Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Frane Peko

Nelinearni zakoni sačuvanja

Diplomski rad

Zagreb, rujna 1998.

Predgovor

U diplomskom radu ću pisati o nekim hiperboličkim jednadžbama, a najprije ću opisati jedno poopćenje pojma rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi. Potom ću proučavati svojstva zakona sačuvanja na posebnom primjeru—Burgersovoj jednadžbi. Pokazat ću da Burgersova jednadžba općenito ne može imati globalno klasično rješenje, te ću uvesti pojam slabog rješenja. Pokazat ću da slabo rješenje postoji i dat ću neke uvjete za jedinstvenost. Koristeći moderne tehnike, pokazat ću da slabo rješenje postoji i za općeniti zakon sačuvanja. Na kraju ću prikazati primjere slabih rješenja dobivene numeričkim putem.

Ovom prilikom želio bih se zahvaliti svom mentoru dr. Nenadu Antoniću na nesebičnoj potpori i razumijevanju koje je imao za vrijeme pisanja ovog Rada. Mnoštvom korisnih savjeta trudio se pojasniti i prikazati zanimljivim relativno teško i meni do tada nepoznato gradivo, kojim se u Radu koristim. Zahvaljujem se i ostalim kolegam sa Zavoda za primijenjenu matematiku, a naročito asistentima Nevenu Balenoviću i Marku Vrdoljaku na uloženom vremenu i korisnim savjetima kojima su mi pomogli riješiti određene probleme vezane uz ovaj rad. Ističem da sam kroz cijelo to vrijeme mogao računati na njihovu pomoć u razjašnjavanju svih nejasnoća na koje sam nailazio.

Zagreb, rujna 1998.

Frane Peko

Rad posvećujem sinu Viktoru Adrianu, čije je nesebično odricanje od prava na plač, uvelike pridonijelo nastanku Rada.

Sadržaj

I. Cauchyjeva zadaća za običnu diferencijalnu jednadžbu

Pregled klasičnih rezultata o običnim diferencijalnim jednadžbama

Obična diferencijalna jednadžba m-tog reda glasi:

$$F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(m)}(t)) = 0 \ .$$

Za dovoljno glatku funkciju F, po teoremu o implicitno zadanim funkcijama, tu jednadžbu (kao algebarsku jednadžbu) lokalno možemo riješiti po najvišoj derivaciji:

$$x^{(m)}(t) = G(t, x(t), \cdots, x^{(m-1)}(t)) \ .$$

Zamjenom $x^1 = x, \ \dots, \ x^m = x^{(m-1)}$; uz oznaku $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$, ta se jednadžba može zapisati u obliku sustava m običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x^m(t) &= G(t, \mathbf{x}(t)) \\ \frac{d}{dt}x^{m-1}(t) &= x^m(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}x^1(t) &= x^2(t) \ , \end{aligned}$$

koji konciznije zapisujemo u obliku $\mathbf{x}'(t) = \mathsf{f}(t, \mathbf{x}(t))$.

Uz gornji se sustav jednadžbi najčešće pridodaje i početni uvjet. Zadatak je riješiti Cauchyjevu zadaću: naći funkciju $\mathbf{x}$ tako da vrijedi:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathsf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \ . \end{cases}$$

Poznata su sljedeća tri teorema (vidi [PSV]), čiji se rezultati neposredno prenose i na jednadžbe (odnosno sustave) višeg reda. Najprije se podsjetimo da je funkcija $a : U \longrightarrow \mathbf{R}$ realna analitička funkcija na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbf{R}^{m+1}$ ako se na nekoj okolini proizvoljne točke $(t_0, \mathbf{x}_0)$ toga skupa funkcija a može razviti u konvergentan red potencija:

$$a(t, \mathbf{x}) = \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_m = 0}^{\infty} c_{\alpha_0, \dots, \alpha_m} (t - t_0)^{\alpha_0} (x^1 - x_0^1)^{\alpha_1} \cdots (x^m - x_0^m)^{\alpha_m} \ .$$

Tome je ekvivalentno da se funkcija a može proširiti do holomorfne funkcije na nekoj okolini točke $(t_0, \mathbf{x}_0)$ u $\mathbf{C}^{m+1}$. Vektorska je funkcija analitička ako je takva svaka njezina komponenta.

Teorem 1. **(Cauchy)** *Ako je funkcija* f *analitička na nekoj okolini točke* $(t_0, \mathbf{x}_0)$*, onda postoji jedinstveno rješenje* $\mathbf{x}$ *gornje Cauchyjeve zadaće, koje je analitičko na nekoj okolini točke* t_0*.*

∎

Na temelju Cauchyjevog teorema imamo sljedeći postupak za rješavanje Cauchyjeve zadaće. Pretpostavimo da se nepoznata funkcija može razviti u konvergentan red potencija i taj red uvrstimo u jednadžbu, u kojoj smo svaku funkciju koja se pojavljuje razvili u red potencija. Izjednačavanjem dobivamo algebarske jednadžbe iz kojih u načelu možemo odrediti koeficiente u razvoju rješenja.

Cauchyjev teorem zahtijeva preveliku regularnost. Matematičari se najčešće pozivaju na Picardov teorem, u kojem se pretpostavlja da je funkcija f neprekinuta po t i Lipschitzova po $\mathbf{x}$. Taj se teorem dokazuje s pomoću Banachovog teorema o čvrstoj točki, koji daje i praktičnu metodu za konstrukciju (Picardovih) aproksimacija rješenja.

Teorem 2. **(Picard)** *Ako je funkcija* f *neprekinuta po varijabli* t *i Lipschitzova po* $\mathbf{x}$ *na nekoj okolini točke* $(t_0, \mathbf{x}_0)$*, onda postoji jedinstveno rješenje Cauchyjeve zadaće, koje je diferencijabilna funkcija na nekoj okolini točke* t_0. ∎

Na kraju spomenimo da se pretpostavke na funkciju f mogu još oslabiti, ali se pritom gubi jedinstvenost.

Teorem 3. **(Peano)** *Ako je* f *neprekidna funkcija, onda lokalno postoji barem jedno rješenje Cauchyjeve zadaće.* ∎

Generalizirana rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi

Rezultat Peanovog teorema možemo dobiti za širu klasu funkcija. Neka je $\mathsf{f} : S \to \mathbf{R}^d$ izmjeriva funkcija, gdje je

$$S = \langle t_0 - a, t_0 + a\rangle \times \mathrm{K}(\mathbf{x}_0, b) \subseteq \mathbf{R}^{1+d}.$$

Želimo riješiti Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathsf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{1}$$

na nekoj okolini t_0, te pretpostavljamo ograničenje $|\mathsf{f}(t, \mathbf{x})| \leqslant M(t)$ (ss t), $\mathbf{x} \in \mathrm{K}(\mathbf{x}_0, b)$, za neku funkciju $M \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$. Proširimo li f nulom van S, pretpostavke će biti ispunjenje na čitavom $\mathbf{R}^{1+d}$, te stoga bez smanjenja općenitosti možemo promatrati $S = \mathbf{R} \times \mathrm{K}(\mathbf{x}_0, b)$.

Funkciju $\rho \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}_0^+)$ takvu da je $\operatorname{supp} \rho \subseteq \mathrm{K}(\mathbf{0}, 1))$ i $\int_{\mathbf{R}^d} \rho = 1$ nazivamo izglađivačem. Tom nazivu je porijeklo u tome što pri konvoluciji neke proizvoljne funkcije $\psi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ s ρ:

$$\psi_\rho(\mathbf{x}) = (\psi * \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,,$$

dobivamo $\psi_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$, jer derivacije parcijalnom integracijom prelaze na ρ u integralu. Izglađivači će biti često korišteni u sljedećem poglavlju.

Promatramo, za neki $\varepsilon > 0$, regularizaciju (izglađenje) funkcije f

$$\mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} \mathsf{f}(t, \mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,,$$

za koju, što se lako vidi, vrijedi ista ograda $|\mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leqslant M(t)$ (ss t), $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$. Za tako dobivenu f_ε imamo da je funkcija $t \mapsto \mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x}(t))$ integrabilna za svaku neprekinutu funkciju $\mathbf{x}$, te pritom zadovoljava ocjenu:

$$|\nabla_{\mathbf{x}} \mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leqslant \frac{CM(t)}{\varepsilon}\,,$$

pri čemu je

$$C = \int |\nabla_{\mathbf{y}} \rho|\, d\mathbf{y}\,.$$

Uzmimo fiksan $\varepsilon > 0$. Prethodne ocjene nam omogućuje da, za T takav da je

$$C \int_{-T}^{T} M(t) dt < \varepsilon\,,$$

riješimo integralnu jednadžbu na $[-T,T]$:

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathsf{f}_\varepsilon(s, \mathbf{x}_\varepsilon(s))ds\,, \tag{2}$$

koja je, zasad formalno, ekvivalentna Cauchyjevoj zadaći (2) ukoliko funkciju f zamijenimo s izglađjenjem f_ε. Rješenje tražimo pomoću uzastopnih aproksimacija

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^k(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathsf{f}_\varepsilon(s, \mathbf{x}^{k-1}(s))ds,\\ \mathbf{x}^0(t) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

Za taj niz jednostavno se dobije ocijena

$$|\mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C}\left(\frac{C\int_{-T}^T M(s)ds}{\varepsilon}\right)^k\,,$$

iz čega, kako je

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k \left(\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{x}^{i-1}(t)\right)\,,$$

slijedi da $\mathbf{x}^k$ ima uniformni limes $\mathbf{x}_\varepsilon$ (kad $k \to \infty$) koji zadovoljava integralnu jednadžbu (2). Stoga je $\mathbf{x}_\varepsilon$ apsolutno neprekinuta za $|t| \leqslant T$ i vrijedi $\dot{\mathbf{x}}_\varepsilon(t) = \mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t))$ skoro svuda. Budući da su realne vrijednosti $\mathbf{x}_\varepsilon(\pm T)$ dobro definirane, to možemo rješavati integralne jednadžbe s njima kao početnim uvijetima dok ne dobijemo $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ za $|t| < a$, za koji vrijedi

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{x}_0| &\leqslant \int_{-a}^a M(s)ds\,,\\ |\dot{\mathbf{x}}_\varepsilon(t)| &\leqslant M(t)\end{aligned}$$

za skoro svaki $t \in \langle -a, a\rangle$. Kad bi dobili da postoji $a_0 < a$ takav da je $\mathbf{x}_\varepsilon$ definiran samo za $t < a_0$, imali bismo omeđenu apsolutno neprekinutu funkciju $\mathbf{x}_\varepsilon$ koju bi bilo moguće dodefinirati i na rubu za $t = a_0$. Ponavljanjem prethodnog argumenta dolazimo do tražene funkcije $\mathbf{x}_\varepsilon$ definirane na $\langle -a, a\rangle$.

Uočimo da su ocjene dobivene za $\mathbf{x}_\varepsilon$ neovisne o ε, pa ćemo dobiti iste ocjene jednoliko na $(\mathbf{x}_\varepsilon)_{\varepsilon\in K}$ kad je $K \subseteq \mathbf{R}^+$.

Dakle, $(\mathbf{x}_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbf{R}^+}$ je uniformno ograničen i ekvineprekidan, iz čega nam po Arzelá-Ascolijevom teoremu slijedi pretkompaktnost. Za neko gomilište $\mathbf{x}$ dobiveno kao limes funkcija $\mathbf{x}_{\varepsilon_k}$ gdje je (ε_k) niz pozitivnih brojeva koji teži u nulu, imamo da je neprekidna funkcija. Stoga je dobro je definirana derivacija $\dot{\mathbf{x}}$ u smislu teorije distribucija. Za test funkciju $\boldsymbol{\psi} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}^d)$ dobivamo

$$|\langle \dot{\mathbf{x}}_{\varepsilon_k}, \boldsymbol{\psi}\rangle| \leqslant \int M|\boldsymbol{\psi}|dt\,,$$

što na limesu povlači

$$|\langle \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\psi}\rangle| \leqslant \int M|\boldsymbol{\psi}|dt\,,$$

iz čega zaključujemo da je $\dot{\mathbf{x}} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}^d)$, i da mu je norma manja od M skoro svuda.

Postavlja se pitanje na koji način takav $\mathbf{x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu. Kad bi f bila Carathéodoryjeva (za skoro svaki t neprekidna na $\mathbf{R}^d$), tada bismo imali

$$\mathsf{f}_\varepsilon(t,\mathbf{x}) \;\to\; \mathsf{f}(t,\mathbf{x})$$

po točkama, za $\varepsilon \searrow 0$ na S, što opet daje jedno proširenje Peanovog teorema.

Prije nego li nastavimo s daljnjim razmatranjem, načinit ću malu digresiju. Možemo primijetiti da je za svaku izmjerivu funkciju $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ i $\operatorname{ess\,sup}_y f(\cdot,y) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ izmjeriva funkcija. To slijedi iz Foubinijevog teorema tako da primijetimo da je

$$e^{\operatorname{ess\,sup}_y f(\cdot,y)} = \left\| e^{f(\cdot,y)} \right\|_\infty ,$$

odnosno imamo da je

$$\operatorname{ess\,sup} f(\cdot,y) = \ln \left\| e^{f(\cdot,y)} \right\|_\infty ,$$

a $\|\cdot\|_\infty$ je izmjeriva funkcija.

Definirajmo funkciju

$$H(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\delta\searrow 0} \operatorname*{ess\,sup}_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\delta} \mathsf{f}(t,\mathbf{y})\cdot\boldsymbol{\xi} ,$$

za koju se lako vidi da je konveksna i pozitivno homogena po $\boldsymbol{\xi}$, pa po [Hö2, Theorem 5] zaključujemo da je podupiruća za neki zatvoren konveksan podskup $\mathbf{R}^d$ koji je pridružen $(t,\mathbf{x})$, i kojeg označimo s $F(t,\mathbf{x})$; odnosno vrijedi

$$H(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sup_{\mathbf{y}\in F(t,\mathbf{x})} \mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi} .$$

Budući da je $H(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ odozgo poluneprekinuta funkcija u $\mathbf{x}$, to je $F(t,\mathbf{x})$ odozgo poluneprekinuta skupovna funkcija po $\mathbf{x}$. Čak i više, $F(t,\mathbf{x})$ je najmanji zatvoren konveksan skup takav da svaka njegova okolina sadrži skoro svaki $\mathsf{f}(t,\mathbf{y})$ za $\mathbf{y}$ iz neke okoline točke $\mathbf{x}$.

Pogledajmo funkciju $\mathbf{x}_\varepsilon$ u nekim točkama $t_1,t_2 \in \langle -a,a\rangle$, pri čemu je $t_1 \leqslant t_2$

$$(\mathbf{x}_\varepsilon(t_2)-\mathbf{x}_\varepsilon(t_1))\cdot\boldsymbol{\xi} = \int_{t_1}^{t_2} \mathsf{f}_\varepsilon(t,\mathbf{x}_\varepsilon(t))\cdot\boldsymbol{\xi}\,dt .$$

Za neki $\delta > 0$ odaberimo ε takav da vrijedi $\varepsilon + |\mathbf{x}_\varepsilon(t)-\mathbf{x}(t)| < \delta$, što je moguće, jer $\mathbf{x}_{\varepsilon_k} \to \mathbf{x}$. Tada lako dolazimo do ocjene

$$(\mathbf{x}_\varepsilon(t_2)-\mathbf{x}_\varepsilon(t_1))\cdot\boldsymbol{\xi} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \operatorname*{ess\,sup}_{|y-\mathbf{x}(t)|<\delta} \mathsf{f}_\varepsilon(t,y)\cdot\boldsymbol{\xi}\,dt ,$$

što s obzirom da je ess sup izmjeriva funkcija, u limesu $\varepsilon \searrow 0$, a potom i $\delta \searrow 0$, daje

$$(\mathbf{x}(t_2)-\mathbf{x}(t_1))\cdot\boldsymbol{\xi} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} H(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})dt ,$$

odnosno u točkama gdje $\mathbf{x}$ ima derivaciju $\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\boldsymbol{\xi} \leqslant H(t,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, što opet povlači da je $\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(t,\mathbf{x})$.

Iz izlaganja zaključujemo da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4. *Uz pretpostavke s početka poglavlja Cauchyjeva zadaća* (1) *ima rješenje u smislu da je $\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(t,\mathbf{x})$, gdje je $F(t,\mathbf{x})$ najmanji zatvoren konveksan skup takav da svaka njegova okolina sadrži skoro svaki $\mathsf{f}(t,\mathbf{y})$ za $\mathbf{y}$ iz neke okoline od $\mathbf{x}$.* ∎

Što nam konkretno daje ovaj teorem?

Pretpostavimo da je $\mathsf{f} : \mathbf{R}^{1+d} \to \mathbf{R}^d$ funkcija neprekinuto diferencijabilna na zatvaraču svake strane neke glatke C^1 plohe P na kojoj f ima prekid prve vrste. S Ω_+ odnosno Ω_- označimo te otvorene skupove, a s f_- i f_+ limese funkcije f na plohi P iz Ω_+ i Ω_-. Pretpostavimo dalje da su za rubne vrijednosti (vektore) f_- i f_+ s obje strane plohe vektorska polja $(1, \mathsf{f}_\pm)$ transverzalna (normalna komponenta je različita od nule) na P. Ako su oba polja usmjerena na istu stranu plohe, tada će integralne krivulje prolaziti kroz nju. Nadalje, ako su usmjerena na stranu različitu od one na kojoj su definirana, vektori $(1, \mathsf{f}_\pm)$ su usmjereni prema skupovima $\Omega_\mp$, tada integralne krivulje ostaju u plohi P kao integralne krivulje jednadžbe

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathsf{f}_+ + (1-\lambda)\mathsf{f}_- \,,$$

gdje je $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ odabran tako da je $(1, \lambda\mathsf{f}_+ + (1-\lambda)\mathsf{f}_-)$ tangencijalan na P, i na kraju ako su usmjereni od P, integralne krivulje mogu teći kroz P do neke točke u kojoj napuštaju plohu, te idu na neku stranu kao standarna integralna krivulja.

Dokažimo sada teorem jedinstvenosti koji će u skalarnom slučaju dopuštati negativne skokove kod funkcije f.

Teorem 5. *Ako uz pretpostavke prethodnog teorema, za* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^d$ *te* $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ *vrijedi i*

$$(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot (\mathsf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathsf{f}(t, \mathbf{z})) \leqslant C|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 \,, \tag{3}$$

tada obična diferencijalna jednadžba (1_1)*, s početnim uvjetom* $\mathbf{x}(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$*, ima jedinstveno rješenje* $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$*, te za* $t \in [t_0, t_0 + a]$ *vrijedi*

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{z})| \leqslant e^{C(t-t_0)}|\mathbf{y} - \mathbf{z}| \,. \tag{4}$$

Dem. Najprije primijetimo da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$(a + b)^2 \leqslant (1 + \varepsilon)a^2 + (1 + \tfrac{1}{\varepsilon})b^2 \,.$$

Neka su $\varepsilon, \delta > 0$, $|\mathbf{y}' - \mathbf{y}| < \delta$ i $|\mathbf{z}' - \mathbf{z}| < \delta$. Tada po (3) vrijedi

$$\begin{aligned}(\mathbf{y}' - \mathbf{z}') \cdot (\mathsf{f}(t, \mathbf{y}') - \mathsf{f}(t, \mathbf{z}')) &\leqslant C|\mathbf{y}' - \mathbf{z}'|^2 \\ &\leqslant C((1 + \varepsilon)|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 + (1 + \tfrac{1}{\varepsilon})4\delta^2) \,,\end{aligned}$$

odnosno

$$(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot (\mathsf{f}(t, \mathbf{y}') - \mathsf{f}(t, \mathbf{z}')) \leqslant C((1 + \varepsilon)|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 + (1 + \tfrac{1}{\varepsilon})4\delta^2) + 4\delta M(t).$$

U limesu kad $\delta \searrow 0$ zaključujemo da za $Y \in F(t, \mathbf{y})$ i $Z \in F(t, \mathbf{z})$ vrijedi

$$(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot (Y - Z) \leqslant C(1 + \varepsilon)|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 \,,$$

iz čega u limesu kad $\varepsilon \searrow 0$ slijedi

$$(\mathbf{y} - \mathbf{z})(Y - Z) \leqslant C|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 \,.$$

Neka $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ označava rješenje za početni $\mathbf{y}$. Ako pokažemo (4) jedinstvenost rješena će slijediti iz $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Definirajmo

$$R(t) = |\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{z})| \,.$$

Za skoro svaki t imamo:

$$\begin{aligned} R(t)\frac{d}{dt}R(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}R^2(t) \\ &= (\mathbf{x}(t,\mathbf{y}) - \mathbf{x}(t,\mathbf{y})) \cdot (\dot{\mathbf{x}}(t,\mathbf{y}) - \dot{\mathbf{x}}(t,\mathbf{y})) \\ &= (\mathbf{x}(t,\mathbf{y}) - \mathbf{x}(t,\mathbf{y})) \cdot (Y - Z)\,, \end{aligned}$$

gdje su $Y \in F(t,\mathbf{y})$ i $Z \in F(t,\mathbf{z})$, što upravo povlači

$$R(t)\frac{d}{dt}R(t) \leqslant CR^2(t)\,,$$

odnosno skoro svuda tamo gdje $R(t) \neq 0$ imamo

$$\frac{d}{dt}R(t) \leqslant CR(t)\,,$$

što konačno daje

$$R(t) \leqslant e^{C(t-t_0)}R(t_0)$$

za $t \in [t_0, t_0 + a]$

Q.E.D.

II. Burgersova jednadžba

U ovom poglavlju ćemo proučavati svojstva zakona sačuvanja. Zakoni začuvanja su kvazilinearne hiperboličke jednadžbe oblika

$$\partial_t u + \partial_x (f \circ u) = 0$$

na $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, pri čemu je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ glatka funkcija. Funkciju f obično nazivamo funkcija fluksa. Točnije, proučavat ćemo Cauchyjevu zadaću za zakon sačuvanja dobivenu tako da se postavi početni uvjet $u(0, \cdot) = u_0$, i to na posebnom primjeru Burgersovoj jednadžbi.

Prije nego li prijeđemo na proučavanje nelinarne jednažbe ukratko ćemo raspraviti svojstva linearne jednadžbe. Unatoč svojoj jednostavnosti ona nas prirodno navodi na metodu karakteristika koju ćemo koristiti i kasnije u kvazilinernom slučaju.

Linearna jednadžba

Promatramo Cauchyjev problem za skalarnu linearnu jednadžbu prvog reda na $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t u + a(t,x)\partial_x u = b(t,x)u + f(t,x) \\ u(0,\cdot) = u_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Pritom pretpostavljamo da su $a, \partial_x a, b$ i f neprekidne realne funkcije na $\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$. Karakteristike parcijalne diferencijalne jednadžbe (1_1) definiramo kao integralne krivulje obične diferencijalne jednadžbe

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t)).$$

Neka je x funkcija takva da je $x(\cdot, y)$ karakteristika koja prolazi kroz točku $(0, y)$, odnosno rješenje Cauchyjevoga problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t,y) = a(t, x(t,y)) \\ x(0,y) = y\,. \end{cases}$$

Takva funkcija x postoji na nekoj okolini x-osi, gdje je i neprekidno diferencijabilna. Ako pretpostavimo i da je funkcija a omeđena, onda rješenje x postoji na $\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$. Iz teorije običnih diferencijalnih jednadžbi slijedi da tada kroz svaku točku $(t, x) \in \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$ prolazi točno jedna karakteristika, pa $x(t, y)$ određuje valjanu zamjenu varijabli. Preinačimo naš početni Cauchyjev problem (1) tako što ćemo umjesto (t, x) uvesti nove varijable (t, y) (namjesto $(t, x(t, y))$ promatramo (t, y)); najprije definirajmo

$$\begin{aligned} U(t,y) &= u(t, x(t,y))\,, \\ B(t,y) &= b(t, x(t,y))\,. \\ F(t,y) &= f(t, x(t,y))\,. \end{aligned}$$

Koristeći (1) dobivamo

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}U(t,y) &= \tfrac{d}{dt}u(t, x(t,y)) \\ &= \partial_t u(t, x(t,y)) + a(t,x)\partial_x u(t, x(t,y)) \\ &= b(t, x(t,y))u(t, x(t,y)) + f(t, x(t,y)) \\ &= B(t,y)U(t,y) + F(t,y)\,. \end{aligned}$$

Rješavanje Cauchyjevog problema (1) svodi se na rješavanje familije običnih diferencijalnih jednadžbi; točnije, za svaki $y \in \mathbf{R}$ rješavamo Cauchyjevu zadaću:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t,y) = B(t,y)U(t,y) + F(t,y) \\ U(0,y) = u_0(y)\,, \end{cases}$$

koja ima rješenje dano formulom

$$U(t,y) = u_0(y)e^{\int_0^t B(s,y)ds} + \int_0^t F(l,y)e^{-\int_l^t B(s,y)ds}dl\,.$$

Vratimo li se na polazne varijable (t,x), dobivamo jedinstveno neprekidno rješenje na skupu kojeg pokrivaju karakteristike.

Pokažimo teorem jedinstvenosti koji će biti važan za nelinearan slučaj. Za neki fiksan $T \in \mathbf{R}^+$ s S_T označimo prugu $\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}$.

Teorem 1. *Neka su $a,b \in \mathrm{L}^\infty(S_T)$, i neka vrijedi jednostrani Lipshitzov uvjet*

$$a(t,x) - a(t,y) \leq C(t)(x-y) \tag{2}$$

za $t \in \langle 0,T\rangle$ i $x > y$, gdje je $C(t)$ nerastuća funkcija definirana na $\mathbf{R}^+$. Nadalje, neka je $u \in \mathrm{L}^\infty(S_T)$ funkcija takva da rješava Cauchyjev problem

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(au) = bu \\ u(0,\cdot) = 0 \end{cases}$$

u slabom smislu, odnosno da za svaku $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ koja iščezava za $t \geq T$ vrijedi

$$\int_{S_T} u(\partial_t\varphi + a\partial_x\varphi + b\varphi)\,dxdt = 0\,. \tag{3}$$

Tada je $u = 0$ skoro svuda.

Dem. Neka su (a_n) i (b_n) nizovi C^∞ funkcija koji konvergiraju prema a i b skoro svuda kad $n \to \infty$, a zadovoljavaju i iste ograde, uključujući i (2). Takve nizove možemo dobiti tako da a i b konvoluiramo sa standardnim izglađivačem

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \frac{n^2}{C}e^{-\frac{1}{1-|nx|^2}}, & |nx| < 1 \\ 0 & , \text{ inače,} \end{cases}$$

gdje je konstanta $C = \int_{|x|<1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}$, odnosno odabrana tako da vrijedi

$$\int_{|nx|<1} \rho_n(x)\,dx = 1\,.$$

Također, zahtijevamo da je $b_n(t,x) = 0$ kad je $t < \frac{1}{n}$, što se može postići tako da se ne konvoluira funkcija b, nego funkcija b_n^* dobivena rezanjem funkcije b:

$$b_n^* = \begin{cases} b, & t < \frac{2}{n} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(S_T)$. Riješimo Cauchyjev problem unazad za sljedeću prijenosnu jednadžbu na S_T:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi_{nm} + a_n\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{nm} + b_m\varphi_{nm} = \psi \\ \varphi_{nm}(T,x) = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Iz rasprave koja je prethodila teoremu slijedi da rješenje (4) postoji, a zbog regularnosti koeficijenata jednadžbe u (4) imamo da je $\varphi_{nm} \in \mathrm{C}^\infty$.

Neka je $x_n(t; s, y)$ karakteristika koja prolazi kroz (s, y), odnosno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$\dot{x}_n(t; s, y) = a_n(t, x_n(t; s, y)) ,$$

uz $x_n(s; s, y) = y$. Budući da smo φ_{nm} fiksirali na $\{T\} \times \mathbf{R}$, rješenje se određuje unatrag duž karakteristika. Stoga je rješenje Cauchyjeve zadaće (4) dano formulom

$$\varphi_{nm}(t, x) = -\int_t^T \psi(s; x_n(s; t, x)) e^{\int_t^s b_m(\tau; t, x) d\tau} \, ds .$$

Vidimo da je $\varphi_{nm}(t, x) = 0$ kad je $t > T - \varepsilon$, za neki $\varepsilon > 0$. Budući da za svaki a_n imamo istu uniformnu ocjenu, to zaključujemo da postoji kompaktan skup takav da je za svaki n i m imamo da je nosač funkcije φ_{nm} sadržan u njemu. Primjena jednakosti (3) na φ_{nm} daje

$$\int_{S_T} u\psi dtdx = \int_{S_T} u \left((a_n - a) \tfrac{\partial}{\partial x} \varphi_{nm} + (b - b_m) \varphi_{nm} \right) dtdx .$$

Izvedimo uniformne ocjene za φ_{nm}, koje će povlačiti da desna strana teži u nulu kad pustimo najprije da $n \to \infty$, pa onda da $m \to \infty$. Time ćemo pokazati da je lijeva strana uvijek nula, što će dati tvrdnju teorema. Prema Teoremu 5 iz prethodnog poglavlja, iz (2) (za a_n) dobivamo sljedeću uniformnu ogradu kad je $s \in \langle t, T \rangle$:

$$|\partial_x x_n(s; t, x)| \leq C_1 ,$$

gdje C_1 ovisi samo o t. Budući da je $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(S_T)$, to imamo da je $\psi(t, x) = 0$ kad je t dovoljno mali, odnosno postoji $\delta > 0$ takav da je $([0, \delta\rangle \times \mathbf{R}) \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$. Lako se vidi da, počevši od nekog dovoljno velikog m_0, za $m \geq m_0$ imamo $\psi(t, x) = 0$ i $b_m(t, x) = 0$ kad je $t < \frac{1}{m}$. Iz toga zaključujemo da se integrali u formuli za φ_{nm} ne mijenjaju od prolaska karakteristika kroz pravac $t = \frac{1}{m}$, to jest za $t < \frac{1}{m}$ imamo $\varphi_{nm}(t, x) = \varphi_{nm}(\frac{1}{m}, x_n(\frac{1}{m}; t, x))$. Dalje, iz formule za rješenje φ_{nm} zaključujemo da za svaki $\tau \in \langle 0, T]$, ukoliko je $t \in \langle \tau, T]$, imamo ocjenu

$$\partial_x \varphi_{nm}(t, x) \leq C_2 ,$$

gdje konstanta C_2 ovisi samo o m i τ, pa je neovisna o n. Stoga, dalje iz činjenice da za $t < \frac{1}{m}$ imamo

$$\varphi_{nm}(t, x) = \varphi_{nm}(\tfrac{1}{m}, x_n(\tfrac{1}{m}; t, x))$$

zaključujemo da kad je $t < \frac{1}{m}$ vrijedi

$$\int_{\mathbf{R}} |\partial_x \varphi_{nm}(t, x)| \, dx = \int_{\mathbf{R}} |\partial_x \varphi_{nm}(\tfrac{1}{m}, x)| \, dx \leq C_3 ,$$

gdje C_3 ovisi samo o m. Uz ove unifomne ocjene, kad pustimo $n \to \infty$, dobivamo

$$\left| \int_{S_T} u\psi \, dtdx \right| \leq M \int_{|x|<M} |b_m - b| \, dtdx + MC_3\tau$$

za svaki $\tau > 0$. Uzmemo li prvo limes kad $\tau \to 0$, a potom i $m \to \infty$, dobit ćemo

$$\int_{S_T} u\psi \, dtdx = 0 .$$

Q.E.D.

Klasična rješenja Burgersove jednadžbe

Prelazimo na proučavanje Cauchyjevog problema za Burgersovu jednadžbu

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u = 0 \\ \quad u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{5}$$

za $t > 0$. Promotrimo pripadne karakteristike, dobivene kao integralne krivulje diferencijalne jedandžbe

$$\tfrac{d}{dt}x(t) = u(t, x(t))\,, \tag{6}$$

koje prolaze kroz neku zadanu točku iz $\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$. Po lančanom pravilu, uvažavanjem jednadžbe (5_1) slijedi

$$\dot{u}(t,x(t)) = \partial_t u(t,x(t)) + \partial_x u(t,x(t))u(t,x(t)) = 0\,.$$

Dakle, ako je u neprekidno diferencijabilna, tada se na krivuljama određenim sa (6) u ne mijenja. Nadalje, u (6) je s desne strane konstanta, pa slijedi da su u ovom slučaju karakteristike pravci.

Želimo li izračunati vrijednost funkcije u u nekoj točki (t,x), trebamo naći karakteristiku koja prolazi kroz tu točku i odrediti gdje ona siječe pravac $t = 0$, odnosno treba naći y takav da je

$$x = y + tu_0(y) \tag{7}$$

i uzeti

$$u(t,x) = u_0(y). \tag{8}$$

Međutim, tu se javlja pitanje egzistencije i jedinstvenosti takovog y (egzistencije i jedinstvenosti karakteristike). Egzistenciju ćemo dobiti kao posljedicu dokaza jedinstvenosti. Sada ćemo, dokazujući jedinstvenost, dobiti i nužna ograničenja na doseg rješenja. U (7) promotrimo x kao funkciju varijabli t i y, za koju, uz čvrsti t, tražimo inverz (jedinstveni y za svaki x). Teorem o implicitno zadanoj funkciji, koji daje egzistenciju i jedinstvenost lokalnog C^1 inverza, traži da je $\partial_y x = 1 + tu_0'(y) \neq 0$. Pitamo se za koje t to vrijedi. Naravno, zbog početnog uvjeta, zanima nas interval koji uključuje nulu. Za $t = 0$ je $\partial_y x = 1 > 0$, pa zahtijevamo da je

$$0 < 1 + tu_0'(y).$$

Kad je $u_0'(y) \geqslant 0$, to je ispunjeno za svaki $t > 0$. Složeniji je slučaj kad u nekoj točki y imamo $u_0'(y) < 0$, i tada taj zahtjev zapisujemo u obliku

$$t < \frac{1}{-u_0'(y)},$$

a za ograničenje uzimamo da je $t < T$, pri čemu je

$$T = \inf_y \frac{1}{-u_0'(y)} = \frac{1}{\sup\limits_y -u_0'(y)}.$$

Za $t \in [0, T\rangle$ imamo da vrijedi $\partial_y x > 0$, i zaključujemo da, ako su u_0 i u_0' ograničene na $[0, T\rangle \times \mathbf{R}$, postoji jedinstveno C^1 rješenje Cauchyjevog problema. Iz (7) i (8) lakim računom slijedi

$$\partial_x u = \frac{u_0'(y)}{\partial_y x} = \frac{u_0'(y)}{1 + t u_0'(y)}\,.$$

Odavdje vidimo da ako u nekom y funkcija $-u_0'$ postiže pozitivan maksimimum, onda $\partial_x u$ divergira kad t teži T. Odnosno, neprekidno diferencijabilno rješenje postoji samo na $[0, T\rangle \times \mathbf{R}$. Iz računa se može također primijetiti da za svaki $t \in [0, T\rangle$ vrijedi

$$\sup_x |u(t, x)| = \sup_x |u_0(x)|$$

i

$$\int_{\mathbf{R}} |\partial_x u(t, x)| \; dx = \int_{\mathbf{R}} |u_0'(y)| dy\,.$$

Vidimo da se maksimalna vrijednost i totalna varijacija rješenja ne mijenja, što daje smisao traženju ograničenog omeđene varijacije nakon nastanka singularnosti. Pitanje je kako u tom slučaju shvaćati diferencijalnu jednadžbu. Odgovor leži u slaboj formulaciji.

Slaba formulacija Burgersove jednadžbe

Kažemo da je $u \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R})$ slabo rješenje Burgersove jednadžbe (5), ako za svaku funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ vrijedi

$$-\int_{\mathbf{R}^2} \left(u \partial_t \varphi + \tfrac{1}{2} u^2 \partial_x \varphi\right) \; dt dx = 0\,.$$

Proširimo u nulom na $\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}$. Kažemo da je takvo u slabo rješenje Cauchyjevog problema ako za svaku $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ vrijedi

$$-\int_{\mathbf{R}^2} \left(u \partial_t \varphi + \tfrac{1}{2} u^2 \partial_x \varphi\right) \; dt dx = \int_{\mathbf{R}} u_0 \varphi \, dx\,.$$

Prije nego li prijeđemo na proučavanje svojstava slabih rješenja, iskazat ćemo koristan teorem iz vektorske analize (vidi [Ev2, App. C, Theorem 1]).

Teorem 2. (Gauss-Green) *Neka je Ω omeđen otvoren podskup od $\mathbf{R}^d$ i neka mu je rub $\partial\Omega$ klase C^1. Ako je $u \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$, tada vrijedi*

$$\int_\Omega \partial_i u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \mathsf{n}_i \, dS\,,$$

gdje je n jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. ∎

U kakvoj su vezi klasično i slabo rješenje? Neka je u klase $\mathrm{C}^1(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R})$ slabo rješenje Cauchyjevog problema. Za $\varphi \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2)$ računamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} u_0 \varphi \, dx &= -\int_{\mathbf{R}^2} \left(u \partial_t \varphi + \tfrac{1}{2} u^2 \partial_x \varphi\right) \; dt dx \\ &= -\int_{\mathbf{R}^2} \left(\partial_t (u\varphi) + \partial_x (\tfrac{1}{2} u^2 \varphi)\right) \; dt dx + \int_{\mathbf{R}^2} \varphi \left(\partial_t u + \partial_x (\tfrac{1}{2} u^2)\right) \; dt dx\,.\end{aligned}$$

Po Gauss-Greenovom teoremu, uvažavajući da je φ funkcija s kompaktnim nosačem i da je $u = 0$ za $t < 0$, iz prvog integrala na desnoj strani dobivamo

$$-\int_{\mathbf{R}^2} \left(\partial_t (u\varphi) + \partial_x (\tfrac{1}{2} u^2 \varphi)\right) \; dt dx = \int_{\mathbf{R}} u(0, x) \varphi \, dx\,.$$

Prethodne rezultate možemo zajedno zapisati u sljedećem obliku

$$\int_{\mathbf{R}} (u(0,x) - u_0(x))\varphi \, dx + \int_{\mathbf{R}^2} \varphi \left(\partial_t u + \partial_x(\tfrac{1}{2}u^2)\right) \, dtdx = 0 \,. \tag{9}$$

Budući da u tu jednakost možemo uvrstiti proizvoljnu glatku funkciju φ takvu da je $\varphi = 0$ za $t = 0$, zaključujemo da jednadžba (5) vrijedi u jakom (klasičnom) smislu. Za općenite φ, uzevši u obzir jednadžbu (5), dobivamo i da je početni uvjet ispunjen.

Sad ćemo dokazati općenitu lemu koja će nam odrediti ponašanje funkcija oko diskontinuiteta. Pretpostavljat ćemo da diskontinuiteti leže na parametrizabilnim plohama, koje nazivamo frontama šokova. Kad radimo u jednoj prostornoj dimenziji, šok je krivulja $x = g(t)$. Štoviše, u tom slučaju ćemo za (t, x) takav da je $x < g(t)$ reći da je lijevo od šoka, odnosno za $x > g(t)$ da je desno.

Lema 1. *Neka su funkcije $u, v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ glatke sa svake strane glatke krivulje $x = g(t)$, na kojoj postoje njihovi limesi i limesi njihovih prvih derivacija, koje u slabom smislu zadovoljavaju*

$$\partial_t u + \partial_x v = 0 \,; \tag{10}$$

odnosno, neka za svaku funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ vrijedi

$$-\int (u\partial_t\varphi + v\partial_x\varphi) = 0 \,.$$

Tada u i v na otvorenom (van krivulje) zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu (10) u jakom smislu i vrijedi

$$v_+ - v_- = g'(t)(u_+ - u_-) \,, \tag{11}$$

gdje su $v_\pm$ i $u_\pm$ limesi na krivulji s lijeva, odnosno zdesna.

Dem. Označimo s $\Omega_- = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : x < g(t)\}$ i $\Omega_+ = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : x > g(t)\}$ otvorene skupove na čijim zatvaračima se u i v mogu dodefinirati do C^1funkcija. Neka je φ proizvoljna funkcija iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ takva da je $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega_-$. Računamo:

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_{\Omega_-} (u\partial_t\varphi + v\partial_x\varphi) \, dtdx \\ &= -\int_{\Omega_-} (\partial_t(u\varphi) + \partial_x(v\varphi)) \, dtdx + \int_{\Omega_-} \varphi(\partial_t u + \partial_x v) \, dtdx \,. \end{aligned}$$

Za prvi integral s desne strane iz Gauss-Greenovog teorema, uzevši u obzira da je $\operatorname{supp}\varphi$ kompaktan, imamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_-} (\partial_t(u\varphi) + \partial_x(v\varphi)) \, dtdx &= \int_{\Omega_-} \mathsf{div} \left(\varphi \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) \, dtdx \\ &= \int_{\partial\Omega_-} \left(\varphi \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) \cdot \mathsf{n} \, dS \\ &= \int_{\partial\Omega_-} \varphi(un_1 + vn_2) \, dS \,, \end{aligned}$$

gdje je n jedinična vanjska normala na Ω_-. Budući da je φ nula na rubu od Ω_-, to imamo i da je ovaj integral nula. Dobili smo

$$0 = \int_{\Omega_-} \varphi(\partial_t u + \partial_x v) \, dtdx \,,$$

a kako je φ bio proizvoljan, dobivamo da je (10) ispunjeno u jakom smislu na Ω_-. Isti postupak možemo primijeniti za $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega_+$, što daje prvu tvrdnju.

Sad uzimamo proizvoljnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2)$ i računamo:

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_{\mathbf{R}^2} (u\partial_t\varphi + v\partial_x\varphi)\, dtdx \\
&= -\int_{\Omega_-} (u\partial_t\varphi + v\partial_x\varphi)\, dtdx - \int_{\Omega_+} (u\partial_t\varphi + v\partial_x\varphi)\, dtdx \\
&= -\int_{\Omega_-} (\partial_t(u\varphi) + \partial_x(v\varphi))\, dtdx + \int_{\Omega_-} \varphi(\partial_t u + \partial_x v)\, dtdx \\
&\quad - \int_{\Omega_+} (\partial_t(u\varphi) + \partial_x(v\varphi))\, dtdx + \int_{\Omega_+} \varphi(\partial_t u + \partial_x v)\, dtdx.
\end{aligned}$$

Od prije imamo $\partial_t u + \partial_x v = 0$, te sad ostaje

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_-} (\partial_t(u\varphi) + \partial_x(v\varphi))\, dtdx + \int_{\Omega_+} (\partial_t(u\varphi) + \partial_x(v\varphi))\, dtdx \\
&= \int_{\partial\Omega_-} \varphi(un_1 + vn_2)\, dS + \int_{\partial\Omega_+} \varphi(un_1 + vn_2)\, dS\,.
\end{aligned}$$

Uzmemo li u obzir da je $\varphi = 0$ svuda na rubovima Ω_- i Ω_+, osim na $x = g(t)$, dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{x=g(t)} \varphi(g'(t)u_- - v_-)\, dS + \int_{x=g(t)} \varphi(-g'(t)u_+ - v_+)\, dS \\
&= \int_{x=g(t)} \varphi(g'(t)(u_+ - u_-) - (v_+ - v_-))\, dS\,,
\end{aligned}$$

što zbog proizvoljnosti φ daje i drugu tvrdnju.

Q.E.D.

Jednakost (11) iz leme naziva se Rankine-Hugoniotov uvjet. Kod Burgersove jednadžbe taj uvjet daje $\frac{u_+^2}{2} - \frac{u_-^2}{2} = \dot{x}(u_+ - u_-)$, odnosno

$$\dot{x} = \frac{u_+ + u_-}{2}.$$

Vidimo da kod Burgersove jednadžbe šok putuje brzinom koja je usrednjenje brzina karakteristika s obiju strana.

Postupak iščezavajuće viskoznosti

Sad ćemo promotriti neke primjere slabih rješenja. Pogledajmo Burgersovu jednadžbu uz sljedeći početni uvjet

$$u_0 = \begin{cases} u_-, & x < 0 \\ u_+, & x > 0\,. \end{cases}$$

Zbog Rankine-Hugoniotovog uvjeta kao rješenje imamo

$$u(t,x) = \begin{cases} u_-, & x - ct < 0 \\ u_+, & x - ct > 0\,, \end{cases}$$

pri čemu je $c = \frac{u_+ + u_-}{2}$. Međutim, kad je $u_+ > u_-$, u_0 možemo aproksimirati nizom glatkih rastućih funkcija. Za svaku takvu aproksimaciju postoji globalno jako rješenje. Promotrimo li niz takvih rješenja u limesu bismo dobili

$$u(t,x) = \begin{cases} u_-, & x < u_- t \\ \frac{x}{t}\,, & u_- t < x < u_+ t \\ u_+, & u_+ t < x\,. \end{cases}$$

Ovaj primjer upućuje na to da bismo trebali dopustiti samo ona slaba rješenja koja imaju neizbježan pad, odnosno, da zahtijevamo da vrijedi

$$\lim_{z \nearrow x} u(t,z) \geqslant \lim_{z \searrow x} u(t,z)\,.$$

Kako odlučiti koja su rješenja prihvatljiva? Jedan način je da gledamo Cauchyjev problem na $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ za diferencijalnu jednadžbu

$$\partial_t u + \partial_x(\tfrac{1}{2}u^2) = \mu \partial_{xx} u \tag{12}$$

uz isti početni uvjet $u(0,x) = u_0(x)$. U jednadžbi (12) tražimo da je $\mu > 0$, i shvaćamo ga kao koeficijent viskoznosti. Kad pustimo $\mu \searrow 0$ trebali bismo kao limes rješenja dobiti prihvatljivo rješenje. Taka pristup nazivamo postupkom iščezavajuće viskoznosti. Drugačije zapisano ta jednadžba glasi

$$\partial_t u = \partial_x(\mu \partial_x u - \tfrac{1}{2}u^2)\,,$$

i rješavat ćemo je tako što ćemo uvesti novu nepoznatu funkciju $\varphi(t,x) = e^{\frac{-1}{2\mu}\int_0^x u(t,\xi)d\xi}$. Za nju dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned} -2\mu \partial_x \varphi &= \varphi u \\ -2\mu^2 \partial_{xx} \varphi &= \varphi(\mu \partial_x u - \tfrac{1}{2}u^2)\,, \end{aligned}$$

dok se u izražava formulom

$$u = -2\mu \partial_x \ln \varphi = -2\mu \frac{\partial_x \varphi}{\varphi}\,,$$

iz čega dalje slijedi da je

$$\partial_t u = -2\mu \partial_x \partial_t \ln \varphi = -2\mu \partial_x \frac{\partial_t \varphi}{\varphi}\,.$$

Zaključujemo da (12) možemo zapisati kao

$$\partial_x \left(-2\mu \frac{\partial_t \varphi}{\varphi} + 2\mu^2 \frac{\partial_{xx}\varphi}{\varphi} \right) = 0\,,$$

odnosno imamo da za neku funkciju $\gamma(t)$ vrijedi

$$-2\mu \frac{\partial_t \varphi}{\varphi} + 2\mu^2 \frac{\partial_{xx}\varphi}{\varphi} = \gamma'(t)\,.$$

Kad bismo zamijenili $\varphi(t,x)$ s $\varphi(t,x)e^{-\gamma(t)}$, dobili bismo

$$\partial_t \varphi = \mu \partial_{xx} \varphi\,. \tag{13}$$

Međutim, iz formule za u je jasno da ta funkcija γ ne pridonosi našem rješenju, pa nam je dovoljno riješiti upravo tu diferencijalnu jednadžbu. U daljem pretpostavljamo da je

$$\int_0^x u_0(\xi) d\xi = o(x^2)$$

kada $|x| \to \infty$, a to je, na primjer, zadovoljeno kada je $u_0 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$. Tada znamo da za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\varphi_0(x) = e^{-\frac{1}{2\mu}\int_0^x u_0(\xi)d\xi} = O(e^{\varepsilon x^2})$$

kada $|x| \to \infty$. Rješavamo Cauchyjev problem na $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ za diferencijalnu jednadžbu (13) uz početni uvjet $\varphi(0,x) = \varphi_0(x)$, a po [Ev2, Theorem 2.3.1] rješenje je dano formulom

$$\varphi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}} dy\,.$$

Dano rješenje je pozitivno i po [id., Theorem 2.3.7] jedinstveno. Vratimo se na u.

Za $\mu > 0$ označavat ćemo s u_μ rješenje Cauchyjevog problema za jednadžbu (12). Imamo da je

$$u_\mu = -2\mu \partial_x \ln\varphi = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{F(t,x,y)}{2\mu}} dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{F(t,x,y)}{2\mu}} dy}\,,$$

pri čemu je

$$F(t,x,y) = \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_x^y u_0(\xi)\, d\xi\,.$$

U integralima $e^{-\frac{F}{2\mu}}$ to više pridonosi što je F manji, a budući da $F \nearrow \infty$ kada $|y| \nearrow \infty$, minimum funkcije $F(t,x,\cdot)$ se postiže na kompaktnom skupu. Najmanji interval na kojem $F(t,x,\cdot)$ postiže minimum označavamo s $[y_-(t,x), y_+(t,x)]$, gdje pretpostavljamo da je $y_- \leqslant y_+$.

Pogledajmo što je s točkama minimuma kad gledamo (t,x) iz nekog kompaktnog skupa K. Prvo primijetimo da je $F(t,x,y) \leqslant 0$ ako je y točka minimuma za funkciju $F(t,x,\cdot)$. Iz ocjene na funkciju u_0 znamo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji R takav da za $y \in \mathbf{R}$ čija je norma veća od R, vrijedi

$$\left|\int_0^y u_0(\xi)\, d\xi\right| \leqslant \varepsilon y^2\,.$$

Dalje, kad je $y > R$, uzevši u obzir da je $u_0 \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, ocjenjujemo

$$\begin{aligned}
F(t,x,y) &= \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_x^y u_0(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_0^y u_0(\xi)\, d\xi - \int_0^x u_0(\xi)\, d\xi \\
&\geqslant \tfrac{1}{2t}x^2 - \tfrac{2}{2t}xy + \tfrac{1}{2t}y^2 - \varepsilon y^2 + C \\
&\geqslant C_1 - C_2 y + (C_3 - \varepsilon)y^2\,.
\end{aligned}$$

Konstante C_1, C_2 i C_3 ovise samo o skupu K iz kojeg uzimamo (t,x), a ε je proizvoljan, pa ga možemo odabrati tako da je $C_3 - \varepsilon > 0$. Neka su $y_{1,2}$ nultočke polinoma $C_1 - C_2 y +$

$(C_3-\varepsilon)y^2$. Tada za svaki $(t,x)\in K$ i $y>\max\{R,|y_1|,|y_2|\}$ imamo da je $F(t,x,y)>0$. Isto možemo postići i za $y<-R$, te vidimo da kad ograničimo promatranje (t,x) na neki kompaktan skup postoji uniformna ograda na točke minimuma funkcija $F(t,x,\cdot)$.

Dokazat ćemo da vrijedi

$$\frac{x-y_+(t,x)}{t}\leqslant \liminf_{(\mu,s,y)\to(0,t,x)} u_\mu(s,y)\leqslant \limsup_{(\mu,s,y)\to(0,t,x)} u_\mu(s,y)\leqslant \frac{x-y_-(t,x)}{t}\,, \tag{14}$$

s tim da se uzima $\mu>0$. Prije nego li pređemo na dokaz ove tvrdnje dokažimo neke pomoćne rezultate.

Tvrdimo da je preslikavanje $(t,x)\mapsto[y_-(t,x),y_+(t,x)]$ je odozgo poluneprekinuta skupovna funkcija, odnosno za svaki $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ takav da za svaki (s,z) iz $\mathrm{K}((t,x),\delta)$ imamo da je

$$[y_-(s,z),y_+(s,z)]\subseteq\langle y_-(t,x)-\varepsilon,y_+(t,x)+\varepsilon\rangle\,.$$

Da bismo pokazali tu tvrdnju, pretpostavimo suprotno. Postoji $\varepsilon>0$ takav da za svaki $\delta>0$ postoji $(s,z)\in\mathrm{K}((t,x),\delta)$ takav da postoji y izvan $\langle y_-(t,x)-\varepsilon,y_+(t,x)+\varepsilon\rangle$ u kojem funkcija $F(s,z,\cdot)$ poprima minimum. Označimo s (s_n,z_n,y_n) niz takvih vrijednosti kad uzimamo da je $\delta=\frac{1}{n}$. Od prije znamo da za skup koji je kompaktno sadržan u gornjoj poluravnini postoji uniformna ocjena za točke minimuma. Zaključujemo da (y_n) ima konvergentan podniz, za koji radi jednostavnosti i dalje koristimo istu oznaku (y_n). Lako se vidi da (y_n) konvergira k nekom y_0 koji se nalazi izvan skupa $\langle y_-(t,x)-\varepsilon,y_+(t,x)+\varepsilon\rangle$. Imamo da je

$$F(s_n,z_n,y_+(t,x))\geqslant F(s_n,z_n,y_n)\,,$$

što kad pustimo $n\to\infty$ daje

$$F(t,x,y_\pm(t,x))\geqslant F(t,x,y_0)\,,$$

a to je u kontradikciji s definicijama y_- i y_+.

Definirajmo pomoćnu funkciju $m(t,x)=\min_{y\in\mathbf{R}}F(t,x,y)$. Kad uzmemo (t,x) iz neke kugle K, koja je sadržana u kompaktnom skupu, znamo da postoji broj R takav da su za svaki $(t,x)\in K$ minimumi funkcije $F(t,x,\cdot)$ sadržani u $[-R,R]$. Na K vrijedi

$$m(t,x)=\min_{y\in\mathbf{R}}F(t,x,\cdot)=\min_{y\in[-R,R]}F(t,x,\cdot)\,,$$

za što po [Hö3, Lema 1.7.2] imamo da je neprekidna funkcija. Iz proizvoljnosti kugle K zaključujemo da je m neprekidna funkcija s $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ u $\mathbf{R}$.

Sad prelazimo na dokaz tvrdnje (14). Najprije definirajmo još jednu pomoćnu funkciju

$$\varphi_\mu(t,x,y)=\frac{e^{-\frac{F(t,x,y)-m(t,x)}{2\mu}}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{F(t,x,y)-m(t,x)}{2\mu}}\,dy}\,.$$

Lako se vidi da za svaki $\mu>0$ i $(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ imamo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\mu(t,x,y)\,dy=1$$

i da je

$$u_\mu(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-y}{t}\varphi_\mu(t,x,y)\,dy\,.$$

Za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki (s,z) iz $\mathrm{K}((t,x),\delta)$ imamo da su sve točke minimuma funkcije $F(s,z,\cdot)$ manje od $y_+(t,x)+\varepsilon$. Računamo:

$$\begin{aligned} u_\mu(s,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z-y}{s}\varphi_\mu(s,z,y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{y_+(t,x)+\varepsilon} \frac{z-y}{s}\varphi_\mu(s,z,y)\,dy + \int_{y_+(t,x)+\varepsilon}^{\infty} \frac{z-y}{s}\varphi_\mu(s,z,y)\,dy \\ &\geqslant \frac{z-(y_+(t,x)+\varepsilon)}{s}\int_{-\infty}^{y_+(t,x)+\varepsilon} \varphi_\mu(s,z,y)\,dy + \int_{y_+(t,x)+\varepsilon}^{\infty} \frac{z-y}{s}\varphi_\mu(s,z,y)\,dy\,. \end{aligned}$$

Iz izbora δ jasno je da za $y \in [y_+(t,x)+\varepsilon,\infty\rangle$ imamo da je $F(s,z,y)-m(s,z) > 0$, pa $\varphi_\mu(s,z,y)$ i $\frac{z-y}{s}\varphi_\mu(s,z,y)$ kovergiraju po točkama nuli kad $\mu \to 0$. Po Lesbeguesovom teoremu o dominiranoj kovergenciji zaključujemo da konvergiraju i integrali:

$$\int_{y_+(t,x)+\varepsilon}^{\infty} \varphi_\mu(s,z,y)\,dy \to 0$$

i

$$\int_{y_+(t,x)+\varepsilon}^{\infty} \frac{z-y}{s}\varphi_\mu(s,z,y)\,dy \to 0$$

kad μ teži nuli. Zaključujemo da za proizvoljnu točku $(s,z) \in \mathrm{K}((t,x),\delta)$ imamo da je

$$\liminf_{\mu\searrow 0} u_\mu(s,z) \geqslant \frac{z-(y_+(t,x)+\varepsilon)}{s}\,.$$

U limesu $(s,z)\to(t,x)$ dobivamo

$$\liminf_{\substack{(s,z)\to(t,x)\\ \mu\searrow 0}} u_\mu(s,z) \geqslant \frac{x-(y_+(t,x)+\varepsilon)}{t}\,.$$

U limesu $\varepsilon \to 0$ dobivamo lijevu nejednakost iz (14); analogno se može dokazati i desna nejednakost.

Lema 2. *Ako je $x_1 < x_2$ onda za svaki t vrijedi $y_+(t,x_1) \leqslant y_-(t,x_2)$. Posebno, za čvrsti t imamo da su $y_-(t,\cdot)$ i $y_+(t,\cdot)$ rastuće funkcije, neprekidne s lijeva, odnosno zdesna na $\mathbf{R}$. K tome, one su jednake, a samim tim i neprekidne, osim u prebrojivo mnogo točaka. Nadalje, ako je z neka točka minimuma funkcije $F(t,x,\cdot)$, onda za proizvoljni $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi*

$$y_\pm(\lambda t, \lambda x + (1-\lambda)z) = z\,.$$

Dem. Označimo $\overline{y}_+ = y_+(t,x_1)$. Tada po definiciji funkcije y_+ imamo da za svaki $y \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$F(t,x_1,y) \geqslant F(t,x_1,\overline{y}_+)\,.$$

Tvrdimo da je za svaki $y < \overline{y}_+$ ispunjeno

$$F(t,x_2,y) > F(t,x_2,\overline{y}_+)\,,$$

iz čega će slijediti da funkcija $F(t,x_2,\cdot)$ minimum dostiže na $[\overline{y}_+,\infty\rangle$. Sad uz pretpostavke $y < \overline{y}_+$ i $x_1 < x_2$ računamo

$$\begin{aligned} F(t,x_2,y) - F(t,x_2,\overline{y}_+) &\geqslant F(t,x_2,y) + F(t,x_1,\overline{y}_+) - F(t,x_1,y) - F(t,x_2,\overline{y}_+) \\ &= \frac{1}{2t}[(x_2-y)^2 - (x_1-y)^2 + (x_1-\overline{y}_+)^2 - (x_2-\overline{y}_+)^2] \\ &= \frac{(x_2-x_1)(\overline{y}_+-y)}{2t} > 0\,, \end{aligned}$$

čime smo dokazali prvu tvrdnju. Odavdje, iz definicija $y_\pm$ slijedi da je za svaki t i $x_1 < x_2$ ispunjeno

$$y_-(t,x_1) \leqslant y_+(t,x_1) \leqslant y_-(t,x_2) \leqslant y_+(t,x_2)\,,$$

što nam daje monotonost. Štoviše, dobivamo da $\lim_{x\nearrow x_2} y_-(t,x)$ postoji i da je manji od $y_-(t,x_2)$. Kad bi limes bio strogo manji došlo bi do kontradikcije, s tim što je $m(t,x)$, definirana kao $\min_{y\in\mathbf{R}} F(t,x,y)$, neprekidna funkcija u (t,x). U stvari, imali bismo

$$\lim_{x\nearrow x_2} m(t,x) = \lim_{x\nearrow x_2} F(t,x,y_-(t,x)) \neq F(t,x,y_-(t,x_2)) = m(t,x_2)\,.$$

Na isti način može se dokazati neprekidnost zdesna funkcije y_+.

Pokažimo zadnju tvrdnju leme. Za svaki y vrijedi

$$F(t,x,y) - F(t,x,z) \geqslant 0\,,$$

stoga za $y \neq z$ imamo

$$\begin{aligned} F(\lambda t, \lambda x+&(1-\lambda)z, y) - F(\lambda t, \lambda x + (1-\lambda)z, z) \geqslant \\ &\geqslant \frac{(\lambda x + (1-\lambda)z - y)^2 - (\lambda t, \lambda x + (1-\lambda)z - z)^2}{2\lambda t} - \frac{(x-y)^2 - (x-z)^2}{2t} \\ &= \frac{(z-y)^2(1-\lambda)}{2\lambda t} > 0\,. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Uočimo da iz leme slijedi da funkcija $F(\lambda t, \lambda x + (1-\lambda)z, \cdot)$ ima *jedinstveni* strogi minimum u točki z.

Teorem egzistencije slabih rješenja

Dokažimo sad teorem koji će osigurati postojanje slabog rješenja Burgersove jednadžbe. Teorem će pored toga dati i karakterizaciju za prihvatljiva rješenja.

Teorem 3. *Pretpostavimo de je $u_0 \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ takva da njezin integral zadovoljava sljedeću ocjenu rasta*

$$\int_0^y u_0(\xi)d\xi = o(y^2)$$

kad $|y|$ teži u beskonačnost. Neka je (μ_k) niz pozitivnih brojeva koji konvergira k nuli. Tada niz (u_k) rješenja jednadžbi

$$\partial_t u + \partial_x(\tfrac{1}{2}u^2) = \mu_k \partial_{xx}$$

konvergira za skoro svaki (t,x) k $u(t,x)$ koji je rješenje Burgersove jedandžbe. Točnije,

$$u_k(t,x) \to u(t,x) = \frac{x - y(t,x)}{t}$$

za svaki (t,x) takav da $F(t,x,\cdot)$ ima jedinstvenu točku minimuma $y(t,x)$. To je ispunjeno do na skup koji je za čvrst t prebrojiv, u je neprekidna u svakom (t,x) za koji je točka minimuma jedinatvena. U širem smislu

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\nearrow x} u(t,z) = \dfrac{x - y_-(t,x)}{t} \\ \lim\limits_{z\searrow x} u(t,z) = \dfrac{x - y_+(t,x)}{t}\,, \end{cases} \tag{15}$$

gdje su $y_-(t,x)$ i $y_+(t,x)$ najmanja, odnosno najveća, točka minimuma funkcije $F(t,x,\cdot)$. Ako je $x_1 \leqslant x_2$ tada

$$\lim_{x\searrow x_2} u(t,x) - \lim_{x\nearrow x_1} u(t,x) \leqslant \frac{x_2-x_1}{t}\,. \tag{16}$$

Ako je $u_0 \leqslant M$ onda je $u \leqslant M$. Štoviše, uvjet (16) tada daje karakterizaciju koja izdvaja u među svim rješenjima Burgersove jedandžbe, te u zovemo Hopfovim rješenjem.

Dem. Svojstvo monotonosti iz leme pokazuje da za fiksan t imamo jednakost $y_-(t,x) = y_+(t,x)$ osim u prebrojivo mnogo x, i da tada imamo konvergenciju $u_k(t,x) \to \frac{x-y_+(t,x)}{t}$ po (14). Definirajmo da je $u(t,x) = \frac{x-y_+(t,x)}{t}$ općenito. Budući da za svaki t imamo konvergenciju za skoro svaki x, po Fubinijevom teoremu zaključujemo da imamo konvergenciju skoro svuda na $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$. Iz (14) također imamo, ako je $y_-(t,x) = y_+(t,x)$, da je u neprekidna u (t,x), a neprekidnost s lijeva, odnosno zdesna, funkcija $y_\pm$ nam daje (15).

Dokažimo slabu konvergenciju nizova (u_k) i (u_k^2) u $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})*$. Iz (14) slijedi da za svaku točku (t,x) postoje $\mu_0 > 0$ i $\delta > 0$ takvi da za svaki $\mu \leqslant \mu_0$ i svaki $(s,z) \in \mathrm{K}((t,x),\delta)$ vrijedi

$$\frac{x-y_+(t,x)}{t} - 1 \leqslant u_\mu(s,z) \leqslant \frac{x-y_-(t,x)}{t} + 1\,.$$

Iz izlaganja koje je prethodilo dokazu nejednakosti (14) slijedi da za svaki kompaktni skup K postoji uniformna ocjena R na vrijednosti funkcija $y_-(t,x)$ i $y_+(t,x)$. Na $[-R,R]$ funkcija u_0 ima uniformnu ogradu A, a budući da je

$$F(t,x,y) = \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_x^y u_0(\xi)\,d\xi \leqslant 0$$

kad je y točka minimuma za funkciju $F(t,x,\cdot)$ možemo ocijeniti da je u tim točkama $\frac{|x-y|}{t} \leqslant 2A$. Posebno dobivamo $|\frac{x-y_\mp(t,x)}{t}| \leqslant 2A$, odnosno dobivamo da je u lokalno ograničena. Fiksirajmo funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$. Tada familija otvorenih kugala

$$\{\mathrm{K}((t,x),\delta_{t,x}) : (t,x) \in \operatorname{supp}\varphi\}$$

čini otvoren pokrivač kompaktnog skupa $K = \operatorname{supp}\varphi$, pa za navedeni pokrivač postoji konačan potpokrivač $\{\mathrm{K}((t_1,x_1),\delta_1), \mathrm{K}((t_2,x_2),\delta_2), \ldots, \mathrm{K}((t_m,x_m),\delta_m)\}$. Zaključujemo da uz $\mu_0 = \min\{\mu_{t_ix_i} : i = 1,\ldots,m\}$, imamo da za sve $\mu \leqslant \mu_0$ postoji ista uniformna ocjena $2A+1$ na funkcije u_μ kad ih restringiramo na K. Pomnožimo u_k s φ i integriramo. Počevši od nekog k_0 imamo da su $|u_k\varphi|$ omeđeni s $(2A+1)|\varphi|$ koja je neprekidna s kompaktnim nosačem, pa prema tome i integrabilna. Po Lesbeguesovom teoremu o dominiranoj konvergenciji zaključujemo da u limesu imamo

$$\int_{\mathbf{R}^2} u_k\varphi\,dtdx \to \int_{\mathbf{R}^2} u\varphi\,dtdx\,.$$

Na isti način slijedi da su $|u_k^2\varphi|$ omeđeni s $(2A+1)^2|\varphi|$, te da

$$\int_{\mathbf{R}^2} u_k^2\varphi\,dtdx \to \int_{\mathbf{R}^2} u^2\varphi\,dtdx\,.$$

Znamo da je ispunjeno

$$\partial_t u_\mu + \partial_x(\tfrac{1}{2}u_\mu^2) = \mu\partial_{xx}u_\mu\,;$$

pomnožimo jednadžbu funkcijom $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ i integrirajmo. Parcijalnom integracijom i primjenom Gauss-Greenovog teorema dobit ćemo

$$-\int_{\mathbf{R}^2} (u_\mu \partial_t \varphi + u_\mu^2 \partial_x \varphi)\, dtdx = \mu \int_{\mathbf{R}^2} u_\mu \partial_{xx} \varphi\, dtdx\,.$$

Kako u_k i u_k^2 slabo konvergiraju ka u i u^2 to, uzevši u obzir da $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ povlači i da su $\partial_t\varphi, \partial_x\varphi$ i $\partial_{xx}\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$, dobivamo

$$\int_{\mathbf{R}^2} (u \partial_t \varphi + u^2 \partial_x \varphi)\, dtdx = 0\,,$$

što upravo kaže da je u slabo rješenje Burgersove jedandžbe. Ako je $u_0 \in \mathrm{C}_c^1(\mathbf{R})$, onda je jasno da za male t (točnije za $t < \frac{1}{\sup -u_0'(y)}$) imamo klasično rješenje, pa je u i slabo rješenje Cauchyjevog problema. Za općenitije u_0 dozvoljene u teoremu primijetimo da je rješenje lokalno ograničeno i određeno vrijednošću inicijalnog uvjeta u_0 na segmentu $[-R, R]$. Aproksimiramo inicijalni uvjet u_0 nizom (u_0^j) funkcija klase $\mathrm{C}_c^1(\mathbf{R})$ takvim da $u_0^j \to u_0$ u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, koje jednoliko zadovoljavaju ocjenu rasta iz iskaza teorema. Takav niz bi se na primjer mogao dobiti tako da za svaki j funkciju

$$u_0^{j*}(x) = \begin{cases} u_0(x) & |x| \leqslant j \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

konvoluiramo sa standardnim izglađivačem ρ_n odabranim tako da je

$$\int_{-j}^{j} |u_0(x) - u_0^j(x)| dx < \frac{1}{j}\,.$$

Funkcije $F_j(t, x, y)$ zadane kao i F, gdje je u_0 supstituiran s u_0^j na svakom kompaktnom skupu, zbog odabira niza (u_0^j), jednoliko konvergiraju k funkciji F, te i točke minimuma funkcija $F_j(t, x, \cdot)$ konvergiraju točkama minimuma funkcije $F(t, x, \cdot)$. Za svaku u_0^j i pripadno rješenje u^j imamo

$$-\int_{\mathbf{R}^2} \left(u^j \partial_t \varphi + \tfrac{1}{2}(u^j)^2 \partial_x \varphi\right)\, dtdx = \int_{\mathbf{R}} u_0^j \varphi\, dx\,,$$

pa nam Lesbeguesov teorem o dominiranoj konvergenciji daje tvrdnju.

Uzmimo da su $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ takvi da je $x_1 \leqslant x_2$, i računajmo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow x_2} u(t,x) - \lim_{x \nearrow x_1} u(t,x) &= \frac{x_2 - y_+(t, x_2)}{t} - \frac{x_1 - y_-(t, x_1)}{t} \\ &= \frac{x_2 - y_+(t, x_2) - (x_1 - y_-(t, x_1))}{t} \\ &\leqslant \frac{x_2 - x_1}{t}\,, \end{aligned}$$

gdje smo primijenili tvrdnju Leme 2.

Ako je $y_+(t, x) = y_-(t, x)$, onda iz druge tvrdnje Leme 2 slijedi da je

$$u = u(t,x) = \frac{x - y(t,x)}{t}$$

konstantna i neprekidna na otvorenom djelu segmenta koji spaja (t, x) i $(0, y(t, x))$. Kada je $u_0 \in \mathrm{C}_c^1(\mathbf{R})$, tada otvorene linije zadiru u područje na kojem znamo da je $|u| \leqslant M$, pa slijedi da je tada $|u| \leqslant M$ i inače. Za generalni u_0 tvrdnja slijedi iz aproksimacije kao prije.

Jedinstvenost je poslijedica Teorema 1 iz prvog odjeljka. Točnije, ako postoji drugo ograničeno rješenje Cauchyjevog problema za Burgersovu jednažbu uz iste inicijalne uvjete v, koje zadovoljava (16) (Hopfovo rješenje), tada je $w = u - v$ slabo rješenje jednadžbe

$$\partial_t w + \partial_x(aw) = 0\,,$$

s nulom kao inicijalnim uvjetom, i (2) je ispunjeno s $C(t) = \frac{1}{t}$.

Q.E.D.

Kao što smo vidjeli u ovom dokazu, uz $t > 0$ svaki (t, x) možemo shvatiti kao vrh trokuta $T_{t,x}$, s ostalim vrhovima $(0, y_\pm(t, x))$. Za u imamo da je neprekidna na otvorenim stranama trokuta $T_{t,x}$ i da je jednaka brzini $\frac{x - y_\pm(t,x)}{t}$. Tvrdimo da za svaki $t' > t$ postoji jedinstveni x' takav da je $T_{t,x} \subseteq T_{t',x'}$. Da bismo to dokazali, pokazat ćemo da je ili $T_{t,x} \subseteq T_{t',x'}$ ili su trokuti disjunktni.

Otvorene stranice se mogu sjeći samo ako imaju iste nagibe, a tada je jedan trokut sadržan u drugom; ako (t, x) leži na otvorenom dijelu stranice trokuta $T_{t',x'}$, onda je $T_{t,x}$ sadržan u toj stranici. Za x' uzimamo infimum svih y takvih da $T_{t',y}$ leži desno od (t, x). Tada desna strana trokuta $T_{t',x'}$ leži zdesna od (t, x) zbog neprekidnosti zdesna funkcije $y_+(t', \cdot)$, ali lijeva strana strana ne može ležati strogo zdesna zbog neprekidnosti s lijeva funkcije $y_+(t', \cdot)$ i minimalnosti x'. Ovo pokazuje $T_{t,x} \subseteq T_{t',x'}$. Jedinstvenost slijedi iz činjenice da bi dva takva trokuta $T_{t',x'}$ imala granice koje se sijeku u gornjoj poluravnini jer imaju zajedničku točku.

Zaključujemo da je kroz svaku točku dobro definirana krivulja $x(t)$ u smjeru rastućeg t, takva da $T_{t,x(t)}$ čine uzlaznan niz skupova, a geometrijski je jasno da je to Lipshitzova funkcija. Neka je $x(t)$ takva krivulja kroz (t, x). Tvrdimo da je

$$\lim_{t' \searrow t, t'' \searrow t} \frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'} = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \nearrow x} u(t, y) + \lim_{y \searrow x} u(t, y) \right) . \tag{17}$$

Kako bismo to dokazali, uzmimo da su $x' = x(t')$ i $x'' = x(t'')$, te pretpostavimo da je $t'' > t' > t$. Tada imamo

$$y_-(t'', x'') \leqslant y_-(t', x') \leqslant y_-(t, x) \leqslant y_+(t, x) \leqslant y_+(t', x') \leqslant y_+(t'', x'')\,,$$

i imamo i konvergenciju $y_\pm(t'', x'') \to y_\pm(t, x)$ kad $t'' \to t$, što slijedi iz dokaza zdesne (s lijeva) neprekidnosti funkcija $y_\pm(t, \cdot)$ u lemi 2. Ako je $y_+(t', x') = y_-(t', x')$ za neki $t' > t$, tada je (17) trivijalno ispunjeno, pa ćemo stoga dalje razmatrati samo taj slučaj. Fiksirajmo $y' = y_-(t', x')$ i $y'' = y_+(t'', x'')$, te definirajmo pomoćne funkcije

$$\begin{aligned} I'(\xi) &= u_0(\xi) + \frac{\xi - x'}{t'} \\ I''(\xi) &= u_0(\xi) + \frac{\xi - x''}{t''}\,. \end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \int_{y'}^{y''} I'(\xi)\, d\xi &= \int_{y'}^{y''} u_0(\xi)\, d\xi + \frac{(\xi - x')^2}{2t'}\bigg|_{y'}^{y''} \\ &= \int_{y'}^{y''} u_0(\xi)\, d\xi + \frac{(y'' - x')^2}{2t'} - \frac{(y' - x')^2}{2t'} \\ &= F(t', x', y'') - F(t', x', y') \geqslant 0 \end{aligned}$$

zbog tog što y_- minimizira funkciju $F(t,x,\cdot)$. Isto tako dobivamo i nejednakost za I'':

$$\int_{y''}^{y'} I''(\xi)\,d\xi \geqslant 0\,.$$

Dalje imamo:

$$\int_{y''}^{y'} (I''(\xi) - I'(\xi))\,d\xi = -\int_{y'}^{y''} I'(\xi)\,d\xi - \int_{y''}^{y'} I''(\xi)\,d\xi \leqslant 0\,,$$

odnosno da vrijedi:

$$(y'' - y')\left(\frac{x'}{t'} - \frac{x''}{t''}\right) + \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{t''}\right)\frac{y''^2 - y'^2}{2} \leqslant 0\,,$$

što dalje daje:

$$\frac{x'}{t'} - \frac{x''}{t''} \leqslant \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{t''}\right)\frac{y'' + y'}{2}$$

$$x''t' - x't'' \leqslant (t'' - t')\frac{y_+(t'',x'') + y_-(t',x')}{2}\,.$$

Slično slijedi i

$$x't'' - x''t' \leqslant (t' - t'')\frac{y_-(t',x') + y_+(t'',x'')}{2}\,,$$

što skupa s prethodnom nejednakošću daje

$$x''t' - x't'' = (t'' - t')\frac{y_+(t'',x'') + y_-(t',x')}{2}\,.$$

Dalje, $\frac{x''t' - x't''}{t'' - t'}$ možemo zapisati kao $x' - t'\frac{x'' - x'}{t'' - t'}$, odnosno dobivamo:

$$\frac{x'' - x'}{t'' - t'} = \frac{2x' - (y_-(t',x') + y_+(t'',x''))}{2t'}\,,$$

iz čega slijedi (17).

Vidimo, iz (17) slijedi da je $x = x(t)$ integralna krivulja diferencijalne jednadžbe

$$\tfrac{d}{dt}x(t) = u(t, x(t))$$

u smislu Teorema 4 iz prvog poglavlja. Iz Teorema 5 u istom poglavlju, uzimajući u obzir (16), zaključujemo da je svaka takva krivulja jedinstveno određena u budućnosti početnom točkom. Unatrag, počevši iz (t,x), vidimo da su obje stranice trokuta $T_{t,x}$ integralne krivulje, pa nema govora o jedinstvenosti.

Ako je $u_0 \in \mathrm{C}^k$, za neki $k \geqslant 1$, i ako $F(t,x,\cdot)$ ima jedinstvenu točku minimuma $y(t,x)$ u kojoj je $\partial_{yy}F > 0$, tada je to točno na nekoj okolini točke (t,x) i $u \in \mathrm{C}^k$ na toj okolini. Točnije, po teoremu o implicitno zadanim funkcijama, jednadžba

$$\partial_y F(t', x', y) = 0$$

ima jedinstveno rješenje $y(t',x')$ u blizini y, koje je C^k funkcija (t',x').

Primijetimo da, ako je u_0 neprekidna funkcija, tada $\frac{y-x}{t} + u_0(y) = 0$ kad je $y = y_\pm(t,x)$. Dalje, ako je $u_0 \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$, tada vidimo da $u_0' + \frac{1}{t}$ ima nultočku između $y_-(t,x)$

i $y_+(t,x)$ kad su oni različiti. Ako je početni uvjet u_0 odabran tako u_0' ne poprima istu vrijednost različitu od nule više od konačano mnogo puta, slijedi da za fiksan t postoji samo konačno mnogo diskontinuiteta. Dakle, u je tada u C^k van nekog skupa krivulja na kojima zadovoljava Rankine-Hugoniotov uvjet.

Uvjet entropije

Možemo postaviti uvjet na slabo rješenje koji je ekvivalentan (16), ali je primjenjiviji u općenitijim situacijama. Da bismo to postigli, pomnožimo viskoznu aproksimaciju Burgersove jednadžbe

$$\partial_t u_\mu + u_\mu \partial_x u_\mu = \mu \partial_{xx} u_\mu \,,$$

s $\Phi'(u_\mu)$, gdje je $\Phi \in \mathrm{C}^2$, te rezultat zapišimo u obliku

$$\partial_t \Phi(u_\mu) + \partial_x Y(u_\mu) = \mu \partial_{xx}\Phi(u_\mu) - \mu\Phi''(u_\mu)(\partial_x u_\mu)^2 \,.$$

Pritom je funkcija Y zadana tako da vrijedi

$$Y'(s) = s\Phi'(s)\,.$$

Ako Φ odaberemo konveksnom, odnosno zahtijevamo da je $\Phi'' \geqslant 0$, slijedi nejednakost

$$\partial_t \Phi(u_\mu) + \partial_x Y(u_\mu) \leqslant \mu \partial_{xx}\Phi(u_\mu)\,.$$

Takvu konveksnu funkciju Φ obično zovemo entropija, a Y tokom entropije. Budući da su u_μ lokalno ograničene u limesu kad $\mu \to 0$, to imamo da je u smislu teorije distribucija na $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ ispunjeno

(18) $$\partial_t \Phi(u) + \partial_x Y(u) \leqslant 0\,.$$

Uvjet (18) ponekad zovemo uvjet entropije. Eksplicitno to znači da za svaku pozitivnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R})$ vrijedi

(19) $$\int (\Phi(u)\partial_t\varphi + Y(u)\partial_x\varphi)\; dtdx \geqslant 0\,.$$

To je ispunjeno za svaku konveksnu C^2 funkciju. Uzimamo li za neke $k \in \mathbf{R}$ i $\varepsilon > 0$

$$\Phi(s) = \sqrt{(s-k)^2 + \varepsilon^2}\,,$$

u limesu kad $\varepsilon \to 0$ vidimo da možemo uzeti

$$\Phi(s) = |s-k|\,,$$

i tada imamo da je

$$\begin{aligned} Y(s) &= \tfrac{1}{2}(s^2-k^2)\mathrm{sign}\,(s-k) \\ &= \tfrac{1}{2}|s-k|(s+k)\,. \end{aligned}$$

Stoga (19) za svaki $k \in \mathbf{R}$ daje

(20) $$\int |u(t,x)-k| \left(\partial_t\varphi(t,x) + \tfrac{1}{2}(u(t,x)+k)\partial_x\varphi(t,x)\right)\, dtdx \geqslant 0\,.$$

Obrnuto, nejednakost (19) slijedi iz (20), jer se svaka konveksna funkcija na kompaktu može prikazati kao limes superpozicija funkcija oblika $|x-k|$ i afine funkcije. Primijetimo da ako uzmemo k dovoljno velik po apsolutnoj vrijednosti prvo pozitivan, pa negativan, iz (20) slijedi

$$\mp \int \left(u\partial_t\varphi + \tfrac{1}{2}u^2\partial_x\varphi\right)\, dtdx \geqslant 0\,,$$

što implicira da je u slabo rješenje Burgersove jednadžbe.

Teorem 4. *Neka su funkcije u i v apsolutno omeđene vrijednošću M na pruzi $\langle 0,T\rangle\times\mathbf{R}$, i neka za svaki $k\in\mathbf{R}$ zadovoljavaju (20). Tada slijedi da je*

$$\int_{a+Mt}^{b-Mt} |u(t,x)-v(t,x)|\,dx$$

opadajuća funkcija po t, dok je $b-a>2Mt$ i $t<T$. Posebno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t,x)-v(t,x)|\,dx$$

je opadajuća funkcija t.

Ako su u i v rješenja Burgersove jednadžbe dana Teoremom 3, uz početne uvjete u_0 i v_0, tada u limesu kad $t\to 0$ imamo

$$\int_a^b |u_0(x)-v_0(x)|\,dx\,.$$

Dem. Neka je $\varphi\in C_c^\infty(\langle 0,T\rangle\times\mathbf{R})$ nenegativna funkcija. Primijenimo li (20) na u, uz $k=v(s,y)$ dobivamo

$$\int |u(t,x)-v(s,y)|\left(\partial_t\varphi(t,x)+\tfrac{1}{2}(u(t,x)+v(s,y))\partial_x\varphi(t,x)\right)\,dtdx\geqslant 0\,.$$

Uzmemo li da je $\varphi\in C_c^\infty(\langle 0,T\rangle\times\mathbf{R}\times\langle 0,T\rangle\times\mathbf{R})$ možemo u gornjem uvrstiti $\varphi(\cdot,\cdot,s,y)$, a potom prointegrirati i po (s,y). Učinimo li isto s u i v međusobno zamijenjenim dobivamo

$$\int |u(t,x)-v(s,y)|\left(\partial_t\varphi+\partial_s\varphi+\tfrac{1}{2}(u(t,x)+v(s,y))(\partial_x\varphi+\partial_y\varphi)\right)\,dtdx\,dsdy\geqslant 0\,.$$

Zamijenimo t s $(t+s)$ i x s $(x+y)$, vidimo da uz oznaku $\psi(t,x,s,y)=\varphi(t+s,x+y,s,y)$ imamo

$$\int |u(t+s,x+y)-v(s,y)|\left(\partial_s\psi+\tfrac{1}{2}(u(t+s,x+y)+v(s,y))\partial_y\psi\right)\,dtdx\,dsdy\geqslant 0\,,$$

naravno, ako za $\psi\in C_c^\infty(\mathbf{R}^4)$ imamo da je $\operatorname{supp}\psi$ sadržan na skupu gdje je $0<t<T$ i $0<s+t<T$. Odaberimo funkciju ψ takvu da je $\psi(t,x,s,y)=\psi_1(s,y)\psi_2(t,x)$ za neke funkcije $\psi_1,\psi_2\in C_c^\infty(\langle 0,T\rangle\times\mathbf{R})$.

Dalje, primijetimo da je za proizvoljnu funkciju $\psi_1\in C_c^\infty(\langle 0,T\rangle\times\mathbf{R})$

$$\int |u(t+s,x+y)-v(s,y)|\left(\partial_s\psi_1+\tfrac{1}{2}(u(t+s,x+y)+v(s,y))\partial_y\psi_1\right)\,dsdy$$

neprekidna funkcija po (t,x), jer su $|u-v|$ i $u|u-v|$ Lipschitzove funkcije u varijablama (u,v) na kompaktu $[-M,M]^2$ dok je $(s,y)\mapsto u(\cdot+s,\cdot+y)$ neprekidno preslikavanje $\mathbf{R}^2\mapsto L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$. Iz zadnje nejednakosti možemo zaključiti i da je ta funkcija nenegativna za svaki (t,x), posebno uzmimo $(t,x)=(0,0)$. Zaključujemo da za svaku pozitivnu funkciju $\psi_1\in C_c^\infty(\langle 0,T\rangle\times\mathbf{R})$ vrijedi

$$\int |u(t+s,x+y)-v(s,y)|\left(\partial_s\psi_1+\tfrac{1}{2}(u(t+s,x+y)+v(s,y))\partial_y\psi_1\right)\,dsdy\geqslant 0\,.$$

Sad odaberimo funkciju ψ_1 tako da je $\psi_1(s,y) = \varphi(s)c(s,y)$, za neke $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\langle 0,T\rangle)$ i $c \in \mathrm{C}_c^\infty([0,T]\times\mathbf{R})$ pozitivne funkcije. Ako na c postavimo dodatni zahtjev da je

$$\partial_s c + M|\partial_y c| \leqslant 0\,, \tag{21}$$

odakle dalje slijedi da je

$$\partial_s c + \tfrac{1}{2}(u(t+s,x+y)+v(s,y))\partial_y c \leqslant 0\,,$$

odnosno za pozitivnu φ imamo

$$\int |u(s,y)-v(s,y)|\varphi\left(\partial_s c + \tfrac{1}{2}(u(s,y)+v(s,y))\partial_y c\right)\,dsdy \leqslant 0\,.$$

Zaključujemo da je za takve funkcije φ i c ispunjeno

$$\int |u(s,y)-v(s,y)|c(s,y)\varphi'(s)\,dsdy \geqslant 0\,.$$

Namjesto c u gornju nejednakost uvrstimo niz (c_k) koji konvergira karakterističnoj funkciji skupa

$$\{(s,y)\,|\,a+Ms<y<b-Ms\} = \{s,y)\,|\,|y-y_0|+Ms<\tfrac{1}{2}(b-a)\}\,,$$

gdje je $y_0 = \frac{1}{2}(a+b)$. Takav niz se može dobiti standardnom regularizacijom, a budući da svaka opadajuća funkcija ima željeno svojsto (21), to svojstvo će ispunjavati i svi članovi niza (c_k). Stoga možemo zaključiti da za $b-a \geqslant 2MT$ i pozitivnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\langle 0,T\rangle)$ vrijedi

$$\int \varphi'(s)\left(\int_{a+Ms}^{b-Ms}|u(s,y)-v(s,y)|\,dy\right)ds \geqslant 0\,,$$

iz čega slijedi da je unutrašnji integral opadajuća funkcija po varijabli s.

Neka je u Hopfovo rješenje Cauchyjeve zadaće za Burgersovu jednadžbu s početnim uvjetom $u_0 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R})$. Odaberimo niz $u_{0j} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ takav da $u_{0j} \to u_0$ u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, i neka su u_j pripadna Hopfova rješenja Burgersove jednadžbe. Tada

$$\int_{a+Mt}^{b-Mt}|u_j(t,x)-u_k(t,x)|\,dx \leqslant \int_a^b |u_{0j}(x)-u_{0k}(x)|\,dx\,,$$

u limesu kad $k\to\infty$ dobivamo

$$\int_{a+Mt}^{b-Mt}|u_j(t,x)-u(t,x)|\,dx \leqslant \int_a^b |u_{0j}(x)-u_0(x)|\,dx\,.$$

Budući da $u_j(t,\cdot)\to u_{0j}$ u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ kad $t\to 0$, dobivamo

$$\limsup_{t\to 0}\int_{a+Mt}^{b-Mt}|u_0(x)-u(t,x)|\,dx \leqslant 2\int_a^b |u_{0j}(x)-u_0(x)|\,dx\,.$$

Dakle $u(t,\cdot)\to u_0$ u $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ kad $t\to 0$.

Q.E.D.

Svojstvo sažimanja u Teoremu 4 je, naravno, mnogo jače od teorema jedinstvenosti. Dakle (16) i (20) su dva ekvivalentna načina zadavanja dopustivih rješenja Burgersove jednadžbe. Na diskontinuitetima prvog reda jasno je da se podudaraju, (16) kaže da skok mora biti negativan, dok (20) kaže da ako je brzina šoka s, tada vrijedi

$$|u_+ - k|\left(s - \tfrac{1}{2}(u_+ + k)\right) \geqslant |u_- - k|\left(s - \tfrac{1}{2}(u_- + k)\right) .$$

Uzmemo li $k = u_\pm$, taj uvjet daje

$$0 \leqslant \tfrac{1}{2}(u_+ + u_-) - s \leqslant 0 ,$$

što je Rankine-Hugoniotov uvjet. Za k van $[u_-, u_+]$ imamo

$$\begin{aligned} |u_+ - k|(u_+ + k) - |u_- - k|(u_- + k) &= \operatorname{sign}(u_+ - k)(u_+^2 + u_-^2) \\ &= 2s(u_+ + u_-)\operatorname{sign}(u_+ - k) \end{aligned}$$

i

$$|u_+ - k| - |u_- - k| = (u_+ - u_-)\operatorname{sign}(u_+ - k) ,$$

pa tada imamo jednakost.

Uzmimo $k = \frac{1}{2}(u_+ - u_-) = s$. Tada su u gornjoj nejednakosti dvije strane $\frac{1}{2}|u_+ - u_-|$ pomnožene sa

$$s - \tfrac{1}{2}(u_\pm - s) = \tfrac{1}{2}(s - u_\pm) ,$$

te uvjet postaje $u_+ \leqslant u_-$. Tada je ovo točno na cijelom $\langle u_-, u_+\rangle$, jer su dvije strane kvadratične i jednake u rubnim točkama.

Svojstvo sažimanja u Teoremu 4, također povlači da za Hopfova rješenja Burgersove jednažbe imamo nejednakost

$$\int |u(t, x + y) - u(t, x)|\, dx \leqslant \int |u_0(x + y) - u_0(x)|\, dx ,$$

jer je prostor rješenja translatorno invarijantan. Posebno, ovo povlači da je u funkcija omeđene varijacije s obzirom na x, ako je to i u_0. Da bi to vidjeli, dokažimo sljedeću lemu.

Lema 3. *Ako je f funkcija omeđene varijacije na $\mathbf{R}$, tada vrijedi formula:*

$$\int |f(x + y) - f(x)|\, dx \leqslant |y| V \tag{22}$$

gdje je V totalna varijacija funkcije f. Obrnuto, ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ i vrijedi

$$\liminf_{y\to 0} \frac{\int |f(x + y) - f(x)|\, dx}{|y|} = V < \infty , \tag{23}$$

tada je f omeđene varijacije s totalnom varijacijom V, i u (23) postoji i limes.

Dem. Ako je f funkcija omeđene varijacije i $y > 0$ tada imamo

$$\begin{aligned} \omega(y) &= \int |f(x + y) - f(x)|\, dx \\ &\leqslant \int \left(\int_x^{x+y} |df(t)|\, dt \right) dx \\ &= \int \left(|df(t)| \int_{t-y}^{t} dx \right) dt \\ &= |y| V , \end{aligned}$$

što, kako je očigledno ω parna funkcija, dokazuje (22).

Za proizvoljnu funkciju $\varphi \in \mathrm{C}^1_c(\mathbf{R})$ imamo:

$$\begin{aligned}\left|\int -\tfrac{d}{dt}\varphi(x)f(x)\,dx\right| &= \lim_{y\to 0}\left|\int -\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}f(x)\,dx\right| \\ &= \lim_{y\to 0}\left|\int \frac{f(x)-f(x-y)}{y}\varphi(x)\,dx\right| \\ &\leqslant V_0 \sup|\varphi|\,,\end{aligned}$$

gdje je $V_0 = \liminf_{y\to 0}\frac{\omega(y)}{|y|}$. Ako je $V_0 < \infty$, tada je f' Radonova mjera (derivacija je shvaćena u smislu teorije distribucija), ukupne mase manje od V_0, odnosno, f je funkcija omeđene varijacije s totalnom varijacijom $V \leqslant V_0$. Budući da je

$$V_0 \leqslant \limsup_{y\to 0}\frac{\omega(y)}{|y|} \leqslant V \leqslant V_0$$

iz (23), što nam upravo daje zadnju tvrdnju.

Q.E.D.

III. Kompenzirana kompaktnost

U prethodnom poglavlju proučavali smo Burgesovu jednadžbu. Dobili smo postojanje slabog rješenja, te neke uvjete koji daju jedinstvenost. Dali smo čak i formulu po kojoj se takvo rješenje može izračunati. Kod općenitijih zakona sačuvanja (općenitija funkcija fluksa f) takvi se rezultati ne daju tako jednostavno dobiti upotrebljenim metodama. Zato ćemo u ovom poglavlju dokazati egzistenciju slabog rješenja za općenitiju funkciju fluksa f modernijim tehnikama.

U teoremu ćemo s Ω označavati gornju poluravninu $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$.

Teorem 1. *Neka je* $u_0 \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R})$. *Tada Cauchyjev problem*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \\ \qquad u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

ima slabo rješenje $u \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. ∎

Da bismo smo dokazali ovaj teorem trebat će nam neki novi pojmovi iz matematičke analize.

Youngove mjere

Pretpostavljamo da je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen skup. Neka su, nadalje, u^n funkcije definirane na Ω. Pretpostavimo da za u^n imamo da

$$u^n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} u\,.$$

Pitamo se možemo li iz toga zaključiti da

$$f \circ u^n \xrightharpoonup{\mathrm{L}^\infty(\Omega)*} f \circ u\,?$$

Drugim riječima, jesu li operatori koji djeluju kao kompozicija s neprekinuto diferencijabilnim funkcijama slabo $*$ nizovno neprekinuti?

Bez dodatnih zahtjeva na (u^n) to općenito ne vrijedi, što se lako može vidjeti na sljedećem primjeru. Neka su a i b različiti realni brojevi, te $\lambda \in \langle 0,1\rangle$. Dalje, neka su $u^n : [0,1] \to \mathbf{R}$ funkcije zadane formulom

$$u^n(x) = \begin{cases} a & \frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+\lambda}{n} \\ b & \text{inače}\,. \end{cases}$$

Za taj niz lako se vidi da

$$u^n \xrightharpoonup{*} u = \lambda a + (1-\lambda) b$$

i

$$f \circ u^n \xrightharpoonup{*} \overline{f} = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\,,$$

a znamo da za prizvoljnu funkciju f općenito ne vrijedi jednakost

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\,.$$

Ukoliko, recimo, zahtijevamo da su derivacije funkcija u^n ograničene u L^2, onda zaključujemo da je niz sadržan u $\mathrm{L}^\infty \cap \mathrm{H}^1$, pa Rellichov teorem kompaktnosti daje nizovnu slabu $*$ neprekidnost za svaku neprekinutu funkciju f.

Takve općenite rezultate nam daje teorija Youngovih mjera. U toj teoriji podnizu niza (u^n) pridružujemo familiju vjerojatnosnih mjera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ na kodomeni K (Youngovu mjeru) takvu da je slabi limes niza $(f \circ u^{n_k})$ dan s očekivanjem:

$$\langle \nu_x, f\rangle = \int_K f(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\,,$$

za svaku neprekidnu funkciju $f : K \to \mathbf{R}$.

Verzija osnovnog teorema o Youngovom mjerama je dokazana u [Ba].

Teorem 2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ skup izmjeriv u Lesbesgueovom smislu, $K \subseteq \mathbf{R}^m$ zatvoren skup, i neka je $a^n : \Omega \to \mathbf{R}^m$ niz izmjerivih funkcija, za koji vrijedi $\mathrm{Im}(a^n) \to K$ u mjeri, odnosno da za svaki otvoreni skup U koji sadrži K vrijedi*

$$\lim_n \mathsf{vol}\,\{x \in \Omega \,:\, a^n(x) \notin U\} = 0\,.$$

Tada postoji podniz $(a^{n_k})_k$ i izmjeriva familija nenegativnih Radonovih mjera na $\mathbf{R}^m$ $(\nu_x,\, x \in \Omega)$ takva da vrijedi:
(a) $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathbf{R}^m} d\nu_x \leqslant 1$ (ss $x \in \Omega$),
(b) $\operatorname{supp} \nu_x \subseteq K$ (ss $x \in \Omega$),
(c) $f \circ a^{n_k} \xrightarrow{\ *\ } \langle \nu_\cdot, f\rangle = \int_{\mathbf{R}^m} f(\lambda)\, d\nu_\cdot(\lambda)$ *u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *za svaku funkciju* $f \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^m)$.
Štoviše, ako podniz $(a^{n_k})_k$ zadovoljava i uvjet ograničenosti

$$(1) \qquad (\forall R > 0)\ \lim_{h\to\infty} \sup_k \mathsf{vol}\,\{x \in \Omega \cap \mathrm{K}(0,R) \,:\, |a^{n_k}(x)| \geqslant m\} = 0\,,$$

onda je $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ (ss $x \in \Omega$) *(ν_x je vjerojatnosna mjera) i za svaki izmjeriv skup $A \subseteq \Omega$ vrijedi:*

$$f \circ a^{n_k} \xrightarrow{\ \mathrm{L}^1(A)\ } \langle \nu_\cdot, f\rangle$$

za svaku neprekinutu funkciju $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, takvu da je niz $(f \circ a^{n_k})_k$ nizovno slabo relativno kompaktan u $\mathrm{L}^1(A)$. ∎

U daljnjem ćemo s a^k označavati članove podniza $(a^{n_k})_k$.
Uvjet ograničenosti (1) je ekvivalentan s:

$$(2) \qquad \begin{cases} (\forall R > 0)(\exists g \in \mathrm{C}(\mathbf{R}_0^+))g \text{ je neopadajuća, } \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty \text{ i} \\ \qquad \sup_k \displaystyle\int_{\Omega\cap \mathrm{K}(0,R)} g(|a^k(x)|)\, dx < \infty \end{cases}$$

Zaista, uzmimo neka vrijedi (2). Fiksirajmo R, i neka je g pripadna neopadajuća funkcija. Tada vidimo da je

$$\sup_k \mathsf{vol}\left\{x \in \Omega \cap \mathrm{K}(0,R) \,:\, |a^k(x)| \geqslant t\right\} g(t) \leqslant \sup_k \int_{\Omega\cap \mathrm{K}(0,R)} g(|a^k(x)|)\, dx\,,$$

a kako $g \nearrow \infty$ to slijedi (1).

Obrnuto, neka vrijedi (1). Za fiksan R možemo izabrati rastući niz (t_n) u $\mathbf{R}^+$, takav da vrijedi

$$\sup_k \mathsf{vol}\left\{x \in \Omega \cap \mathrm{K}(0,R) \,:\, |a^k(x)| \geqslant t_n\right\} \leqslant n^{-3}\,,$$

te uzeti:

$$\overline{g}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1\rangle \\ n, & t \in [t_n, t_{n+1}\rangle. \end{cases}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \sup_k \int_{\Omega\cap \mathrm{K}(0,R)} \overline{g}(|a^k(x)|)\, dx &= \sup_k \sum_{n=1}^\infty n \mathsf{vol}\left\{x \in \Omega \cap \mathrm{K}(0,R) \,:\, |a^k(x)| \in [t_n, t_{n+1}\rangle\right\} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^\infty n^{-2} < \infty\,. \end{aligned}$$

Biranjem neprekidne funkcije g za koju vrijedi $\overline{g}-1 \leqslant g \leqslant \overline{g}$ dobivamo (2).

Ako (a^n) je niz ograničen u $\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$, to jest

$$\|a^n\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)} < C\,,$$

tada je i $(f\circ a^n)$ ograničen niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$ za svaku neprekidnu funkciju f. Dalje, u tom slučaju je ispunjen i uvjet (2) s $g(t)=t$, pa imamo familiju vjerojatnostnih mjera (ν_x) i podniz (a^k) takav da je

$$f\circ a^k \xrightharpoonup{*} \langle \nu.\,, f\rangle$$

u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$, za svaku neprekidnu funkciju f. Stoga, u tom posebnom slučaju imamo slijedeći korolar.

Korolar 1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ograničen i otvoren skup, a $K \subseteq \mathbf{R}^m$ zatvoren podskup, te neka je (a^n) ograničen niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$ takav da vrijedi*

$$(\forall n\in\mathbf{N})\quad a^n(x)\in K\ (\text{ss } x\in\Omega)\,.$$

Tada postoji podniz tog niza (radi jednostavnosti označimo ga jednako) i izmjeriva familija vjerojatnostnih Radonovih mjera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ (Youngova mjera pridružena podnizu (a^{n_k}) niza (a^n)) takva da vrijedi

(i) $\operatorname{supp}\nu_x \subseteq K$ (ss $x\in\Omega$)

(ii) $f\circ a^{n_k} \xrightharpoonup{*} \langle \nu.\,, f\rangle = \int_{\mathbf{R}^m} f(\lambda)\,d\nu.(\lambda)$ *u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *za svaku funkciju* $f\in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^m)$.

Obrnuto, za svaku izmjerivu familiju vjerojatnostnih Radonovih mjera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ takvu da vrijedi (i), postoji niz (u^n) ograničen u $\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^m)$ takav da je $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ pripadna Youngova mjera.

∎

Lema 1. *Neka je $(u^n)_n$ niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ takav da $u_n \xrightharpoonup{*} u$. Tada $u_k \to u$ jako u $\mathrm{L}^p(\Omega)$ za $p<\infty$, ako i samo ako je $\nu_x = \delta_{u(x)}$.*

Dem. Nužnost: iz $u_n \xrightharpoonup{*} u$ u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ po Teoremu 2 (i iz rasprave koja je slijedila) proizlazi da postoji podniz $(u^{n_k})_k$ i familija vjerojatnostnih mjera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ takva da

$$f\circ a^k \xrightharpoonup{*} \langle \nu.\,, f\rangle = \int_\Omega f\,d\nu.\,,$$

za svaku neprekidnu funkciju f. Budući da $u^n \to u$ u $\mathrm{L}^p(\Omega)$, to postoji podniz $(u^{n_j})_j$ takav da $u^{n_j}\to u$ (ss Ω), pa i $f\circ u^{n_j} \to f\circ u$ (ss Ω). Prijelaskom na zajednički podniz dobivamo

$$f\circ u = \int_\Omega f\,d\nu.\,,$$

odnosno $\nu. = \delta_{u(\cdot)}$.

Dovoljnost: $\nu. = \delta_{u(\cdot)}$ povlači da za svaki $p\in\langle 1,\infty\rangle$ imamo

$$(u^n)^p \xrightharpoonup{*} (u)^p$$

i $u^n \xrightharpoonup{*} u$. Budući da je Ω skup konačne mjere, (u^n) je sadržan u $\mathrm{L}^p(\Omega)$ i omeđen u njemu. Dakle, zbog refleksivnosti prostora $\mathrm{L}^p(\Omega)$, (u^n) ima slabo konvergentan (u $\mathrm{L}^p(\Omega)$) podniz, a jedintvenost limesa kaže da slabo konvegira k u. No, uzmemo li za $f=|\cdot|^p$, imajući u vidu da je na skupu omeđene mjere konstanta 1 integrabilna funkcija, dobivamo

$$\int_\Omega |u^n(x)|^p\,dx \to \int_\Omega |u(x)|^p\,dx\,,$$

odnosno i norme konvergiraju, što povlači da $u^n\to u$ u $\mathrm{L}^p(\Omega)$.

Q.E.D.

Teorem kompenzirane kompaktnosti

Da bismo dokazali teorem koji će dati zadovoljavajuće uvjete na niz (u^n) trebat će nam sljedeći teorem [Ta1].

Teorem 3. **(div-rot lema)** *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ *ograničen i otvoren skup, te neka su* $(\mathsf{u}^n), (\mathsf{v}^n)$ *ograničeni nizovi u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^d)$ *takvi da je ispunjeno*
(a) $(\operatorname{div} \mathsf{u}^n)$ *leži u kompaktnom skupu u* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$
(b) $(\operatorname{rot} \mathsf{u}^n)$ *leži u kompaktnom skupu u* $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.
Neka, nadalje, vrijede konvergencije $\mathsf{u}^n \xrightarrow{*} \mathsf{u}$ *i* $\mathsf{v}^n \xrightarrow{*} \mathsf{v}$ *u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. *Tada slijedi da*

$$\mathsf{u}^n \cdot \mathsf{v}^n \xrightarrow{*} \mathsf{u} \cdot \mathsf{v}$$

u smislu teorije distribucija. ∎

Dokažimo sada teorem koji će biti ključan u dokazu Teorema 1. To je upravo teorem po kojem smo nazvali i cijelo poglavlje.

Teorem 4. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ *ograničen i otvoren skup, te* $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$. *Nadalje, neka je* (u^n) *niz funkcija u* $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *takav da vrijedi*

$$u^n \xrightarrow{*} u\,,$$

te neka za svaku konveksnu funkciju $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *vrijedi da su*

$$\partial_t(\Phi \circ u^n) + \partial_x(Y \circ u^n) \tag{E}$$

sadržani u kompaktnom skupu u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, *pri čemu* Y *zadovoljava* $Y' = f'\Phi'$. *Tada vrijedi*

$$f \circ u^n \xrightarrow{*} f \circ u \quad (\text{u } \mathrm{L}^\infty(\Omega)) \tag{3}$$

i

$$f' \circ u^n \longrightarrow f' \circ u \quad (\text{u } \mathrm{L}^p(\Omega)), \tag{4}$$

za svaki $p < \infty$.*Ukoliko* f *ni na kojem intervalu nije afina, onda štoviše vrijedi i*

$$u^n \longrightarrow u \quad (\text{u } \mathrm{L}^p(\Omega)), \tag{5}$$

za svaki $p < \infty$.

Dokaz ćemo provesti u par koraka, no prije nego li prijeđemo na njega komentirajmo uvjet (E). Sjetimo li se kako smo zadali vezu između Φ i Y u prehodnom poglavlju, primjećujemo da se $f'\Phi'$ kod Burgersove jednadžbe upravo svodi na $s\Phi'$. Stoga Φ ponovo zovemo entropija, a Y tok entropije. Zbog toga ovdje (E) zovemo uvjet entropije.

Dem. Korak 1: Dokazujemo (3). Fiksirajmo konveksnu funkciju Φ. Uvedimo oznake

$$v^n = f \circ u^n, w^n = \Phi \circ u^n \text{ i } z^n = f \circ u^n\,,$$

i promatrajmo nizove

$$\mathsf{u}^n = \begin{bmatrix} -v^n \\ u^n \end{bmatrix} \text{ i } \mathsf{v}^n = \begin{bmatrix} w^n \\ z^n \end{bmatrix}$$

u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^2)$. Postoje podnizovi takvi da

$$\mathsf{u}^n \xrightarrow{*} \begin{bmatrix} -v \\ u \end{bmatrix} \text{ i } \mathsf{v}^n \xrightarrow{*} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$$

u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Prema (E) imamo da

$$\operatorname{div} \mathsf{v}^n = \partial_t w^n + \partial_x z^n$$

leži u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, a uzmemo li $\Phi(x) = x$ isto slijedi i za

$$\operatorname{rot} \mathsf{u}^n = \partial_t u^n + \partial_x v^n \,.$$

Primjenom div-rot leme zaključujemo da

$$u^n z^n - v^n w^n \xrightarrow{\ *\ } uz - vw$$

u distribucijama. S druge pak strane $\mathsf{u}^n \cdot \mathsf{v}^n$ je ograničen niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ pa ima slabo $*$ konvergentan podniz, odakle zbog jedinstvenosti limesa

$$u^n z^n - v^n w^n \xrightarrow{\ *\ } uz - vw \,,$$

odnosno

$$u^n Y(u^n) - f(u^n)\Phi(u^n) \xrightarrow{\ *\ } uz - vw \,. \tag{6}$$

Primjenom teorema o Youngovim mjerama skoro svuda imamo sljedeći zapis

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \langle \nu_{t,x}, 1_{\mathbf{R}} \rangle \\ v(t,x) &= \langle \nu_{t,x}, f \rangle \\ w(t,x) &= \langle \nu_{t,x}, \Phi \rangle \\ z(t,x) &= \langle \nu_{t,x}, Y \rangle \,. \end{aligned} \tag{7}$$

S takvim zapisom imamo da za svaku konveksnu funkciju Φ i Y takvu da je $Y' = f'\Phi'$ vrijedi

$$\langle \nu_{t,x}, 1_{\mathbf{R}} Y - f\Phi \rangle = \langle \nu_{t,x}, 1_{\mathbf{R}} \rangle \langle \nu_{t,x}, Y \rangle - \langle \nu_{t,x}, f \rangle \langle \nu_{t,x}, \Phi \rangle \,. \tag{8}$$

Fiksirajmo (t,x). Ponovo uzimamo posebnu konveksnu funkciju $\Phi(\lambda) = |\lambda - u|$. Sada, za općenitu f imamo da je

$$Y = \begin{cases} f(u) - f(\lambda), & \lambda \leqslant u \\ f(\lambda) - f(u), & u \leqslant \lambda \,. \end{cases}$$

Kad to uvrstimo u (8) dobivamo

$$(v - f(u)) \langle \nu, |\lambda - u| \rangle = 0 \,,$$

odakle zaključujemo da je

$$v = f(u) \quad \text{ili} \quad \langle \nu, |\lambda - u| \rangle = 0 \,.$$

Druga mogućnost vodi na $\nu = \delta_u$, odnosno ponovno na $v = f(u)$, čime je dokazano (3).

Korak 2: Dokazujemo da je nosač mjere $\nu_{t,x}$ sadržan u intervalu na kojem je f afina.

Radi jednostavnosti računa, pretpostavimo da u točki (t,x) vrijedi

$$u(t,x) = f(u(t,x)) = 0 \,.$$

Tada (8) prelazi u

$$\langle \nu, 1_{\mathbf{R}} Y - f\Phi \rangle = 0 \,,$$

za svaku konveksnu funkciju Φ. Koristeći (7) možemo zapisati

$$
\begin{aligned}
\langle \nu, 1_{\mathbf{R}} \rangle &= 0 \\
\langle \nu, f \rangle &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Odaberimo α i β tako da je $\overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{supp}\,\nu) = [\alpha, \beta]$. Tada $(9)_1$ povlači da je $\alpha \leqslant 0 \leqslant \beta$. Ako bi jedna od vrijednosti α ili β bili nula tad bi i druga vrijednost bila nula. To bi povlačilo da je $\nu = \delta$, što je trivijalan slučaj, stoga pretpostavljamo da je $\alpha < 0 < \beta$. Definirajmo pomoćne funkcije g i h formulama:

$$
\begin{aligned}
g(\lambda) &= \int_\alpha^\lambda \xi \, d\nu(\xi) \\
h(\lambda) &= \int_\alpha^\lambda f(\xi) \, d\nu(\xi)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

i proširimo ih nulom van $[\alpha, \beta]$. Proširenjem dobivamo neprekidnu funkciju, zbog odabira intervala i (9). Također iz (9) i definicije g vidimo da je za $\lambda \in \langle \alpha, \beta \rangle$ ispunjeno

$$
g(\lambda) < 0\,.
$$

Iz (10) vidimo i da je

$$
\begin{aligned}
g'(\lambda) &= \lambda \nu \\
h'(\lambda) &= f(\lambda) \nu\,,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

pa slijedi

$$
\langle g', Y \rangle - \langle h', \Phi \rangle = 0\,,
$$

odnosno

$$
-\langle g, Y' \rangle + \langle h, \Phi' \rangle = 0\,.
$$

Uvrstimo li $Y' = f'\Phi'$ dobivamo:

$$
\langle -gf' + h', \Phi' \rangle = 0\,.
$$

To vrijedi za svaku konveksnu funkciju Φ, odnosno

$$
\langle -gf' + h', \varphi \rangle = 0
$$

vrijedi za svaku rastuću funkciju φ. Stoga zaključujemo da to vrijedi i za razliku neopadajućih funkcija, i dalje, za sve glatke funkcije φ. Tako zaključujemo da je

$$
h(\lambda) - f'(\lambda) g(\lambda) = 0\,,
\tag{12}
$$

a (11) daje da vrijedi

$$
f(\lambda) g'(\lambda) - \lambda h'(\lambda) = 0\,.
$$

Jedno i drugo povlači

$$
(f(\lambda) g(\lambda) - h(\lambda))' = 0\,,
$$

što zajedno s činjenicom da je $g = h = 0$ izvan $[\alpha, \beta]$ daje

$$
f(\lambda) g(\lambda) - h(\lambda) = 0\,.
$$

Posljednje, zajedno s (12) i činjenicom da je $g < 0$ na $\langle \alpha, \beta \rangle$ daje $f(\lambda) - \lambda f'(\lambda) = 0$, odakle slijedi da na istom intervalu vrijedi

$$
f(\lambda) = c\lambda\,,
$$

pa je tvrdnja (4) trivijalno ispunjena.

Ako nema intervala na kojem je f afina onda je $\mathrm{supp}\,\nu \subseteq \{\alpha\}$, pa tvrdnja slijedi iz Leme 1.

Q.E.D.

Dokaz glavnog teorema

Ponovno ćemo koristiti metodu iščezavajuće viskoznosti.
Promotrimo paraboličku aproksimaciju Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} \partial_t u^n + \partial_x f(u^n) = \frac{1}{n}\partial_{xx}u^n \\ \qquad\qquad u(0,\cdot) = u_0 \,. \end{cases}$$

Standardni rezultat za paraboličku jednadžbu gornjeg tipa [Ol] je egzistencija klasičnog rješenja u^n takvog da za svaki ograničeni skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$ vrijedi da su u^n i $\frac{1}{n}\partial_x u^n$ ograničeni u $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

Zbog ograničenosti postoji slabo $*$ konvergentan podniz. Označimo takav podniz na isti način $u^n \xrightarrow{\ *\ } u$.

Cilj nam je pokazati da je tada gomilište u traženo slabo rješenje. Dovoljno je pokazati da vrijedi (E), jer tada tvrdnja izlazi iz Teorema 4.

Neka je $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ konveksna funkcije, a funkcija Y takva da vrijedi $Y' = f'\Phi'$. Računamo:

$$\begin{aligned} \partial_t(\Phi \circ u^n) + \partial_x(Y \circ u^n) &= (\Phi' \circ u^n)\partial_t u^n + \partial_x(Y' \circ u^n)\partial_x u^n \\ &= (\Phi' \circ u^n)(\partial_t u^n + \partial_x(f \circ u^n)) \\ &= (\Phi' \circ u^n)\tfrac{1}{n}\partial_{xx}u^n \\ &= \tfrac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi \circ u^n) - \tfrac{1}{n}(\Phi'' \circ u^n)(\partial_x u^n)^2 \,. \end{aligned}$$

Uočimo najprije da je $\partial_t(\Phi \circ u^n) + \partial_x(Y \circ u^n)$ sadržano u ograničenom podskupu prostora $\mathrm{W}^{-1,\infty}(\Omega)$.

Nadalje tvrdimo da je $\frac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi \circ u^n)$ sadržano u kompaktu u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$. Dovoljno je vidjeti da $\|\frac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi \circ u^n)\|_{\mathrm{H}^{-1}} \to 0$ kad $n \to \infty$. Dakle:

$$\begin{aligned} \|\tfrac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi \circ u^n)\|_{\mathrm{H}^{-1}} &= \sup_{\substack{\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \\ \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1} \leqslant 1}} \left| \int_\Omega \tfrac{1}{n}\partial_{xx}(\Phi \circ u^n)\varphi \, dtdx \right| \\ &= \sup_{\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)} \left| \int_\Omega \tfrac{1}{n}\partial_x(\Phi \circ u^n)\partial_x\varphi \, dtdx \right| \\ &\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{n}} \, \|\Phi' \circ u^n\|_{\mathrm{L}^\infty} \left\| \sqrt{\tfrac{1}{n}}\partial_x u^n \right\|_{\mathrm{L}^2} \sup_{\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)} \|\partial_x \varphi\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{n}}C \end{aligned}$$

Pomnožimo li paraboličku aproksimaciju diferencijalne jednadžbe s u^n i integriramo po Ω, kraći račun daje ograničenost niza $\sqrt{\frac{1}{n}}\partial_x u^n$ u prostoru $\mathrm{L}^2(\Omega)$, stoga imamo gornju jednoliku ocjenu.

Tvrdimo, k tome, i da su $(\Phi'' \circ u^n)$ sadržani u ograničenom skupu u $\mathcal{M}(\Omega)$. Ovo je očito zbog konveksnosti od Φ i činjenice da je $\frac{1}{n}(\partial_x u^n)^2$ L^1 funkcija.

Tvrdnja teorema sada slijedi iz

Lema 2. **(Murat)** *Neka je (g^n) niz koji je sadržan u $(A+B) \cap C$, gdje je: A kompaktan u $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$, B ograničen u $\mathcal{M}_b(\Omega)$ i C ograničen u $\mathrm{W}^{-1,\infty}(\Omega)$.*

Tada je (g^n) sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Dem. Promotrimo Dirichletovu zadaću

$$\left\{ \begin{aligned} \triangle v^n =& g^n \quad \text{u } \Omega \\ v^n =& 0 \quad \text{na } \partial\Omega\,. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Za $p > d(= 2)$ kompaktnost ulaganja $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{C}_0(\Omega)$ (v.a [Br, Théorème IX.16]) povlači da je ulaganje $\mathcal{M}_b(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{W}^{-1,q}(\Omega)$ za $q < \frac{d}{d-1} \leqslant 2$ također kompaktno.

Po pretpostavci g^n možemo zapisati na sljedeći način

$$n^n = g_1^n + g_2^n\,,$$

pri čemu je $g_1^n \in A$ i $g_2^n \in B$. Neka su v_1^n i v_2^n rješenja rubne zadaće (13) s g_1^n, odnosno g_2^n, na desnoj strani. Zbog linearnosti slijedi da za rješenje zadaće vrijedi $v^n = v_1^n + v_2^n$, pri čemu je, zbog eliptičke regularnosti (v. [GT]):

v_1^n sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega) = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$

v_2^n sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{W}_0^{1,q}(\Omega)$

Budući da je također $g^n \in \mathrm{W}^{-1,\infty}(\Omega)$, to zaključujemo da je i v^n sadržano u ograničenom podskupu $\mathrm{W}_0^{1,r}(\Omega)$ za $r \leqslant \infty$. Intepolacijom (v. [RS]) za $2 - r$ zaključujemo da je v^n sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, što povlači i da je g^n sadržan u kompaktnom podskupu $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$.

Q.E.D.

IV. Numeričko rješavanje Burgersove jednadžbe

Nakon prikaza teorijskih rezultata, pokušajmo jednostavnim numeričkim postupcima generirati slike koje će pomoći u predočavanju slabih rješenja.

Opis numeričkih postupaka

Metodom konačnih razlika želimo riješiti Burgersovu jednadžbu na $[0,1] \times [0;0{,}4]$ uz neki početni uvjet u_0. Pokušat ćemo primijeniti više različitih postupaka: Lax-Fridrichsov, UpWind i Godunovljev, te ih usporediti. Uzet ćemo da su $k = \triangle t$ i $h = \triangle x$.

Pri rješavanju linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi numeričkim putem uočio sam da Lax-Fridrichsova metoda zadana diferencijskom shemom

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{k}{2h}(F(U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n))$$

daje dobre rezultate. Međutim, kako smo kod linearnih parcijanih diferencijanih jednadžbi imali glatka rješenja, očekujemo lošije ponašanje metode oko šoka.

Primijenimo li tu metodu na rješavanje jednadžbe uz početni uvjet

$$u_0 = \begin{cases} 1, & x < 0{,}4 \\ 1 - 5(x - 0{,}4), & 0{,}4 < x < 0{,}6 \\ 0, & 0{,}6 < x\,; \end{cases}$$

za koju znamo da u trenutku $t = 0{,}2$ rješenje ima prekid u 0,6; dobit ćemo velika odstupanja oko šoka kao što se vidi na slikama.

Zaključujemo da ova metoda nije dobra za pronalaženje slabih rješenja.

Kao drugu metodu koristimo UpWind, s diferencijskom shemom

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}(F(U_j^n) - F(U_{j-1}^n))\,,$$

koja kod linearnih parcijanih diferencijalnih jednadžbi daje nešto slabiju konvergenciju od Lax-Fridrichsove, ali se isto dobro ponaša.

Kad je primijenimo na istu početnu funkciju u_0 dobivamo puno bolje ponašanje oko šoka. Vidimo da nam metoda daje skoro točno rješenje. Pitanje je može li se ovo još popraviti.

Godunov je predložio, umjesto da se problem rješava unatrag po karakteristikama, da se svaka točka promatra kao šok, te da umjesto $F(u_s)$ definiramo numeričku flux funkciju $f(u_l, u_r)$ za $u_l < u_s < u_r$ koja će, uzimajući u obzir karakteristike, odrediti koja vrijednost ima više utjecaja na rješenje, što u konkretnom slučaju daje

$$f(u_l, u_r) = \begin{cases} \max_{u_l < u < u_r} F(u), & \text{kad je } u_l \leqslant u_r \\ \min_{u_l < u < u_r} F(u), & \text{kad je } u_l > u_r; \end{cases}$$

s tim da su navedeni maksimumi u stvari uzimanje veće od dviju vrijednosti. Metoda je dana shemom

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h}(f(U_{j+1}^n, U_j^n) - f(U_j^n, U_{j-1}^n))\,,$$

i može se zapisati u integralnom obliku

$$f(U_{j+1}^n, U_j^n) = \frac{1}{k}\int_n^{n+1} F(\overline{U}(t, x_{j+\frac{1}{2}}))\,dx\,,$$

gdje je $\overline{U}(t, x_{j+\frac{1}{2}})$ točka u kojoj promatramo šok, te radi toga zadovoljava zakon sačuvanja iz kojeg je proizašla jednadžba. Zbog konusa ovisnosti, k određujem tako da bude dvostruko kraći od h.

Kod pokretanja program nudi na izbor različite početne uvjete, metodu i vremenski korak k. Napisan je modularno, te se lako može koristiti i u sličnim problemima. Ponuđeni su sljedeći početni uvjeti:

Neprekidna padajuća funkcija:

$$u_0 = \begin{cases} 1, & x < 0{,}4 \\ 1 - 5(x - 0{,}4), & 0{,}4 < x < 0{,}6 \\ 0, & 0{,}6 < x\,. \end{cases}$$

Padajuća funkcija sa skokom:

$$u_0 = \begin{cases} 1, & x < 0{,}5 \\ 0, & 0{,}5 < x\,. \end{cases}$$

Neprekidna rastuća funkcija:

$$u_0 = \begin{cases} 0, & x < 0{,}4 \\ 5(0.4 - x), & 0{,}4 < x < 0{,}6 \\ 1, & 0{,}6 < x\,. \end{cases}$$

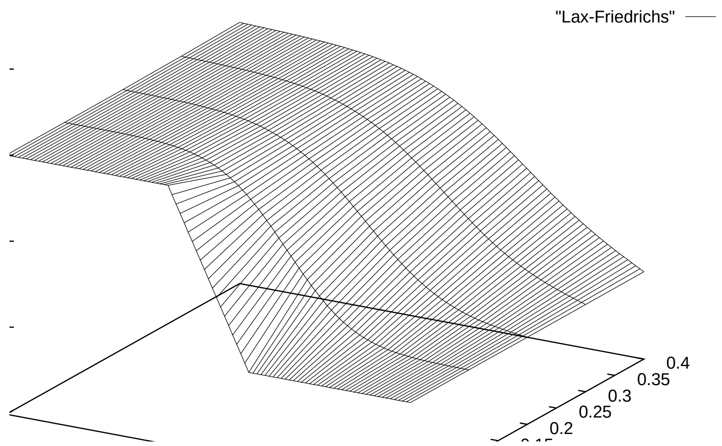
Rastuća funkcija sa skokom:

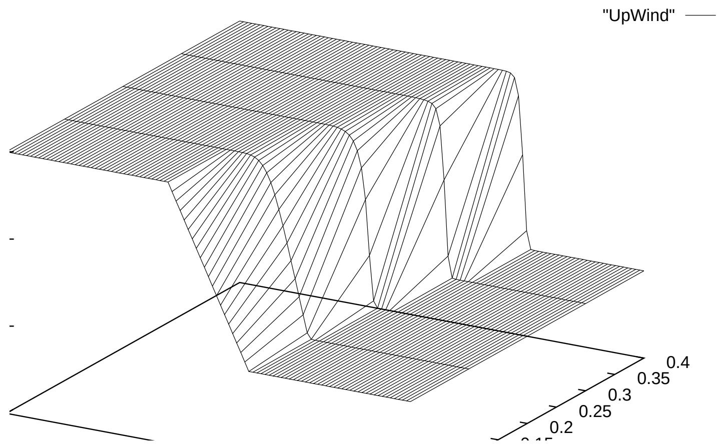
$$u_0 = \begin{cases} 0, & x < 0{,}5 \\ 1, & 0{,}5 < x\,. \end{cases}$$

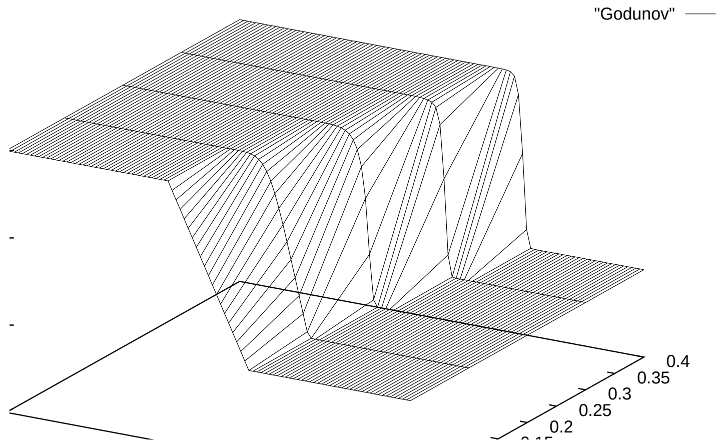
Progam radi izlaz formatiziran za korištenje gnuplota kojeg pozivam za prikaz riješenja.

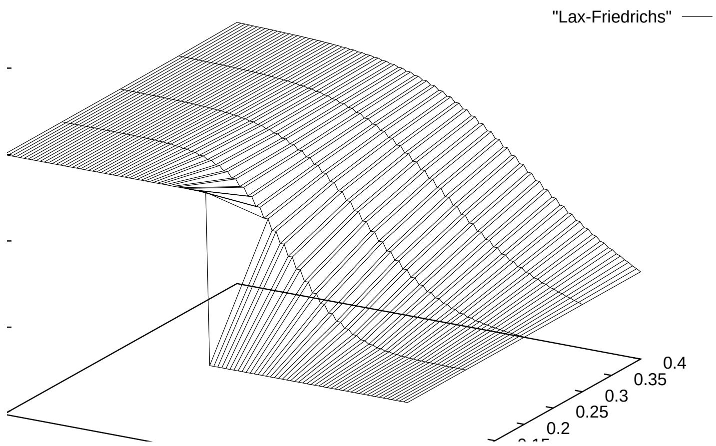
Pri izradi programa koristio sam [Ve], gdje su opisane sve navedene metode.

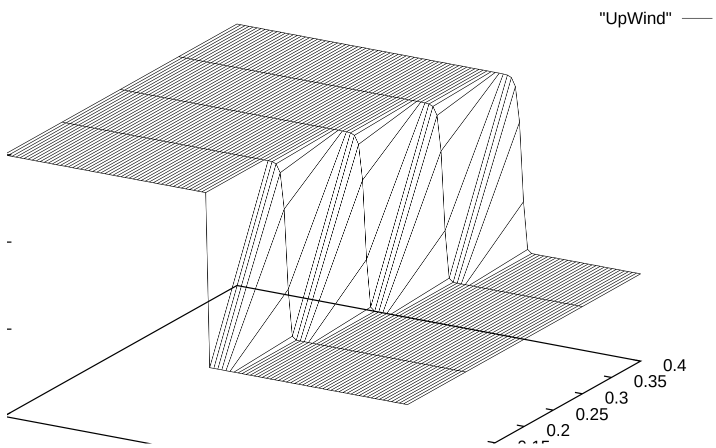
Primijetili smo da direktna primjena metodâ koje funkcioniraju u linearnom slučaju ne daje dobre rezultate kod nelinearnih jednadžbi, nego da moramo uzimati u obzir i izvore iz kojih proizlaze.

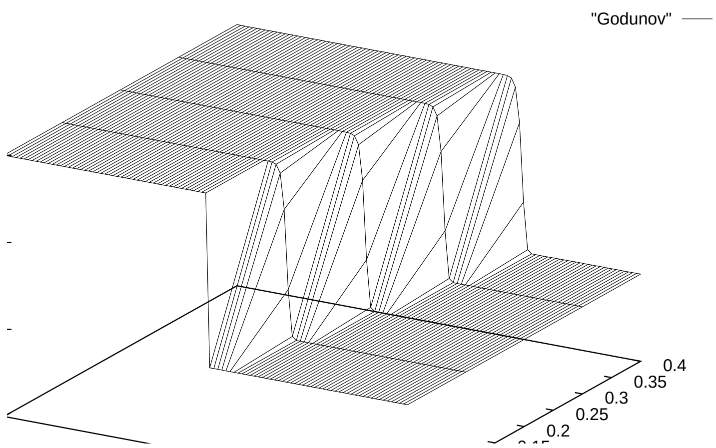

"Lax-Friedrichs"
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2

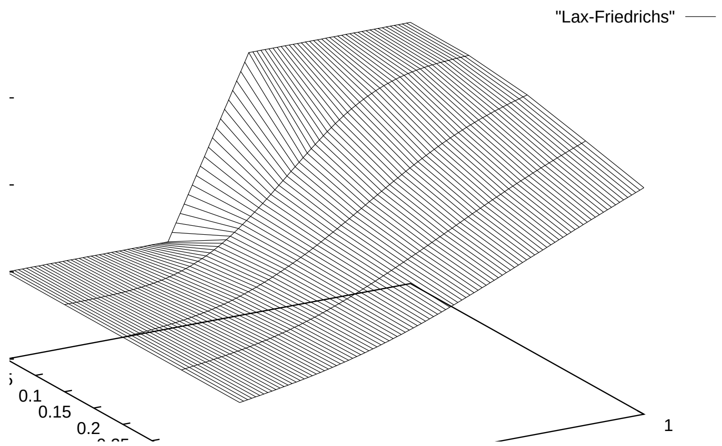

"UpWind"
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2

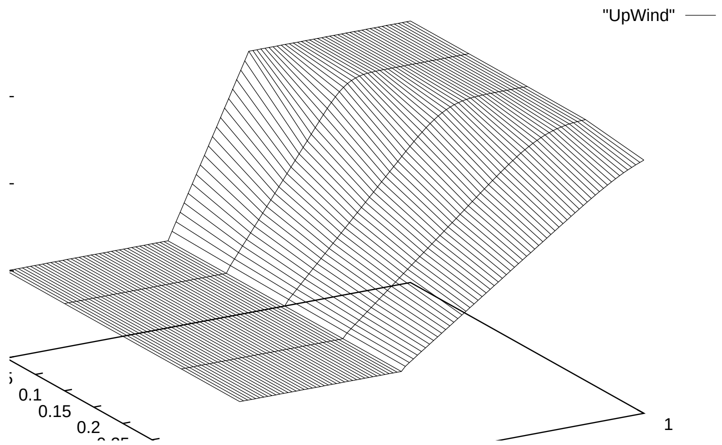

"Godunov"
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2

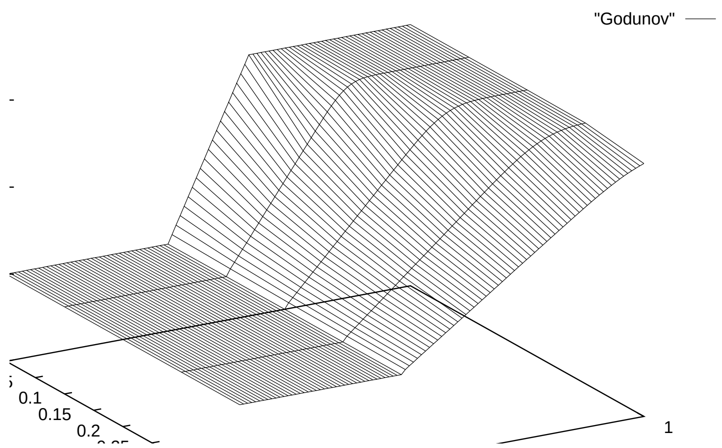

"Lax-Friedrichs"
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2

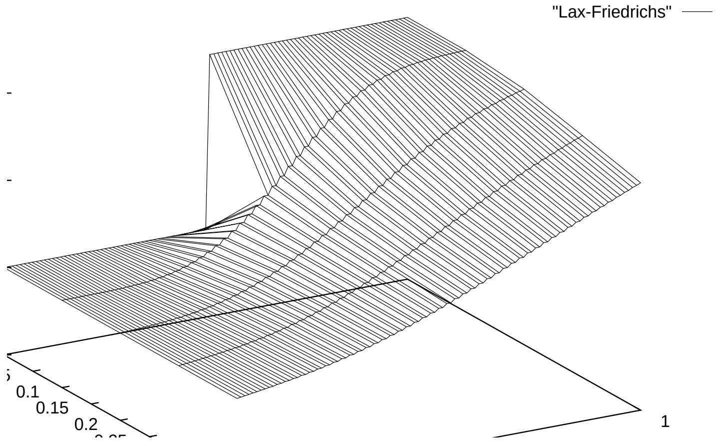

"UpWind"
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2

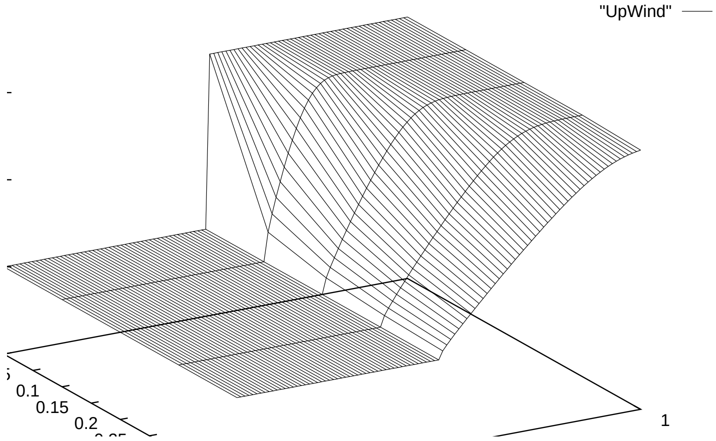

"Godunov"
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2

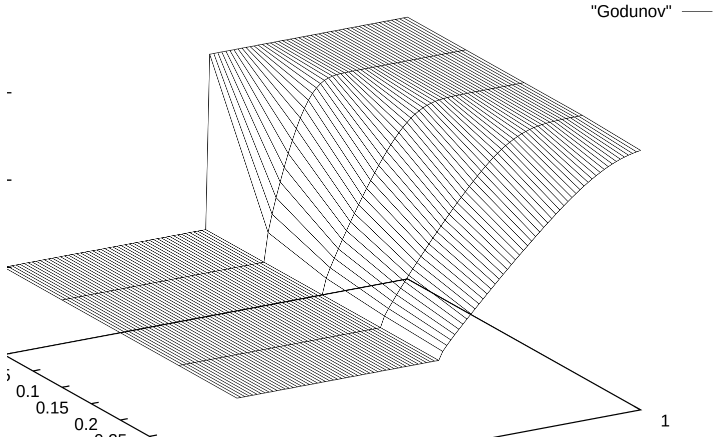

"Lax-Friedrichs"
0.1
0.15
0.2
1


"UpWind"
0.1
0.15
0.2
1


"Godunov"
0.1
0.15
0.2
1


"Lax-Friedrichs"
0.1
0.15
0.2
1


"UpWind"
0.1
0.15
0.2
1


"Godunov"
0.1
0.15
0.2
1

Program

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define KOMADA 4
#define Ah "Lax-Friedrichs"

double f(double x);
double fbl(double x);
double f00(double x);
double f01(double x);
double f10(double x);
double f11(double x);
double Flux(double x,double y,double (*F)(double));
void itrak(double *X,int n,double t,double (*F)(double),double *I);
void itrak1(double *X,int n,double t,double (*F)(double),double *I);
void godunov(double *X,int n,double t,double (*F)(double),double *I);
void pocet(double *X,int n,double (*F)(double));
void ispis(double *X,int n,int g);


main()
{
  int n=1000,m,i,j;
  double *X,*Y,*Z,x,t;
  double (*F0)(double);
  void (*ITER)(double *X,int n,double t,double(*F)(double),double *I);
  system(člear");
  printf("Kakove zelis pocetne uvjete:\n"
         "\t\t1)\tPadajucu neprekidnu\n"
         "\t\t2)\tPadajucu sa skokom\n"
         "\t\t3)\tRastucu neprekidnu\n"
         "\t\t4)\tRastucu sa skokom\t\t");
  scanf("%d",&m);
  switch(m){
  case 1: F0=f00;break;
  case 2: F0=f01;break;
  case 3: F0=f10;break;
  case 4: F0=f11;break;
  }
  printf("Kojom metodom zelis rjesavati problem:\n"
         "\t\t1)\tLax-Friedrichs -ovom\n"
         "\t\t2)\tUpwind\n"
         "\t\t3)\tGodunov -ljevom\t\t\t");
  scanf("%d",&m);
  switch(m){
  case 1: ITER=itrak;break;
  case 2: ITER=itrak1;break;
  case 3: ITER=godunov;break;
```

```
  }
  printf("\nUpisi broj koraka potrebnih za 0.1\t\tn=");
  scanf("%d",&m);
  t=.1/m;
  n=m/2;
  /*alokacija me-ram-a*/
  X=(double *)malloc((n+1)*sizeof(x));
  Y=(double *)malloc((n+1)*sizeof(x));
  /*unos pocetnih uvjeta*/
  pocet(X,n,F0);
  ispis(X,n,0);
  for(j=1;j<= KOMADA;j++){
    for(i=0;i<m;i++){
      (*ITER)(X,n,t,f,Y);
      Z=X;
      X=Y;
      Y=Z;
    }
    ispis(Y,n,j);
  }
}

/*razni fluksovi */
double f(double x)
{
  if (fabs(x)<0.000001) return (0);
  else
    return (x*x*.5);
}
double fbl(double x)
{
  return (x*x/(x*x-.5*(1-x)*(1-x)));
}

/*razni pocetni uvieti*/
double f00(double x)
{
  if (x<=.4) return (1);
  else if(x>=.6) return (0);
  else return (1.-5*(x-.4));
}
double f01(double x)
{
  if (x<=.5) return (1);
  else return (0);
}
double f10(double x)
{
  if (x<=.4) return (0);
```

```
    else if(x>=.6) return (1);
    else return (5*(x-.4));
  }
  double f11(double x)
  {
    if (x<=.5) return (0);
    else  return (1);
  }

  /*Lax-Friedricson metoda*/
  void itrak(double *X,int n,double t,double (*F)(double),double *I)
  {
    int j;
    double ih;
    ih=1./n;/* printf("%g\n",ih); */
    for(j=1;j<n;j++)
      I[j]=.5*(X[j-1]+X[j+1]-t*((*F)(X[j+1])-(*F)(X[j-1]))*n);
    I[0]=X[0]+t*((*F)(X[0])-(*F)(X[1]))*n;
    I[n]=X[n]+t*((*F)(X[n-1])-(*F)(X[n]))*n;
  }

  /*UpWind metoda*/
  void itrak1(double *X,int n,double t,double (*F)(double),double *I)
  {
    int j;
    double ih;
    ih=1./n;
    for(j=1;j<=n;j++)
      I[j]=X[j]-t*((*F)(X[j])-(*F)(X[j-1]))/ih;
    I[0]=X[0]+t*((*F)(X[0])-(*F)(X[1]))/ih;
  }
  /*flux za Godunova*/
  double Flux(double x,double y,double (*F)(double))
  {
    if (x<y)
      if ( (*F)(x) < (*F)(y) ) return ((*F)(x));
      else return ((*F)(y));
    else
      if ( (*F)(x) < (*F)(y) ) return ((*F)(y));
      else return ((*F)(x));
  }
  /*Godunovljeva metoda*/
  void godunov(double *X,int n,double t,double (*F)(double),double *I)
  {
    int j;
    double ih;
    ih=1./n;
    for(j=1;j<n;j++)
      I[j]=X[j]-t*(Flux(X[j],X[j+1],F)-Flux(X[j-1],X[j],F))/ih;
```

```
  I[0]=X[0]+t*((*F)(X[0])-(*F)(X[1]))/ih;
  I[n]=X[n]-t*((*F)(X[n])-(*F)(X[n-1]))/ih;
}

void pocet(double *X,int n,double (*F)(double))
{
  int i;
  double b;
  for(i=0;i<=n;i++){
    b=(double)i;
    b/=n;
    X[i]=(*F)(b);
  }

}

void ispis(double *X,int n,int g)
{
  int i;
  FILE *fajl;
  if (g==0)
    fajl=fopen(Ah,"w");
  else {
    fajl=fopen(Ah,"a");
    fprintf(fajl,"\n");
  }
  for(i=0;i<=n;i++)
    fprintf(fajl,"%lg %lf %lf\n",(float)i/n,0.1*g,X[i]);
  fclose(fajl);
  system("gnuplot skripta.05");
}
```

Literatura

[Ba] J. M. Ball: *A version of the fundamental theorem for Young measures*, u *PDEs and continuum models of phase transitions* , Rascle, Serre and Slemrod (ed.), LNP 344, Springer-Verlag, 1989, str. 207–215.

[Bn] N. Balenović:*Youngove mjere i primjene* (magistarski rad), u pripremi.

[Br] H. Brezis: *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[Ev1] L. C. Evans: *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, American Mathematical Society, 1990.

[Ev2] L. C. Evans: *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.

[EG] L. C. Evans, R. F. Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic partial diferential equations of second order*, Springer-Verlag, 1983.

[Hö1] L. Hörmander: *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, Springer-Verlag, 1997.

[Hö2] L. Hörmander: *Sur la fonction d'appui des ensambles convexes dans un espace localement convexe*, *Arkiv für Matematik* **3** (1955) 181–186

[Hö3] L. Hörmander: *Notions of convexity*, Birkhäuser, 1994.

[Ol] O. A. Oleinikova: *Construction of generalised solutions of the Cauchy problem*, American Mathematical Society Transl. ser. 2. **33**,(1964) 277–283

[PSV] L. C. Piccinini, G. Stampacchia, G. Vidossich: *Ordinary diferential equations in* $\mathbf{R}^n$, Springer-Verlag, 1984.

[RS] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics – I. Functional Analysis*, Academic Press, 1972

[St] D. W. Strook: *A concise introduction to the theory of integration*, Birkhäuser, 1994.

[Ta1] L. Tartar: *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, u *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV*, Pitman, 1979, pp. 136-212.

[Ta2] L. Tartar: *Homogenization, Compensated Compactness, and H-measures*, u pripremi.

[Ve] R. J. LeVeque : *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser, 1992.