Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ivan Barbančić

Topološka svojstva prostora distribucija

Diplomski rad

Zagreb, 14. travnja 2014.

Predgovor

Ideja ovog diplomskog rada je opisati topologiju prostora distribucija, neprekidni linearni funkcionali na prostoru probnih funkcija, koji je u našem slučaju upravo prostor $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$. Postoji i nekoliko zanimljivih potprostora distribucija (kao što su distribucije s kompaktnim nosačem i temperirane distribucije), a dobiju se kao duali proširenih prostora probnih funkcija.

Premda se prve ideje poopćenja pojma derivacije pojavljuju i ranije, smatra se da je prvi koji je počeo proučavati poopćene funkcije bio Sergei Sobolev da bi nešto kasnije Laurent Schwartz proširio Sobovljev rad i uveo pojam distribucije. Ovaj rad se prvenstveno temelji na Schwartzovoj knjizi Théorie des distributions.

Želio bih se zahvaliti mentoru prof. dr. sc. Nenadu Antoniću što me je strpljivo vodio kroz pisanje ovog diplomskog rada. Zahvaljujem se roditeljima što su mi omogućili da studiram ono što želim i podršku kroz cijeli studij te bratu na uvjek zanimljivim komentarima. Hvala Mariji na velikoj podršci i motivaciji tokom pisanja ovog diplomskog.

Sadržaj

I. Topološki vektorski prostori

1. Kako zadati općenitu topologiju?

Otvoreni i zatvoreni skupovi

Topološka struktura na skupu X se zadaje preko familije $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, svih *otvorenih skupova*, koju nazivamo *topologijom*, a nužno zadovoljava sljedeća svojstva:

(O-1) τ je zatvorena na proizvoljne unije
(O-2) τ je zatvorena na konačne presjeke
(O-3) $\emptyset, X \in \tau$.

Ukoliko su τ_1 i τ_2 topologije na istom skupu, jača (slabija) je ona koja je nadskup (podskup) druge (ukoliko su usporedive).

U topološkom prostoru (X, τ) *zatvoren skup* je komplement nekog otvorenog; familiju svih takvih označimo s $\mathcal{F}$.

Množina $\mathcal{F}$ u topološkom prostoru zadovoljava sljedeća svojstva:

(Z-1) $\mathcal{F}$ je zatvorena na proizvoljne presjeke
(Z-2) $\mathcal{F}$ je zatvorena na konačne unije
(Z-3) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.

Štoviše, ako neka familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zadovoljava gornja svojstva, onda familija svih komplemenata elemenata $\mathcal{F}$ čini topologiju na X.

Zatvorenje (*klauzura*) skupa E u topološkom prostoru (X, τ) je

$$\mathsf{Cl}\, E := \bigcap_{E \subseteq F \in \mathcal{F}} F \ ,$$

te je taj operator monoton na inkluziju u $\mathcal{P}(X)$ i $\mathsf{Cl}\,(A \cap B) \subseteq \mathsf{Cl}\, A \cap \mathsf{Cl}\, B$.

Unutrašnjost skupa E u topološkom prostoru (X, τ) je

$$\mathsf{Int}\, E := \bigcup_{E \supseteq G \in \tau} G \ .$$

Pojmovi zatvorenja i unutrašnjosti skupa su međusobno dualni na isti način kao što su dualni pojmovi otvoren i zatvoren skup, tj. vrijedi:

$$c(\mathsf{Int}\, E) = \mathsf{Cl}\,(cE) \ .$$
$$c(\mathsf{Cl}\, E) = \mathsf{Int}\,(cE) \ .$$

Rub skupa E u topološkom prostoru (X, τ) je:

$$\mathsf{Fr}\, E := \mathsf{Cl}\, E \cap \mathsf{Cl}\,(cE) \ .$$

Okoline

Okolina točke x u topološkom prostoru (X, τ) je skup $U \subseteq X$ za koji vrijedi:

$$(\exists\, V \in \tau) \quad x \in V \subseteq U \ .$$

Familija $\mathcal{U}_x$ svih okolina točke x je *sustav okolina* u x.

U topološkom prostoru (X,τ) sustav okolina $\mathcal{U}_x$ proizvoljne točke $x\in X$ ima sljedeća svojstva:

(SO-1) $U\in\mathcal{U}_x \implies x\in U$
(SO-2) $U,V\in\mathcal{U}_x \implies U\cap V\in\mathcal{U}_x$
(SO-3) $(\forall\, U\in\mathcal{U}_x)(\exists\, V\in\mathcal{U}_x)(\forall\, y\in V)\quad U\in\mathcal{U}_y$
(SO-4) $U\in\mathcal{U}_x$ & $U\subseteq V \implies V\in\mathcal{U}_x$
(SO-5) $G\in\tau \iff (\forall\, x\in G)(\exists\, U\in\mathcal{U}_x)\quad U\subseteq G$.

Obratno, ako je svakoj točki x skupa X pridružen neprazan skup $\mathcal{U}_x\subseteq\mathcal{P}(X)$ za koji vrijedi (SO-1)–(SO-4), a otvorene skupove definiramo s pomoću (SO-5), onda X postaje topološki prostor u kojem je sustav okolina svake točke x upravo $\mathcal{U}_x$.

Baza okolina u točki x topološkog prostora (X,τ) je familija $\mathcal{B}_x\subseteq\mathcal{U}_x$ za koju vrijedi:

$$(\forall\, U\in\mathcal{U}_x)(\exists\, V\in\mathcal{B}_x)\quad V\subseteq U\ .$$

Baza okolina $\mathcal{B}_x$ proizvoljne točke x prostora (X,τ) ima sljedeća svojstva:

(BO-1) $U\in\mathcal{B}_x \implies x\in U$
(BO-2) $(\forall\, U_1,U_2\in\mathcal{B}_x)(\exists\, U_3\in\mathcal{B}_x)\quad U_3\subseteq U_1\cap U_2$
(BO-3) $(\forall\, U\in\mathcal{B}_x)(\exists\, U_0\in\mathcal{B}_x)(\forall\, y\in U_0)(\exists\, W\in\mathcal{B}_y)\quad W\subseteq U$
(BO-4) $G\in\tau \iff (\forall\, x\in G)(\exists\, U\in\mathcal{B}_x)\quad U\subseteq G$.

Obratno, ako je svakoj točki x skupa X pridružena neprazna množina $\mathcal{B}_x\subseteq\mathcal{P}(X)$ koja zadovoljava (BO-1)–(BO-3), a otvorene skupove definiramo s (BO-4), onda X postaje topološki prostor u kojem je baza okolina (jedna od mogućih) proizvoljne točke x upravo $\mathcal{B}_x$.

Ako je (X,τ) topološki prostor s izabranom bazom okolina $\mathcal{B}_x$ u svakoj točki $x\in X$, onda vrijedi:

$$G\in\tau \iff (\forall\, x\in G)(\exists\, B\in\mathcal{B}_x)\quad B\subseteq G$$

Međuodnos jače i slabije topologije se također može pročitati iz baza okolina, za što nam je potreban sljedeći *Hausdorffov kriterij*:

Neka su τ_1,τ_2 topologije na X, s bazama okolina $\mathcal{B}^1_x$ i $\mathcal{B}^2_x$ u točki $x\in X$. Tada je τ_1 slabija od τ_2 ako i samo ako vrijedi:

$$(\forall\, x\in X)(\forall\, B^1\in\mathcal{B}^1_x)(\exists\, B^2\in\mathcal{B}^2_x)\quad B^2\subseteq B^1\ .$$

Gomilište skupa A u topološkom prostoru (X,τ) je svaka točka $x\in X$ čija svaka (bazična) okolina siječe skup $A\setminus\{x\}$. Skup A' svih gomilišta A je *izveden skup* skupa A.

Zatvarač skupa je skup svih njegovih točaka i gomilišta.

Skup je zatvoren ako i samo ako sadrži svoj izveden skup.

Baze i potprostori

Baza topologije τ je $\mathcal{B}\subseteq\tau$ takav da se svaki element iz τ može prikazati kao unija neke potfamilije $\mathcal{B}$. Očito da je dovoljno provjeriti da vrijedi:

$$(\forall\, U\in\tau)(\forall\, x\in U)(\exists\, B\in\mathcal{B})\quad x\in B\subseteq U\ .$$

$\mathcal{B}$ je baza za neku topologiju na X ako i samo ako vrijedi da je $\mathcal{B}$ pokrivač za X, te

$$(\forall\, B_1,B_2\in\mathcal{B})(\forall\, x\in B_1\cap B_2)(\exists\, B_3\in\mathcal{B})\quad x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2\ .$$

$\mathcal{B} \subseteq \tau$ je baza za τ ako i samo ako je za svaki $x \in X$ familija $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ baza okolina x.

Podbaza topologije τ je familija $\mathcal{C} \subseteq \tau$ takva da familija svih konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{C}$ tvori bazu za τ.

Svaki pokrivač X čini bazu za neku topologiju na X.

Na $A \subseteq X$ možemo definirati $\tau' := \{U \cap A : U \in \tau\}$; to je topologija na A, *relativna topologija* naslijeđena s (X, τ). Topološki prostor (A, τ') je tada *potprostor* (X, τ).

I drugi se osnovni topološki pojmovi prenose presjekom, poput:

a) $G \in \tau'$ akko $(\exists\, U \in \tau) \quad G = U \cap A$
b) $E \in \mathcal{F}'$ akko $(\exists\, F \in \mathcal{F}) \quad E = F \cap A$
c) $\mathsf{Cl}_{\tau'} E = A \cap \mathsf{Cl}\, E$
d) $V \in \mathcal{U}_x^{\tau'}$ akko $(\exists\, U \in \mathcal{U}_x) \quad V = U \cap A$
e) $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}_x\}$ je baza okolina $x \in A$ u τ'
f) $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ je baza topologije τ', ako je $\mathcal{B}$ baza za τ.

Valja uočiti da se operatori unutrašnjosti i ruba općenito ne mogu prenijeti na takav način.

Neprekinute funkcije

Topološki prostori su objekti u topološkoj kategoriji; pripadni morfizmi su neprekinute funkcije.

Funkcija $f : X \longrightarrow Y$ (gdje su (X, τ) i (Y, τ') topološki prostori) je *neprekinuta u točki* $x_0 \in X$ ako vrijedi

$$(\forall\, V \in \mathcal{U}_{f(x_0)})(\exists\, U \in \mathcal{U}_{x_0}) \quad f^{\rightarrow}(U) \subseteq V\ .$$

Funkcija je *neprekinuta na* X ako je neprekinuta u svakoj točki $x_0 \in X$.

Definicija se može iskazati i zamjenom okolina s bazičnim okolinama (tako da $\mathcal{U}_{x_0}, \mathcal{U}_{f(x_0)}$ redom zamijenimo s $\mathcal{B}_{x_0}, \mathcal{B}_{f(x_0)}$).

Neprekinutost možemo karakterizirati i na sljedeća tri načina:

a) Praslika proizvoljnog otvorenog skupa u Y je otvoren skup u X.
b) Praslika proizvoljnog zatvorenog skupa u Y je zatvoren skup u X.
c) $(\forall\, E \subseteq X) \quad f^{\rightarrow}(\mathsf{Cl}_{\tau}(E)) \subseteq \mathsf{Cl}_{\tau'} f^{\rightarrow}(E)$.

Kompozicija neprekinutih funkcija je neprekinuta.

Restrikcija neprekinute funkcije na potprostor je ponovno neprekinuta funkcija.

Neprekinuta bijekcija f, čiji je inverz f^{-1} također neprekinuta funkcija, je *homeomorfizam* (topološki izomorfizam).

Ako je f homeomorfizam samo na svoju sliku u Y, onda kažemo da je X *uložen* u Y.

Tvrdnja da je bijekcija $f : X \longrightarrow Y$ homeomorfizam ekvivalentna je svakoj od sljedećih tvrdnji:

a) $(\forall\, E \subseteq X) \quad E \in \tau \quad \Longleftrightarrow \quad f^{\rightarrow}(E) \in \tau'$
b) $(\forall\, E \subseteq X) \quad E \in \mathcal{F} \quad \Longleftrightarrow \quad f^{\rightarrow}(E) \in \mathcal{F}'$
c) $(\forall\, E \subseteq X) \quad f^{\rightarrow}(\mathsf{Cl}_{\tau} E) = \mathsf{Cl}_{\tau'} f^{\rightarrow}(E)$.

Na klasi topoloških prostora međusobno homeomorfni prostori čine klasu ekvivalencije.

Produktni prostori i slabe topologije

Definirajmo najprije na skupovnoj razini *Kartezijev produkt* proizvoljne familije skupova $(X_\alpha, \alpha \in A)$

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha := \left\{ x : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : (\forall\, \alpha \in A) \quad x(\alpha) \in X_\alpha \right\} .$$

Najčešće označujemo $x_\alpha := x(\alpha)$, i x_α zovemo *α-tom koordinatom x*. *Projekcija* na β-i faktor je

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \longrightarrow X_\beta \ , \quad \pi_\beta(x) = x_\beta \ .$$

Tvrdnja da je Kartezijev produkt neprazne familije nepraznih skupova neprazna počiva na *aksiomu izbora* (te su tvrdnje, zapravo, ekvivalentne).

Baza *Tihonovljeve (produktne) topologije* na Kartezijevom produktu $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ topoloških prostora $(X_\alpha, \alpha \in A)$ sastoji se od svih produkata

$$U = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha \ , \quad U_\alpha \in \tau_\alpha \ ,$$

s time da je svaki $U_\alpha = X_\alpha$, osim najviše konačno mnogo njih. Umjesto $U_\alpha \in \tau_\alpha$ možemo uzeti i U_α iz neke baze topologije τ_α.

Uočimo da se skup U, čiji su faktori čitavi prostori osim za komponente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, može zapisati u obliku

$$U = \pi_{\alpha_1}^{\leftarrow}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{\leftarrow}(U_{\alpha_n}) \ .$$

Stoga je produktna topologija upravo ona čija je podbaza familija

$$\left\{ \pi_\alpha^{\leftarrow}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in A \right\}$$

(ponovno je dovoljno U_α uzimati iz neke čvrste podbaze topologije τ_α).

U slučaju konačnog skupa A, produktna se topologija podudara s *kutijastom*, kojoj je baza

$$\left\{ \prod_{\alpha\in A} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha \right\}$$

(općenito, ta je topologija dobro definirana, ali prejaka za zanimljive primjene).

Za preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ kažemo da je

a) *otvoreno*, ako je $(\forall\, U \in \tau) \quad f^{\rightarrow}(U) \in \tau'$

b) *zatvoreno*, ako je $(\forall\, F \in \mathcal{F}) \quad f^{\rightarrow}(F) \in \mathcal{F}'$.

Bijekcija f je otvorena akko je zatvorena akko joj je inverz neprekinut; dakle, homeomorfizam akko je neprekinuta i otvorena, odnosno neprekinuta i zatvorena.

Projekcija π_β je neprekinuta i otvorena, ali ne mora biti zatvorena. Tihonovljeva topologija je najslabija topologija na $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ za koju je svaka projekcija π_β neprekinuta.

Funkcija $f : X \longrightarrow \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ je neprekinuta ako i samo ako je $\pi_\alpha \circ f$ neprekinuta, za proizvoljni $\alpha \in A$.

Sljedeća konstrukcija je poopćenje prethodne, a često ćemo je koristiti.

Neka je zadan skup X, familija topoloških prostora $(X_\alpha, \alpha \in A)$ i funkcija $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$.

Slaba topologija na X inducirana familijom $(f_\alpha, \alpha \in A)$ je najslabija topologija na X (presjek familije topologija ponovno je topologija) u kojoj je svaka od funkcija f_α neprekinuta.

To je očito upravo ona topologija za koju je familija

$$\left\{ f_\alpha^{\leftarrow}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in A \right\}$$

podbaza. Produktna topologija na $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ je upravo slaba topologija inducirana projekcijama.

Za provjeru je li postojeća topologija na X zapravo slaba topologija s obzirom na neku familiju funkcija, koriste se sljedeći rezultati.

Najprije definirajmo da familija funkcija $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ *razdvaja točke od zatvorenih skupova* na topološkom prostoru X ako

$$(\forall\, F \in \mathcal{F})(\forall\, x \in cF)(\exists\, \alpha \in A) \quad f_\alpha(x) \notin \mathsf{Cl}\, f_\alpha^{\rightarrow}(F) \;.$$

Teorem 1. *Familija neprekinutih funkcija $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ razdvaja točke od zatvorenih skupova na topološkom prostoru X akko familija skupova $\{f_\alpha^{\leftarrow}(V) : \alpha \in A \;\&\; V \in \tau_\alpha\}$ čini bazu topologije na X.*

∎

Korolar 1. *Ako familija neprekinutih funkcija $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ razdvaja točke od zatvorenih skupova na topološkom prostoru X, onda se topologija na X podudara sa slabom topologijom određenom familijom $f_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$.*

Ako je X i (T_1) prostor, onda je evaluacijska funkcija ulaganje (tj. homeomorfizam na sliku).

∎

2. Moore-Smithova konvergencija

Hipernizovi

Znamo da u $\mathbf{R}^d$ zatvarač skupa možemo zadati kao skup koji sadrži sve limese konvergentnih nizova. Kako topologiju možemo zadati preko zatvarača to vrijedi i za nizove na $\mathbf{R}^d$. Općenito to ne vrijedi te da bismo taj rezultat proširili na topološke prostore uvodimo pojam hiperniza koji je poopćenje niza.

Refleksivna i tranzitivna relacija (najčešće u oznaci $\leqslant$) na skupu X je *parcijalan preduređaj*. Parcijalno preduređen (ovdje nam nije nužno pretpostaviti da je $\preccurlyeq$ antisimetrična relacija) skup $(\Lambda, \preccurlyeq)$ je *usmjeren* ako svaka dva elementa u Λ imaju gornju među u Λ. (Posebno, svaka je rešetka usmjeren skup.) Relaciju $\preccurlyeq$ u tom slučaju obično nazivamo *usmjerenjem*. Ako je $\lambda \preccurlyeq \lambda'$ i $\lambda \neq \lambda'$ pišemo $\lambda \prec \lambda'$.

Ukoliko za domenu funkcije uzmemo usmjeren skup, dobivamo hiperniz—poopćenje niza. Točnije, *hiperniz (mreža)* u skupu S je svaka funkcija $h : \Lambda \longrightarrow S$ s usmjerenog skupa u S. Umjesto $h(\lambda)$ obično pišemo h_λ, kao i za nizove.

Ako za kodomenu posebno uzmemo topološki prostor X, možemo govoriti o konvergenciji: hiperniz (x_λ) je *konvergentan* i ima *limes* x ako vrijedi:

$$(\forall\, U \in \mathcal{U}_x)(\exists\, \lambda_0 \in \Lambda)(\forall\, \lambda \succcurlyeq \lambda_0) \quad x_\lambda \in U \;.$$

Možemo reći da je x_λ *rezidualno* u U.

Podskup M usmjerenog skupa $(\Lambda, \preccurlyeq)$ zovemo *kofinalnim* ako je $(\forall\,\lambda \in \Lambda)(\exists\,\mu \in M)\quad \lambda \preccurlyeq \mu$.

Ako je $\varphi : M \longrightarrow \Lambda$ hiperniz u Λ takav da je $\varphi^{\rightarrow}(M)$ kofinalan, onda je $x \circ \varphi$ *podhiperniz* hiperniza $x : \Lambda \longrightarrow X$.

Hiperniz (x_λ) ima *gomilište* u točki $x \in X$ ako je za svaku okolinu $U \in \mathcal{U}_x$ skup $x^{\leftarrow}(U)$ kofinalan u Λ (u oznaci: $x_\lambda \propto x$). Možemo reći da je x_λ *često* u U.

U definicijama konvergencije i gomilišta umjesto sustava okolina možemo uzeti i neku bazu okolina $\mathcal{B}_x$.

Teorem 2. (**gomilište i podhiperniz**) *Hiperniz (x_λ) ima podhiperniz koji konvergira k x akko je $x_\lambda \propto x$.*

∎

Korolar 2. *Ako neki podhiperniz hiperniza (x_λ) ima x za gomilište, onda i $x_\alpha \propto x$.* ∎

Teorem 3. (**zatvarač i hiperniz**) *Za $E \subseteq X$ je $x \in \mathsf{Cl}\,E$ akko postoji hiperniz u E koji konvergira k x.*

∎

Teorem 4. (**neprekinutost i hipernizovi**) *Funkcija $f : X \longrightarrow Y$ je neprekinuta u $x \in X$ akko za svaki hiperniz $x_\lambda \to x$ u x vrijedi da $f(x_\lambda) \to f(x)$ u Y.*

Dem. Neka je f neprekidna funkcija u x i neka je (x_λ) hiperniz koji konvergira prema nuli x. Kako je f neprekidna funkcija, to za svaki $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$ postoji $U \in \mathcal{U}_x$ takav da je $f^{\rightarrow}(U) \subseteq V$. Kako je (x_λ) konvergentan, tada je on rezidualno u U, te je stoga $(f(x_\lambda))$ rezidualno u V, tj. konvergentan.

Obratno, pretpostavimo da f nije neprekidna u x. Tada postoji $V \in \mathcal{U}_f(x)$ takav da za svaki $U \in \mathcal{U}_x$ vrijedi $f^{\rightarrow}(U) \nsubseteq V$. Za svaki takav U uzmimo neki $x_U \in U$. Time smo konstruirali konvergentan hiperniz $(x_U)_{U\in\mathcal{U}_x}$ takav da $(f(x_U))_{U\in\mathcal{U}_x}$ nije konvergentan, čime smo dokazali i obrat.

Q.E.D.

Teorem 5. (**konvergencija u produktu**) *Hiperniz (x_λ) u produktu $X := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ topoloških prostora konvergira točki $x \in X$ akko $(\forall\,\alpha \in A)\quad \pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi_\alpha(x)$.* ∎

Korolar 3. (**konvergencija funkcija po točkama**) *Hiperniz (f_λ) u produktu X^A konvergira k $f : A \longrightarrow X$ akko $(\forall\,\alpha \in A)\quad f_\lambda(\alpha) \longrightarrow f(\alpha)$ (tj. ako konvergira po točkama).*

∎

Teorem 6. *Konvergencija hipernizova u topološkom prostoru ima sljedeća svojstva:*

(i) Svaki stacionaran hiperniz konvergira svojoj vrijednosti.

(ii) Ako je (x_λ) konvergentan hiperniz, onda je to i svaki njegov podhiperniz, te k tome imaju jednak limes.

(iii) U slučaju da je prostor i Hausdorffov tada ako limes nekog hiperniza postoji, onda je i jedinstven.

∎

Filtri

Pojam hiperniza možemo zamijeniti filtrom, te umjesto točka u hipernizu promatramo okoline. U odnosu na hipernizove, definicija konvergencije filtra se pojednostavljuje te se nameće kao prirodniji izbor. Pokazat ćemo da svaki filtar definira neki hiperniz i obratno.

Filtar na skupu S je neprazna familija nepraznih podskupova $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ koja zadovoljava:

a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

b) $F \in \mathcal{F} \;\&\; F \subseteq F' \quad \Longrightarrow \quad F' \in \mathcal{F}$.

Potfamilija $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ je *baza filtra* $\mathcal{F}$ ako vrijedi:

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(S) : (\exists\, F_0 \in \mathcal{C}) \quad F_0 \subseteq F\}\ .$$

Definirajmo sada konvergenciju: filtar $\mathcal{F}$ na topološkom prostoru X *konvergira* k x (što označujemo $\mathcal{F} \to x$) ako je $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{F}$.

Na kraju pogledajmo koja je veza konvergencije filtara s konvergencijom hipernizova.

Neka je (x_λ) hiperniz u X, a $\mathcal{C}$ baza nekog filtra koja se sastoji od skupova oblika $B_\mu := \{x_\lambda : \lambda \succcurlyeq \mu\}$, za $\mu \in \Lambda$. Filtar *generiran* s hipernizom (x_λ) je jedinstveni filtar generiran bazom $\mathcal{C}$.

Za filtar $\mathcal{F}$ na X, skup $\Lambda_{\mathcal{F}} := \{(x, F) : x \in F \;\&\; F \in \mathcal{F}\}$ je usmjeren s relacijom: $(x_1, F_1) \preccurlyeq (x_2, F_2)$ akko $F_1 \supseteq F_2$, te je $P : \Lambda_{\mathcal{F}} \longrightarrow X$, $P(x, F) := x$ hiperniz u X, *temeljen na* $\mathcal{F}$.

Teorem 7. *a) Filtar $\mathcal{F} \to x$ akko hiperniz temeljen na $\mathcal{F}$ konvergira k x.*

b) Hiperniz (x_λ) konvergira k x u X akko filtar generiran s (x_λ) konvergira k x. ∎

Slični rezultati vrijede i za gomilišta, vezu između podhipernizova i finijih filtara, kao i između ultrahipernizova i ultrafiltara.

3. Prebrojivost i kompaktnost

Prebrojivost

Kao što smo ranije pokazali nizovi u općenitom slučaju ne mogu opisati topologiju, zato uvodimo hipernizove. Dat ćemo primjer klase topoloških vektorskih prostora čija se topologija može opisati nizovima.

Topološki prostor

a) zadovoljava *prvi aksiom prebrojivosti* ako svaka točka ima prebrojivu bazu okolina

b) zadovoljava *drugi aksiom prebrojivosti* ako topologija ima prebrojivu bazu

c) je *separabilan*, ako ima prebrojiv gust podskup.

Separabilan prostor koji zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti ne zadovoljava nužno i drugi aksiom prebrojivosti (protuprimjer je *Sorgenfreyev pravac*).

Neprekinuta slika separabilnog, kao i prostora koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, je ponovno takva.

Potprostor prostora koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti je ponovno takav, dok za separabilne prostore to općenito vrijedi samo za otvorene potprostore.

Teorem 8. *Za podskup $E \subseteq X$ topološkog prostora koji zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti vrijedi sljedeća ekvivalencija: $x \in \mathsf{Cl}\, E$ akko postoji niz (x_n) u E koji konvergira k x.* ∎

Familija $\mathcal{S} = (S_\alpha, \alpha \in A)$ podskupova $S_\alpha \subseteq X$ je *pokrivač* skupa $Y \subseteq X$ ako je $Y \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$.

Kardinalitet pokrivača jednak je kardinalitetu skupa indeksa A; posebno govorimo o konačnim i prebrojivim pokrivačima. Slično, ako je svaki S_α otvoren, govorimo o otvorenom pokrivaču (slično i o zatvorenom, itd.).

Potfamilija familije $\mathcal{S}$ je *potpokrivač,* ako je i sama pokrivač.

Kompaktnost

Pojam kompaktnosti u topološkom prostoru je samo generalizacija kompaktnosti u $\mathbf{R}^d$. Kako je kompaktnost opisana pokrivačem (kojeg možemo gledati kao familiju okolina u $\mathbf{R}^d$) tada možemo uzeti točno onu definiciju kompaktnost u $\mathbf{R}^d$. Prema tome topološki prostor je kompakatan ako svaki otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač. Kažemo da je skup relativno kompaktan ako je njegov zatvarač kompaktan.

Teorem 9. (**karakterizacija kompaktnosti**) *Za topološki prostor X sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

a) X je kompaktan prostor.
b) Svaka familija zatvorenih skupova, koja zadovoljava svojstvo konačnog presjeka, ima neprazan presjek.
c) Svaki hiperniz u X ima gomilište.
d) Svaki filtar u X ima gomilište.
e) Svaki baza filtra u X ima gomilište.

∎

Korolar 4.

a) Svaki zatvoreni podskup kompaktnog prostora je kompaktan.
b) Kompaktan podskup Hausdorffovog prostora je zatvoren.
c) Disjunktni kompaktni podskupovi u Hausdorffovom prostoru mogu biti razdvojeni disjunktnim otvorenim skupovima.
d) Neprekinuta slika kompakta je kompakt.

∎

Teorem 10. (**Tihonov**) *Neprazan produkt topoloških prostora je kompaktan akko je svaki od faktora kompaktan.*

Dem. Neka je $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ produktni prostor. Kako je π_α neprekidno preslikavanje tada svaki kompaktan skup preslikava u kompaktan skup te ako je X kompaktan imamo da je i X_α kompaktan.

Suprotan smjer dokazat ćemo preko svojstva konačnog presjeka. Pretpostavimo da je svaki X_α kompaktan. Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova na X koja zadovoljava svojstvo konačnog presjeka. Tada i familija $\{\pi_\alpha(F) : F \in \mathcal{F}\}$ zadovoljava svojstvo konačnog presjeka te jer je X_α kompaktan, postoji $x_\alpha \in X_\alpha$ takav da $x_\alpha \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \pi_\alpha(F)$. To vrijedi za svaki $\alpha \in A$, dobili smo da postoji $x \in X$ takav da $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$. Time je dokazano da je X kompaktan.

Q.E.D.

4. Komutativne topološke grupe

Definicija

Moglo bi se grubo reći da matematička analiza, koja se zapravo temelji na graničnom prijelazu (uzimanju limesa), nastaje spajanjem algebre i topologije. Dakle, dani skup istovremeno opskrbljujemo algebarskom i topološkom strukturom, pazeći pritom da te dvije strukture budu usklađene. Precizniji opis tog postupka je izložen na sljedećim stranicama.

Trojka $(G, +, \tau)$ je (komutativna) *topološka grupa* ako je $(G, +)$ (Abelova) grupa, (G, τ) topološki prostor, te su funkcije $g \mapsto -g$ i $(g, h) \mapsto g + h$, s G, odnosno $G \times G$ (s produktnom/Tihonovljevom topologijom), u G neprekinute. Ta se dva svojstva mogu sažeti u zahtjev da je $(g, h) \mapsto g - h$ neprekinuto.

Posebno je svaka topološka grupa i *homogeni topološki prostor* (tj. takav u kojem za svaki par točaka postoji homeomorfizam prostora u samog sebe, koji jednu od tih točaka prebacuje u drugu); dovoljno je za dane $g, h \in G$ uzeti homeomorfizam $k \mapsto k - g + h$.

Zbog homogenosti je dovoljno proučavati lokalna svojstva topološke grupe G samo u jednoj točki (prirodno je izabrati nulu). Ako je $\mathcal{B}_0$ baza okolina nule, onda je za proizvoljnu točku $g \in G$ baza okolina u g dana s:

$$\mathcal{B}_g = \{g + U : U \in \mathcal{B}_0\} .$$

Analogan rezultat vrijedi i za sustav okolina $\mathcal{U}_g$ točke g.

Podskup E topološke grupe G je *simetričan* ako je $E = -E$.

Prisjetimo se da je množina nepraznih skupova $\mathcal{F}$ *filtarska baza* ako presjek bilo koja dva skupa iz $\mathcal{F}$ sadrži neki skup iz $\mathcal{F}$. Filtarska baza $\mathcal{F}$ je *filtar* ako je nadskup svakog elementa iz $\mathcal{F}$ ponovno u $\mathcal{F}$.

Postavlja se pitanje koji su uvjeti dovoljni da bi za dani filtar $\mathcal{F}$ u grupi G postojala topologija koja bi bila kompatibilna s grupovnom strukturom, a u kojoj bi se $\mathcal{F}$ podudarao sa sustavom okolina nule $\mathcal{U}_0$.

Sljedeći uvjeti na $\mathcal{F}$ su nužni:

$$\begin{aligned} (\forall U \in \mathcal{F})(\exists V \in \mathcal{F}) \quad & V + V \subseteq U \\ (\forall U \in \mathcal{F}) \quad & -U \in \mathcal{F} . \end{aligned}$$

Prvo svojstvo dobijemo odmah iz neprekidnsti zbrajanja. Pokažimo da vrijedi i drugo svojstvo. Neka je $U \in \mathcal{F}$, zbog neprekidnosti postoji $V \in \mathcal{F}$ takav da $-V \subseteq U$, što povlači da je $V \subseteq -U$. Kako je $\mathcal{F}$ filtar, imamo da je $-U \in \mathcal{F}$. Lako se vidi da se u tom slučaju $\mathcal{F}$ sastoji samo od skupova koji sadrže 0. Gornja se dva uvjeta mogu zamijeniti s jednim:

$$(\forall U \in \mathcal{F})(\exists V \in \mathcal{F}) \quad V = -V \;\&\; V + V \subseteq U .$$

Lema 1. *Ako je $\mathcal{F}$ filtar u grupi G koji zadovoljava gornja dva svojstva, onda postoji jedinstvena topologija usklađena s grupovnom strukturom na G u kojoj je $\mathcal{F} = \mathcal{U}_0$.* ∎

Ako je $\mathcal{B}$ filtarska baza u G koja zadovoljava

$$(1) \qquad \begin{aligned} (\forall U \in \mathcal{B})(\exists V \in \mathcal{B}) \quad & V + V \subseteq U \\ (\forall U \in \mathcal{B})(\exists V \in \mathcal{B}) \quad & -V \subseteq U , \end{aligned}$$

onda je $\mathcal{B}$ baza okolina nule za neku topologiju na G usklađenu s grupovnom strukturom.

Ako je k tome ispunjeno i

$$(2) \qquad (\forall U \in \mathcal{B})(\forall g \in U)(\exists V \in \mathcal{B}) \quad g + V \subseteq U ,$$

onda se baza $\mathcal{B}$ sastoji samo od otvorenih skupova.

Neka je zadan hiperniz $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Kažemo da je hiperniz Cauchyev ako

$$(\forall V \in \mathcal{B}_0)(\exists \lambda_0 \in \Lambda)(\forall \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0) \quad g_{\lambda_1} - g_{\lambda_2} \in V.$$

Odmah iz toga slijedi i definicija potpunosti komutativne topološke grupe. Kažemo da je komutativna topološka grupa G potpuna ako svaki Cauchyev hiperniz konvergira

Iskazat ćemo i dokazati teorem koji nam daje način za provjeru je li skup kompaktan u potpunom prostoru.

Neka je G topološka grupa i neka je $E \subseteq G$ takav da za svaku okolinu nule $U \in \mathcal{U}_0$ postoje $g_i \in G$, gdje je $i = 1, \ldots, n$ za koje vrijedi $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g_i + U$. Tada kažemo da je E potpuno omeđen.

Teorem 11. *Neka je G potpuna komutativna topološka grupa, neka je $E \subseteq G$ zatvoren, potpun i potpuno omeđen. Tada je E kompaktan.*

Dem. Neka je (h_λ) hiperniz u E, $\mathcal{U}_0$ baza okolina nule u G, te neka je $V \in \mathcal{U}_0$ proizvoljan. Kako je E potpuno omeđen, to postoji pokrivač skupa E oblika $\{g_1^V, \ldots, g_{s_V}^V\}$. Znamo da postoji indeks i takav da se beskonačno mnogo elemenata iz (h_λ) nalazi u $g_i^V + V$. Odaberimo jedan takav i označimo ga s h_V. Uzmimo proizvoljan $U \in \mathcal{U}_0$ te pokrijmo V s konačnim pokrivačem oblika $g_i^U + U$ te kao i prije postoji indeks i takav da se beskonačno mnogo elemenata iz $(h_\lambda) \cap \left(g_t^V + V\right)$ nalazi u $g_i^U + U$. Odaberimo jedan takav i označimo ga s g_U. Napravimo to za svaki elemente iz $\mathcal{U}_0$. Time smo dobili podhiperniz hiperniza (h_λ) koji je Cauchyev. Zbog potpunosti on je ujedno i konvergentan.

Q.E.D.

5. Topološki vektorski prostori

Uvod

Topološki vektorski prostor je samo specijalni slučaj komutativne topološke grupe na kojoj je definirano množenje skalarom te prema tome sve što vrijedi za komutativne topološke grupe vrijedi i za topološke vektorske prostore.

Kažemo da je X topološki vektorski prostor ako je X komutativna topološka grupa, te vektorski prostor nad poljem $\mathbf{F}$ takav da je množenje skalarom neprekidno preslikavanje.

Kako imamo malo više strukture, to na topološkom vektorskom prostoru možemo definirati sljedeće skupove. Podskup E topološkog vektorskog prostora X je

(i) *uravnotežen:* ako za svaki $a \in \mathbf{F}$ takav da $|a| < 1$ vrijedi $ax \in E$, za svaki $x \in E$

(ii) *sveobuhvatan:* ako za svaki x iz X postoji r iz $\mathbf{R}^+$ takav da je $ax \in E$ i to za svaki $|a| \leqslant r$

(iii) *konveksan:* ako za svaki x, y iz E i za svaki $\alpha \in [0,1]$ vrijedi $\alpha x + (1-\alpha)y \in E$

(iv) *disk:* ako je E konveksan i uravnotežen.

U slučaju da je V okolina nule zbog neprekidnosti množenja skalarom lako se pokaže da je tada V sveobuhvatan skup. Ako imamo da je V i konveksan skup tada imamo da je $\alpha x = (1-\alpha)0 + \alpha x \in V$ i to za svaki $x \in V$ i za svaki $\alpha \in [0,1]$. Time smo dobili da ako je V konveksna okolina nule tada je V uravnotežen skup.

Jedan primjer diska na normiranom prostoru je kugla $\Big\{x \in X : \|x\| \leqslant r\Big\}$. Iz same definicije slijedi da je kugla konveksan i uravnotežen skup. Kažemo da je $E \subseteq X$ apsolutno konveksan ako

$$(\forall\, a, b \in \mathbf{F}) \quad |a| + |b| \leqslant 1 \Rightarrow aE + bE \subseteq E.$$

Vrijedi da je ekvivalentna definicija apsolutne konveksnosti i definicija diska. Sljedeći teorem nam daje malo jednostavniji način za provjeru da li je neka topologija na X kompatibilna s linearnm strukturom prostora.

Teorem 12. *Da bi filtarska baza $\mathcal{B}$ bila okolina nule u nekom topološkom vektorskom prostoru X dovoljno je provjeriti da vrijedi*

(i) Za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi da je B sveobuhvatan i uravnotežen.
(ii) Za svaki $B \in \mathcal{B}$ postoji $U \in \mathcal{B}$ takav da $U + U \subseteq B$ ∎

Kažemo da je topološki vektorski prostor lokalno konveksan ako postoji baza okolina nule u prostoru X sačinjena samo od konveksnih skupova. Nas prvenstveno zanimaju lokalno konveksni topološki vektorski prostori, ali neki rezultati vrijede i općenitije, te ih navodimo bez pretpostavke o lokalnoj konveksnosti. Navodimo jedan rezultat koji nam kaže kada filtarska baza tvori lokalno konveksnu topologiju kompatibilnu s linearnom strukturom na prostoru X.

Teorem 13. *Da bi filtarska baza $\mathcal{B}$ bila okolina nule za neki lokalno konveksni topološki vektorski prostor X dovoljno je provjeriti da vrijedi*

(i) Za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi da je B sveobuhvatan disk.
(ii) Za svaki $B \in \mathcal{B}$ postoji $a \in \langle 0, \frac{1}{2}]$ takav da je $aB \in B$ ∎

U slučaju da uz gornje uvjete vrijedi i da za svaki $B \in \mathcal{B}$ i za svaki $x \in B$ postoji $V \in \mathcal{B}$ takav da je $x+V \subseteq B$ tada će $\mathcal{B}$ biti otvorena baza okolina 0 za neku kompatibilnu topologiju na X.

Prema tome, ako je zadana neka filtarska baza $\mathcal{B}$ s danim svojstvima, definiramo topologiju τ na X s

$$\tau = \Big\{x + B : x \in X, B \in \mathcal{B}\Big\}.$$

Tako zadana topologija je kompatiblina s linearnom strukturom prostora X.

Teorem 14. *Neka je $\mathcal{S}$ neprazna familija podskupova skupa X. Ako se $\mathcal{S}$ sastoji od sveobuhvatnih diskova, tada je jedna baza okolina nule za neku lokalno konveksnu topologiju kompatibilnu s linearnom strukturom prostora X dana skupovima oblika $r\bigcap_{j=1}^{n} S_j$ gdje su $S_j \in \mathcal{S}$ i $r > 0$.*

Dem. Označimo skup $\mathcal{B} = \{\bigcap_{j=1}^{n} r_j S_j : r_j > 0, S_j \in \mathcal{S}, n \in \mathbf{N}\}$. Svaki $B \in \mathcal{B}$ je sveobuhvatan disk. Pokažimo da je $\mathcal{B}$ filtarska baza. Uzmimo skupove $\bigcap_j a_j S_j, \bigcap_j b_j P_j \in \mathcal{B}$, tada vrijedi

$$\min\{a_i, b_j\} \bigcap_{i,j} (S_i \cap P_j) \subseteq \Big(\bigcap_j a_j S_j\Big) \bigcap \Big(\bigcap_j b_j P_j\Big).$$

Također vrijedi $\frac{1}{2} \bigcap_j a_j S_j = \bigcap_j \frac{a_j}{2} S_j \in \mathcal{B}$ te smo dobili da je $\mathcal{S}$ podbaza za neku lokalno konveksnu topologiju na vektorskom prostoru X.

Q.E.D.

Topologija generirana normom

Topološki vektorski prostori su poopćenje normiranih prostora. Opišimo topologiju na normiranim prostorima.

Neka je zadan vektorski prostor X, norma na X je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbf{R}_0^+$ ako za svaki $x, y \in X$ i za svaki $a \in \mathbf{F}$ vrijedi

(i) *Apsolutna homogenost:* $\|ax\| = |a|\|x\|$

(ii) *Nejednakost trokuta:* $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

(iii) *Razdvaja točke:* $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Neka je zadan vektorski prostor X s normom $\|\cdot\|$, tada se baza okolina nula može definirati preko norme. Na normiranom prostoru definiramo jediničnu otvorenu kuglu oko nule sa $\mathrm{K}(0,r) = \{x \in X : \|x\| < r\}$. Definiramo filtarsku bazu $\mathcal{B} = \Big\{\mathrm{K}(0,s) \subseteq X : s \in \mathbf{R}^+\Big\}$. Pokažimo da je svaka otvorena kugla oko nule disk. Neka su $x, y \in \mathrm{K}(0,r)$ i neka su $a, b \in \mathbf{F}$ takvi da $|a| + |b| \leqslant 1$, tada vrijedi

$$\|ax + by\| \leqslant |a|\|x\| + |b|\|y\| \leqslant (|a| + |b|)r \leqslant r.$$

Time je tvrdnja dokazana. Svakom elementu iz X možemo pridružiti kratnik tog elementa tako da on bude proizvoljno mali u danoj normi te imamo da je otvorena kugla oko nule sveobuhvatan skup. Kako vrijedi $\frac{1}{2}\mathrm{K}(0,r) \subseteq \mathrm{K}(0,r)$ imamo da $\mathcal{B}$ tvori okolinu nule neke lokalno konveksne topologije kompatibilne s linearnom strukturom prostora X. Lako se pokaže da dvije ekvivalentne norme induciraju istu topologiju na X.

Skup $\mathrm{K}(0,s)$ je praslika norme koja djeluje na otvorenu kuglu radijusa s u polju $\mathbf{F}$. Time smo dobili da je norma neprekidno preslikavanje na prostoru X opremljenim s danom topologijom. Štoviše, dana topologija je najfinija topologija za koju će norma biti neprekidno preslikavanje.

Topološki vektorski prostori inducirani familijom polunormi

Najprije poopćimo pojam norme i uvedimo poluonormu Opisat ćemo najslabiju topologiju generiranu nekom familijom polunormi. Neka je zadan topološki vektorski prostor X, te preslikavanje $p : X \to \mathbf{R}^+$. Kažemo da je p polunorma na X ako vrijedi

(i) $p(ax) \leqslant |a|p(x)$

(ii) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$

(iii) p je neprekidno preslikavanje.

Ako imamo polunormu na topološkom vektorskom prostoru, tada možemo definirati kuglu preko polunorme s

$$V_p = \{x \in X : p(x) < 1\}.$$

Lako se provjeri da je V_p konveksan skup.

Neka je zadana familija polunormi $\mathcal{P}$ na topološkom vektorskom prostoru X. Kažemo da je topologija na X generirana familijom polunormi $\mathcal{P}$ ako je X najmanji topološki prostor kompatibilan s linearnom strukturom prostora X na kojem su svi elementi iz $\mathcal{P}$ neprekidne funkcije.

Neka je zadana filtarska baza $\mathcal{B}$ s

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \Big\{a_1 V_{p_1} \cap \ldots \cap a_n V_{p_n} \subseteq X : p_i \in \mathcal{P},\ a_i \in \mathbf{R}^+\Big\}\\ &= \Big\{p_1^{\leftarrow}(\mathrm{K}(0,a_1)) \cap \ldots \cap p_n^{\leftarrow}(\mathrm{K}(0,a)_n) \subseteq X : p_i \in \mathcal{P},\ a_i \in \mathbf{R}^+\Big\}.\end{aligned}$$

Tako zadana filtarska baza definira upravo onu okolinu nule za topologiju induciranu funkcijama iz $\mathcal{P}$. Svaki skup $B \in \mathcal{B}$ je sveobuhvatan disk i vrijedi da $\frac{1}{2}B \subseteq B$. Time smo dobili da je tako zadana okolina nule ujedno i kompatiblina s linearnom strukturom prostora X. Iz toga slijedi da je $\mathcal{B}$ okolina nule topološkog vektorskog prostora generiranog familijom polunormi. Štoviše, vrijedi da je ta baza sačinjena od otvorenih skupova.

Kažemo da familija polunormi $\mathcal{P}$ razdvaja točke ako za svaki $p \in \mathcal{P}$ vrijedi $p(x) = 0$ tada nužno mora vrijediti i $x = 0$. To svojstvo u topologiji genriranoj polunormama je ekvivalentno da je prostor Hausdorffov.

Vidjeli smo da je svaka topologija definirana familijom polunormi ujedno i lokalno konveksna. Vrijedi i obrat. Pretpostavimo da je na X zadana neka lokalno konveksna topologija. Znamo da na X postoji baza okolina nule $\mathcal{B}$ koja se sastoji od konveksnih skupova. Neka je $V \in \mathcal{B}$, znamo da svaka konveksna okolina nule je ujedno i sveobuhvatan disk te imamo da je V sveobuhvatan disk. Za takav V definiramo funkcional Minkovskija $p_V(x) = \inf\{a > 0 : x \in aV\}$. Preslikavanje p_V je polunorma na X te takva familija polunormi $\mathcal{P} = \{p_V : V \in \mathcal{B}\}$ generira početnu topologiju na X. Time smo dobili sljedeći teorem

Teorem 15. *Topološki vektorski prostor X je lokalno konveksan ako i samo ako je topologija inducirana familijom polunormi.* ∎

Familija polunormi je zasićena ako za proizvoljne $p_1, ..., p_n \in \mathcal{P}$ vrijedi $\max_j p_j \in \mathcal{P}$. Pretpostavimo da je $\mathcal{P}$ zasićena. Neka je zadan

$$a_1 V_{p_1} \cap ... \cap a_n V_{p_n}$$

te neka je $p = \max_j p_j$ i $a = min\{a_1, ..., a_n\}$. Tada vrijedi

$$aV_p \subseteq a_1 V_{p_1} \cap ... \cap a_n V_{p_n}.$$

Dobili smo da je jedna baza okolina nula za topološki vektroski prostor generirana zasićenom familijom polunormi dana s

$$\Big\{aV_p,\ p \in \mathcal{P},\ a \in \mathbf{R}^+\Big\}.$$

Teorem 16. *Neka je $\mathcal{P}$ baza za familiju polunormi u lokalno konveksnom topološkom vektorskom prostoru X. Hiperniz (x_λ) konvergira prema x ako i samo ako $p(x_\lambda)$ konvergira prema $p(x)$ i to za svaki $p \in \mathcal{P}$. (x_λ) je Cauchyev hiperniz ako i samo ako je $p(x_\lambda)$ Cauchyev hiperniz za svaki $p \in \mathcal{P}$.* ∎

Hahn-Banachov teorem

U slučaju normiranih prostora dovoljno je pretpostaviti da je norma linearnog funkcionala omeđena na nekom potprostoru kako bismo mogli proširiti funkcional na cijeli prostor. U tom slučaju norma će i dalje biti omeđena istom vrijednošću.

Taj oblik Hahn-Banachovog teorema može se proširiti i na lokalno konveksne topološke vektorske prostore. Neka je X lokalno konveksan topološki vektorski prostor i neka je $\mathcal{P}$ familija svih neprekidnih polunormi na X. U slučaju normiranih prostora omeđenost linearnih funkcionala znači upravo da postoji $c \geqslant 0$ takav da $|f(x)| \leqslant c\|x\|$ i to za svaki x. Kod lokalno konveksnih topoloških vektorskih prostora možemo zahtijevati da takav rezultat vrijedi za neki $p \in \mathcal{P}$, to jest da za neku polunormu p vrijedi $|f(x)| \leqslant cp(x)$, za svaki $x \in X$. U slučaju da takva ocjena vrijedi na nekom potprostoru M prostora X, tada nam Hahn-Banachov teorem kaže da se funkcional može proširiti na cijeli potprostor i da će i dalje vrijediti ista ocjena. Konstanta u ocjeni se može izostaviti jer ako je $p \in \mathcal{P}$, tada će i cp biti polunorma. Iskažimo prvo teorem o dominiranom proširenju linearnog funkcionala

Teorem 17. *Neka je zadan vektorski prostor X, M njegov potprostor, p polunorma na X i f linearan funkcional na M takav da je $|f| \leqslant p$. Tada postoji linearan funkcional F na X takav da $F_{|_M} = f$ i $|f| \leqslant p$.* ∎

U slučaju kada je f neprekidan linearan funkcional na X postoji $p \in \mathcal{P}$ takav da je $|f| \leqslant p$. Kao posljedica navedenog vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 18. *Neka je X lokalno konveksan topološki vektorski prostor i neka je M potprostor prostora X. Tada se svaki neprekidan linearan funkcional na X može neprekidno proširiti na cijeli X.* ∎

Sada navodimo neke posljedice Hahn-Banachovog teorema za lokalno konveksne topološke vektorske prostore.

Neka je X lokalno konveksan topološki vektorski prostor. Tada vrijedi:

(i) Ako je M zatvoreni potprostor prostora X i $x \notin M$, onda postoji neprekidan linaran funkcional na X takav da je $f_{|_M} = 0$ i $f(x) \neq 0$.

(ii) Neka je $x \in X$ takav da $x \notin \mathsf{Cl}\,\{0\}$. Tada postoji neprekidan linearan funkcional f takav da je $f(x) \neq 0$.

U slučaju da je X i Hausdorffov tada

(iii) Ako je $x \neq y$, onda postoji $f \in X'$ takav da $f(x) \neq f(y)$.

(iv) Ako je $f(x) = 0$ za svaki $f \in X'$, onda je $x = 0$.

Ascolijev teorem

Neka je zadan topološki prostor T. S $C(T)$ definiramo prostor svih neprekidnih funkcija s T u polje $\mathbf{F}$. Za kompaktan podskup K prostora T definiramo funkciju $p_K(x) = \sup|x(K)|$. Lako se pokaže da je tako definirana funkcija polunorma. Neka je P familija svih polunormi p_K, za $K \in \mathcal{K}(T)$. Topologiju definiranu danom familijom polunormi nazivamo topologija jednolike konvergencije po kompaktima, u oznaci $C(T, c)$.

Na sličan način kao i gore definiramo još jednu topologiju na $C(T)$. Ovaj put umjesto kompaktnih skupova uzmimo sve točke $t \in T$ i definiramo polunormu $p_t(x) = |x(t)|$. Topologiju na $C(T)$ induciranu tim polunormama nazivamo topologija jednolike konvergencije po točkama i označavamo je s $C(T, p)$. Jednočlan skup je uvijek kompaktan, te je stoga $C(T, p)$ slabija od topologije $C(T, c)$.

Neka je T topološki prostor i neka je G topološka grupa. Kažemo da je skup $H \subseteq G^T$ ekvineprekidan u $t \in T$ ako za svaku okolinu nule V u G, postoji okolina U točke t takva da vrijedi $h(U) \subseteq h(t) + V$, i to za svaki $h \in H$. H je ekvineprekidan ako je ekvineprekidan na cijelom skupu T.

Pokazali smo da je $C(T, c)$ finija od $C(T, p)$. U slučaju da su te dvije topologije definirane na ekvineprekidnim skupovima tada se one podudaraju. To nam upravo kaže sljedeći teorem.

Teorem 19. *Neka je $H \subseteq C(T)$ ekvineprekidan skup. Definiramo $\tau_c = H \cap C(T, c)$ i $\tau_p = H \cap C(T, p)$. Tada su te dvije topologije jednake.* ∎

Teorem 20. (**Ascoli**) *Nekja je H ekvineprekidan podskup $C(T,c)$ takav da je $t'(H) = \{h(t), t \in H\}$ omeđen na $\mathbf{F}$, za svaki $t \in T$, tada je H relativno kompaktan. Obratno, ako je T lokalno kompaktan i H relativno kompaktan podskup od $C(T,c)$, tada je H ekvineprekidan i $t'(H)$ je omeđen za svaki $t \in T$.* ∎

Spareni prostori

Za opisivanje topologije na nekom topološkom vektorskom prostoru možemo promatrati njegov dualni prostor te dobiti neke rezultate vezane uz originalni prostor. Pokazat ćemo kako to možemo postići u slučaju da imamo dva proizvoljna topološka vektorska prostora na kojima je definiran bilinearan funkcional. Ako su zadana dva topološka vektorska prostora X i Y nad istim poljem i bilinearan funkcional $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \to \mathbf{F}$. Tada taj funkcional nazivamo bilinearno sparivanje a uređeni par (X, Y) s bilinearnim funkcionalom nazivamo sparenim prostorima.

Ako se prostor Y sastoji od linearnih funkcionala na X tada se prirodno sparivanje može postići tako da se bilinearan funkcional definira kao $\langle x, y \rangle = y(x)$.

Ako bilinearno sparivanje razlikuje točke, to jest ako za svaki $x \in X$ vrijedi $\langle x, y \rangle \Rightarrow y = 0$ i za svaki $y \in Y$ vrijedi $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ tada kažemo da je par (X, Y) u dualnosti.

Ako je X lokalno konveksan i ako umjesto Y uzmemo X', tada je po Hahn-Banachovom teoremu par (X, X') u dualnosti. Isto vrijedi i za par (X', X).

Slaba topologija

Opisat ćemo jednu topologiju na sparenim prostorima. Ako za sparene prostore uzmemo X i njegov dual X' tada slaba topologija je najslabija topologija za koju vrijedi da dual slabe topologije je upravo X'.

Neka su (X, Y) spareni prostori. Tada možemo definirati polunormu p_y induciranu s $y \in Y$ kao

$$p_y(x) = |\langle x, y \rangle|.$$

Topologiju definiranu familijom polunormi $\{p_y : y \in Y\}$ nazivamo slabom topologijom i označavamo je s $\sigma(X, Y)$. Kakoje topologija definirana familijom polunormi, imamo da je lokalno konveksna. U slučaju da je par (X, Y) u dualnosti, onda je slaba topologija Hausdorffova, jer polunorme razlikuju točke.

Bazične okoline nule bit će oblika

$$V(y_1, ..., y_n, r) = \Big\{ x \in X : |\langle y_i, x \rangle| < r, i = 1, ..., n \Big\}.$$

Kada je Y dual topološkog vektorskog prostora X, uz prirodno bilinearno sparivanje, tada $\sigma(X, X')$ nazivamo *slabom* topologijom. Zbog neprekidnosti funkcionala lako se vidi da je tako zadana topologija slabija od originalne topologije na X.

Lako se može karakterizirati i konvergencija na $\sigma(X, X')$, tj. vrijedi da $x_\lambda \to x$ ako i samo ako

$$f(x_\lambda) \to f(x), \quad f \in X'.$$

Konvergenciju u *slaboj* topologiji nazivamo *slabom* konvergencijom.

Ako je skup K kompaktan u slaboj topologiji, kraće kažemo da je $\sigma(X,Y)$-kompaktan. Analogno se definiraju i pojmovi $\sigma(X,Y)$-omeđen i $\sigma(X,Y)$-neprekidan.

Neprekidni linearni funkcionali u originalnoj topologiji i topologiji $\sigma(X,Y)$ se podudaraju, i to nam daje sljedeći teorem.

Teorem 21. *Za bilo koji par (X,Y), Y se sastoji od svih neprekidnih linearnih funkcionala u $\sigma(X,Y)$. Preciznije, ako je g slabo neprekidan linearan funkcional, tada postoji $y \in Y$ takav da je $g(x) = \langle x, y\rangle$. U slučaju da su prostori u dualnosti, tada je takav y jedinstven.*

∎

Neka je M pravi potprostor prostora Y i neka je $y \in Y \setminus M$. Iz definicije znamo da je $x \mapsto \langle x, y\rangle$ neprekidan linearan funkcional u $\sigma(X,Y)$, međutim iz definicije $\sigma(X,M)$ slijedi da to preslikavanje nije neprekidno u $\sigma(X,M)$. Time smo dobili da ako je M pravi potprostor prostora Y, da je $\sigma(X,Y)$ strogo finija od $\sigma(X,M)$

Polarne topologije

Opisati ćemo cijelu klasu topologija na sparenim prostorima. To će nam posebno biti zanimljivo kod zadavanja topologije na prostoru neprekidnih linearnih funkcionala. Neka je (X,Y) par u dualnosti i neka je $E \subseteq X$. Tada je polara skupa E skup $E^{\mathrm{o}} := \{y \in Y : \sup |\langle E, y\rangle| \leqslant 1\}$. Analogno se definira i polara skupa $E \subseteq Y$.

Bitan rezultat kod uvođenja polarnih topologija bit će sljedeći teorem, koji će nam osigurati da je polarna topologija lokalno konveksna i da je kompatibilna s linearnom strukturom prostora.

Teorem 22. *Neka je (X,Y) par, E je $\sigma(X,Y)$-omeđen skup ako i samo ako je E^{o} sveobuhvatan skup.*

∎

Neka je (X,Y) par i neka su $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ tada vrijedi:

(i) A^{o} je $\sigma(Y,X)$-kompaktan disk

(ii) ako je U okolina nule u X tada je U^{o} $\sigma(X',X)$-kompaktan

(ii) ako je $A \subseteq B$ tada $B^{\mathrm{o}} \subseteq A^{\mathrm{o}}$

(iii) neka je $a \in \mathbf{R}$ i $a \neq 0$ tada $aA^{\mathrm{o}} = a^{-1}A^{\mathrm{o}} = |a|^{-1}A^{\mathrm{o}}$

(iv) $A \subseteq A^{oo}$ i $A^{\mathrm{o}} = A^{ooo}$.

Neka je zadan par (X,Y) i neka familija $\mathcal{S}$ sadrži $\sigma(X,Y)$-omeđene skupove, tada će polarna topologija na Y definirana familijom $\mathcal{S}$ biti upravo topologija čija se podbaza sastoji od polara skupa $\mathcal{S}$. Polara svakog $\sigma(X,Y)$-omeđenog skupa je sveobuhvatan disk te familija

$$\mathcal{B} = \left\{ r \cap_{j=1}^{n} S^{\mathrm{o}} : S \in \mathcal{S}, r > 0, n \in \mathbf{N} \right\}$$

tvori bazu okolina nula za neki lokalno konveksan topološki vektorski prostor na Y.

Jedan primjer polarne topologije je upravo slaba topologija $\sigma(Y,X)$ gdje se familija $\mathcal{S}$ sastoji od svih jednočlanih skupova iz X. Polarnu topologiju gdje se $\mathcal{S}$ sastoji od svih $\sigma(Y,X)$-kompaktnih diskova nazivamo Mackey-eva topologija sa oznakom $\tau(X,Y)$. Polarnu topologiju gdje se $\mathcal{S}$ sastoji od svih $\sigma(Y,X)$-omeđenih skupova nazivamo topologija uniformne konvergencije na slabo omeđenim skupovima i označavamo ju sa $\beta(X,Y)$.

U slučaju da je $\mathcal{S}^1 \subseteq \mathcal{S}^2$ tada će polarna topologija definirana preko familije $\mathcal{S}^2$ bit finija od one definirane preko $\mathcal{S}^1$. Iz toga se lako vidi da vrijedi $\sigma(X,Y) \subseteq \tau(X,Y) \subseteq \beta(X,Y)$. Ujedno $\beta(X,Y)$ je najfinija polarna topologija.

Ekvineprekidnost i linearni operatori

U slučaju familije linearnih operatora definicija ekvineprekidnosti se pojednostavljuje tj. dovoljno je gledati da ta familija bude ekvineprekidna u 0 te navodimo sličan rezultat Ascolijevom teoremu. Kažemo da je skup linearnih operatora H s topološkog vektroskog prostora X na topološki vektorski prostor Y ekvineprekidan ako za svaku okolinu nule V u Y postoji okolina nule U u X takva da $h(U) \subseteq V$ i to za svaki $h \in H$.

Ta se definicija podudara upravo s ekvioneprekidnošću funkcija. Zbog linearnsoti operatora imamo $h(x+U) = h(x) + h(U) \subseteq h(x) + V$ i to vrijed za svaki x i za svaki $h \in H$. Time smo dobili da su te dvije definicije jednake.

Teorem 23. *Neka je H familija linearnih operatora s lokalno konveksnog topološkog vektorskog prostora X na lokalno konveksan topološki vektorski prostor Y. H je ekvineprekidan ako i samo ako za svaku neprekidnu polunormu q na Y postoji polunorma p na X takva da je $q \circ h \leqslant p$* $\blacksquare$

Teorem 24. *Neka je X topološki vektorski prostor i neka je X' njegov dual. Skup $H \subseteq X'$ je ekvineprekidan ako i samo ako je H sadržan u polari V°, gdje je V neka okolina nule u X.* $\blacksquare$

Teorem 25. *Neka je X topološki vektorski prostor. Ako je $E \subseteq X'$ ekvineprekidan tada je E relativno $\sigma(X', X)$-kompaktan.* $\blacksquare$

Topologije dualnog para

Zanima nas koliko možemo promjeniti topologiju a da ona ne utječe na prostor neprekidnih linearnih funkcionala. Najslabija topologija za koju to vrijedi je *slaba* topologija koju smo definirali ranije a najjača će biti Mackeyeva topologija. Općenito prostor Y možemo promatrati i kao podskup prostora X^{+}, jer svaki $y \in Y$ definira linearan funkcional. Lokalno konveksna Hausdorffova topologija τ na vektorskom prostoru X je topologija dualnog para ako Y, kao podskup X^{+}, se sastoji od svih neprekidnih linearnih funkcionala na X.

Teorem 26. *(Mackey-Arens) Neka je (X, Y) par. Lokalno konveksna topologija τ na X je topologija dualnog para ako i samo ako je τ polarna topologija definirana familijom $\sigma(Y, X)$-kompaktnih diskova koji čine pokrivač za Y.* $\blacksquare$

Teorem 27. *Topologija τ je topologija dualnog para (X, Y) ako i samo ako vrijedi $\sigma(X, Y) \subseteq \tau \subseteq \tau(X, Y)$.* $\blacksquare$

Teorem 28. *Za lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor X omeđeni skupovi se podudaraju za bilo koju topologiju dualnog para (X, X').* $\blacksquare$

Omeđeni skupovi

Skup u normiranom prostoru je omeđen ako je podskup kugle dovoljno velikog radijusa. Definiciju omeđenosti na topološkim vektorskim prostorima možemo promatrati kao poopćenje definicije iz normiranih prostora, to jest kažemo da je skup omeđen ako se može smjestiti unutar nekog višekratnika proizvoljne okoline nule. Navodimo malo preciznije definiciju omeđenosti.

Neka je X topološki vektorski prostor i neka je $B \subseteq X$. Kažemo da je B omeđen skup ako za svaku okolinu nule $V \subseteq X$ postoji $c > 0$ takav da je $B \subseteq cV$.

Što je topologija finija, to će biti više okolina nule, te će biti manje omeđenih skupova.

Omeđene skupove možemo okarakterizirati i na sljedeće načine:

(i) B je omeđen ako i samo se nalazi u kratniku proizvoljne uravnotežene okoline nule

(ii) B je omeđen ako i samo ako za proizvoljnu okolinu nule V postoji $r > 0$ takav da je $B \subseteq rV$.

Kod lokalno konveksnih topoloških vektorskih prostora dovoljno je provjeriti da je $p(B)$ omeđen za svaku polunormu p koja generira danu topologiju. To slijedi iz činjenice da je p neprekidna funkcija, a svaki element baze okolina nule se može zapisati kao $p^{-1}(K(0,r))$.

Bačvasti prostori

U slučaju kada imamo ekivneprekidan skup H na $\mathrm{L}(X;Y)$ lako se pokaže da je H omeđen po točkama, tj. $\{h(x) \in \mathbf{R} : h \in H\}$ je omeđen za svaki $x \in X$. Kada imamo da je X Banachov, a Y normiran prostor, Banach-Steinhausov teorem nam daje obrat te tvrdnje. Opisat ćemo najveću klasu prostora X za koje imamo da omeđenost po točkama povlači ekvineprekidnost u $\mathrm{L}(X;Y)$ za neki lokalno konveksan prostor Y. Bačva je zatvoren sveobuhvatan disk. Za lokalno konveksan topološki vektorski prostor kažemo da je bačvast ako je svaka bačva okolina nule.

Teorem 29. *Lokalno konveksan topološki vektorski X je bačvast ako i samo ako su $\sigma(X', X)$ omeđeni skupovi u X' ekvineprekidni.* ∎

Teorem 30. *Neka je X lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor. Ako je $H \subseteq X'$ ekvineprekidan onda je H omeđen u $\beta(X', X)$.* ∎

Primjer bačvastih prostora su Fréchetovi prostori. Neka je X Fréchetov prostor. X je otvoren i neprazan te po Baireovom teoremu X je skup druge kategorije. Pretpostavimo da je B bačva u X. Kako je B sveobuhvatan tada $X = \cup_{n\in\mathbf{N}} nB$, jer je X druge kategorije barem jedan nB je druge kategorije, tj. $\mathsf{Int}\,(nB)$ je neprazan skup. Iz toga slijedi $\mathsf{Int}\,(B)$ je neprazan skup. Ako je B disk to povlači da je i 0 u B. Time smo dobili da je $\mathsf{Int}\,(B)$ okolina nule u X te posebno je B okolina nule.

Omeđeni linearni operatori

U slučaju normiranih prostora ekvivalentna je definicija omeđenosti i neprekidnosti linearnih operatora, međutim to nije općenito slučaj kod topoloških vektorskih prostora. Dat ćemo klasu topoloških vektorskih prostora na kojima vrijedi obrat.

Neka su X i Y topološki vektroski prostori. Kažemo da je linearan operator $A : X \to Y$ omeđen ako za svaki omeđen skup $B \subseteq X$ vrijedi da je i $A(B)$ omeđen.

Lako se pokaže da neprekidnost povlači omeđenost. Neka je B omeđen skup u X, a V okolina nule u Y. Zbog neprekidnosti operatora A tada je i $A^{-1}(V)$ okolina nule u X te postoji r za koji vrijedi $B \subseteq rA^{-1}(V)$, što povlači $A(B) \subseteq rV$.

Kažemo da je skup D na topološkom vektorskom prostoru *bornivorious* ako za svaki omeđeni skup B postoji $a \in \mathbf{F}$ takav da je $B \subseteq aD$

Lokalno konveksan topološki vektorski prostor X je *bornološki* ako je svaki *bornivorious* disk okolina nule u X.

Teorem 31. *Neka je X lokalno konveksan topološki vektorski prostor. X je bornološki ako i samo ako je svaki omeđeni linearan operator s X u proizvoljan lokalno konveksan topološki vektorski prostor Y neprekidan.* ∎

Primjer bornoloških prostora su Fréchetovi prostori. Svaka kugla V s ishodištem u nuli u Fréchetovom prostoru je omeđen skup. Neka je D *bornivorious* disk. Iz definicije postoji $a \in \mathbf{F}$ takav da je $\frac{1}{a}V_p \subseteq D$. Prema tome svaki, *bornivorious* disk je okolina nule. Analogno se provjeri da je svaki normirani prostor bornološki.

Topologija strogog induktivnog limesa

Neka je zadan niz lokalno konveksnih topoloških vektorskih prostora (X_n) takav da je svaki X_n topološki vektorski potprostor prostora X_{n+1}. Neka je $X = \bigcup X_n$.

Neka je $\mathcal{D}$ skup svih diskova D takvih da je $X_n \cap D$ okolina nule X_n, i to za svaki $n \in \mathbf{N}$. Ako je skup $\mathcal{D}$ baza za topologiju τ, gdje je τ neka lokalno konveksna topologija na X, kompatibilna s linearnom strukturom tada toplogiju (X, τ) zovemo topologijom strogog induktivnog limesa u oznaci $X = str\ ind_n X_n$

Teorem 32. *Neka su (X_n) i X zadani kao prije. Tada familija $\mathcal{D}$, koja se sastoji od svih diskova iz X za koje vrijedi da je $D \cap X_n$ okolina nule u X_n za svaki $n \in \mathbf{N}$, tvori bazu okolina nule za neku lokalno konveksnu topologiju na vektorskom prostoru X.* ∎

Svojstva topologije strogog induktivnog limesa:

(i) Svaki X_n je topološki vektorski potprostor prostora X.
(ii) Ako je svaki X_n Hausdorffov, tada je i X Hausdorffov.
(iii) Ako je X_n zatvoren u X_{n+1}, za svaki $n \in \mathbf{N}$, tada je X_n zatvoren u X.

Ako je X_n zatvoren u X_{n+1} za svaki $n \in \mathbf{N}$, tada

(i) Skup $B \subseteq X$ je omeđen ako i samo ako postoji $k \in \mathbf{N}$ takav da je $B \subseteq X_k$ i B je omeđen u X_k.
(ii) Niz $x_n \to x$ u X ako i samo ako postoji k takav da je $x_n \in X_k$, za svaki $n \in \mathbf{N}$ i $x_n \to x$ u X_k.
(iii) Ako je svaki X_n Hausdorffov, $B \subseteq X$ je kompaktan ako i samo ako je sadržan u nekom X_k u kojem je i kompaktan.

Teorem 33. *Strogi induktivni limes potpunih prostora je i dalje potpun.* ∎

Teorem 34. *Ako je X bačvast prostor i (X_n) je rastući niz potprostora takav da je $X = \bigcup X_n$, tada je $X = str\ ind_n X_n$* ∎

Refleksivnost

Promatrat ćemo prostore za koje vrijedi da je dualni prostor dualnog prostora ponovno početni prostor, tada ćemo reći da je početni prostor polurefleksivan. Postavlja se pitanje kada su topologije na ta dva prostora jednake, tj. zanima nas u kojem slučaju jake topologije na X i X'' se podudaraju.

Od sada na dalje X će biti lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor. Svakom elementu $x \in X$ možemo pridružiti $J(x)$ koji će definirati neki neprekidan linearan funkcional na X'. U slučaju da na X uzmemo upravo neku topologiju između $\sigma(X', X)$ i $\tau(X', X)$ tada će $J(X)$ sadržavati sve neprekidne linearne funkcionale na X', to jest $J(X) = X''$. Nas će zanimati kada na X' promatramo topologiju $\beta(X', X)$. Kada vrijedi $X'' = (X', \beta(X', X))'$ reći ćemo da je X polurefleksivan. Jer je $\beta(X', X)$ jača od bilo koje topologije dualnog para (X', X) tada će svaki, $J(x)$ biti neprekidan na $\beta(X', X)$ to jest vrijedi $J(X) \subseteq X''$ Od sada na dalje prostor $J(X)$ pisat ćemo skraćeno samo sa X. U slučaju da još vrijedi i $\beta(X'', X') = X$ tada ćemo X nazvati refleksivnim prostorom. Malo drugačije rečeno, X je polurefleksivan ako je $\beta(X', X)$ topologija dualnog para odnosno refleksivan ako vrijedi $\beta(X, X') = \beta(X'', X') = \tau$ (iz ovog svojstva slijedi i polurefleksivnost i refleksivnost i obratno), gdje je τ originalna topologija na X.

Teorem 35. *Prostor X je polurefleksivan ako i samo ako svaki omeđeni skup u X je sadržan u nekom $\sigma(X, X')$-kompaktnom skupu.* ∎

Teorem 36. *Prostor X je refleksivan ako i samo ako je bačvast i svaki omeđeni skup u X je sadržan u nekom $\sigma(X, X')$-kompaktnom skupu.* ∎

Teorem 37. *Ako je prostor X refleksivan, onda je $\beta(X', X)$ refleksivan lokalno konveksan Hausdorfov topološki vektorski prostor.* ∎

Teorem 38. *Neka su dani X i X'. Ako je $\beta(X', X)$ refleksivan i $\beta(X', X)$ je topologija dualnog para tada je i $\beta(X, X')$ refleksivan.* ∎

Teorem 39. *Neka je $\beta(X', X)$ topologija dualnog para. Tada je $\beta(X', X)$ refleksivan ako i samo ako je i $\beta(X, X')$ refleksivan.* ∎

II. Topološki prostori distribucija

1. Prostori probnih funkcija

Prostor $\mathcal{D}_K^m$

Neka je $K \subseteq \mathbf{R}^d$ proizvoljan kompaktan skup. Uvedimo funkcijski prostor $\mathcal{D}_K^m = \left\{\psi \in \mathrm{C}^m(\mathbf{R}^d) : \operatorname{supp}\psi \subseteq K\right\}$. Na danom prostoru definiramo normu

$$\|\psi\|_m = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d,\ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})|.$$

Tako zadano preslikavanje je zaista norma, jer je

(i) *apsolutno homogena:*

$$\begin{aligned}\|a\psi\|_m &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d,\ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}a\psi(\mathbf{x})| \\ &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d,\ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |a||D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| \\ &= |a| \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d,\ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| = |a|\|\psi\|_m\end{aligned}$$

(ii) *subaditivna:*

$$\begin{aligned}\|\psi+\phi\|_m &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d,\ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}(\psi+\phi)(\mathbf{x})| \\ &= \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d,\ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x}) + D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi(\mathbf{x})| \\ &\leqslant \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d,\ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| + \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d,\ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi(\mathbf{x})| = \|\psi\|_m + \|\phi\|_m\end{aligned}$$

(iii) *razdvaja točke:*
Neka je $\|\psi\|_m = 0$, što znači da za svaki $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$ vrijedi $|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| = 0$ i to za svaki $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$. Što upravo znači da $\psi(\mathbf{x}) = 0$ za svaki $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$.

Na $\mathcal{D}_K^m$ ćemo promatrati topologiju induciranu tom normom. Ista topologija na $\mathcal{D}_K^m$ se može dobiti i preko konačne familije polunormi ($|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$)

$$N_{\boldsymbol{\alpha}}(\psi) = \sup_{\mathbf{x}\in K} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})|\ .$$

Pokažimo sada da su te dvije topologije jednake; neka je

$$V_{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{\psi \in \mathcal{D}_K^m : N_{\boldsymbol{\alpha}}(\psi) < a_{\boldsymbol{\alpha}}\right\},$$

gdje je $a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{R}^+$, a $r = \min_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a_{\boldsymbol{\alpha}}$. Lako se vidi da vrijedi

$$\mathrm{K}(0,r) \subseteq \bigcap_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} a_{\boldsymbol{\alpha}}V_{\boldsymbol{\alpha}}\ ,$$

pa otvorene kugle $\mathrm{K}(0,r)$ (u normi $\|\cdot\|_m$) čine bazu okolina nule za topologiju induciranu gornjom familijom polunormi. Ujedno vrijedi da je $\bigcap_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} rV_{\boldsymbol{\alpha}} \subseteq \mathrm{K}(0,r)$, te smo dobili da je topologija inducirana normom jednaka topologiji induciranoj familijom polunormi.

Lema 1. $\mathcal{D}_K^m$ *je Banachov prostor.*

Dem. Imamo definiranu normu na $\mathcal{D}_K^m$. Još treba dokazati da je taj normirani prostor potpun.

Neka je (ψ_n) Cauchyev niz u $\mathcal{D}_K^m$. Iz definicije norme slijedi da je i $(D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_n(\mathbf{x}))$ Cauchyev niz u $\mathbf{R}^d$, za svaki $\mathbf{x}$ iz K i za svaki $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$. Zbog potpunosti $\mathbf{R}^d$ postoji $\psi^{(\boldsymbol{\alpha})}$ takav da

$$(\forall \mathbf{x} \in K) \quad D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_n(\mathbf{x}) \to \psi^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x}) \ .$$

Kako je niz Cauchyev imamo da za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da za svaki $k, l \geqslant n_0$ vrijedi

$$\|\psi_k - \psi_l\|_m \leqslant \epsilon$$

tj.

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_k(\mathbf{x}) - D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_l(\mathbf{x})| \leqslant \epsilon, \quad \mathbf{x} \in K, \ |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$$

Ako uzmemo limes kada l teži u beskonačno, imamo

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_k(\mathbf{x}) - \psi^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x})| \leqslant \epsilon, \quad \mathbf{x} \in K, \ |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m.$$

Time smo dobili uniformnu konvergenciju niza $(D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_n)$ prema funkciji $\psi^{(\boldsymbol{\alpha})}$, za svaki $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$. Zbog uniformne konvergencije svih derivacija imamo da

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi^{(0)} = \psi^{(\boldsymbol{\alpha})}$$

i (ψ_n) konvergira prema $\psi^{(0)}$ u $\mathcal{D}_K^m$.

Q.E.D.

Neka je B omeđen skup u $\mathcal{D}_K^m$, što znači da se B nalazi u kugli dovoljno velikog radijusa, tj. sve parcijalne derivacije do reda m su omeđene. Vrijed i obratno, ako imamo da su sve paricijalne derivacije do reda m omeđene tada je B omeđen skup u $\mathcal{D}_K^m$.

Lema 2. *Ako je B omeđen skup u $\mathcal{D}_K^m$ tada je B relativno komapktan u $\mathcal{D}_K^{m-1}$*

Dem. Jer je B omeđen skup tada su sve parcijalne derivacije do reda m omeđene. Neka je $\psi \in \mathcal{D}_K^m$ i neka je $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m-1$, tada po teoremu srednje vrijednosti imamo da za svaki $\mathbf{x} \in K$

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x}+h) - D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1} |\nabla(D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi)(\mathbf{x}+\theta h)||h|.$$

Kako su sve derivacije do m-tog reda omeđene tada imamo

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x}+h) - D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| \leqslant c|h|, x \in K, \psi \in B, |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m.$$

Definirajmo $B_{\boldsymbol{\alpha}} = \{D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi : \psi \in B\}$, iz prije pokazanog slijedi da je $B_{\boldsymbol{\alpha}}$ ekvineprekidan. Jer je skup $\{D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(x) : \psi \in B\}$ omeđen i to za svaki $x \in K$ tada prema Ascolijevom teoremu imamo da je $B_{\boldsymbol{\alpha}}$ relativno kompaktan u $C(K, c)$. Jer je topologija na $\mathcal{D}_K^m$ inducirana normom, tada možemo hiperniz zamijeniti nizom. Neka je $(\psi_n) \subseteq B$, jer je svaki $B_{\boldsymbol{\alpha}}$ relativno kompaktan u $C(K, c)$ tada postoji podniz $(\psi_{n_{\boldsymbol{\alpha}}})$ i $\psi_{\boldsymbol{\alpha}}$ takav da $D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{n_{\boldsymbol{\alpha}}} \to \psi_{\boldsymbol{\alpha}}$ i to uniformno. Uvijek možemo naći podniz $(\psi_{\bar{n}})$ takav da $D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\bar{n}} \to \psi_{\boldsymbol{\alpha}}$ i to uniformno. Označimo $\psi = \psi_0$ te zbog uniformne konvergencije svih parcijalnih derivacija do reda $m-1$ imamo da je $D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi = \psi_{\boldsymbol{\alpha}}$ za $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant 1$. Sve skupa imamo da je $\psi \in \mathcal{D}_K^m$ i vrijedi da $(D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\bar{n}})$ konvergiraju uniformno prema $D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi$ te smo dobili konvergenciju u $\mathcal{D}_K^m$. Prema tome imamo da svaki niz iz B ima konvergentan podniz te vrijedi da je B relativno kompaktan.

Q.E.D.

Prostor $\mathcal{D}_K$

Definiramo prostor $\mathcal{D}_K$ kao prostor svih beskonačno derivabilnih funkcija na $\mathbf{R}^d$ čiji je nosač sadržan unutar kompaktnog skupa K

$$\mathcal{D}_K = \Big\{\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d) : \operatorname{supp}\psi \subseteq K, K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)\Big\}.$$

Uočimo da je $\mathcal{D}_K = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} \mathcal{D}_K^m$. Na $\mathcal{D}_K$ bazu okoline nule zadajemo preko skupova oblika

$$V(m;\epsilon;K) := \Big\{\psi \in \mathcal{D}_K : (\forall\, |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m)(\forall\, \mathbf{x} \in K)\ |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| < \epsilon\Big\}.$$

Za tako definirane skupove vrijedi $V(\max\{m_1, m_2\}; \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}; K) \subseteq V(m_1;\epsilon_1;K) \cap V(m_2;\epsilon_2;K)$. Neka je

$$\mathcal{B} = \Big\{V(m;\epsilon;K) : m \in \mathbf{N}, \epsilon \in \mathbf{R}\Big\},$$

iz prije pokazanog imamo da je $\mathcal{B}$ filtarska baza. Pokažimo da je $V(m;\epsilon;K)$ disk. Neka je $\psi, \phi \in V(m;\epsilon;K)$ i neka su $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da $|a| + |b| \leqslant 1$. Tada je

$$\begin{aligned}|D^{\boldsymbol{\alpha}}(a\psi + b\phi)(\mathbf{x})| &\leqslant |D^{\boldsymbol{\alpha}}(a\psi)(\mathbf{x})| + |D^{\boldsymbol{\alpha}}(b\phi)(\mathbf{x})|\\ &= |a||D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| + |b||D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi(\mathbf{x})|\\ &\leqslant |a|\epsilon + |b|\epsilon \leqslant \epsilon\ ,\end{aligned}$$

i to za svaki $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$. Svaki $V(m;\epsilon;K)$ je i sveobuhvatan. Zaista, uzmimo $\psi \in \mathcal{D}_K$, neka je $r_1 = \sup_{\mathbf{x}\in K, |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})|$ i $r = \frac{\epsilon}{2r_1}$ tada za $|a| \leqslant r$ vrijedi

$$\sup_{\mathbf{x}\in K, |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}(a\psi)(\mathbf{x})| \leqslant |a| \sup_{\mathbf{x}\in K, |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| \leqslant \frac{\epsilon}{2},$$

čime smo dobili da je $a\psi \in V(m;\epsilon;K)$. Ujedno vrijedi i da za svaki $\psi \in V(m;\epsilon;K)$ povlači daje $\frac{1}{2}\psi \subseteq V(m;\epsilon;K)$. Time smo dobili da je prostor $\mathcal{D}_K$ opremljen topologijom induciranom filtarskom bazom $\mathcal{B}$ lokalno konveksan topološki vektorski prostor.

Definirajmo familiju polunormi na $\mathcal{D}_K$ s

$$N_{\boldsymbol{\alpha}}(\psi) = \sup_{\mathbf{x}\in K} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})|,$$

Okoline nule u $\mathcal{D}_K$ možemo opisati preko familije polunormi na sljedeći način

$$V(m;\epsilon;K) = \Big\{\psi \in \mathcal{D}_K : N_{\boldsymbol{\alpha}}(\psi) < \epsilon, |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m\Big\} = \bigcap_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} N_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}(\mathrm{K}(0,\epsilon)).$$

čime smo dobili da je topologija na $\mathcal{D}_K$ generirana i familijom polunormi $N_{\boldsymbol{\alpha}}$. Od sada nadalje K možemo izostaviti u slučaju kada se zna o kojem je prostoru riječ. Za $\mathcal{D}_K$ jedna baza okolina nule se može definirati s $V(m;\frac{1}{n})$ čime smo dobili da $\mathcal{D}_K$ ima prebrojivu bazu. Time smo dobili da je $\mathcal{D}_K$ lokalno konveksan topološki vektorski prostor s prebrojivom bazom okolina nule.

Da je $\mathcal{D}_K$ potpun slijedi analogno kao i dokaz da je $\mathcal{D}_K^m$ potpun. Jedina je razlika što umjesto norme $\|\ \|_m$ imamo familiju polunormi $N_{\boldsymbol{\alpha}}$ i dokazujemo konvergenciju za svaki multiindeks $\boldsymbol{\alpha}$.

Lako se provjeri da polunorma N_0 razdvaja točke, te imamo da je prostor Hausdorffov. Zbog potpunosti topologije inducirane prebrojivom familijom polunormi imamo da je $\mathcal{D}_K$ ujedno i Fréchetov prosotor, pa je stoga i bornološki.

Prostor $\mathcal{D}$

Definiramo $\mathcal{D} = \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$. Neka je (Ω_n) rastući niz skupova takav da je $\Omega_0 = \emptyset$ i $\mathsf{Cl}\,\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$ te da je proizvoljan kompaktan skup sadržan u nekom Ω_n. Neka je (ϵ_n) pozitivan padajući niz brojeva koji konvergira prema nuli, a (m_n) rastući niz prirodnih brojeva koji teži prema beskonačnosti. Definiramo

$$V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n)) = \Big\{\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d) : (\forall\, n \in \mathbf{N}_0)(\forall\, \mathbf{x} \notin \Omega_n)(\forall\, |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m_n)\ |\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| \leqslant \epsilon_n\Big\}.$$

Ako su $V((m_n^1);(\epsilon_n^1);(\Omega_n^1))$ i $V((m_n^2);(\epsilon_n^2);(\Omega_n)^2)$ dva takva skupa, definirajmo $m_n = \min\{m_n^{(1)}, m_n^{(2)}\}$, $\epsilon_n = \min\{\epsilon_n^1, \epsilon_n^2\}$ i $\Omega_n = \Omega_n^1 \bigcap \Omega_n^2$. Lako se vidi da je tada

$$V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n)) \subseteq V((m_n^1);(\epsilon_n^1);(\Omega_n^1)) \cap V((m_n^2);(\epsilon_n^2);(\Omega_n^2))$$

Time smo dobili da je familija $\mathcal{B}$ filtarska baza. Neka su $\psi, \phi \in V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n))$ i neka su $a, b \in \mathbf{R}^d$ takvi da je $|a| + |b| \leqslant 1$, tada za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} |D^{\boldsymbol{\alpha}}(a\psi + b\phi)(\mathbf{x})| &\leqslant |D^{\boldsymbol{\alpha}} a\psi(\mathbf{x})| + |D^{\boldsymbol{\alpha}} b\phi(\mathbf{x})| \\ &= |a||D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| + |b||D^{\boldsymbol{\alpha}}\phi(\mathbf{x})| \\ &\leqslant |a|\epsilon_n + |b|\epsilon_n \leqslant \epsilon_n\ , \end{aligned}$$

i to za svaki $\mathbf{x} \notin \Omega_n$ i svaki $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m_n$. Neka je $V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n))$ proizvoljan, te neka je $\psi \in \mathcal{D}$. Kako ψ ima kompaktan nosač, to postoji $t \in \mathbf{N}$ takav da za svaki $s \geqslant t$ vrijedi $\operatorname{supp}\psi \subseteq \Omega_s$. Za tako definirani t zadajemo $r_1 = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega_t, |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m_t} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})|$ i $r = \frac{\epsilon_t}{2r_1}$. Neka je $a \in \mathbf{R}$ takav da je $|a| < r$ i $s \leqslant t$, tada vrijedi

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}} a\psi(\mathbf{x})| = |a||D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| \leqslant \frac{\epsilon_n}{2r_1} \leqslant \frac{\epsilon_t}{2} \leqslant \frac{\epsilon_s}{2},$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$ i svaki $\mathbf{x} \in \Omega_s$. Ako je $s \geqslant t$ tada je $\psi(\mathbf{x}) = 0$ za svaki $\mathbf{x} \in \Omega_s$ te će gornja nejedenakost vrijediti i za $s \geqslant t$. Time smo dobili da je svaki $V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n))$ sveobuhvatan disk. Vrijedi i sljedeće

$$\frac{1}{2}V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n)) = V((m_n);(\frac{\epsilon_n}{2});(\Omega_n)) \subseteq V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n)).$$

Dakle, dobili smo da je topologija inducirana filtarskom bazom $\mathcal{B}$ lokalno konveksna i kompatibilna je s linearnom strukturom prostora $\mathcal{D}$.

Ako je $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$, tada je relativna topologija na $\mathcal{D}_K$ inducirana topologijom s $\mathcal{D}$ ista kao i početna topologija na $\mathcal{D}_K$. Pokažimo tu tvrdnju. Uzmimo proizvoljan $V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n))$, tada postoji $s \in \mathbf{N}$ takav da je $K \subseteq \Omega_s$. Neka je $m = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$ a $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s\}$; tada vrijedi

$$V(m;\epsilon;K) \subseteq V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n)) \cap \mathcal{D}_K.$$

Slijedi da je topologija na $\mathcal{D}_K$ finija od topologije na $\mathcal{D}_K \cap \mathcal{D}$. Ako uzmemo $m = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$ a $\epsilon = \max\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s\}$ tada

$$V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n)) \cap \mathcal{D}_K \subseteq V(m;\epsilon;K),$$

te smo dobili da je relativna topologija $\mathcal{D}_K \cap \mathcal{D}$ finija od $\mathcal{D}_K$.

Neka je zadano preslikavanje $i : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}$, $i(\psi) = \psi$. Isto kao gore pokaže se da za svaku okolinu nule $V \subseteq \mathcal{D}$ postoji okolina nule $U \subseteq \mathcal{D}_K$ takva da je $i(U) \subseteq V$. Imamo da je preslikavanje neprekidno, to jest neprekidno ulaganje s $\mathcal{D}_K$ u $\mathcal{D}$. Pokažimo da je takva topologija na $\mathcal{D}$ najfinija topologija za koju to vrijedi. Kad bi postojala neka finija topologija τ na $\mathcal{D}$ za koju bi to vrijedilo, to bi postojao $U \subseteq \mathcal{D}$ takav da, $U \in \tau$ i U se ne nalazi u standardnoj topologiji na $\mathcal{D}$, te vrijedi da za svaki $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ postoji V_K okolina nule u $\mathcal{D}_K$ takva da vrijedi $i(V_K) \subseteq U$. Uzmimo niz kompaktnih skupova $K_n = \mathrm{K}[0,n] \setminus \mathrm{K}(0,n-1)$. Za svaki V_{K_n} postoji skup $V(m_n;\epsilon_n;K_n)$ takav da je $V(m_n;\epsilon_n;K_n) \subseteq V_{K_n}$. Ako uzmemo $m_n' > m_n$ i $\epsilon_n' < \epsilon_n$, tada će vrijediti i $V(m_n';\epsilon_n';K_n) \subseteq V_{K_n}$, jer $V(m_n';\epsilon_n';K_n) \subseteq V(m_n;\epsilon_n;K_n)$. Prema tome možemo uzeti niz (ϵ_n) koji teži prema nuli i niz (m_n) koji teži prema beskonačnosti takav da je $V(m_n;\epsilon_n;K_n) \subseteq U$ i to za svaki $n \in \mathbf{N}$. To upravo znači da

$$V((m_n);(\epsilon_n);(K_n)) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} V(m_n;\epsilon_n;K_n) \subseteq U.$$

Dakle, imamo da je standardna topologija na $\mathcal{D}$ finija nego τ, što je u kontradikciji s početnom tvrdnjom. Dobili smo da topologiju na $\mathcal{D}$ možemo opisati na još jedan način, tj. možemo reći da je topologija na $\mathcal{D}$ upravo najslabija topologija za koju vrijedi da je preslikavanje $i : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}$ neprekidno, i to za svaki $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$.

Kako bismo kasnije olakšali račun, uvijek možemo gledati samo skupove oblika $V((m_n),(\epsilon_n))$; to su ustvari skupovi $V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n))$, gdje umjesto Ω_n uzimamo kugle radijusa n. Želimo pokazati da se promjenom baze okolina nule topologija neće promjeniti. To ćemo pokazati tako da pokažemo da familija skupova $V((m_n),(\epsilon_n))$ i dalje tvori bazu okolina nule za topologiju na $\mathcal{D}$. Uzmimo neki $V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n))$. Neka je n_j najmanji broj za koji vrijedi $\mathrm{K}(0,j) \subseteq \Omega_{n_j}$. Definirajmo $\epsilon_j' = \min\{\epsilon_1, \ldots \epsilon_{n_j}\}$ i definiramo $m_j' = \max\{m_1, \ldots m_{n_j}\}$. Provjerom se vidi da vrijedi $V((m_n');(\epsilon_n')) \subseteq V((m_n);(\epsilon_n);(\Omega_n))$. Dokazali smo da se topologija zamjenom jedne baze drugom neće promjeniti.

Definirajmo preslikavanje

$$N((m_n);(\epsilon_n))(\psi) = \sup_{n\in\mathbf{N}_0} \sup_{|\mathbf{x}|\geqslant n, |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m_n} \frac{|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})|}{\epsilon_n}.$$

Nije teško za pokazati da je takvo preslikavanje polunorma na $\mathcal{D}$. Želimo pokazati da je tako zadana familja polunormi zasićena, to jest pretpostavimo da su zadane polunorme $N((m_n^1);(\epsilon_n^{(1)})), \ldots, N((m_n^l);(\epsilon_n^{(l)}))$. Neka je $m_n = \max\{m_1, \ldots m_l\}$ i $\epsilon_n = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_l\}$. Lako se pokaže da je $\max_{1\leqslant k\leqslant l} N((m_n^k);(\epsilon_n^{(k)}))$ upravo $N((m_n);(\epsilon_n))$. Time smo dobili da je familija polunormi zasićena. Elementi baze okolina nule za topologiju induciranu tom familijom polunormi su skupovi oblika

$$\Big\{\psi \in \mathcal{D} : N((m_n);(\epsilon)_n)(\psi) \leqslant 1\Big\} = N((m_n);(\epsilon_n))^{\leftarrow}([0,1]).$$

Lako se provjeri da za svaki $V((m_n);(\epsilon_n))$ postoji polunorma $N((s_n);(\eta_n))$ takva da $N((s_n);(\eta_n))^{\leftarrow}([0,1]) \subseteq V((m_n);(\epsilon_n))$ i obratno, za svaku polunormu $N((s_n);(\eta_n))$ postoji okolina nule $V((m_n);(\epsilon_n))$ takva da $V((m_n);(\epsilon_n)) \subseteq N((s_n);(\eta_n))^{\leftarrow}([0,1])$. To povlači da je topologija na $\mathcal{D}$ jednaka topologiji induciranoj s familijom polunormi $N((m_n);(\epsilon_n))$.

U slučaju da uzmemo niz (m_n) za koji vrijedi da je $m_0 = 0$ tada imamo da $N((m_n);(\epsilon_n))$ razdvaja točke, te imamo da je $\mathcal{D}$ lokalno konveksan Hausdorffov topološki vektorski prostor sa neprebrojivom bazom okolina nula.

Teorem 1. *Prostor $\mathcal{D}$ je potpun.*

Dem. Neka je (ψ_λ) Cauchyev hiperniz u $\mathcal{D}$. Za proizvoljan multiindeks $\boldsymbol{\alpha}$ možemo uzeti niz (m_n) i (ϵ_n) definirane kao za bazu okolina nule u $\mathcal{D}$ takav da je $m_0 = |\boldsymbol{\alpha}|$ i $\epsilon_0 = \epsilon$. Jer je niz Cauchyev u $\mathcal{D}$ imamo da postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ takav da za svaki $\lambda_1, \lambda_2 > \lambda_0$ vrijedi

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_1}(\mathbf{x}) - D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_2}(\mathbf{x})| < \epsilon, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$$

Zbog potpunosti od $\mathbf{R}^d$ dobili smo točkovnu konvergenciju hiperniza $(D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_\lambda)$. Limes tog hiperniza označimo s $\psi^{(\boldsymbol{\alpha})}$. Znamo da vrijedi

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_1}(\mathbf{x}) - \psi^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x})| = |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_1}(\mathbf{x}) - \lim_{\lambda} D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_\lambda(\mathbf{x})| = \lim_{\lambda} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_1}(\mathbf{x}) - D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_\lambda(\mathbf{x})|$$

te nam gornja ocijena daje

$$|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_1}(\mathbf{x}) - \psi^{(\boldsymbol{\alpha})}(\mathbf{x})| < \epsilon, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$$

Dobili smo uniformnu konvergenciju svake parcijalne derivacije prema nekoj funkciji te slijedi da je $D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi^{(0)} = \psi^{(\boldsymbol{\alpha})}$. Označimo sada $\psi^{(0)}$ sa ψ Želimo sada pokazati da ψ ima kompaktan nosač. Za proizvoljan niz (ϵ_n), zbog same definicije baze okolina nule možemo uzeti dovoljno velike λ_1 i λ_2 takve da

$$|\psi_{\lambda_1}(\mathbf{x}) - \psi_{\lambda_2}(\mathbf{x})| \leqslant \epsilon_n, \quad |\mathbf{x}_n| \geqslant n$$

te imamo

$$|\psi_{\lambda_1}(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})| \leqslant \epsilon_n, \quad |\mathbf{x}_n| \geqslant n.$$

Zbog kompaktnosti nosača, za dovolnjo veliki n, ψ_{λ_1} će biti nula van kugle radijusa n i dobijemo

$$|\psi| \leqslant \epsilon_n, \quad |\mathbf{x}_n| \geqslant n.$$

Sada pretpostavimo da $\psi^{(0)}$ nema kompaktni nosač, tj. postoji niz $(\mathbf{x}_n)$ takav da je $|\mathbf{x}_n| > n$ i $\psi(\mathbf{x}_n) \neq 0$. Ako uzmemo ϵ_n takve da je $\epsilon_n = \frac{1}{2\psi^{(0)}(\mathbf{x}_n)}$ dođemo do kontradikcije. Time smo dobili da ψ ima kompaktan nosač te je $\psi \in \mathcal{D}$. Kako je (ψ_λ) Cauchyev hiperniz te za proizvoljan skup $V((m_n);(\epsilon_n))$ vrijedi

$$(\exists\, \lambda_0 \in \Lambda)(\forall\, \lambda_1 \geqslant \lambda_0)(\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad \max_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m_n} \|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_0} - D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_1}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \mathrm{K}(0,n))} < \epsilon_n.$$

Kako ψ_λ konvergira uniformno prema ψ, kao i sve njene derivacije tada će vrijediti da je i $\|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_{\lambda_0} - D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \mathrm{K}(0,n))} < \epsilon_n$ (kako imamo unoformnu konvergenciju tada s limesom možemo ući pod normu). Takvu ocjenu možemo postići i za sve $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m_n$. To vrijedi za svaki $n \in \mathbf{N}$ te imamo da (ψ_λ) konvergira pream ψ u $\mathcal{D}$.

Q.E.D.

Kako bismo provjerili da li je neki skup okolina nule u $\mathcal{D}$ dovoljno je promatrat kako se ponaša na potprostorima $\mathcal{D}_K$. To nam upravo kaže sljedeći teorem.

Teorem 2. *Neka je $W \subseteq \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ konveksan skup. Ekvivalentno je da je W okolina nule u $\mathcal{D}$ i da je za svaki K kompaktan skup $W \cap \mathcal{D}_K$ okolina nule u $\mathcal{D}_K$.*

Dem. Lako se može provjeriti da je $V((m_n),(\epsilon_n)) \cap \mathcal{D}_K$ okolina nule u prostoru $\mathcal{D}_K$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je W konveksan skup u $\mathcal{D}$ takav da $W \cap \mathcal{D}_K$ je okolina nule u $\mathcal{D}_K$. Što znači da za svaki n postoji $m_n \geqslant 0$ i $\eta_n \geqslant 0$ za koje je skup

$$V_n = \Big\{\psi \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{K}(0,n+2)) : (\forall\, |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m_n)(\forall\, \mathbf{x} \in \mathrm{K}(0,n+2))\ |\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| \leqslant \eta_n\Big\}$$

sadržan u W. Izaberimo niz funkcija (α_n) takav da

$$\alpha_n \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d),\ \alpha_n \geqslant 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1,\ \operatorname{supp} \alpha_n \subseteq \Big\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : n \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant n+2\Big\}.$$

Funkciju ψ možemo zapisati kao

$$\psi = \sum_{n \in \mathbf{N}} (\frac{1}{2^{n+1}}(2^{n+1}\alpha_n\psi)).$$

Ako je svaki pribrojnik iz W, zbog konačnosti sume (jer ψ ima kompaktni nosač) i konveksnosti W dobijemo da je ψ iz W. Uz pretpostavku da za funkciju ψ vrijedi

$$|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(\mathbf{x})| \leqslant \epsilon_n, \quad |\mathbf{x}| \geqslant n,\ |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m_n$$

zbog Leibintzovog pravila i jer je $\alpha_n(\mathbf{x}) = 0$ za $\mathbf{x} \in \mathrm{K}(0,n)$, postoji k_n takav da

$$|2^{n+1}\partial^{\boldsymbol{\alpha}}(\alpha_n\psi)| \leqslant k_n\epsilon_n, \quad |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m_n.$$

Prema tome možemo odabrati niz (ϵ_n) takav da vrijedi $k_n\epsilon_n \leqslant \eta_n$, za svaki $n \in \mathbf{N}$. Ako uzmemo ψ iz $V((m_n),(\epsilon_n))$ za tako odabrane okoline vrijedit će da je $2^{n+1}\alpha_n\psi$ iz W, te je ψ iz W. Sada imamo

$$V((m_n),(\epsilon_n)) \subset W,$$

što povlači da je W okolina u $\mathcal{D}$.

Q.E.D.

Topologija na $\mathcal{D}$ se može dobiti na još jedan način i to preko potprostora $\mathcal{D}_K$, tj. $\mathcal{D}$ je upravo strogi induktivni limes prostora $\mathcal{D}_K$.

Lema 3. *Neka je K_n niz kompaktnih rastućih skupova u $\mathbf{R}^d$ čija je unija cijeli $\mathbf{R}^d$. Tada je $\mathcal{D}$ strogi induktivni limes prostora $\mathcal{D}_{K_n}$.*

Dem. Svaka bazična okolina nule $V((m_n);(\epsilon_n))$ iz $\mathcal{D}$ je disk. Presjek svake te okoline s $\mathcal{D}_{K_n}$, prema prethodnoj lemi je okolina nule u $\mathcal{D}_{K_n}$. Prema tome skupovi oblika $V((m_n);(\epsilon_n))$ čine bazu topologije *str ind*$_n\mathcal{D}_{K_n}$. Time smo dobili da je *str ind*$_n\mathcal{D}_{K_n} \subseteq \mathcal{D}$. Neka je $D \subseteq \mathcal{D}$ disk za koji vrijedi da je $D \cap \mathcal{D}_{K_n}$ okolina nule od $\mathcal{D}_{K_n}$. Svaki disk je i konveksan skup pa je prema tome D i okolina nule u $\mathcal{D}$. Slijedi da se topologija od $\mathcal{D}$ i *str ind*$_n\mathcal{D}_{K_n}$ podudaraju.

Q.E.D.

Kao direktnu posljedicu gornje leme navedimo

Korolar 1. *$\mathcal{D}$ je bornološki prostor.* ∎

Da je $\mathcal{D}$ potpun također se moglo dokazati preko toga da je $\mathcal{D}$ strogi induktivni limes potpunih prostora.

Korolar 2. *$\mathcal{D}$ je bačvast prostor.*

Dem. Neka je D bačva u $\mathcal{D}$. Presjek bačve s proizvoljnim potprostorom je i dalje bačva, tj. $D \cap \mathcal{D}_K$ je bačva u $\mathcal{D}_K$. Svaki Fréchetov prostor je bačvast, te je prema tome $D \cap \mathcal{D}_K$ okolina nule u $\mathcal{D}_K$. Kako je D konveksan skup, a $D \cap \mathcal{D}_K$ je okolina nule u $\mathcal{D}_K$, po teoremu 2 imamo da je D okolina nule u $\mathcal{D}$, što daje tvrdnju.

Q.E.D.

Teorem 3. *Neka je $T : \mathcal{D} \to F$ linearan operator i F lokalno konveksan topološki vektorski prostor. T je neprekidan ako i samo ako je njegova restrikcija neprekidna na svakom $\mathcal{D}_K$, za proizvoljan kompaktan skup K.*

Dem. Zato što je T linearan operator dovoljno je pokazati da je neprekidan u nuli. Ako je T neprekidan na $\mathcal{D}$, onda će biti neprekidan i na svakom potprostoru. Pretpostavimo da je $T|_{\mathcal{D}_K}$ neprekidan operator za svako $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$. To povlači da za svaki $W \subseteq F$, gdje je W konveksna okolina nule, $T^{\leftarrow}_{|\mathcal{D}_K}(W)$ je okolina nule prostora $\mathcal{D}_K$ (W je konveksan i T je linearan operator, pa je prema tome i $T^{\leftarrow}(W)$ konveksan skup). Imamo

$$(T_{|\mathcal{D}_K})^{\leftarrow}(W) = T^{\leftarrow}(W) \cap \mathcal{D}_K,$$

što po pretpostavci povlači da je $T^{\leftarrow}(W) \cap \mathcal{D}_K$ okolina nule u $\mathcal{D}_K$ za svaki $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$. Po prethodnoj lemi slijedi da je $T^{\leftarrow}(W)$ okolina nule u $\mathcal{D}$, to jest T je neprekidan na $\mathcal{D}$.

Q.E.D.

Nas posebno zanimaju neprekidni linearni funkcionali na $\mathcal{D}$. Iskažimo gornji teorem za linearne funkcionale.

Korolar 3. *Linearan funkcional na $\mathcal{D}$ je neprekidan ako i samo ako je neprekidan na svakom $\mathcal{D}_K$ za proizvoljan kompaktan skup K.* ∎

Omeđeni skupovi na $\mathcal{D}$

Opišimo sada neka svojstva omeđenih skupova na $\mathcal{D}$ koja će nam trebati kasnije kako bismo uveli i opisali topologiju na $\mathcal{D}'$. Navodimo karakterizaciju omeđenih skupova na $\mathcal{D}$.

Teorem 4. *Skup B je omeđen u $\mathcal{D}$ ako i samo ako postoji $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ i niz (ϵ_n) takav da za svaki $\psi \in B$ vrijedi*

$$(\forall\, \psi \in B) \quad \operatorname{supp} \psi \subseteq K,$$

$$(\forall\, \psi \in B)(\forall\, n \in \mathbf{N})(\forall\, |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant n) \quad |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \psi| \leqslant \epsilon_n.$$

Dem. Ako vrijede pretpostavke, tada za svaki $V((m_n);(\epsilon_n))$ postoji dovoljno veliki broj a za koji će vrijediti $B \subset aV((m_n);(\epsilon_n))$. Pretpostavimo da je B omeđen skup u $\mathcal{D}$. Prvo ćemo pokazati da je nosač svake funkcije iz B nužno sadržan unutar nekog kompaktnog skupa K. Pretpostavimo suprotno, tj. da je B omeđen, ali da

$$(\forall\, K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d))(\exists\, \psi \in B) \quad \operatorname{supp} \psi \not\subseteq K.$$

Iz toga slijedi da postoje nizovi $(\mathbf{x}_n)$ i (ψ_n) takvi da je $|\mathbf{x}_n| > n$ i $\psi_n(\mathbf{x}_n) \neq 0$. Definirajmo

$$m_n = n; \; \epsilon_n = \frac{\min\{|\psi_n(\mathbf{x}_n)|, 1\}}{2n}.$$

Tada je $V((m_n);(\epsilon_n))$ okolina nule u $\mathcal{D}$. Neka je $s \in \mathbf{N}$ tada za ψ_s vrijedi

$$\sup_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant s, |\mathbf{x}|\geqslant s} \left| D^{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\psi_s(\mathbf{x})}{s} \right| \geqslant \left| \frac{\psi_s(\mathbf{x}_s)}{s} \right| > \left| \frac{\psi_s(\mathbf{x}_s)}{2s} \right| = \epsilon_s$$

Dobili smo da $\frac{\psi_s}{s} \notin V((m_n);(\epsilon_n))$ i to za svaki $s \in \mathbf{N}$. Iz toga slijedi da B nikako ne može biti podskup od $sV((m_n);(\epsilon_n))$ za bilo koji $s \in \mathbf{N}$, a to je u kontradikciji s omeđenošću skupa B. Stoga nužno vrijedi da postoji kompaktan skup takav da svaka funkcija iz B ima nosač sadržan u K. Kako je B omeđen skup i $B \subset \mathrm{C}^\infty(K)$ tada je B sadržan unutar nekog skupa oblika $sV(m,\epsilon)$, te je ujedno i svaka derivacija funkcija iz B omeđena.

Q.E.D.

Definirajmo skupove

$$B((M_n);K) = \Big\{ \psi \in \mathrm{C}^\infty(K) : (\forall\, n \in \mathbf{N})(\forall\, |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant n)\ |\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi| \leqslant M_n \Big\}.$$

Gornju tvrdnju možemo zapisati u malo drugačijem obliku.

Korolar 4. *Skup B je omeđen u $\mathcal{D}$ ako i samo ako je B sadržan u nekom skupu oblika $B((M_n);K)$.*

Dem. Ako je B omeđen, onda su po pethodnom teoremu i sve derivacije omeđene, pa je sadržan u nekom skupu oblika $B((M_n);K)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $B \subseteq B((M_n);K)$. Želimo pokazati da za proizvoljan $V((m_n);(\epsilon_n)$

$$(\exists\, s \in \mathbf{N}) \quad B \subseteq sV((m_n),(\epsilon_n)).$$

Nađimo k takav da je K sadržan u $\mathrm{K}(0, m_k)$. Neka je s takav da

$$\max\Big\{M_0, \ldots, M_k\Big\} \leqslant s \min\Big\{\epsilon_0, \ldots, \epsilon_k\Big\}.$$

Svaka derivacija do m_k-te bit će omeđena na cijelom K sa M_{m_k} pa prema tome i na cijelom $\mathbf{R}^d$. Kako je $M_k \leqslant s\epsilon_{m_n}$, to je $B((M_n);K) \subseteq sV((m_n),(\epsilon_n))$.

Q.E.D.

Teorem 5. *Linearan funkcional je neprekidan na $\mathcal{D}$ ako i samo ako je omeđen.*

Dem. Neprekidnost uvijek povlači omeđenost. Neka je linearan funkcional na $\mathcal{D}$ omeđen, tada je omeđen na svakom $\mathcal{D}_K$. $\mathcal{D}_K$ je bornološki prostor te je funkcional neprekidan. Po teoremu 3 slijedi da je neprekidan na $\mathcal{D}$.

Q.E.D.

U teoremu smo mogli iskoristiti da je $\mathcal{D}$ kao strogi induktivni limes bornoloških prostora, i sam bornološki te da je ekvivalentna neprekidnost i omeđenost linearnih funkcionala. Promotrimo slabu topologiju na $\mathcal{D}$ koju smo označili sa $\sigma(\mathcal{D},\mathcal{D}')$. Bazične okoline nule slabe topologije su polare jednočlanih skupova iz $\mathcal{D}'$. Pretpostavimo da je $B \subseteq \mathcal{D}$ omeđen u slaboj topologiji, što povlači da za svaki $T \in \mathcal{D}'$ postoji $r \in \mathbf{R}^+$ takav da $B \subseteq r\{\psi \in \mathcal{D} : |\langle T, \psi\rangle| < 1\}$, tj. vrijedi da je $\{\langle T,\psi\rangle : \psi \in B\}$ omeđen u polju $\mathbf{F}$. Vrijedi i obratno, u slučaju da je $\{\langle T,\psi\rangle : \psi \in B\}$ omeđen, za svaki $\psi \in \mathcal{D}$ tada je B omeđen u $\sigma(\mathcal{D},\mathcal{D}')$. Kako je $\sigma(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ topologija dualnog para omeđeni skupovi se podudaraju na $\sigma(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ i $\mathcal{D}$. Time je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 6. *Skup V je omeđen u $\mathcal{D}$ ako i samo ako je za svaki $T \in \mathcal{D}'$ i skup $|\langle T, V\rangle|$ omeđen u polju $\mathbf{F}$.*

∎

Znamo da vrijedi i više; jer po Mackeyevom teoremu to vrijedi i za bilo koju topologiju dualnog para.

Teorem 7. *Skup je omeđen u $\mathcal{D}$ ako i samo ako je relativno kompaktan.*

Dem. Neka je B relativno kompaktan, tj. neka je $\mathsf{Cl}\, B$ kompaktan, što povlači omeđenost pa i omeđenost skupa B. Obratno, pretpostavimo da je B omeđen skup u $\mathcal{D}$. Tada postoji K kompaktan takav da za svaki ψ iz B vrijedi da je $\operatorname{supp}\psi$ sadržan unutar K. Vrijedi

$$(\forall\, m \in \mathbf{N})(\exists\, c \in \mathbf{R}) \quad \sup_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m} |D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(K)| < c.$$

Ujedno imamo da je $B \subseteq \mathcal{D}_K^m$ i B je omeđen u toj topologiji i to vrijedi za svaki $m \in \mathbf{N}$. Znamo da je svaki omeđeni skup u $\mathcal{D}_K^m$ i relativno kompaktan. Sada želimo pokazati da je B relativno kompaktan u $\mathcal{D}$.

Neka je $V((m_n);\epsilon_n)$ okolina nule u $\mathcal{D}$. Neka je s najmanji broj takav da vrijedi $K \subseteq \mathrm{K}(0,s)$, definiramo skup

$$V = \Big\{\psi \in \mathcal{D}_K^{m_s} : \|\psi\|_{m_s} < \min\{\epsilon_1, \dots \epsilon_s\}\Big\}.$$

Znamo da je $V \cap B \subseteq V((m_n);\epsilon_n) \cap B$. Kako je B relativno kompaktan u $\mathcal{D}_K^{m_s}$ a V je okolina nule u $\mathcal{D}_K^{m_s}$ to postoji konačan pokrivač oblika $\{\psi_1 + V, \dots, \psi_t + V\}$ te vrijedi da je i $\{\psi_1 + V((m_n);\epsilon_n), \dots, \psi_t + V((m_n);\epsilon_n)\}$ pokrivač za B. Zbog potpunosti skupa $\mathcal{D}$ imamo da je B relativno kompaktan u $\mathcal{D}$.

Q.E.D.

Lema 4. *Neka su τ_1 i τ_2 Hausdorffove topologije na $\mathbf{x}$, $\tau_1 \subseteq \tau_2$ i neka je B kompaktan u τ_1. Tada je B zatvoren u τ_2.*

Dem. Pokazat ćemo da je B^c otvoren u τ_2. Neka je $x \in B^c$. Kako je τ_1 Hausdorffova topologija a B i $\Big\{\mathbf{x}\Big\}$ su kompaktni skupovi, to postoji okolina $U \in \mathcal{U}_x^{\tau_1}$ takva da je $U \cap B = \emptyset$. Kako je τ_2 finija topologija od τ_1, to je $U \in \mathcal{U}_x^{\tau_2}$. A to povlači da je B^c otvoren u τ_2, tj. B je zatvoren.

Q.E.D.

Korolar 5. *Slabo i jako kompaktni skupovi se podudaraju na $\mathcal{D}$.*

Dem. Ako je skup slabo kompaktan, to znači da je i slabo omeđen. Slabo omeđeni i omeđeni skupovi se podudaraju, te slijedi da je relativno kompaktan. Prema ranije dokazanoj lemi također je i kompaktan.

Q.E.D.

Neka je (ψ_n) slabo konvergentan niz u $\mathcal{D}$, koji je stoga slabo omeđen. Slaba i jaka topologija na $\mathcal{D}$ se podudaraju na omeđenim skupovima, te slaba konvergencija povlači jaku konvergenciju. Slično se može zaključiti i za Cauchyev niz. Ako je niz slabo Cauchyev, onda je i omeđen, pa slijedi da je i jako Cauchyev. Zbog potpunosti prostora $\mathcal{D}$ slijedi i da je jako konvergentan.

Drugim riječima, ako je (ψ_n) niz u $\mathcal{D}$ i ako je svaki $T \in \mathcal{D}'$, niz skalara $\langle T, \psi_n\rangle$ konvergira prema nekom limesu $L(T)$, tada prema prijašnjem zaključku postoji $\psi \in \mathcal{D}$ takav da je $L(T) = \langle T, \psi\rangle$.

Tvrdnja ne vrijedi općenito za hipernizove, ali vrijedi za filtre s omeđenom ili prebrojivom bazom.

2. Prostori distribucija

Topološki prostor $\mathcal{D}'$

Neka je $\mathcal{D}'$ prostor koji se sastoji od svih neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathcal{D}$. Okoline nule na $\mathcal{D}'$ definiramo sa

$$V(B;\epsilon) = \Big\{T \in \mathcal{D}' : \sup_{\psi \in B} |\langle T, \psi\rangle| < \epsilon\Big\},$$

gdje je B omeđeni skup u $\mathcal{D}$. Tako definirane okoline nule su ustvari polare omeđenih skupova iz $\mathcal{D}$, tj. $V(B;\epsilon) = B^{\mathrm{o}}$. Prije smo pokazali da se omeđeni i slabo omeđeni skupovi na $\mathcal{D}$ podudaraju, te imamo da bazu okolina nula na $\mathcal{D}'$ tvore polare slabo omeđenih skupova na $\mathcal{D}$. Dobili smo da se ovako definirana topologija na $\mathcal{D}'$ podudara s jakom polarnom topologijom, tj. to je upravo $\beta(\mathcal{D}', \mathcal{D})$. Kako je svaka polarna topologija lokalno konveksna i usklađena je s linearnom strukturom, imamo da je $\mathcal{D}'$ s tako definiranom topologijom lokalno konveksan topološki vektorski prostor. Neka je

$$N_B(T) = \sup_{\psi \in B} |\langle T, \psi\rangle|.$$

Tako zadano preslikavanje definira polunormu na $\mathcal{D}'$. Kao i do sada, lako se može pokazati da tako definirane polunorme induciraju početnu topologiju na $\mathcal{D}'$.

Elementi iz $\mathcal{D}'$ su ustvari omeđeni linearni funkcionali na $\mathcal{D}$, što je ekvivalentno tome da su neprekidni na $\mathcal{D}$.

Teorem 8. *Prostor distribucija $\mathcal{D}'$, s gore definiranom topologijom je potpun.*

Dem. Neka je (T_λ) Cauchyev hiperniz; tada po definiciji za svaki skup $V(B;\epsilon)$ vrijedi

$$(\exists\, \lambda_0 \in \Lambda)(\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0)(\forall\, \psi \in B) \quad |\langle T_{\lambda_1}, \psi\rangle - \langle T_{\lambda_2}, \psi\rangle| < \epsilon.$$

U slučaju da za B uzmemo jednočlane skupove (jednočlani skupovi su uvijek omeđeni) dobijemo da je $(\langle T_\lambda, \psi\rangle)$ Cauchyev hiperniz u $\mathbf{R}$, te je ujedno i konvergentan hiperniz. Definirajmo linearni operator T po točkama s $\langle T, \psi\rangle = \lim_\lambda \langle T, \psi\rangle$.

Želimo pokazati da je T omeđeni operator. Neka je $V(B;\epsilon)$, tada

$$(\exists\, \lambda_0 \in \Lambda)(\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0) \quad |\langle T_{\lambda_1}, \psi\rangle - \langle T_{\lambda_2}, \psi\rangle| < \epsilon,\ \psi \in B$$

te imamo da za dovoljno veliki λ_2

$$|\langle T_{\lambda_1}, \psi\rangle - \langle T_{\lambda_2}, \psi\rangle| < \epsilon \Rightarrow \lim_{\lambda_1} |\langle T_{\lambda_1}, \psi\rangle - \langle T_{\lambda_2}, \psi\rangle| < \epsilon$$

i to za svaki $\psi \in B$. Nadalje:

$$\lim_{\lambda_1} |\langle T_{\lambda_1}, \psi\rangle - \langle T_{\lambda_2}, \psi\rangle| = |\lim_{\lambda_1} \langle T_{\lambda_1}, \psi\rangle - \langle T_{\lambda_2}, \psi\rangle| = |\langle T, \psi\rangle - \langle T_{\lambda_2}, \psi\rangle| < \epsilon,\ \psi \in B.$$

Kada T ne bi bio omeđen, postojao bi $B \subseteq \mathcal{D}$ omeđen i niz (ψ_n) u B takav da $|\langle T, \psi_n\rangle| \geqslant n$, što je u kontradikciji s time da postoji dovoljno veliki λ_2 za koji vrijedi

$$(\forall\, \psi \in B) \quad |\langle T, \psi\rangle - T_{\lambda_2}(\psi)| < \epsilon,$$

(kako je T_{λ_2} omeđen, to gornji izraz nikako ne može biti omeđen). Po Teoremu 5 dobili smo da je T neprekidan.

Q.E.D.

Teorem 9. *Da bi skup B' bio omeđen u $\mathcal{D}'$:*

(a) *Nužno je da postoji V, okolina nule u $\mathcal{D}$, takva da je $\langle T, V\rangle$ omeđen za svaki T iz B'.*

(b) *Dovoljno je da*

$$(\forall\, \psi \in \mathcal{D})(\exists\, M \in \mathbf{R}^+)(\forall\, T \in B') \qquad |\langle T, \psi\rangle| < M.$$

Dem.

(a) Neka je B' omeđeni skup u $\mathcal{D}'$, kako je topologija na $\mathcal{D}'$ finija od topologije na $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$, to je B i slabo omeđen. Kako je $\mathcal{D}$ bačvasti to je B' ekvineprekidan, što po definiciji ekvineprekidnog skupa povlači da postoji traženi skup V.

(b) Kako je $\mathcal{D}$ potpun prostor, a B' slabo omeđen, to po Teoremu I.29 imamo da je B' ekvineprekidan, te po Teoremu I.30 i omeđen u $\beta(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ tj. omeđen.

Q.E.D.

U drugom dijelu teorema smo ustvari pokazali da se slaba i jaka topologija podudaraju na omeđenim skupovima u $\mathcal{D}'$. Neka je $B' \subseteq \mathcal{D}'$ i $B \subseteq \mathcal{D}$. Uvodimo oznaku

$$\langle B', B\rangle = \Big\{\langle T, \psi\rangle : T \in B', \psi \in B\Big\}.$$

Preko tih oznaka možemo okarakterizirati konvergenciju u $\mathcal{D}'$. Hiperniz (T_λ) konvergira prema nuli ako i samo ako $\sup|\langle T_\lambda, B\rangle|$ konvergira prema nuli. Analogno tome, $B' \subseteq \mathcal{D}'$ je omeđen ako i samo ako je $\sup|\langle B', B\rangle|$ omeđen za svaki omeđeni skup $B \subseteq \mathcal{D}$.

Lema 5. *Polara bazične okoline nule u $\mathcal{D}$ je omeđeni skup u $\mathcal{D}'$*

Dem. Neka je V bazična okolina nule u $\mathcal{D}$, pokazati ćemo da za svaki $V(B;\epsilon)$ postoji $\mu \in \mathbf{R}^+$ takav da je

$$V \subseteq \mu V(B;\epsilon).$$

Zato jer je B omeđen skup, to postoji t takav da je $\frac{1}{t}B \subseteq V$; vrijedi

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{o}} \subset (B/t)^{\mathrm{o}} &= \Big\{T \in \mathcal{D}' : |\langle T, B/t\rangle| \leqslant 1\Big\} \\ &= \Big\{T \in \mathcal{D}' : |\langle \epsilon T, B/t\rangle| \leqslant \epsilon\Big\} \\ &= \Big\{T \in \mathcal{D}' : |\langle \epsilon/tT, B\rangle| \leqslant \epsilon\Big\} \\ &= \Big\{\frac{t}{\epsilon}T \in \mathcal{D}' : |\langle T, B\rangle| \leqslant \epsilon\Big\} \subseteq 2\frac{t}{\epsilon}V(B';\epsilon). \end{aligned}$$

pa imamo da je V^{o} omeđeni skup u $\mathcal{D}'$.

Q.E.D.

Teorem 10. *Hiperniz (ψ_λ) konvergira k nuli u $\mathcal{D}$ ako i samo ako* $\sup|\langle B', \psi_\lambda\rangle|$ *konvergira prema nuli za svaki omeđen skup B' u $\mathcal{D}'$.*

Dem. Pretpostavimo da $\langle B', \psi_\lambda\rangle$ konvergira prema nuli za svaki omeđeni skup $B' \subseteq \mathcal{D}'$. Uzmimo skup V koji je proizvoljna okolina nule u $\mathcal{D}$. Tada je V^{o} omeđen skup u $\mathcal{D}'$. Kako $\langle V^{\mathrm{o}}, \psi_\lambda\rangle$ konvergira prema nuli, to

$$(\exists\, \lambda_0 \in \Lambda)(\forall\, \mu \geqslant \lambda_0) \qquad |\langle V^{\mathrm{o}}, \psi_\mu\rangle| \leqslant 1.$$

A to upravo znači da će se za $\mu \geqslant \lambda_0$, ψ_μ nalaziti u V, pa imamo da (ψ_λ) konvergira prema nuli u $\mathcal{D}'$.

Pretpostavimo suprotno, neka (ψ_λ) konvergira prema nuli i neka je B' proizvoljan omeđen skup u $\mathcal{D}'$. Po Teoremu 9 postoji okolina nule $V \subseteq \mathcal{D}$ takva da je $|\langle B', V\rangle| \leqslant M$. U slučaju da za okolinu nule uzememo skup $\frac{1}{m}V$ tada ćemo dobiti $\langle B', \frac{1}{m}V\rangle \leqslant \frac{1}{m}M$. Kako je ψ_λ rezidualno u $\frac{1}{m}V$ tada je $\langle B', \psi_\lambda\rangle$ rezidualno u $\mathrm{K}(0, \frac{M}{m}) \subseteq \mathbf{R}$ za $m \in \mathbf{N}$. Time smo dobili da $\langle B', \psi_\lambda\rangle$ može biti dovoljno malen, te da konvergira prema nuli za svaki omeđeni skup B'.

Q.E.D.

Upravo smo pokazali da je svaki omeđeni skup i ekvneprekidan. Iz Teorema 9 i Teorema 10 slijedi

Lema 6. *Neka je (T_λ) konvergentan hiperniz u $\mathcal{D}'$ a B omeđen skup u $\mathcal{D}$ tada je* $\sup|\langle T_\lambda, B\rangle|$ *konvergentan hiperniz u* $\mathbf{R}$*. Ako je (ψ_λ) konvergentan hiperniz u $\mathcal{D}$ a B' omeđen skup u $\mathcal{D}'$ tada je* $\sup|\langle B,' \rangle\psi_\lambda|$ *konvergentan hiperniz u* $\mathbf{R}$.

Dem. Teorem 10 nam daje da ako je (ψ_λ) konvergentan hiperniz i B' omeđen da $\langle B', \psi_\lambda\rangle$ konvergira prema nuli.

U slučaju da je B omeđen skup u $\mathcal{D}$ a (T_λ) konvergentan hiperniz u $\mathcal{D}'$ tada je $\langle T_\lambda, B\rangle$ po definiciji konvergencije u $\mathcal{D}'$ konvergentan hiperniz u $\mathbf{R}$.

Q.E.D.

Teorem 11. *Neka je $B \subseteq \mathcal{D}$ i $B' \subseteq \mathcal{D}'$. Ako su oba skupa omeđena, tada je i $\langle B', B\rangle$ omeđen.*

Dem. Ako su oba omeđena tada po teoremu 9 postoji okolina nule V u $\mathcal{D}$ i $M \in \mathbf{R}$ takva da $|\langle B', V\rangle| \leqslant M$. Zato jer je B omeđen tada postoji $s \in \mathbf{R}$ takav da je $B \subseteq sV$. Te imamo

$$|\langle B', B\rangle| \leqslant |\langle B', sV\rangle| \leqslant s|\langle B', V\rangle| \leqslant sM.$$

Slijedi da je $\langle B', B\rangle$ omeđen skup u $\mathbf{R}$.

Q.E.D.

Bilinearna forma $\langle T, \psi\rangle$ nije neprekidna (hiperniz ne mora biti omeđen). Neka je $T \in \mathcal{D}'$ i $\psi \in \mathcal{D}$. Neka je jedan od ta dva fiksiran a drugi slabo konvergira prema nuli, tada i $\langle T, \psi\rangle$ konvergira prema nuli (slijedi odmah iz definicije slabe konvergencije). U slučaju nizova slaba i jaka konvergencija se podudaraju na $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}'$.

Za ψ iz $\mathcal{D}$ možemo definirati neprekidne linerane funkcionale na $\mathcal{D}'$ s

$$\langle L, T\rangle = \langle T, \psi\rangle.$$

L je neprekidan jer

$$T_\lambda \to 0 \Rightarrow \langle L, T_\lambda\rangle = \langle T_\lambda, \psi\rangle \to 0,$$

tj. dobili smo da svaki element iz $\mathcal{D}$ definira jedan neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{D}'$. Kasnije ćemo pokazati da su to upravo svi neprekidni linearni funkcionali na $\mathcal{D}'$.

Lema 7. *Neka (T_λ) hiperniz koji konvergira slabo prema nuli i neka je (T_λ) omeđen hiperniz. Tada (T_λ) konvergira i uniformno na kompaktinim skupovima.*

Dem. Kako je (T_λ) omeđen, prema Teoremu 9 postoje $M > 0$ i $V \in \mathcal{D}$ takvi da

$$|\langle T_\lambda, V\rangle| < M.$$

Za proizvoljan $\epsilon > 0$ uzmimo okolinu $\frac{\epsilon}{M}V$, za koji vrijedi

$$|\langle T_\lambda, \frac{\epsilon}{M}V\rangle| < \epsilon.$$

Neka je $K \in \mathcal{K}(\mathcal{D})$, tako da postoji njegov konačan pokrivač oblika

$$\Big\{\psi_1 + \frac{\epsilon}{M}V, ..., \psi_n + \frac{\epsilon}{M}V\Big\}.$$

Zbog slabe konvergencije, (T_λ) konvergira po točkama prema 0, tj.

$$(\forall\, \epsilon > 0)(\exists\, \lambda_0 \in \Lambda)(\forall\, \lambda \geqslant \lambda_0)(\forall\, i = 1, \dots n) \quad |\langle T_\lambda, \psi_i\rangle| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Uzmimo ψ iz K, znamo da postoji i td. se ψ nalazi u $\psi_i + \frac{\epsilon}{M}V$

$$\begin{aligned}|\langle T_\lambda, \psi\rangle - \langle T, \psi\rangle| &= |\langle T_\lambda, \psi\rangle - \langle T_\lambda, \psi_i\rangle + \langle T_\lambda, \psi_i\rangle - \langle T, \psi_i\rangle + \langle T, \psi_i\rangle - \langle T, \psi\rangle| \\ &\leqslant |\langle T_\lambda, \psi\rangle - \langle T_\lambda, \psi_i\rangle| + |\langle T_\lambda, \psi_i\rangle - \langle T, \psi_i\rangle| + |\langle T, \psi_i\rangle - \langle T, \psi\rangle)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3},\end{aligned}$$

a to povlači da (T_λ) konvergira uniformno na kompaktima.

Q.E.D.

Teorem 12. *Na $\mathcal{D}'$ se omeđeni i relativno kompaktni skupovi podudaraju.*

Dem. Već prije smo pokazali da za proizvoljan lokalno konveksan topološki vektorski prostor, relativno kompaktni skupovi su ujedno i omeđeni. Pokažimo suprotno, tj. neka je B omeđen skup i uzmimo proizvoljan hiperniz (T_λ) u B. Hiperniz je omeđen, te po Teoremu 9 postoji V okolina nule u $\mathcal{D}$ i $M > 0$ takvi da je

$$|\langle T_\lambda, V\rangle| < M$$

Znamo da je (T_λ) u polari skupa $\frac{1}{M}V$, pa je po Teoremu I.24 (T_λ) ekvineprekidan. Imamo da je omeđen hiperniz u $\mathcal{D}'$ ekvineprekidan i po Teoremu I.25 slijedi da je (T_λ) slabo relativno kompaktan što nam daje da postoji podhiperniz (T_μ) takav da

$$T_\mu \xrightarrow{*} T.$$

Zbog omeđenosti i slabe konvergencije vrijedi da T_μ konvergira i uniformno na kompaktima, što povlači i uniformnu konvergenciju na relativno kompaktnim skupovima. Relativno komapaktni i omeđeni skupovi se podudaraju na $\mathcal{D}$ to, imamo uniformnu konvergenciju na omeđenim skupovima u $\mathcal{D}$, što je upravo konvergencija na $\mathcal{D}'$. Slijedi da svaki hiperniz u omeđenom skupom u $\mathcal{D}'$ ima podhiperniz koji konvergira, pa je prema tome svaki omeđen skup ujedno i relativno kompaktan.

Q.E.D.

Isto kao i na $\mathcal{D}$ pokaže se:

(i) Slabo* i jako kompaktni skupovi se podudaraju na $\mathcal{D}'$.
(ii) Na omeđenim skupovima jaka i slaba* topologija se podudaraju.
(iii) Slabo* konvergentan niz i slabo* Cauchyev niz konvergiraju.

Teorem 13. *Neka je (T_j) niz distribucija i neka $\langle T_j, \psi\rangle$ konvergira prema $\langle T, \psi\rangle$, za svaki ψ iz $\mathcal{D}$. Tada je T distribucija i (T_j) konvergira jako prema T.*

Dem. Da bi skup bio omeđen u $\mathcal{D}'$ dovoljno je provjeriti da za svaki $\psi \in \mathcal{D}$, $\langle T, \psi\rangle$ ostaje omeđen za svaku distribuciju iz tog skupa. Kako je $T_n(\psi)$ konvergentan niz u $\mathbf{R}$, tada je omeđen za svaki $n \in \mathbf{N}$ te je (T_j) omeđen skup u $\mathcal{D}'$. Slaba i jaka topologija na omeđenim skupovima se podudaraju te imamo i jaku konvergenciju niza (T_j).

Q.E.D.

Teorem 14. *$\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}'$ su refleksivni prostori.*

Dem. $\mathcal{D}$ je bačvast a svaki omeđen skup B u $\mathcal{D}$ je relativno kompaktan. Imamo da je B sadržan u nekom kompaktnom skupu, pa je sadržan i u slabo kompaktnom skupu. To po Teoremu I.36 povlači da je $\mathcal{D}$ refleksivan. Kako je $\mathcal{D}' = \beta(\mathcal{D}', \mathcal{D})$, to po Teoremu I.39 imamo da je $\mathcal{D}'$ refleksivan.

Q.E.D.

Svakom elementu iz $\mathcal{D}$ možemo pridružiti linearan funkcional na $\mathcal{D}'$. Neka je $\mu \in \mathcal{D}$, tada

$$\langle T_\mu, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \mu(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Neka je B proizvoljan omeđeni skup u $\mathcal{D}$, znamo da su sve funkcije iz B omeđene s nekim $M \in \mathbf{R}$ i neka je $|\psi(\mathbf{x})| \leqslant C$ za svaki $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$. Tada imamo

$$(\forall\, \psi \in B) \qquad \int_{\mathbf{R}^d} \mu(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant M \int_{\mathbf{R}^d} \mu(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant MC.$$

Dobili smo da je T_μ omeđeni operator, pa i neprekidan. Sada možemo gledati ulaganje od $\mathcal{D}$ u $\mathcal{D}'$ u oznaci $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}'$, te na taj način prostor $\mathcal{D}$ možemo promatrati kao potprostor prostora $\mathcal{D}'$.

Teorem 15. *$\mathcal{D}$ kao potprostor od $\mathcal{D}'$ je gust u $\mathcal{D}'$.*

Dem. Neka je M slika prostora $\mathcal{D}$ po ulaganju, tj.

$$M = \left\{ T_\mu \in \mathcal{D}' : \langle T_\mu, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} \mu(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \mu \in \mathcal{D} \right\}.$$

Pokažimo da je $\mathcal{D}$ po ulaganju gust u $\mathcal{D}'$ Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji distribucija $L \in \mathcal{D}' \setminus \mathsf{Cl}\, M$. Tada postoji linearni funkcional u na $\mathcal{D}'$ takav da

$$\langle u, \mathsf{Cl}\, M \rangle = 0 \ , \ \langle u, L \rangle = 1$$

Neka je J preslikavanj koje svakom elementu iz $\mathcal{D}$ pridružuje linearan funkcional na $\mathcal{D}'$. Zbog refleksivnosti prostora $\mathcal{D}$, J je homeomorfisam. Imamo da postoji $\psi \in \mathcal{D}$ takav da je $J(\psi) = u$, tj.

$$\langle \mathsf{Cl}\, M, \psi \rangle = \langle u, \mathsf{Cl}\, M \rangle = 0 \Rightarrow \langle T_\mu, \psi \rangle = 0, \quad \mu \in \mathcal{D}$$

Dobili smo

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mu(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}$$

što povlači da je $\psi = 0$, jer je J bijekcija imamo da je $u = 0$. Time smo dobili kontradikciju.

Q.E.D.

Slično kao što smo napravili za funkcije iz $\mathcal{D}$ možemo postići i za lokalno sumabilne funkcije, tj. svaka funkcija $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ definira neku distribuciju. Pokazat ćemo da konvergencija u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ povlači konvergenciju u prostoru distribucija, preciznije:

Teorem 16. *Neka je (f_j) niz u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ i pretpostavimo da dani niz konvergira prema nuli u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$. Tada T_{f_j} konvergira prema nuli u $\mathcal{D}'$*

Dem. Neka je B omeđen skup u $\mathcal{D}$. Po Teoremu 4 postoji kompaktan skup K takav da je $\operatorname{supp}\psi \subseteq K$, za svaki $\psi \in B$ i sve funkcije iz B su omeđene s M. Imamo

$$\begin{aligned}
\sup|\langle T_{f_j}, B\rangle| &= \sup_{\psi\in B}\left|\int f_j(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \\
&= \sup_{\psi\in B}\left|\int_K f_j(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \\
&\leqslant \sup_{\psi\in B}\|\psi(\mathbf{x})\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)}\int_K f_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\
&\leqslant M\int_K f_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant M\|f_j\|_{\mathrm{L}^1(K)}.
\end{aligned}$$

Zbog omeđenosti T_{f_j} na svakom omeđenom skupu u $\mathcal{D}$ imamo da je T_{f_j} distribucija koja konvergira uniformno prema nuli na omeđenim skupovima, tj. konvergira prema nuli u $\mathcal{D}'$.

Q.E.D.

Slaba i jaka konvergencija se podudaraju na $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ te slaba konvergencija lokalno sumabilnih funkcija povlači jaku konvergenciju distribucija.

Za $\omega \subseteq \mathbf{R}^d$ i $T \in \mathcal{D}'$ možemo definirati restrikciju distribucije $T_{|_\omega} := T_{|_{\mathrm{C}_c^\infty(\omega)}}$.

Kako bismo vidjeli da su dvije distribucije jednake dovoljno je provjeriti da su one podudaraju na svakom otvorenom skupu $\omega \subseteq \mathbf{R}^d$. Neka su zadane dvije takve distribucije S i T. Neka je $(\alpha_i)_{i\in I}$ particija jedinice određena preko proizvoljnog otvorenog pokrivača na $\mathbf{R}^d$. Neka je $\psi \in \mathcal{D}$, a K kompaktan skup takav da je $\operatorname{supp}\psi \subseteq K$. Znamo da je samo konačno mnogo α_i različito od nule na K, te imamo

$$\begin{aligned}
\langle T,\psi\rangle &= \left\langle T, \sum_{i\in I}\psi\alpha_i\right\rangle = \sum_{i\in I}\langle T,\psi\alpha_i\rangle = \sum_{i=1}^n\langle T,\psi\alpha_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n\langle S,\psi\alpha_{\mathbf{x}_i}\rangle = \left\langle S, \sum_{i\in I}\psi\alpha_{\mathbf{x}}\right\rangle = \langle S,\psi\rangle
\end{aligned}$$

jer je $(\operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp}\alpha_{\mathbf{x}_i}) \subseteq (\omega_{\mathbf{x}_i}\cap K)$ i T i S se podudaraju na presjeku. To vrijedi za svaki $\psi \in \mathcal{D}$, čime smo dobili da je $T = S$.

Kažemo da je distribucija jednaka nuli na nekom otvorenom skupu $\omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ako je njezina restrikcija na ω jednaka nuli. Nosač distribucije T definiramo kao komplement unije svih otvorenih skupova na kojima je distribucija T nula.

Pretpostavimo da imamo niz distribucija (T_n) koji na proizvoljnoj okolini svake točke konvergira prema nekoj dsitribuciji, tj. pretpostavimo da

$$(\forall\,\omega \subseteq \mathbf{R}^d)(\exists\, L^{(\omega)} \in \mathcal{D}')\quad T_{n_{|_\omega}} \xrightarrow{\mathcal{D}'} L^{\omega}_{|_\omega}.$$

Tvrdimo da tada postoji distribucija T takva da je

$$T_{|_\omega} = L^{(\omega)}{}_{|_\omega}.$$

Neka je $(\Omega_i)_{i\in I}$ pokrivač od $\mathbf{R}^d$ i $(\alpha_i)_{i\in I}$ particija jedinice pridružena tom pokrivaču. Neka je $\psi \in \mathcal{D}$, tada definiramo distribuciju T sa

$$\langle T, \psi\rangle = \left\langle T, \sum_{i\in I} \alpha_i \psi \right\rangle = \sum_{i\in I} \langle T, \alpha_i\psi\rangle = \sum_{i\in I} \langle L^{(\Omega_i)}, \alpha_i\psi\rangle.$$

Kako ψ ima kompaktni nosač, ta suma je konačna i dobro je definirana. Lako se provjeri da ako je $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$, onda je

$$L^{\omega_i}_{|_{\omega_i\cap\omega_j}} = L^{\omega_j}_{|_{\omega_i\cap\omega_j}}.$$

Neka je $\psi \in \mathcal{D}$ takav da je $\operatorname{supp}\psi \subseteq \omega$; tada je

$$\langle T, \psi\rangle = \sum_{i\in I} \langle L^{(\Omega_i)}, \alpha_i\psi\rangle = \sum_{i\in I} \langle L^{(\omega)}, \alpha_i\psi\rangle = \langle L^{(\omega)}, \psi\rangle.$$

jer je $\operatorname{supp}\alpha_i\psi \subseteq (\Omega_i \cap \omega)$ a L^{Ω_i} i L^{ω} se podudaraju na presjeku. Time smo dobili da je

$$T_{|_\omega} = L^{(\omega)}{}_{|_\omega}.$$

Kako bismo pokazali da je T distribucija, dovoljno je pokazati da je neprekidna na svakom $\mathcal{D}_K$, za proizvoljan kompaktan skup K. Neka je (ψ_λ) konvergentan hiperniz u $\mathcal{D}_K$. Kako je K kompaktan, to samo konačno mnogo Ω_i siječe K, te vrijedi kako

$$\begin{aligned}
\langle T, \lim\psi_\lambda\rangle &= \sum_{i\in I} \langle L^{(\Omega_i)}, \lim\psi_\lambda\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle L^{(\Omega_{i_j})}, \lim\psi_\lambda\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lim\langle L^{(\Omega_{i_j})}, \psi_\lambda\rangle = \lim \sum_{j=1}^{m} \langle L^{(\Omega_{i_j})}, \psi_\lambda\rangle \\
&= \lim \sum_{i\in I} \langle L^{(\Omega_i)}, \psi_\lambda\rangle = \lim\langle T, \psi_\lambda\rangle.
\end{aligned}$$

Time smo dobili traženu tvrdnju.

U slučaju da imamo niz distribucija s kompaktnim nosačem, pri čemu ti nosači teže u beskonačno, tada će taj niz distribucija konvergirati jako prema nuli. Za pokazati tu tvrdnju možemo koristiti Teorem 13 koji kaže da je točkovna konvergencija ekvivalentna jakoj konvergenciji niza distribucija. Uzmimo proizvoljan $\psi \in \mathcal{D}$. Tada postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da je

$$\operatorname{supp}\psi \cap K_j \neq \emptyset, \quad j \geqslant m,$$

tj.

$$\langle T_j, \psi\rangle = 0, \quad j \geqslant m,$$

te po teoremu 13 niz i jako konvergira prema nuli.

Topološka definicija derivacije

Parcijalnu derivaciju distribucije definiramo kao

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \psi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Neka je $h = (0, ..., 0, h_k, 0, ...0)$, tada parcijalnu derivaciju funkcije možemo definirati preko translacije sa

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{\tau_h \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})}{h_k}$$

Analogno tome, derivaciju možemo i proširiti i na prostor distribucija sa

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau_{-h} T - T}{h_k}$$

Sljedeće želimo pokazati da ako uzmemo ψ iz $\mathcal{D}$ tada vrijedi

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau_h \psi - \psi}{h_k} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}$$

Lema 8. *Neka je za $\psi \in \mathcal{D}$*

$$\mu_h = \frac{\tau_h \psi - \psi}{h_k} - \frac{\partial \psi}{\partial x_k}.$$

Vrijedi da μ_h konvergira prema nuli u $\mathcal{D}$.

Dem. Kako je $\psi \in \mathcal{D}$, to ψ ima kompaktan nosač K. Definirajmo skup $H = \{\mu_h \in \mathcal{D} : h \in [0, 1\rangle\}$. Svaki μ_h ima nosač sadržan u skupu $K_1 = \{\mathbf{x} + \mathbf{r} : \mathbf{x} \in K, \|\mathbf{r}\| \leqslant 1\}$. Kako je skup K kompaktan, tada je i K_1 kompaktan. Prema Taylorovom teoremu znamo da postoji $\boldsymbol{\xi} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + h\rangle$ takav da vrijedi

$$\begin{aligned} |\mu_h(\mathbf{x})| &= \left| \frac{\tau_h \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})}{h_k} - \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right| \\ &\leqslant \left| \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\xi})}{\partial x_k^2} h \right| \leqslant M|h|, \ \mathbf{x} \in K_1. \end{aligned}$$

Ocjenu na derivaciju smo dobili zbog kompaktnosti nosača funkcija μ_h. Time smo dobili uniformnu konvergenciju μ_h prema nuli. Isti zaključak možemo provesti i za svaku parcijalnu derivaciju funkcije μ_h. Tako smo dobili uniformnu konvergenciju svake parcijalne derivacije prema nuli. Kako je $\operatorname{supp} \mu_h \subseteq K_1$, uzmimo najmanji $r \in \mathbf{N}$ takav da je $K_1 \subseteq \mathrm{K}(0, r)$. Neka je $V((m_n); (\epsilon_n))$ okolina nule u $\mathcal{D}$, definiramo $\epsilon = \min\{\epsilon_i : i = 1, \ldots, r\}$ i $m = \max\{m_i : i = 1, \ldots, r\}$. Zbog uniformne konvergencije svih parcijalnih derivacija možemo naći $\bar{h}$ takav da za svaki $h > \bar{h}$ vrijedi

$$\max_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} \|D^{\boldsymbol{\alpha}} \psi_h\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)} < \epsilon,$$

čime smo dobili konvergenciju u $\mathcal{D}$.

Q.E.D.

Sljedeći teorem kaže da su te dvije definicije derivacije ekvivalentne

Teorem 17. *Neka je T iz $\mathcal{D}'$, tada je*

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \lim_{h \to 0} \frac{\tau_{-h} T - T}{h_k}.$$

Dem. Pokazat ćemo da

$$S_{(h)} = \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{\tau_{-h}T - T}{h_k}$$

teži prema nuli u $\mathcal{D}'$ kada h teži prema nuli.

$$\begin{aligned}
\langle S_{(h)}, \psi \rangle &= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \psi \right\rangle - \frac{\tau_{-h}\langle T, \psi\rangle - \langle T, \psi \rangle}{h_k} \\
&= \left\langle T, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right\rangle - \frac{\langle T, \tau_h \psi\rangle - \langle T, \psi \rangle}{h_k} \\
&= \left\langle T, -\frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \frac{\tau_h\psi - \psi}{h_k} \right\rangle = \langle T, \mu_h \rangle
\end{aligned}$$

gdje je μ_h funkcija kao u prethodnoj lemi. μ_h konvergira prema nuli u $\mathcal{D}$ kada h teži prema nuli, pa prema tome imamo

$$\lim_{h \to 0} S_{(h)}(\psi) = \lim_{h\to 0} \langle T, \mu_h \rangle = \langle T, \lim_{h \to 0} \mu_h \rangle = \langle T, 0 \rangle = 0$$

jer je T neprekidan linearni funkcional. Dobili smo niz distribucija koje slabo konvergiraju prema nuli. Kako se nizovno slaba i jaka konvergencija podudaraju na $\mathcal{D}'$ imamo i jaku konvergenciju prema 0. Imamo da

$$\frac{\tau_{-h}T - T}{h_k} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

Q.E.D.

Slično kao i za prvu parcijalnu derivaciju, možemo definirati derivaciju proizvoljnog reda za distribucije. Neka je $h = (0, ..., 0, h_k, 0, ..., 0)$ tada

$$\Delta_{h_k} = \tau_{-h}T - T$$

Definirajmo

$$\Delta_{h_k}^{p_k} T = \Delta_{h_k}(\Delta_{h_k}^{p_k - 1} T)$$

Neka su $\mathsf{h} = (h_1, ..., h_d)$ i $\mathsf{p} = (p_1, ..., p_d)$ multiindeksi, gdje je h_i pridružen varijabli x_i. Definirajmo

$$\Delta_{\mathsf{h}}^{\mathsf{p}} T = \Delta_{h_1}^{p_1} ... \Delta_{h_d}^{p_d} T$$

i p-tu parcijalanu derivaciju sa

$$D^{\mathsf{p}} T = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{\mathsf{h}}^{\mathsf{p}} T}{\mathsf{h}^{\mathsf{p}}}$$

gdje je $\mathsf{h}^{\mathsf{p}} = h_1^{v_1} \dots h_d^{v_d}$ Slično kao i u Teoremu 16, pokaže se da ako imamo omeđeni niz funkcija u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ koje konvergiraju prema nuli, tada niz distribucija definirane preko zadanog niza konvergira prema nuli u $\mathcal{D}'$ (jer je niz omeđen, tada vrijedi da je $\operatorname{supp} f_n$ sadržan u nekom kompaktnom skupu K, za svaki prirodni broj n, pa je ostatak analogan kao u dokazu Teorema 16).

Teorem 18. *Derivacija distribucije je neprekidan linearan operator sa $\mathcal{D}'$ na $\mathcal{D}'$.*

Dem. Ako je B omeđeni skup u $\mathcal{D}$, tada će

$$B' = \left\{-\frac{\partial\psi}{\partial x_k} : \psi \in B\right\}$$

biti također omeđen u $\mathcal{D}$. Znamo da za distribuciju vrijedi

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \psi \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \right\rangle$$

te imamo

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, B \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Neka je (T_λ) hiperniz u $\mathcal{D}'$ koji konvergira prema nuli. Zbog uniformne konvergencije distribucija na omeđenim skupovima imamo

$$\lim_\lambda \left\langle \frac{\partial T_\lambda}{\partial x_k}, B \right\rangle. = \lim_\lambda \langle T_\lambda, B' \rangle = 0$$

Prema tome, derivacija distribucije je neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{D}'$.

Q.E.D.

Teorem nam daje način za provjeru konvergencije distribucije, tj. ako (T_λ) teži prema nuli tada nužno vrijedi i da $(\frac{\partial T_\lambda}{\partial \mathbf{x}_k})$ konvergira prema nuli.

Teorem 19. *Neka je (f_λ) i $f_\lambda \xrightarrow{L^1(K)} 0$. Neka je $D = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m} a_{\boldsymbol{\alpha}} D^{\boldsymbol{\alpha}}$. Tada vrijedi*

$$Df_\lambda \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0.$$

Dem. Slijedi direktno iz neprekidnosti derivacije kao linearnog operatora na $\mathcal{D}'$

Q.E.D.

Lokalna struktura distribucija

Teorem 20. *Neka je T distribucija i K kompaktan skup. Tada postoji $m \geqslant 0$ takav da za svaki (ψ_λ) u $\mathcal{D}_K$ za koji vrijedi da $D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_\lambda$ konvergira uniformno za $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$, povlači i* $\sup |\langle T, \psi_\lambda \rangle| \to 0$ *u* $\mathbf{R}$.

Dem. Prema Teoremu 9 znamo da za svaki $T \in \mathcal{D}'$ postoji V okolina nule u $\mathcal{D}$ takva da vrijedi

$$|\langle T, V \rangle| \leqslant M.$$

Kako je V okolina nule, to postoji i $V((m_n);(\epsilon_n)) \subseteq V$. Neka je n najmanji prirodan broj takav da vrijedi $K \subseteq \mathrm{K}[0,n]$ i neka je $\mu = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ i $m = m_n$. Tada vrijedi $V(m;\mu;K) \subseteq V((m_n);(\epsilon_n))$. Za proizvoljan $k \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\langle T, V(m;k\mu;K) \rangle = \langle T, kV(m;\mu;K) \rangle = k\langle T, V(m;\mu;K) \rangle \leqslant kM.$$

Time smo dokazali da za $\psi \in V(m;\mu k;K)$ vrijedi

$$\langle T,\psi\rangle \leqslant kM.$$

Ako uzmemo proizvoljan hiperniz (ψ_λ) u $\mathcal{D}_K$ takav da

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi_\lambda \to 0,\ |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$$

uniformno po točkama tada će taj niz konvergirati i prema nuli u $\mathcal{D}_K$ te možemo naći λ_0 takav da za svaki $\lambda \geqslant \lambda_0$ vrijedi $\psi_\lambda \in V(m;\mu k;K)$. Time smo dobili da $\langle T,\psi_\lambda\rangle$ može biti dovoljno mali.

Q.E.D.

Teorem 21. *Neka je $T \in \mathcal{D}'$ i neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ relativno kompaktan skup. Tada postoji neprekidna funkcija f takva da je T dobivena derivacijom T_f; točnije postoji multiindeks $\boldsymbol{\alpha}$ takav da je*

$$\langle D^{\boldsymbol{\alpha}}T_f,\psi\rangle = \langle T,\psi\rangle,\ \psi \in \mathcal{D}_{\mathsf{Cl}\,\Omega}.$$

Dem. Svaka distribucija je omeđena na omeđenim skupovima u $\mathcal{D}$, a skupovi oblika $V(m;\mu;K)$ su omeđeni. Tada imamo da za svaki $\epsilon > 0$ postoje m i μ i kompaktan skup K takav da za $\psi \in V(m;\mu;K)$ vrijedi $\langle T,\psi\rangle \leqslant \epsilon$. S $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ definirat ćemo sljedeću operaciju

$$\frac{\partial^{md}}{\partial x_1^m ... \partial x_d^m}$$

Za svaki $\theta \in \mathcal{D}_{\mathsf{Cl}\,\Omega}$ i $i = 1,..,d$ vrijedi

$$\theta(x_1,...x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial\theta}{\partial t_i}(x_1,...,x_{i-1},t_i,x_{i+1},x_d)dt_i$$

Neka je l maksimum 1 i sljedećeg izraza

$$\max_{i=1,...,d}\Big\{\sup\Big\{|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|\Big\} : (0,...,x_i^{(j)},...,0) \in \mathsf{Cl}\,\Omega, j = 1,2\Big\}\Big\}.$$

Želimo pokazati da uz pretpostavku

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial^{m+1}\psi}{\partial x^{m+1}}(t_1,...t_n)\right| dt_1...dt_n \leqslant \frac{\mu}{l^{md}}$$

vrijedi da je $\psi \in V(m;\mu;K)$. Imamo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^m\psi}{\partial x^m}(x_1,...,x_d)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_d} \frac{\partial^{m+1}\psi}{\partial x^{m+1}}(t_1,...t_d)dt_1...dt_n\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_d} \left|\frac{\partial^{m+1}\psi}{\partial x^{m+1}}(t_1,...t_d)\right| dt_1...dt_n \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial^{m+1}\psi}{\partial x^{m+1}}(t_1,...t_d)\right| dt_1...dt_d \leqslant \frac{\mu}{l^{md}}.\end{aligned}$$

Neka je $\boldsymbol{\alpha} = (m, ..., m-1, ..., m)$, tj. $\boldsymbol{\alpha}$ na i-tom mijestu ima komponentu $m-1$, a na ostalim mjestima je m. Sada ćemo ocjeniti $|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi|$. Račun je sličan kao iranije, pa neke korake preskačemo:

$$\begin{aligned}|D^{\boldsymbol{\alpha}}\psi(x_1, ..., x_n)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial^m \psi}{\partial x^m}(x_1, ..., x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, x_d) dt_i \right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{l^{md}} dt_i \leqslant l \frac{\mu}{l^{md}} = \frac{\mu}{l^{md-1}}.\end{aligned}$$

Račun se provede analogno za svaki $\boldsymbol{\alpha}$ takav da je $|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m$, te imamo da je ψ iz $V(m; \mu; K)$. Definirajmo

$$E = \left\{ \frac{\partial^{m+1}\psi}{\partial x^{m+1}} : \psi \in \mathcal{D}_{\mathsf{Cl}\,\Omega} \right\}.$$

Opskrbimo E sa topologijom nasljeđenom iz $\mathrm{L}^1(\mathsf{Cl}\,\Omega)$. Neka je (θ_n) niz u E koji konvergira prema nuli. Znamo da postoji $\psi_n \in \mathcal{D}_{\mathsf{Cl}\,\Omega}$ takav da je

$$\theta_n = \frac{\partial^{m+1}\psi_n}{\partial x^{m+1}}.$$

Kako je $\theta_n \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$, ako je θ_n dovoljno blizu nuli u $\mathrm{L}^1(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ normi, tada će i $\langle T, \psi_n \rangle$ biti dovoljno mali te imamo da

$$\theta_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} 0 \Rightarrow \langle T, \psi_n \rangle \longrightarrow 0.$$

Definirajmo linearni funkcional L sa

$$\langle L, \theta \rangle = \langle T, \psi \rangle$$

gdje je

$$\theta = \frac{\partial^{m+1}\psi}{\partial x^{m+1}}.$$

Prema prije pokazanom L je neprekidan linearni funcional na prostoru E. Prema Hahn-Banachovom teoremu postoji neprekidno proširenje funkcionala L na prostor $\mathrm{L}^1(\mathsf{Cl}\,\Omega)$. Svaki funkcional iz $\mathrm{L}^1(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ možemo prikazati uz izbor nekog $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ kao

$$\langle L, g \rangle = \int_{\mathsf{Cl}\,\Omega} f g d\mathbf{x}$$

Označimo proširenje tog funkcionala s L_f. Sve skupa imamo da za svaki $\psi \in \mathcal{D}_{\mathsf{Cl}\,\Omega}$ i za svaki $T \in \mathcal{D}'$ imamo da postoji $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathsf{Cl}\,\Omega)$ takav da je

$$\langle T, \psi \rangle = \langle L_f, \theta \rangle = \int_{\mathsf{Cl}\,\Omega} \frac{\partial^{m+1}\psi}{\partial x^{m+1}} d\mathbf{x} = \left\langle (-1)^{(m+1)d} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}, \psi \right\rangle$$

tj. imamo

$$T = (-1)^{(m+1)d} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}.$$

Funkcija f nije jedinstveno određena. U slučaju da uzmemo h takav da

$$\frac{\partial^{m+1} h}{\partial x^{m+1}} = 0,$$

zbroj funkcije h s f dat će istu distribuciju. Kako bismo dobili neprekidnu funkciju, dovoljno je funkciju f integrirati, tj. definiramo funkciju F na sljedeći način

$$F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_d} f(t_1, ..., t_d) dt_1 ... dt_d.$$

Kako je Ω relativno kompaktan, imamo da je F iz $\mathrm{L}^\infty(\mathsf{Cl}\,\Omega)$. T mogu izraziti kao

$$T = \frac{\partial^{m+2} F}{\partial x^{m+2}}$$

gdje je F neprekidna funkcija.

Q.E.D.

Teorem 22. *Skup $B' \subseteq \mathcal{D}'$ je omeđen ako i samo ako za proizvoljan $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$ svaka distribucija T iz B' se može prikazati kao*

$$\langle T, \psi \rangle = \int_K D^{\boldsymbol{\alpha}} F_T(\psi) d\mathbf{x}, \quad \psi \in \mathcal{D}_K$$

gdje je F_T neprekidna funkcija iz $\mathrm{L}^1(K)$, a skup $\{F_T : T \in \mathcal{D}'\}$ omeđen u $\mathrm{L}^1(K)$.

Dem. Svaki $V(m; \mu; K)$ je omeđen u $\mathcal{D}$ tada po Teoremu 11 vrijedi da postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$\sup |\langle B', V(m; \mu; K) \rangle| \leqslant \epsilon.$$

Za $\psi \in V(m; \mu; K)$ i $L_T \in \mathcal{D}'$ definiramo

$$\theta_\psi = \frac{\partial^{m+1} \psi}{\partial x^{m+1}} \quad \text{i} \quad \langle L_T, \theta_\psi \rangle = T(\psi).$$

Za proizvoljan $\psi \in V(m; \mu; K)$ i $T \in \mathcal{D}'$, kao u dokazu prethodnog teorema vrijedi

$$\int_K |\theta_\psi| d\mathbf{x} \leqslant \frac{\mu}{l^{mn}} \Rightarrow |\langle L_T, \theta_\psi \rangle| \leqslant \epsilon,$$

tj.

$$|\langle L_T, \theta_\psi \rangle| \leqslant \frac{\epsilon l^{mn}}{\mu} \|\theta_\psi\|_{\mathrm{L}^1(K)},$$

slijedi da je

$$\|L_T\| \leqslant \frac{\epsilon l^{mn}}{\mu}.$$

Neka je funkcija $f_T \in \mathrm{L}^\infty(K)$ takva da je

$$\langle L_T, g \rangle = \int_K D^{\boldsymbol{\alpha}} f_T g \, d\mathbf{x}, \quad g \in \mathrm{L}^1(K),$$

gdje nam je sada L_T proširenje operatora na $\mathrm{L}^1(K)$. Proširenje operatora po Hahn-Banachovom teoremu zadržava normu, te zbog $\mathrm{L}^1(K)' = \mathrm{L}^\infty(K)$ i $L_T \in \mathrm{L}^1(K)''$ vrijedi

$$\|f_T\|_{\mathrm{L}^\infty(K)} = \|L_T\|_\leqslant \frac{\epsilon l^{mn}}{\mu}.$$

Integriramo f_T po svim komponentama kako bismo dobili neprekidnu funkciju F_T kao u dokazu prethodnog teorema, te imamo

$$\int_K |F_T| d\mathbf{x} \leqslant \int_K \left| \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_T(t_1, \dots t_d) dt_1 \dots dt_d \right| d\mathbf{x}$$
$$\leqslant \int_K l^d \|f_T\|_{\mathrm{L}^\infty(K)} d\mathbf{x} \leqslant l^{2d} \|f_T\|_{\mathrm{L}^\infty(K)} \leqslant l^{2d} \frac{\epsilon l^{mn}}{\mu}$$

i to za svaki F_T takav da je $T \in B'$. Dobili smo da je

$$\{F_T : T \in B'\}$$

omeđen skup neprekidnih funkcija u $\mathrm{L}^1(K)$.

Obratno, neka je B omeđen skup neprekidnih funkcija u $\mathrm{L}^1(K)$. Neka je $T_F = D^{\boldsymbol{\alpha}} F$ za $F \in B$ u smislu distribucija. Neka je

$$B' = \Big\{ T_F \in \mathcal{D}' : T_F = D^{\boldsymbol{\alpha}} F, \ F \in B \Big\}.$$

Uzmimo $\psi \in \mathcal{D}$, tada je

$$|\langle T_F, \psi \rangle| = \left| \int_{\operatorname{supp} \psi} F D^{\boldsymbol{\alpha}} \psi \, d\mathbf{x} \right| \leqslant M \|F\|_{\mathrm{L}^1(\operatorname{supp} \psi)} \leqslant Mr.$$

Konstantu M smo dobili zbog omeđenosti svih derivacija u $\mathcal{D}$, a r jer je B omeđen skup u $\mathrm{L}^1(K)$. Prema Teoremu 9 (b) dio imamo da je i B' omeđen u $\mathcal{D}'$.

Q.E.D.

Od sada umjesto da gledamo omeđene skupove u $\mathcal{D}'$ možemo gledati nizove koji teže prema nuli u $\mathcal{D}'$.

Teorem nam daje da će niz distribucija (T_j) biti omeđen ako i samo ako je

$$T_j = (-1)^{(m+1)n} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} f_j$$

pri čemu su f_j omeđene funkcije u $\mathrm{L}^1(K)$.

Prostor $\mathrm{L}^1(K)$ u Teoremu 21 možemo zamijeniti i Hilbertovim prostorom $\mathrm{L}^2(K)$. Prostor E definiran kao u dokazu teorema 21 možemo opremiti topologijom $\mathrm{L}^2(K)$. Kako je topologija na $\mathrm{L}^2(K)$ finija nego topologija na $\mathrm{L}^1(K)$, imamo da je funkcional L također neprekidan i na prostoru E opremljenom s topologijom od $\mathrm{L}^2(K)$. U ovom slučaju Hahn-Banchov teorem će biti nepotreban jer možemo promatrati zatvarač skupa E, proširiti L po neprekidnosti na $\mathsf{Cl}\, E$, i definirati da nam je L nula na potprostor okomit na $\mathsf{Cl}\, E$. Distribucija više neće biti prikazana preko funkcija iz $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)$, nego preko omeđenih funkcija iz $\mathrm{L}^2(K)$. Vrijedi i više. Neka je (T_j) niz distribucija koji teži prema nuli i neka je (L_j) niz distribucija pridružen nizu (T_j) kao u dokazu prethodnog teorema, tada za $\theta \in E$

$$\lim_j \langle L_j, \theta \rangle = \lim_j \langle T_j, \psi \rangle = 0.$$

Zbog neprekidnosti funkcionala L_j to vrijedi i za svaki $\theta \in \mathsf{Cl}\, E$. Pridružimo savkom funkcionalu L_j funkciju f_j postupkom opisanim kao maloprije. Zbog ekvivalencije norma na $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^d)$ i $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$ dobit ćemo i omeđenost operatora u novom prostoru E, tj. (f_j) bit će omeđen u $\mathrm{L}^2(K)$. Te vrijedi i sljedeće, za $\psi \in \mathrm{L}^2(K)$

$$\int_K f_j(x)\psi(x)\, d\mathbf{x} = \lim_j \langle L_j, \psi \rangle \to 0.$$

Fiksiramo $\mathbf{x}$ i definiramo

$$F_j(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} f_j(t)\, dt = \int_{\mathsf{Cl}\,\Omega} K_{\mathbf{x}}(t) f_j(t)\, dt$$

gdje je $K_{\mathbf{x}} \in \mathrm{L}^2(K)$ takav da je 1 za $t \leqslant \mathbf{x}$ i $t \in \mathsf{Cl}\,\Omega$ a 0 inače. Tako definirana funkcija je neprekidna i imamo d $F_{\mathbf{x}}$ teži prema nuli neovisno o $\mathbf{x}$. Iz toga lisjedi sljedeći teorem

Teorem 23. *Neka je (T_j) niz distribucija koji konvergira prema nuli. Neka je Ω relativno kompaktan skup u $\mathbf{R}^d$. Tada postoji multiindeks $\boldsymbol{\alpha}$ takav da*

$$T_j|_{\mathcal{D}_{\mathsf{Cl}\,\Omega}} = D^{\boldsymbol{\alpha}} F_j|_{\mathcal{D}_{\mathsf{Cl}\,\Omega}}$$

gdje su F_j neprekidne funkcije koje konvergiraju uniformno prema nuli. ∎

Literatura

[1] Nenad Antonić, Marko Vrdoljak: *Mjera i integral*, PMF—Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[2] Haïm Brezis: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[3] Yvonne Choquet-Bruhat, Cécile DeWitt-Morette, Margaret Dillard-Bleick: *Analysis, manifolds and physics I*, North-Holland, 1982.

[4] F. Gerard Friedlander, Mark Joshi: *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1998.

[5] John L. Kelley: *General topology*, van Nostrand, 1955.

[6] Sigeru Mizohata: *The theory of partial differential equations*, Cambridge University Press, 1973.

[7] Lawrence Narici, Edward Beckenstein: *Topological vector spaces*, CRC Press, 2011.

[8] Laurent Schwartz: *Théorie des distributions,* Hermann, 1966.

[9] Stephen Willard: *General topology*, Dover, 1998.

[10] Kôsaku Yosida: *Functional analysis*, Springer, 1980.

Sažetak

U diplomskom radu bavimo se konstrukcijom i opisom svojstava topologije na prostoru distribucija. Pomoću distribucija generaliziramo pojam funkcije i njene derivacije. Teorija distribucije daje proširenje pojma funkcije, pri čemu je svaka distribucija derivabilna proizvoljno mnogo puta.

Prvo poglavlje započinjemo s pregledom osnovnih rezultata iz topologije. Općenito definiramo pojmove neprekidnosti funkcije, konvergencije filtra, hiperniza, kompaktnosti kao i topologiju na produktu topoloških prostora. Također definiramo topologiju induciranu familijom neprekidnih funkcija kojom ćemo opisivati lokalno konveksne topološke vektorske prostore. Uvodimo pojam topoloških vektorskih prostora koja nastaje spajanjem topoloških i algebarskih svojstava na vektorskim prostorima. Od posebnog interesa biti će nam lokalno konveksni topološki vektorski prostori, jer su prostori $\mathcal{D}'$ i $\mathcal{D}$ lokalno konveksni. S obzirom da na prostoru neprekidnih linearnih funkcionala nemamo preferiranu topologiju uvodimo nekoliko topologija (*slaba*, *jaka*, *Mackeyeva*), te proučavamo njihova svojstva.

U drugom poglavlju uvodimo prostor probnih funkcija $\mathcal{D}$, navodimo neka topološka svojstva tog prostora, te posebno proučavamo omeđene skupove. Zadajemo prostor distribucija kao prostor svih neprekidnih linearnih funkcionala na prostoru $\mathcal{D}$ i opisujemo topološka svojstva danog prostora. Pokazuje se da svaka lokalno integrabilna funkcija definira neku distribuciju. Posebno konstruiramo definiciju derivaciju distribucije koja se može gledati kao poopćenje derivacije funkcija s prekidom. Na kraju pokazujemo lokalna svojstva distribucija te kako se lokalno svaka distribucija, može prikazati kao derivacija neprekidne funkcije.

Summary

In this thesis we deal with the construction of topology of distributions and describe some of its propreties. By using the space of distributions we will generalise the notion of functions and their derivation as each distribution is derivable arbitrarily many times.

The first chapter begins with an overview of the main results from topology. On topological spaces we define the concepts of continuous functions, convergence of filters, nets, compactness as well as the product topology. We also define the topology induced by a family of continuous functions which we will use to describe locally convex topological vector spaces. We introduce the notion of topological vector spaces merging the topological and algebraic structure of vector spaces. Of special interest are locally convex spaces, as the spaces $\mathcal{D}$ and $\mathcal{D}'$ are locally convex. On the space of continuous linear functionals we have no prefered topology, so we introduce several topologies (*weak*, *strong*, *the Mackey topology*) and we study their propreties.

In the second chapter we introduce the space of test functions, give some topological propreties and specially we deal with bounded sets. The space of distributions is defined as the space of all continuous linear functionals on the space of test functions and we describe topological propreties of the given space. It will be shown that every locally summable function defines a distribution. In particular we will show how to define the derivation of a distribution, which can be seen as a generalisation of the derivative of functions. At the end we will describe the local propreties of distributions, and how each local distribution can be displayed as the derivative of a continuous function.

Životopis

Rođen sam 12. studenog 1988. godine u Puli. Osnovnu školu sam završio u Rovinjskom selu a srednju prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Rovinju. 2007. godine upisao sam Preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. 2011. godine upisao sam Diplomski studij Primijenjena matematika.