija $k \longmapsto |k|\widehat{f}(k)$ iz $L^2(\mathbb{R}^d)$. Ako je tako, onda je $\widehat{\nabla f}(k) = 2\pi i k \widehat{f}(k)$ i prema tome

$$\|f\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(k)|^2 (1 + 4\pi^2|k|^2) dk.$$

Dokaz:
Pretpostavimo prvo da je $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Prema Teoremu 5.2 postoji niz $(f^{(i)})$ u $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ koji konvergira prema f u $H^1(\mathbb{R}^d)$. Zbog $f^{(i)} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ klasičnom parcijalnom integracijom odmah dobivamo $\widehat{\nabla f^{(i)}}(k) = 2\pi i k \widehat{f^{(i)}}(k)$. Prema dokazu Teorema 3.2 (Plancherel) $\widehat{\nabla f^{(i)}} \longrightarrow \widehat{\nabla f}$ i $\widehat{f^{(i)}} \longrightarrow \widehat{f}$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Dvostrukim prijelazom na podniz prema Teoremu 2.5, možemo dobiti da te obje konvergencije budu konvergencije skoro svuda. Dakle, $2\pi i k \widehat{f^{(i)}}(k) \longrightarrow \widehat{\nabla f}(k)$ (ss) i $2\pi i k \widehat{f^{(i)}}(k) \longrightarrow 2\pi i k \widehat{f}(k)$ (ss). Prema tome, $\widehat{\nabla f}(k) = 2\pi i k \widehat{f}(k)$.

Pretpostavimo sada da je funkcija $k \longmapsto |k|\widehat{f}(k)$ iz $L^2(\mathbb{R}^d)$. To znači da je i funkcija $\widehat{h}(k) := 2\pi i k\widehat{f}(k)$ iz $L^2(\mathbb{R}^d)$. Neka je nadalje $h := (\widehat{h})\check{} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Tvrdimo (i onda je dokaz gotov) da je $h = \nabla f$ ili, što je isto, da je $\overline{h} = \nabla \overline{f}$, tj. da je $\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}\nabla\varphi dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \overline{h}\varphi dx$. No, koristeći Parsevalovu formulu (Teorem 3.2) i gore dobivenu formulu za $\widehat{\nabla f^{(i)}}$, pa prema tome i za $\widehat{\nabla\varphi}$, dobivamo

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{f}\nabla\varphi dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{f}}\widehat{\nabla\varphi} dx = 2\pi i \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{f}}(x) x \widehat{\varphi}(x) dx = \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{h}}\widehat{\varphi} dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{h}\varphi dx. \end{aligned}$$

Q.E.D.

§6. SOBOLJEVLJEVE NEJEDNAKOSTI

Općenito Soboljevljeva nejednakost znači ocjenu nižih derivacija funkcije u ovisnosti o njenim višim derivacijama. Mi ćemo ovdje dokazati samo jedan osnovni i jednostavan primjer Soboljevljeve nejednakosti. Za iskaz te nejednakosti potrebna nam je definicija prostora $D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$: funkcija $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ je u $D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ ako je u $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, ako je njen distribucijski gradijent ∇f funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ i ako f iščezava u beskonačnosti u smislu da $\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |f(x)| > a\}$ ima konačnu mjeru za svaki $a > 0$. Lako se vidi da je $H^1(\mathbb{R}^d) \subseteq D^{1,2}(\mathbb{R}^d) \subseteq I^{1,2}(\mathbb{R}^d)$.

Teorem 6.1 *(Soboljevljeva nejednakost)*
Za $d \geq 3$ neka je $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$. Tada je $f \in L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$, gdje je $2^* = \frac{2d}{d-2}$ i vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\|\nabla f\|^2_{L^2} \geq S_d \|f\|^2_{L^{2^*}}, \tag{1}$$

gdje je

$$S_d = \frac{d(d-2)}{4}|\mathbb{S}^d|^{\frac{2}{d}} = \frac{d(d-2)}{4} 2^{\frac{2}{d}} \pi^{1+\frac{1}{d}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{-\frac{2}{d}} \tag{2}$$

($|\mathbb{S}^d|$ je ploština jedinične sfere $\mathbb{S}^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$). U (1) vrijedi jednakost ako i samo ako je f višekratnik funkcije $(\mu^2 + (x-a)^2)^{\frac{-(d-2)}{2}}$, gdje su $\mu \in \mathbb{R}^+$ i $a \in \mathbb{R}^d$ proizvoljni.

Primjedba.
Slična nejednakost vrijedi za L^p norme funkcije ∇f za svaki $p \in \langle 1, d\rangle$, tj.

$$\|\nabla f\|_{L^p} \geq C_{p,d}\|f\|_{L^{p^*}}, \quad \text{gdje je} \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{d}.$$

Dokaz:

$$G_y(x) := \left[(d-2)\left|\mathbb{S}^{d-1}\right|\right]^{-1} |x-y|^{2-d}$$

je Greenova funkcija za Laplaceov operator, tj. $-\Delta G_y = \delta_y$. Koristit ćemo oznake $(G * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} G_y(x) g(y) dy$ i $(f,g) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} g(x) dx$.

Naš cilj je dokazati nejednakost

$$|(f,g)|^2 \le \|\nabla f\|_{L^2}^2 (g, G*g) \tag{3}$$

za $f \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ i $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, gdje je p konjugirani eksponent za 2^*, tj. $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{p} = 1$. Ako to dokažemo, onda imamo (1) jer prema Teoremu 2.2 (Hölderova nejednakost) slijedi $\|f\|_{L^{2^*}} = \sup\{|(f,g)| \ : \ \|g\|_{L^p} \le 1\}$, i dakle, zbog (3),

$$\|f\|_{L^{2^*}}^2 \le \|\nabla f\|_{L^2}^2 \sup\{(g, G*g) \ : \ \|g\|_{L^p} \le 1\}$$

što je konačno prema Teoremu 2.14 i odatle odmah slijedi (1) za $f \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$.

Prvo ćemo nejednakost (3) dokazati za $f \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ i $g \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Budući da su f i g iz $L^2(\mathbb{R}^d)$, Parsevalova formula (Teorem 3.2) daje

$$(f,g) = (\widehat{f}, \widehat{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big(|k|\overline{\widehat{f}(k)}\Big)\Big(|k|^{-1}\widehat{g}(k)\Big) dk. \tag{4}$$

Prema Korolaru 3.7 imamo $h(k) := c_{d-1}\left(|x|^{1-d} * g\right)^{\widehat{}}(k) = c_1 |k|^{-1}\widehat{g}(k)$. Prema Teoremu 3.2 (Plancherel) i Teoremu 2.14, koristeći Teorem 1.4 (Fubini) i činjenicu da je(vidi §3(12))

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |z|^{1-d}|y-z|^{1-d} dz = \frac{c_{d-2}c_1^2}{c_2 c_{d-1}^2}|y|^{2-d},$$

dobivamo da je h iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ i sada, kad u (4) primijenimo Teorem 2.2 (Hölderova nejednakost) dobivamo gornju među

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |k|^2 |\widehat{f}(k)|^2 dk\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |k|^{-2} |\widehat{g}(k)|^2 dk\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prvi faktor te međe jednak je $(2\pi)^{-1}\|\nabla f\|_{L^2}$ prema Teoremu 5.4 (Fourierova karakterizacija prostora $H^1(\mathbb{R}^d)$), a drugi faktor jednak je $2\pi(g, G*g)^{\frac{1}{2}}$ prema Korolaru 3.7. Tako smo dokazali (3) za $f \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ i $g \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Prema Teoremu 2.10 $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ je gust u $L^p(\mathbb{R}^d)$ pa pomoću aproksimirajućeg niza, koristeći Teorem 2.14 lako dobivamo da (3) vrijedi za

$g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Ako sada uzmemo $g := |f|^{2^*-2}f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, iz (3) i Teorema 2.14(9),(10) izlazi

(5) $$\|f\|_{L^{2^*}}^{2\cdot 2^*} \leq \|\nabla f\|_{L^2}^2 \left(|f|^{2^*-2}f, G * \left(|f|^{2^*-2}f\right)\right) \leq e_d \|\nabla f\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^{2^*}}^{2(2^*-1)},$$

gdje je

$$e_d = \left[(d-2)\left|\mathbb{S}^{d-1}\right|\right]^{-1} \pi^{\frac{d}{2}-1} \left[\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)\right]^{-1} \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(d)}\right\}^{\frac{-2}{d}}.$$

Koristeći činjenicu da je $\left|S^{d-1}\right| = 2\pi^{\frac{d}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\right]^{-1}$ i duplikacijsku formulu za Γ–funkciju, tj.

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{\frac{-1}{2}} 2^{2z-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

dobivamo (1) i (2) za $f \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$.

Da bismo pokazali da (1) vrijedi za $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, primijetimo prvo da prema Teoremu 5.3 možemo pretpostaviti da je f nenegativna funkcija. Promatrajmo sada funkciju

$$f_c(x) := \min\left\{\max\{f(x)-c, 0\}, \frac{1}{c}\right\},$$

gdje je $c > 0$ konstanta. Budući da je f_c omeđena i da skup na kojem ona ne iščezava ima konačnu mjeru, slijedi $f_c \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$. Nadalje, prema Korolaru 4.3 $\nabla f_c(x) = \nabla f(x)$ za svaki x za koji je $c < f(x) < x + \frac{1}{c}$, a inače je $\nabla f_c(x) = 0$. Dakle, $f_c \in H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$, tj. za f_c vrijedi (1). Sada prema (1) i Teoremu 1.1 (o monotonoj konvergenciji) imamo

$$\|\nabla f\|_{L^2}^2 = \lim_{c \to 0} \|\nabla f_c\|_{L^2}^2 \geq S_d \lim_{c \to 0} \|f_c\|_{L^{2^*}}^2 = S_d \|f\|_{L^{2^*}}^2,$$

tj. $f \in L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ i vrijedi (1). Na isti način vidi se da (5), tj. (2) vrijedi za svaku nenegativnu funkciju iz $D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$.

Činjenica da (5) vrijedi za svaku funkciju iz $D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ može se iskoristiti da se utvrde svi slučajevi jednakosti u (1). Da bi u (1) pa dakle i u (5) vrijedila jednakost, nužno je da $|f|^{2^*-2}f$ povlači jednakost u nejednakosti iz Teorema 2.14, primijenjenoj u (5), tj. f mora biti višekratnik funkcije $(\mu^2 + (x-a)^2)^{\frac{-(d-2)}{2}}$, gdje su $\mu \in \mathbb{R}^+$ i $a \in \mathbb{R}^d$ proizvoljni. Uvrštavanje pokazuje da funkcije tog tipa zaista daju jednakost u (1).

Q.E.D.

§7. JEDNA PRIMJENA SOBOLJEVLJEVE NEJEDNAKOSTI

Niz (f_n) u $D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ konvergira slabo prema $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ ako(definicija!) $\partial_i f_n \rightharpoonup \partial_i f$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ za $i = 1, \ldots, d$. Sada ćemo iskoristiti Teorem 6.1 (Soboljevljeva nejednakost) da dokažemo kako slaba konvergencija u $D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ za $d \geq 3$ povlači (jaku) konvergenciju na skupovima konačne mjere u $L^p(\mathbb{R}^d)$ za $p \in [1, 2^*\rangle$, i konvergenciju skoro svuda na podnizu.

Teorem 7.1
Neka je (f_n) niz u $D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ za $d \geq 3$ i neka $\partial_i f_n \rightharpoonup v_i$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ za $i = 1, \ldots, d$. Tada je $(v_1, \ldots, v_d) =: v = \nabla f$ za neku jedinstvenu funkciju $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$. Nadalje, neka je $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ i neka je $\lambda^d(B) < \infty$. Tada $\chi_B f_n \longrightarrow \chi_B f$ u $L^p(\mathbb{R}^d)$ za $p \in [1, 2^*\rangle$.

Dokaz:
Prvo dokazujemo da je niz (f_n) omeđen u $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$. To slijedi iz Teorema 2.7 prema kojem je niz (∇f_n) omeđen u $L^2(\mathbb{R}^d)$ i zatim iz Teorema 6.1 (Soboljevljeva nejednakost). Prema tome, prema Teoremu 2.12 imamo podniz (f_{n_m}) takav da $f_{n_m} \rightharpoonup f$ u $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$. Sada dokazujemo da $f_n \rightharpoonup f$ u $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$. Uzmimo prvo bilo koji podniz (f_{n_l}) takav da $f_{n_l} \rightharpoonup g$ u $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$. Prema definiciji slabe konvergencije u L^p–prostorima

$$(1) \qquad (\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)) \qquad \Big(-\int\limits_{\mathbb{R}^d} f \partial_i \varphi dx = -\lim_m \int\limits_{\mathbb{R}^d} f_{n_m} \partial_i \varphi dx = = \lim_m \int\limits_{\mathbb{R}^d} \partial_i f_{n_m} \varphi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} v_i \varphi dx \Big),$$

a slično računamo i za g, tj. $\int\limits_{\mathbb{R}^d} (f-g)\partial_i \varphi dx = 0$ što znači da je $\partial_i(f-g) = 0$ za $i = 1, \ldots, d$. Prema Teoremu 4.5 $f - g$ je konstanta, a budući da su $f, g \in L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$, ta konstanta jednaka je nuli (tako se dokazuje i u teoremu tražena jedinstvenost). Dakle, svaki podniz niza (f_n) koji u $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ slabo konvergira ima isti slabi limes f i, prema tome $f_n \rightharpoonup f$ u $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ (u suprotnom, postojao bi $L \in L^{2^*}(\mathbb{R}^d)'$ takav da nije istina $L(f_n) \longrightarrow L(f)$, tj. postojao bi $\varepsilon > 0$ takav da bi $(\forall\, n_0 \in \mathbb{N})$ $(\exists\, n \geq n_0)$ $L(f_n) \notin K(L(f), \varepsilon)$, tj. postojao bi podniz (f_{n_k}) takav da bi $(\forall\, k \in \mathbb{N})$ $L(f_{n_k}) \notin K(L(f), \varepsilon)$, ali prema Teoremu 2.12 postoji podniz $(f_{n_{k(j)}})$ takav da $f_{n_{k(j)}} \rightharpoonup f$ u $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ i tu je kontradikcija). Konačno, prema (1) je $\nabla f = v$.

Neka je sada $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ i neka je $\lambda^d(B) < \infty$. Tvrdimo da je

$$(\forall\, f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^d))\ (\forall\, t \in \mathbb{R}^+)\ \|\chi_B(f - e^{\Delta t} f)\|_{L^2} \leq \|\nabla f\|_{L^2}\sqrt{t}, \tag{2}$$

gdje je

$$(e^{\Delta t} f)(x) := (4\pi t)^{\frac{-d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} f(y)dy$$

(posljednji integral postoji prema Teoremu 2.2 (Hölderova nejednakost) i Teoremu 6.1).

Prvo dokazujemo (2) za $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Prema Teoremu 3.5, njegovom dokazu te Teoremu 3.1 imamo $e^{\Delta t} f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $\widehat{e^{\Delta t}} f(k) = \exp[-4\pi^2 |k|^2 t]\widehat{f}(k)$ pa sada prema Parsevalovoj formuli (Teorem 3.2) slijedi

$$\begin{aligned} \|f - e^{\Delta t} f\|_{L^2}^2 &= \|f \widehat{- e^{\Delta t}} f\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f} - \widehat{e^{\Delta t}} f\|_{L^2}^2 = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(k)|^2 (1 - \exp[-4\pi^2 |k|^2 t])^2 dk \leq \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(k)|^2 (1 - \exp[-4\pi^2 |k|^2 t]) dk. \end{aligned}$$

Konačno, iz činjenice da je $1 - \exp[-4\pi^2 |k|^2 t] \leq 4\pi^2 |k|^2 t$ pomoću Teorema 5.4 slijedi

$$\|f - e^{\Delta t} f\|_{L^2}^2 \leq \|\widehat{\nabla f}\|_{L^2}^2 t$$

pa tražena tvrdnja slijedi iz Teorema 3.2 (Plancherel).

Rastavljanjem funkcije f na realni i imaginarni dio pomoću Teorema 5.3 (daljnjim rastavljanjem na pozitivne i negativne dijelove) zaključujemo da je dovoljno dokazati (2) za nenegativnu funkciju $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$. Promatrajmo sada funkciju

$$f_c(x) := \min\left\{\max\{f(x) - c, 0\}, \frac{1}{c}\right\},$$

gdje je $c > 0$ konstanta. U dokazu Teorema 6.1 pokazali smo da je $f_c \in H^1(\mathbb{R}^d)$ i da je $\lim_{c\to 0} \|\nabla f_c\|_{L^2} = \|\nabla f\|_{L^2}$. Nadalje, prema Lemi 1.2 (Fatou) dobivamo $\liminf_{c\to 0} \|f_c - e^{\Delta t} f_c\|_{L^2} \geq \|f - e^{\Delta t} f\|_{L^2}$. Sve zajedno, dokazali smo (2). Primijetimo još da smo dobili i (za $t \in \mathbb{R}^+$)

$$(\forall\, f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^d))\ f - e^{\Delta t} f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

U cilju da dokažemo drugu tvrdnju teorema, dokažimo prvo da za $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, $\lambda^d(B) < \infty$ i $f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ vrijedi $\chi_B f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ za $p \in [1, 2^*\rangle$. To lako slijedi iz činjenice da je $f \in L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$ (Teorem 6.1) i Teorema 2.2 (Hölderova nejednakost).

Dokažimo sada drugu tvrdnju teorema za $p = 2$. Prema Teoremu 2.7 $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ \|\nabla f_n\|_{L^2} < C$ za neki konačni $C > 0$. Prema (2) čitamo $\|\chi_B(f_n - e^{\Delta t} f_n)\|_{L^2} \leq C\sqrt{t}$. Pretpostavimo da za svaki $t \in \mathbb{R}^+$ $g_n := \chi_B e^{\Delta t} f_n \longrightarrow g := \chi_B e^{\Delta t} f$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ i dokažimo traženu tvrdnju. Očito je

$$\|\chi_B(f_n - f)\|_{L^2} \leq \|\chi_B(f_n - g_n)\|_{L^2} + \|\chi_B(g_n - g)\|_{L^2} + \|\chi_B(g - f)\|_{L^2}.$$

Prema (2) i Teoremu 2.6 koji povlači da je $\|\nabla f\|_{L^2} \leq \liminf_n \|\nabla f_n\|_{L^2}$ imamo sada

$$\|\chi_B(f_n - f)\|_{L^2} \leq 2C\sqrt{t} + \|\chi_B(g_n - g)\|_{L^2}.$$

Konačno, za dani $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ izaberimo $t > 0$ takav da je $2C\sqrt{t} < \frac{\varepsilon}{2}$ i zatim $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $(\forall\, n \geq n_0)\ \|\chi_B(g_n - g)\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada je $(\forall\, n \geq n_0)$ $\|\chi_B(f_n - f)\|_{L^2} < \varepsilon$ i tražena tvrdnja je dokazana.

Ostaje dokazati da $g_n \longrightarrow g$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$. Kao prvo, prema Teoremu 2.2 (Hölderova nejednakost) imamo

$$|g_n(x)| \leq (4\pi t)^{\frac{-d}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left[-|y|^2 q/4t\right] dy \right)^{\frac{1}{q}} \|f_n\|_{L^{2^*}} \chi_B(x), \tag{3}$$

gdje je $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{2^*}$ i odatle slijedi $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ g_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, a na isti način se vidi i $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Analogno kao (3) dobivamo

$$|g_n(x) - g(x)| \leq (4\pi t)^{\frac{-d}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left[-|y|^2 q/4t\right] dy \right)^{\frac{1}{q}} (\|f_n\|_{L^{2^*}} + \|f\|_{L^{2^*}})\, \chi_B(x). \tag{4}$$

Prema Teoremu 6.1 (Soboljevljeva nejednakost) imamo

$$\|f_n\|_{L^{2^*}} \leq S_d^{\frac{-1}{2}} \|\nabla f_n\|_{L^2} \leq S_d^{\frac{-1}{2}} C$$

pa iz (4) slijedi

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})\ |g_n(x) - g(x)|^2 \leq D\chi_B(x)$$

za neki konačni $D > 0$. S druge strane, g_n konvergira (po točkama) prema g jer je za svaki $x \in \mathbb{R}^d$ funkcija $y \longmapsto \exp[-|x-y|^2/4t]$ iz $L^q(\mathbb{R}^d)$, gdje je $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{2^*}$ i jer smo u ovom dokazu dobili da $f_n \rightharpoonup f$ u $L^{2^*}(\mathbb{R}^d)$. Dakle, $g_n \longrightarrow g$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ prema Teoremu 1.3 (o dominiranoj konvergenciji) i tvrdnja teorema za $p = 2$ je dokazana.

Za $p \in [1, 2\rangle$ prema Korolaru 2.3 imamo

$$\|\chi_B(f_n - f)\|_{L^p} \leq \|\chi_B\|_{L^r} \|\chi_B(f_n - f)\|_{L^2},$$

gdje je $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ i odatle slijedi tvrdnja teorema u tom slučaju.

Za $p \in \langle 2, 2^*\rangle$ prema Korolaru 2.4 vrijedi

$$\|\chi_B(f_n - f)\|_{L^p} \leq \|\chi_B(f_n - f)\|_{L^2}^{\alpha} \|\chi_B(f_n - f)\|_{L^{2^*}}^{1-\alpha},$$

gdje je $\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) / \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \in \langle 0, 1\rangle$. Nadalje, prema Teoremu 6.1 (Soboljevljeva nejednakost) imamo

$$\begin{aligned} \|\chi_B(f_n - f)\|_{L^{2^*}} &\leq \|f_n - f\|_{L^{2^*}} \leq \|f_n\|_{L^{2^*}} + \|f\|_{L^{2^*}} \leq \\ &\leq S_d^{\frac{-1}{2}} \left(\|\nabla f_n\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2}\right) \leq \\ &\leq S_d^{\frac{-1}{2}} \left(C + \|\nabla f\|_{L^2}\right) =: C' \in \langle 0, \infty\rangle. \end{aligned}$$

Konačno, dobivamo

$$\|\chi_B(f_n - f)\|_{L^p} \leq (C')^{1-\alpha} \|\chi_B(f_n - f)\|_{L^2}^{\alpha} \longrightarrow 0.$$

Q.E.D.

Korolar 7.2

Neka je (f_n) niz koji zadovoljava pretpostavke Teorema 7.1. Tada postoji podniz (f_{n_m}) takav da $f_{n_m}(x) \longrightarrow f(x)$ (ss), gdje je f funkcija iz Teorema 7.1.

Dokaz:
Označimo $B_k = K(0,k) \subseteq \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$. Prema Teoremu 7.1 i Teoremu 2.5 postoji podniz $(f_{n_1(j)})$ niza (f_n) takav da $f_{n_1(j)}(x) \longrightarrow f(x)$ $(ss\ x \in B_1)$. Analogno postoji podniz $(f_{n_2(j)})$ niza $(f_{n_1(j)})$ takav da $f_{n_2(j)}(x) \longrightarrow f(x)$ $(ss\ x \in B_2)$, i tako dalje. Sada $f_{n_j(j)}(x) \longrightarrow f(x)$ (ss) jer $(\forall\, x \in \mathbb{R}^d)$ $(\exists\, k \in \mathbb{N})$ $x \in B_k$ i jer je prebrojiva unija zanemarivih skupova zanemariv skup.

Q.E.D.

Literatura

[1] E. H. Lieb, M. Loss: Analysis, American Mathematical Society, 1997.

[2] N. Antonić, M. Vrdoljak: Mjera i integral, PMF, Zagreb, 2001.

[3] G. B. Folland: Real analysis, Wiley, 1985.

[4] S. Mardešić: Matematička analiza I, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[5] D. W. Strook: A concise introduction to the theory of integration, Birkhäuser, 1998.

[6] E. H. Lieb: Gaussian kernels have only Gaussian maximizers, Invent. Math. 102, 1990.