Friedrichsovi operatori kao dualni parovi

Marko Erceg

PMF-MO, Zagreb

Znanstveni kolokvij
Zagreb, π. 2018.

Zajednički rad s N. Antonićem, K. Burazinom, I. Crnjac i A. Michelangelom

WeConMApp

Uvod

Na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ promatramo diferencijalni operator A i pripadnu diferencijalnu jednadžbu

$$Au = f\,. \qquad \text{(npr. } A = -\triangle\text{)}$$

Želimo odrediti prostore $Y(\Omega)$ i $X(\Omega)$, te prostor $Z(\partial\Omega)$ u kojem zadajemo rubne uvjete (zadajemo funkciju u i/ili njene derivacije na rubu $\partial\Omega$) tako da za svaki $f \in Y(\Omega)$ postoji jedinstveno rješenje $u \in X(\Omega)$ koje zadovoljava postavljene rubne uvjete, te da je preslikavanje

$$Y(\Omega) \times Z(\partial\Omega) \ni (f, \gamma(u)) \mapsto u \in X(\Omega)$$

neprekidno, gdje je $\gamma(u)$ izraz ovisan o funkciji u i (eventualno) nekim njenim derivacijama (npr. trag funkcije u na $\partial\Omega$: $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$).

Često u evolucijskim zadaćama (jednadžbama koje ovise o vremenu t) posebno tretiramo vremensku varijablu t pa se gornja jednadžba zapisuje u obliku

$$\partial_t u + Au = f\,,$$

gdje operator A nema derivacija po varijabli t, te često niti ne ovisi o t (koeficijenti diferencijalne jednadžbe uz prostorene derivacije ne ovise o t).

Mi ćemo promatrati samo jednadžbe gdje je A linearan operator (ali ne nužno omeđen), pa su gornje jednadžbe linearne ili eventualno polulinearne ako f ovisi o u.

1. Klasični Friedrichsovi operatori

2. Apstraktni Friedrichsovi operatori
   - Definicija
   - Rezultat dobre postavljenosti
   - Nestacionarna teorija Friedrichsovih operatora
   - Reformulacija rezultata dobre postavljenosti
   - Postojanje i kardinalost bijektivnih proširenja

3. Klasifikacija proširenja (realizacija) dualnih parova
   - Grubbina klasifikacija
   - Klasifikacija *pozitivnih* bijektivinih proširenja Friedrichsovih operatora
   - Primjer operatora s točkovnim međudjelovanjem

Klasični Friedrichsovi operatori

Pretpostavke:
$d, r \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i omeđen s Lipschitzovim rubom;
$\mathbf{A}_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)^{r\times r}$, $k \in \{1, \ldots, d\}$, i $\mathbf{C} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^{r\times r}$ zadovoljavaju (s.s. na Ω):

(F1) $$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^* \,;$$

(F2) $$(\exists\, \mu_0 > 0) \quad \mathbf{C} + \mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k \geqslant \mu_0 \mathbf{I} \,.$$

Definirajmo $\mathcal{L}, \widetilde{\mathcal{L}} : \mathrm{L}^2(\Omega)^r \to \mathcal{D}'(\Omega)^r$ s

$$\mathcal{L}\mathsf{u} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{u}) + \mathbf{C}\mathsf{u} \,, \qquad \widetilde{\mathcal{L}}\mathsf{u} := -\sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{u}) + \Big(\mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k\Big)\mathsf{u} \,.$$

Cilj: dodati rubne uvjete takve da za svaki $\mathsf{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^r$ postoji jedinstveno rješenje jednadžbe $\mathcal{L}\mathsf{u} = \mathsf{f}$ (uz dane rubne uvjete).
Dobit: većina (polu)linearnih jednadžbi matematičke fizike može se ekvivalentno zapisati koristeći klasične Friedrichsove operatore.

Ukratko o klasičnoj teoriji[1]

K. O. Friedrichs: *Symmetric positive linear differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. **11** (1958) 333–418.

- proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi mješovitog tipa poput Tricomijeve jednadžbe (korištena u proučavanju toka stlačivih fluida):

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

  koja je eliptička za $y > 0$, a hiperbolička za $y < 0$;
- dobiven okvir za proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi različitog tipa
- Doprinosi: C. Morawetz, P. Lax, L. Sarason, R. S. Phillips, J. Rauch, ...
- u novije vrijeme: *Friedrichsov zapis* jednadžbi pogodan za numeričku analizu

Nedostaci:

- nema zadovoljavajućeg rezultata dobre postavljenosti
- zadavanje rubnih uvjeta nije intrinzično (jednistveno određeno danim parametrima)

[1] M. Jensen: *Discontinuous Galerkin Methods for Friedrichs Systems with Irregular Solutions*, Ph.D. thesis, University of Oxford, 2004, http://sro.sussex.ac.uk/45497/1/thesisjensen.pdf

Ukratko o klasičnoj teoriji[1]

K. O. Friedrichs: *Symmetric positive linear differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. **11** (1958) 333–418.

- proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi mješovitog tipa poput Tricomijeve jednadžbe (korištena u proučavanju toka stlačivih fluida):

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

  koja je eliptička za $y > 0$, a hiperbolička za $y < 0$;
- dobiven okvir za proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi različitog tipa
- Doprinosi: C. Morawetz, P. Lax, L. Sarason, R. S. Phillips, J. Rauch, ...
- u novije vrijeme: *Friedrichsov zapis* jednadžbi pogodan za numeričku analizu

Nedostaci:

- nema zadovoljavajućeg rezultata dobre postavljenosti
- zadavanje rubnih uvjeta nije intrinzično (jednistveno određeno danim parametrima)

$\rightsquigarrow$ razvoj apstraktne teorije

[1] M. Jensen: *Discontinuous Galerkin Methods for Friedrichs Systems with Irregular Solutions*, Ph.D. thesis, University of Oxford, 2004, http://sro.sussex.ac.uk/45497/1/thesisjensen.pdf

Apstraktni Friedrichsovi operatori

$(L, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ kompleksan Hilbertov prostor ($L' \equiv L$), $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot \mid \cdot \rangle}$
$\mathcal{D} \subseteq L$ gust potprostor

Definicija

Par $(T, \widetilde{T})$, $T, \widetilde{T} : \mathcal{D} \to L$, *nazivamo* *parom apstraktnih Friedrichsovih operatora* *ako:*

(T1) $$(\forall\, \phi, \psi \in \mathcal{D}) \qquad \langle\, T\phi \mid \psi \,\rangle = \langle\, \phi \mid \widetilde{T}\psi \,\rangle\,;$$

(T2) $$(\exists\, c > 0)(\forall\, \phi \in \mathcal{D}) \qquad \|(T + \widetilde{T})\phi\| \leqslant c\|\phi\|\,;$$

(T3) $$(\exists\, \mu_0 > 0)(\forall\, \phi \in \mathcal{D}) \qquad \langle\, (T + \widetilde{T})\phi \mid \phi \,\rangle \geqslant \mu_0 \|\phi\|^2\,.$$

A. Ern, J.-L. Guermond, G. Caplain: *An intrinsic criterion for the bijectivity of Hilbert operators related to Friedrichs' systems*, Comm. Partial Diff. Eq. **32** (2007) 317–341.

N. Antonić, K. Burazin: *Intrinsic boundary conditions for Friedrichs systems*, Comm. Partial Diff. Eq. **35** (2010) 1690–1715.

N. Antonić, K. Burazin, I. Crnjac, M.E.: *Complex Friedrichs systems and applications*, Journal of Mathematical Physics **58** (2017) 101508, 22 pp.

Klasično je *apstraktno*

$\mathbf{A}_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)^{r\times r}$ i $\mathbf{C} \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega)^{r\times r}$ zadovoljavaju (F1)–(F2):

(F1) $$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^* \,;$$

(F2) $$(\exists\, \mu_0 > 0) \quad \mathbf{C} + \mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k \geqslant \mu_0 \mathbf{I}\,.$$

$\mathcal{D} := \mathrm{C}_c^{\infty}(\Omega)^r$, $L := \mathrm{L}^2(\Omega)^r$, te

$$T\mathsf{u} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{u}) + \mathbf{C}\mathsf{u}\ , \qquad \widetilde{T}\mathsf{u} := -\sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{u}) + \Big(\mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k\Big)\mathsf{u}\ .$$

(T1) $$\langle\, T\mathsf{u} \mid \mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2} = \Big\langle\, \mathsf{u} \,\Big|\, -\sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k^* \mathsf{v}) + \big(\mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k^*\big)\mathsf{v} \,\Big\rangle_{\mathrm{L}^2} \overset{(\mathrm{F1})}{=} \langle\, \mathsf{u} \mid \widetilde{T}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2}\ .$$

Iz $(T + \widetilde{T})\mathsf{u} = \Big(\mathbf{C} + \mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k\Big)\mathsf{u}$, dobivamo

(T2) $$\|(T + \widetilde{T})\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant \Big(2\|\mathbf{C}\|_{\mathrm{L}^\infty} + \sum_{k=1}^{d} \|\mathbf{A}_k\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}}\Big)\|\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2}\ ,$$

(T3) $$\langle\, (T + \widetilde{T})\mathsf{u} \mid \mathsf{u} \,\rangle_{\mathrm{L}^2} \overset{(\mathrm{F2})}{\geqslant} \mu_0 \|\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2}^2\ .$$

Uvod u dobru postavljenost

Cilj: Za par apstraktnih Friedrichovih operatora $(T, \widetilde{T})$ pronaći $V \supseteq \mathcal{D}$ $(\widetilde{V} \supseteq \mathcal{D})$ takav da T $(\widetilde{T})$ proširen na V $(\widetilde{V})$ je linearna bijekcija.

$\hookrightarrow$ time posebno dobivamo dobru postavljenost klasičnih Friedrichsovih sustava

Postupak: Najprije proširiti operatore T i $\widetilde{T}$ (*maksimalni operatori*), a potom restringirati ta proširenja do linearnih bijekcija.

Definicija $(A : \operatorname{dom} A \subseteq L \to L,\ B : \operatorname{dom} B \subseteq L \to L)$

$A \subseteq B$ *ako* $\operatorname{dom} A \subseteq \operatorname{dom} B$ *i za svaki* $u \in \operatorname{dom} A$ *imamo* $Bu = Au$.

Ern, Guermond, Caplain konstruiraju *maksimalne operatore* koristeći Banachove adjungirane operatore i dobivaju

$$\begin{aligned} T_1 &: \operatorname{dom} T_1 \subseteq L \to L\,, \quad T \subseteq T_1\,, \\ \widetilde{T}_1 &: \operatorname{dom} \widetilde{T}_1 \subseteq L \to L\,, \quad \widetilde{T} \subseteq \widetilde{T}_1\,, \end{aligned} \qquad \& \qquad \operatorname{dom} T_1 = \operatorname{dom} \widetilde{T}_1 =: W\,.$$

Izvodimo alternativnu konstrukciju koristeći (Hilbertove) adjungirane operatore. Vratimo se najprije na definiciju para apstraktnih Friedrichsovih operatora.

$$\text{(T1)} \qquad (\forall\, \phi, \psi \in \mathcal{D}) \qquad \langle\, T\phi \mid \psi \,\rangle \;=\; \langle\, \phi \mid \widetilde{T}\psi \,\rangle\,;$$

$$\text{(T2)} \qquad (\exists\, c > 0)(\forall\, \phi \in \mathcal{D}) \qquad \|(T + \widetilde{T})\phi\| \;\leqslant\; c\|\phi\|\,;$$

$$\text{(T3)} \qquad (\exists\, \mu_0 > 0)(\forall\, \phi \in \mathcal{D}) \qquad \langle\, (T + \widetilde{T})\phi \mid \phi \,\rangle \;\geqslant\; \mu_0 \|\phi\|^2\,.$$

Definicija ($A : \operatorname{dom} A \subseteq L \to L$ gusto definiran)

a) *Postoji gusto definiran linearan operator* $A^* : \operatorname{dom} A \subseteq L \to L$ *(adjungiran operator operatora* A*) pri čemu*

$$\operatorname{dom} A^* := \Big\{ v \in L : (\exists\, z \in L)(\forall\, u \in \operatorname{dom} A)\ \langle\, Au \mid v \,\rangle = \langle\, u \mid z \,\rangle \Big\}\,, \quad A^* v := z\,.$$

b) A *je zatvoren ako* $\operatorname{dom} A \ni u_n \xrightarrow{L} u$ *i* $Au_n \to v$ *povlači* $u \in \operatorname{dom} A$ *i* $Au = v$.

c) A *je zatvoriv ako* $\operatorname{dom} A \ni u_n \xrightarrow{L} 0$ *i* $Au_n \xrightarrow{L} v$ *povlači* $v = 0$. *Tada definiramo*

$$\operatorname{dom} \overline{A} := \Big\{ u \in L : (\exists\, (u_n)\ \textit{u}\ \operatorname{dom} A)\ u_n \xrightarrow{L} u\,,\ (Au_n)\ \textit{konv. u}\ L \Big\}\,,$$

$$\overline{A}u := \lim_n Au_n\,.$$

$$\text{(T1)} \quad \Longleftrightarrow \quad T \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \widetilde{T} \subseteq T^*$$

$$\Longrightarrow \quad T, \widetilde{T} \text{ zatvorivi}$$

(T1) $$(\forall\, \phi, \psi \in \mathcal{D}) \qquad \langle\, T\phi \mid \psi \,\rangle \;=\; \langle\, \phi \mid \widetilde{T}\psi \,\rangle\,;$$

(T2) $$(\exists\, c > 0)(\forall\, \phi \in \mathcal{D}) \qquad \|(T + \widetilde{T})\phi\| \;\leqslant\; c\|\phi\|\,;$$

(T3) $$(\exists\, \mu_0 > 0)(\forall\, \phi \in \mathcal{D}) \qquad \langle\, (T + \widetilde{T})\phi \mid \phi \,\rangle \;\geqslant\; \mu_0\|\phi\|^2\,.$$

Teorem

a)

$$(T1) - (T3) \iff \begin{cases} T \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \widetilde{T} \subseteq T^*; \\ \overline{T + \widetilde{T}} \text{ \textit{omeđen, hermitski i strogo pozitivan na} } L; \\ \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}} =: W_0 \quad \& \quad \operatorname{dom} T^* = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* =: W\,. \end{cases}$$

b) $T_1 = \widetilde{T}^*$ *i* $\widetilde{T}_1 = T^*$.

(T1) $$(\forall\, \phi, \psi \in \mathcal{D}) \qquad \langle\, T\phi \mid \psi \,\rangle \;=\; \langle\, \phi \mid \widetilde{T}\psi \,\rangle\,;$$

(T2) $$(\exists\, c > 0)(\forall\, \phi \in \mathcal{D}) \qquad \|(T + \widetilde{T})\phi\| \;\leqslant\; c\|\phi\|\,;$$

(T3) $$(\exists\, \mu_0 > 0)(\forall\, \phi \in \mathcal{D}) \qquad \langle\, (T + \widetilde{T})\phi \mid \phi \,\rangle \;\geqslant\; \mu_0\|\phi\|^2\,.$$

Teorem

a)

$$(T1) - (T3) \iff \begin{cases} T \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \widetilde{T} \subseteq T^*; \\ \overline{T + \widetilde{T}} \text{ \textit{omeđen, hermitski i strogo pozitivan na} } L; \\ \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}} =: W_0 \quad \& \quad \operatorname{dom} T^* = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* =: W\,. \end{cases}$$

b) $T_1 = \widetilde{T}^*$ *i* $\widetilde{T}_1 = T^*$.

Napomena

a) $T \subseteq \overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \widetilde{T} \subseteq \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$

b) $\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \implies (\widetilde{T}^*)^* \subseteq (\overline{T})^* \implies \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$

$\overline{T}, \overline{\widetilde{T}}$ minimalni operatori, $\widetilde{T}^*, T^*$ maksimalni operatori početnih operatora $T, \widetilde{T}$.

Dobra postavljenost

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$
$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$
$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V, \widetilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\widetilde{T}^*|_V : V \to L$, $T^*|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

1) Dovoljni uvjeti na V
2) Postojanje takvog V
3) Broj takvih V
4) Klasifikacija takvih V

Dobra postavljenost

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$
$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$
$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V, \widetilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\widetilde{T}^*|_V : V \to L$, $T^*|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

1) Dovoljni uvjeti na V
   - dovoljni uvjeti na rubne uvjete uz koje imamo dobru postavljenost pripadne zadaće
2) Postojanje takvog V
3) Broj takvih V
4) Klasifikacija takvih V

Dobra postavljenost

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$

$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V, \widetilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\widetilde{T}^*|_V : V \to L$, $T^*|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

1) Dovoljni uvjeti na V
   - dovoljni uvjeti na rubne uvjete uz koje imamo dobru postavljenost pripadne zadaće
2) Postojanje takvog V
   - za pripadnu zadaću određujemo postoje li uopće neki rubni uvjeti tako da ona bude dobro postavljena
3) Broj takvih V
4) Klasifikacija takvih V

Dobra postavljenost

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$

$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V, \widetilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\widetilde{T}^*|_V : V \to L$, $T^*|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

1) Dovoljni uvjeti na V
   - dovoljni uvjeti na rubne uvjete uz koje imamo dobru postavljenost pripadne zadaće
2) Postojanje takvog V
   - za pripadnu zadaću određujemo postoje li uopće neki rubni uvjeti tako da ona bude dobro postavljena
3) Broj takvih V
   - ima li konačno ili beskonačno rubnih uvjeta uz koje je rubna zadaća dobro postavljena
4) Klasifikacija takvih V

Dobra postavljenost

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$

$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

Novi Cilj: Pronaći $W_0 \subseteq V, \widetilde{V} \subseteq W$ takve da su restrikcije $\widetilde{T}^*|_V : V \to L$, $T^*|_{\widetilde{V}} : \widetilde{V} \to L$ linearne bijekcije.

Pitanja:

1) Dovoljni uvjeti na V
   - dovoljni uvjeti na rubne uvjete uz koje imamo dobru postavljenost pripadne zadaće
2) Postojanje takvog V
   - za pripadnu zadaću određujemo postoje li uopće neki rubni uvjeti tako da ona bude dobro postavljena
3) Broj takvih V
   - ima li konačno ili beskonačno rubnih uvjeta uz koje je rubna zadaća dobro postavljena
4) Klasifikacija takvih V
   - analiza svih *dobrih* rubnih uvjeta

Dobra postavljenost (dovoljni uvjeti na V)

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$

$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

Rubno preslikavanje (forma): $D : W \times W \to \mathbb{C}\,,$

$$D[u,v] := \langle\, \widetilde{T}^* u \mid v \,\rangle - \langle\, u \mid T^* v \,\rangle\,. \qquad (D[u,v] = \overline{D[v,u]})$$

Za $V, \widetilde{V} \subseteq W$ uvodimo dva uvjeta:

(V1)
$$(\forall\, u \in V) \qquad D[u,u] \geqslant 0$$
$$(\forall\, v \in \widetilde{V}) \qquad D[v,v] \leqslant 0$$

(V2)
$$V = \{u \in W : (\forall\, v \in \widetilde{V}) \quad D[v,u] = 0\}$$
$$\widetilde{V} = \{v \in W : (\forall\, u \in V) \quad D[u,v] = 0\} \qquad (\implies W_0 \subseteq V \cap \widetilde{V})$$

Teorem (Ern, Guermond, Caplain, 2007)

(T1)–(T3) + (V1)–(V2) $\implies \widetilde{T}^*|_V, T^*|_{\widetilde{V}}$ *linearne bijekcije*

Primjer (skalarna eliptička jednadžba)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ zadani.

$$-\triangle u + \mu u = f$$

Primjer (skalarna eliptička jednadžba)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ zadani.

$$-\triangle u + \mu u = f \iff -\operatorname{div} \nabla u + \mu u = f$$

Primjer (skalarna eliptička jednadžba)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ zadani.

$$-\triangle u + \mu u = f \iff -\operatorname{div} \nabla u + \mu u = f \iff \begin{cases} \nabla u + \mathsf{p} = 0 \\ \operatorname{div} \mathsf{p} + \mu u = f \end{cases}$$

Primjer (skalarna eliptička jednadžba)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ zadani.

$$-\triangle u + \mu u = f \iff -\operatorname{div} \nabla u + \mu u = f \iff \begin{cases} \nabla u + \mathsf{p} = 0 \\ \operatorname{div} \mathsf{p} + \mu u = f \end{cases}$$

$$\iff T\mathsf{v} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{v}) + \mathbf{C}\mathsf{v} = \mathsf{g}\,,$$

pri čemu $\mathsf{v} := [\mathsf{p}\ u]^\top$, $\mathsf{g} := [0\ f]^\top$, $(\mathbf{A}_k)_{ij} := \delta_{i,k}\delta_{j,d+1} + \delta_{i,d+1}\delta_{j,k}$,
$\mathbf{C} := \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1, \mu\}$.
Pretpostavke (F1) i (F2) su zadovoljene.

Primjer (skalarna eliptička jednadžba)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu > 0$ i $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ zadani.

$$-\triangle u + \mu u = f \iff -\operatorname{div} \nabla u + \mu u = f \iff \begin{cases} \nabla u + \mathsf{p} = 0 \\ \operatorname{div} \mathsf{p} + \mu u = f \end{cases}$$

$$\iff T\mathsf{v} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{v}) + \mathbf{C}\mathsf{v} = \mathsf{g}\,,$$

pri čemu $\mathsf{v} := [\mathsf{p}\ u]^\top$, $\mathsf{g} := [0\ f]^\top$, $(\mathbf{A}_k)_{ij} := \delta_{i,k}\delta_{j,d+1} + \delta_{i,d+1}\delta_{j,k}$,
$\mathbf{C} := \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1, \mu\}$.
Pretpostavke (F1) i (F2) su zadovoljene.

$L = \mathrm{L}^2(\Omega)^{d+1}$, $W = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ $\quad (\mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) := \{\mathsf{p} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^d) : \operatorname{div} \mathsf{p} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\})$

- $V = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ ... Diricheltov rubni uvjet ($u = 0$ on Γ)
- $V = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div},0}(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ ... Neumannov rubni uvjet ($\mathsf{p} \cdot \nu = \nabla u \cdot \nu = 0$ on Γ)

Nestacionarni Freidrichsovi sustavi

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$

$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

(P)
$$\begin{cases} \mathsf{u}'(t) + \widetilde{T}^* \mathsf{u}(t) = \mathsf{f} \\ \mathsf{u}(0) = \mathsf{u}_0 \end{cases},$$

gdje je $\mathsf{u} : [0, \tau] \to L$, za $\tau > 0$, nepoznata funkcija, dok su desna strana $\mathsf{f} : \langle 0, \tau \rangle \to L$ (ili $\mathsf{f} : \langle 0, \tau \rangle \times L \to L$ u polulinearnom slučaju), početni uvjet $\mathsf{u}_0 \in L$ i (proširen) Friedrichsov operator $\widetilde{T}^*$ dani.

Theorem

Neka zatvoreni operator S, $\overline{T} \subseteq S \subseteq \widetilde{T}^*$, zadovoljava (V1). Tada je $-S$ infinitezimalni generator kontrakcijske C_0-polugrupe na L.

Nestacionarni Freidrichsovi sustavi

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$

$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

(P)
$$\begin{cases} \mathsf{u}'(t) + S\mathsf{u}(t) = \mathsf{f} \\ \mathsf{u}(0) = \mathsf{u}_0 \end{cases},$$

gdje je $\mathsf{u} : [0, \tau] \to L$, za $\tau > 0$, nepoznata funkcija, dok su desna strana $\mathsf{f} : \langle 0, \tau \rangle \to L$ (ili $\mathsf{f} : \langle 0, \tau \rangle \times L \to L$ u polulinearnom slučaju), početni uvjet $\mathsf{u}_0 \in L$ i (proširen) Friedrichsov operator $\widetilde{T}^*$ dani.

Theorem

Neka zatvoreni operator S, $\overline{T} \subseteq S \subseteq \widetilde{T}^*$, zadovoljava (V1). Tada je $-S$ infinitezimalni generator kontrakcijske C_0-polugrupe na L.

Nestacionarna teorija Friedrichsovih operatora - rezultat postojanja rješenja

Neka je S kao u prethodnom teoremu. Označimo $V := \operatorname{dom} S$.

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \mathsf{u}'(t) + S\mathsf{u}(t) = \mathsf{f} \\ \mathsf{u}(0) = \mathsf{u}_0 \end{cases} .$$

Theorem

a) *Ako* $\mathsf{f} \in \mathrm{L}^1(\langle 0, \tau\rangle; L)$, *tada za svaki* $\mathsf{u}_0 \in L$ *zadaća (P) ima jedinstveno blago (slabo) rješenje* $\mathsf{u} \in \mathrm{C}([0,\tau]; L)$ *dano s*

$$\mathsf{u}(t) = \mathcal{Z}(t)\mathsf{u}_0 + \int_0^t \mathcal{Z}(t-s)\mathsf{f}(s)ds\,, \qquad t \in [0,\tau]\,,$$

gdje je $(\mathcal{Z}(t))_{t\geqslant 0}$ *kontrakcijska* C_0*-polugrupa generirana s* $-S$.

b) *Ako je dodatno* $\mathsf{u}_0 \in V$ *i* $\mathsf{f} \in \mathrm{W}^{1,1}(\langle 0,\tau\rangle; L) \cup \Big(\mathrm{C}([0,\tau]; L) \cap \mathrm{L}(\langle 0,\tau\rangle; V)\Big)$, *pri čemu je* V *opskrbljen s graf normom* $\|\cdot\|_S := \|\cdot\| + \|S\cdot\|$, *tada je gornje slabo rješenje klasično na* $[0,\tau]$.

c) *Ako je* $\mathsf{f} : [0,\tau] \times L \to L$ *neprekinuta i lokalno Lipschitzova po zadnjoj varijabli (jednoliko po* t*), tada za svaki* $\mathsf{u}_0 \in L$ *postoji* τ_{max}, *takav da polulinerna zadaća (P) ima jedinstveno slabo rješenje* $\mathsf{u} \in \mathrm{C}([0,\tau_{max}]; L)$.

Reformulacija uvjeta (V2)

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$

$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$

$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

(V2)
$$V = \{u \in W : (\forall\, v \in \widetilde{V}) \quad D[v,u] = 0\}$$
$$\widetilde{V} = \{v \in W : (\forall\, u \in V) \quad D[u,v] = 0\}$$

Teorem

$$\textit{(V2)} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} W_0 \subseteq V, \widetilde{V} \subseteq W \\ (\widetilde{T}^*|_V)^* \;=\; T^*|_{\widetilde{V}} \\ (T^*|_{\widetilde{V}})^* \;=\; \widetilde{T}^*|_V\,. \end{cases}$$

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^*|_V \subseteq \widetilde{T}^* \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{\widetilde{T}} \subseteq (\widetilde{T}^*|_V)^* \subseteq T^*$$

$$\overset{\text{(V2)}}{\Longrightarrow} \qquad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*|_{\widetilde{V}} \subseteq T^*$$

Reformulacija rezultata dobre postavljenosti

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \quad \& \quad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^*$$
$$W_0 = \operatorname{dom} \overline{T} = \operatorname{dom} \overline{\widetilde{T}}$$
$$W = \operatorname{dom} \widetilde{T}^* = T^*$$

Neka je S zatvoren operator takav da

$$\overline{T} \subseteq S \subseteq \widetilde{T}^* .$$

Razrađena pitanja:

1) Dovoljni uvjeti na S da bude linearna bijekcija
   - Odgovor: Ako $(\operatorname{dom} S, \operatorname{dom} S^*)$ zadovoljava (V1) tada su S i S^* linearne bijekcije.
2) Postojanje S iz (1)
3) Beskonačnost ili konačnost S iz (1)
4) Klasifikacija svih S koji su linearne bijekcije (posebno onih koji zadovoljavaju (V1))

Postojanje i kardinalost bijektivnih proširenja

Teorem

Neka $(T, \widetilde{T})$ *zadovoljavaju (T1)–(T3).*

(i) *Postoji zatovreni* S, $\overline{T} \subseteq S \subseteq \widetilde{T}^*$, *takav da* $(\operatorname{dom} S, \operatorname{dom} S^*)$ *zadovoljava (V1). Posebno,* S *i* S^* *su linearne bijekcije.*

(ii)

$$\ker \widetilde{T}^* \neq \{0\} \text{ i } \ker T^* \neq \{0\} \implies \text{neprebrojivo mnogo operatora } S \text{ iz (i)}$$

$$\ker \widetilde{T}^* = \{0\} \text{ ili } \ker T^* = \{0\} \implies \begin{array}{l} \text{samo jedan operator } S \text{ iz (i)} \\ (S = \widetilde{T}^* \text{ ili } S = T^*, \text{ redom}) \end{array}$$

Postojanje i kardinalost bijektivnih proširenja

Teorem

Neka $(T, \widetilde{T})$ *zadovoljavaju (T1)–(T3).*

(i) *Postoji zatovreni* S, $\overline{T} \subseteq S \subseteq \widetilde{T}^*$, *takav da* $(\operatorname{dom} S, \operatorname{dom} S^*)$ *zadovoljava (V1). Posebno,* S *i* S^* *su linearne bijekcije.*

(ii)

$$\ker \widetilde{T}^* \neq \{0\} \text{ i } \ker T^* \neq \{0\} \implies \text{neprebrojivo mnogo operatora } S \text{ iz (i)}$$

$$\ker \widetilde{T}^* = \{0\} \text{ ili } \ker T^* = \{0\} \implies \begin{array}{l} \text{samo jedan operator } S \text{ iz (i)} \\ (S = \widetilde{T}^* \text{ ili } S = T^*, \text{ redom}) \end{array}$$

<u>Ideja dokaza:</u> $(\widehat{W}, [\cdot \mid \cdot])$ je Kreĭnov prostor, gdje $\widehat{W} := W/W_0$, te za $u, v \in W$

$$[\, u + W_0 \mid v + W_0 \,] := D[u, v] = \langle \widetilde{T}^* u \mid v \rangle - \langle u \mid T^* v \rangle \,.$$

Dakle, postoje $X_+, X_- \subseteq \widetilde{W}$ takvi da $\widetilde{W} = X_+[+]X_-$, te su $(X_+, [\cdot \mid \cdot])$ i $(X_-, -[\cdot \mid \cdot])$ Hilbertovi prostori (kanonska ili fundamentalna dekompozicija Kreĭnovih prostora).
Svaki odabir X_+, X_- određuje $V, \widetilde{V}$ koji zadovoljavaju (V1)–(V2), pa definiramo $S := \widetilde{T}^*|_V$.

Klasifikacija

Za $(T, \widetilde{T})$ koji zadovoljavaju (T1)–(T3) imamo

$$\overline{T} \subseteq \widetilde{T}^* \qquad \text{and} \qquad \overline{\widetilde{T}} \subseteq T^* \,,$$

dok po prethodnom teoremu postoji zatvoreni operator T_{r} takav da

- $\overline{T} \subseteq T_{\mathrm{r}} \subseteq \widetilde{T}^*$ ($\Longleftrightarrow$ $\overline{\widetilde{T}} \subseteq T_{\mathrm{r}}^* \subseteq T^*$),
- $T_{\mathrm{r}} : \operatorname{dom} T_{\mathrm{r}} \to L$ linearna bijekcija,
- $(T_{\mathrm{r}})^{-1} : L \to \operatorname{dom} T_{\mathrm{r}}$ omeđen.

Dakle, možemo primijeniti univerzalnu klasifikaciju (klasifikacija dualnih parova).

Koristili smo Grubbinu teoriju univerzalne klasifikacije

G. Grubb: *A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968) 425–513.

Rezultat: potpuna klasifikacija svih zatvorenih operatora S, $\overline{T} \subseteq S \subseteq \widetilde{T}^*$, takavih da $(\operatorname{dom} S, \operatorname{dom} S^*)$ zadovoljava (V1).
Još za napraviti: primijeniti ovaj rezultat na općenite klasične Friedrichsove operatore

Grubbina teorija univerzalne klasifikacije 1/2

$$T \subseteq \widetilde{T}^* =: T_1 \qquad \text{i} \qquad \widetilde{T} \subseteq T^* =: \widetilde{T}_1 \,.$$

$T_{\mathrm{r}}, T_{\mathrm{r}}^*$ zatvoreni, zadovoljavaju $T \subseteq T_{\mathrm{r}} \subseteq T_1$, ekvivalentno $\widetilde{T} \subseteq T_{\mathrm{r}}^* \subseteq \widetilde{T}_1$, te su invertibilni s omeđenim inverzima T_{r}^{-1} i $(T_{\mathrm{r}}^*)^{-1}$.

$$\operatorname{dom} T_1 = \operatorname{dom} T_{\mathrm{r}} \dotplus \ker T_1 \qquad \text{i} \qquad \operatorname{dom} \widetilde{T}_1 = \operatorname{dom} T_{\mathrm{r}}^* \dotplus \ker \widetilde{T}_1$$

$$p_{\mathrm{r}} = T_{\mathrm{r}}^{-1} T_1 \,, \qquad p_{\tilde{\mathrm{r}}} = (T_{\mathrm{r}}^*)^{-1} \widetilde{T}_1 \,,$$

$$p_{\mathrm{k}} = \mathbb{1} - p_{\mathrm{r}} \,, \qquad p_{\tilde{\mathrm{k}}} = \mathbb{1} - p_{\tilde{\mathrm{r}}} \,,$$

$$\left.\begin{array}{r} (S, S^*) \\ T \subseteq S \subseteq T_1 \\ \widetilde{T} \subseteq S^* \subseteq \widetilde{T}_1 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (B, B^*) \\ \mathcal{V} \subseteq \ker T_1 \text{ zatvoren} \\ \mathcal{W} \subseteq \ker \widetilde{T}_1 \text{ zatvoren} \\ B : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \text{ gusto definiran} \end{array}\right.$$

$$B \mapsto S_B : \quad \operatorname{dom} S_B = \Big\{ u \in \operatorname{dom} T_1 \,:\, p_{\mathrm{k}} u \in \operatorname{dom} B \,,\; P_{\mathcal{W}}(T_1 u) = B(p_{\mathrm{k}} u) \Big\} \,,$$

$$S \mapsto B_S : \quad \operatorname{dom} B_S = p_{\mathrm{k}} \operatorname{dom} S \,, \quad \mathcal{V} = \overline{\operatorname{dom} B_S} \,, \quad B_S(p_{\mathrm{k}} u) = P_{\mathcal{W}}(T_1 u) \,,$$

gdje je $P_{\mathcal{W}}$ *ortogonalna* projekcija s L na $\mathcal{W}$.

Važno: S je injekcija/surjekcija/bijekcija ako i samo ako je B injek./surj./bije.

Grubbina teorija univerzalne klasifikacije 2/2

Za dani B neka je S_B kao gore. Tada

$$\operatorname{dom} S_B \;=\; \left\{ w_0 + (A_{\mathrm{r}})^{-1}(B\nu + \tilde{\nu}) + \nu \;\middle|\; \begin{array}{c} w_0 \in \operatorname{dom} A_0 \\ \nu \in \operatorname{dom} B \\ \tilde{\nu} \in \ker \widetilde{T}_1 \ominus \mathcal{W} \end{array} \right\},$$

$$S_B(w_0 + (A_{\mathrm{r}})^{-1}(B\nu + \tilde{\nu}) + \nu) \;=\; A_0 w_0 + B\nu + \tilde{\nu}$$

G. Grubb: *A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **22** (1968) 425–513.

Ovaj rezultat primjenjujemo u slučaju kad je $(T, \widetilde{T})$ par apstraktnih Friedrichsovih operatora.

Klasifikacija bijektivnih proširenja koja zadovoljavaju (V1)

(1) $$\langle \nu \mid \widetilde{T}_1 \nu \rangle - 2\,\mathfrak{Re}\langle p_{\tilde{\mathrm{k}}} \nu \mid B\nu \rangle \leqslant 0 \,, \qquad \nu \in \operatorname{dom} B \,, \quad p_{\tilde{\mathrm{k}}}(\operatorname{dom} B) \subseteq \mathcal{W} \,.$$

(2) $$\langle T_1 \tilde{\mu} \mid \tilde{\mu} \rangle - 2\,\mathfrak{Re}\langle B^* \tilde{\mu} \mid p_{\mathrm{k}} \tilde{\mu} \rangle \leqslant 0 \,, \qquad \tilde{\mu} \in \operatorname{dom} B^* \,, \quad p_{\mathrm{k}}(\operatorname{dom} B^*) \subseteq \mathcal{V} \,.$$

Theorem

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \&\ (2) \\ \quad \textit{ili} \\ (1)\ \&\ B : \operatorname{dom} B \to \mathcal{W} \ \textit{bijekcija} \\ \quad \textit{ili} \\ (2)\ \&\ B^* : \operatorname{dom} B^* \to \mathcal{V} \ \textit{bijekcija} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} S_B \ \textit{linearna bijekcija i} \\ (\operatorname{dom} S, \operatorname{dom} S^*) \ \textit{zadovoljava (V1)} \end{array}$$

Ako je dodatno $\operatorname{dom} T_{\mathrm{r}} = \operatorname{dom} T_{\mathrm{r}}^*$, *tada u gornjoj tvrdnji vrijedi i obrat.*

Točkovno međudjelovanje (δ-proširenja) 1/4

Na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ promatramo

$$\mathring{H} := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,, \qquad \operatorname{dom}\mathring{H} := \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})\,.$$

$\mathring{H}$ simetričan, ali nije omeđen, pa ne može zadovoljavati (T2).

Točkovno međudjelovanje (δ-proširenja) 1/4

Na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ promatramo

$$\mathring{H} \;:=\; -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,, \qquad \operatorname{dom}\mathring{H} \;:=\; \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})\,.$$

$\mathring{H}$ simetričan, ali nije omeđen, pa ne može zadovoljavati (T2).

<u>Snižavanje reda</u>

$$f = \mathring{H}u \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ f \end{pmatrix} \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} -\dot{u} \\ u \end{pmatrix}$$

$(S, -S)$ zadovoljava (T1) i (T2), ali ne i uvjet koercitivnosti (T3), pa konačno na $L \;:=\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definiramo

$$\begin{aligned} T \;&:=\; S + \mathbb{1} \\ \widetilde{T} \;&:=\; -S + \mathbb{1} \end{aligned}\,, \qquad \operatorname{dom} T \;:=\; \operatorname{dom}\widetilde{T} \;:=\; \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \oplus \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})\,.$$

Točkovno međudjelovanje (δ-proširenja) 1/4

Na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ promatramo

$$\mathring{H} \;:=\; -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,, \qquad \operatorname{dom}\mathring{H} \;:=\; \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})\,.$$

$\mathring{H}$ simetričan, ali nije omeđen, pa ne može zadovoljavati (T2).

<u>Snižavanje reda</u>

$$f = \mathring{H}u \iff \begin{pmatrix} \dot{u} \\ f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} -\dot{u} \\ u \end{pmatrix}$$

$(S, -S)$ zadovoljava (T1) i (T2), ali ne i uvjet koercitivnosti (T3), pa konačno na $L \;:=\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definiramo

$$\begin{aligned} T \;&:=\; S + \mathbb{1} \\ \widetilde{T} \;&:=\; -S + \mathbb{1} \end{aligned}\,, \qquad \operatorname{dom} T \;:=\; \operatorname{dom}\widetilde{T} \;:=\; \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \oplus \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})\,.$$

Kako se vratimo na operator drugog reda?

Točkovno međudjelovanje (δ-proširenja) 2/4

Definicija

$$\begin{aligned}
\Phi \;&:\; \mathfrak{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{L}^2(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}))\,,\\
\operatorname{dom}\Phi(A) \;&:=\; \left\{ u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) : (\exists\,!\, v_u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}))\;\; \begin{pmatrix} v_u \\ u \end{pmatrix} \in \operatorname{dom} A \cap \ker P_1 A \right\},\\
\Phi(A)\, u \;&:=\; P_2 A \begin{pmatrix} v_u \\ u \end{pmatrix}\,,
\end{aligned}$$

pri čemu je $\mathfrak{L}(X)$ prostor linearnih (ne nužno omeđenih) preslikavanja na vektorskom prostoru X, dok su $P_j : L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $j \in \{1,2\}$, ortogonalne projekcije na j-tu komponentu L.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \in \ker P_1 T \iff u' + v = 0 \iff -u' = v =: v_u\\
&\quad \implies \Phi(T)u = v_u' + u = -u'' + u
\end{aligned}$$

Lema

(i) $(T, \widetilde{T})$ *zadovoljava (T1)–(T3)*

(ii) $\operatorname{dom}\Phi(T) = \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ *i* $\Phi(T_\lambda) \;=\; \mathring{H} + \mathbb{1}$.

Točkovno međudjelovanje (δ-proširenja) 3/4

$$\begin{aligned} T^* &:= -S + \mathbb{1} \\ \widetilde{T}^* &:= S + \mathbb{1} \end{aligned}, \qquad \operatorname{dom} T^* := \operatorname{dom} \widetilde{T}^* := \mathrm{H}^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \oplus \mathrm{H}^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}).$$

$\dim T^* = \dim \widetilde{T}^* = 2 \implies$ četveroparametarska familija proširenja
Promatramo u daljnjem samo posebnu jednoparametarsku podfamiliju proširenja ($z \in \mathbb{C}$):

$T_z := \widetilde{T}^*|_{\operatorname{dom} T_z}$, gdje

$$\operatorname{dom} T_z = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R}) \,:\, u_1(0^+) - u_1(0^-) = \frac{2}{z+1} u_2(0) \right\}.$$

$T_z^* = T^*|_{\operatorname{dom} T_z^*}$, gdje

$$\operatorname{dom} T_z^* = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R}) \,:\, u_1(0^+) - u_1(0^-) = \frac{-2}{\overline{z}+1} u_2(0) \right\}.$$

Točkovno međudjelovanje (δ-proširenja) 4/4

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom} T_z &= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R}) \,:\, u_1(0^+) - u_1(0^-) = \frac{2}{z+1} u_2(0) \right\} \\
\operatorname{dom} T_z^* &= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \oplus H^1(\mathbb{R}) \,:\, u_1(0^+) - u_1(0^-) = \frac{-2}{\overline{z}+1} u_2(0) \right\}
\end{aligned}$$

Djelovanjem s Φ dobivamo ($u_2 \to u$, $u_1 \to -u'$)

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom} \Phi(T_z) &= \left\{ u \in H^2(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \cap H^1(\mathbb{R}) : u'(0^+) - u'(0^-) = \frac{-2}{z+1} u(0) \right\} \\
\Phi(T_z)\, u &= -u'' + u\,,
\end{aligned}$$

te analogno za T_z^* ($u_2 \to u$, $u_1 \to u'$)

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom} \Phi(T_z^*) &= \left\{ u \in H^2(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \cap H^1(\mathbb{R}) : u'(0^+) - u'(0^-) = \frac{-2}{\overline{z}+1} u(0) \right\} \\
\Phi(T_z^*)\, u &= -u'' + u\,;
\end{aligned}$$

U našem slučaju se može pokazati da Φ čuva hermitičnost (samoadjungiranost), i.e.

$$\Phi(T_z)^* = \Phi(T_z^*) \implies \Big(\Phi(T_z) = \Phi(T_z)^* \iff z \in \mathbb{R} \Big)$$

...hvala puno na pažnji :)

- N. Antonić, M.E., A. Michelangeli: *Friedrichs systems in a Hilbert space framework: solvability and multiplicity*, J. Differential Equations 263 (2017) 8264-8294.
- N. Antonić, K. Burazin, I. Crnjac, M.E.: *Complex Friedrichs systems and applications*, Journal of Mathematical Physics **58** (2017) 101508, 22 pp.
- M.E., A. Michelangeli: *On contact interactions realised as Friedrichs systems*, SISSA;48/2017/MATE
- K. Burazin, M.E.: *Non-stationary abstract Friedrichs systems*, Mediterranean Journal of Mathematics **13** (2016) 3777-3796.