Metode slabih konvergencija i primjene

WeConMApp

Nenad Antonić
Marko Vrdoljak, Martin Lazar, Krešimir Burazin, Darko Mitrović

Predstavljanje istraživačkog projekta HRZZ i PMFa

Zagreb, 17. prosinca 2014.

Članovi tima

dr. sc. Marko Vrdoljak, izvanredni profesor
Matematički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu

dr. sc. Martin Lazar, izvanredni profesor
Odjel za elektrotehniku, Sveučilište u Dubrovniku

dr. sc. Krešimir Burazin, izvanredni profesor
Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

dr. sc. Ivan Ivec, gimnazijski profesor
Gimnazija Samobor

Članovi tima (nast.)

dr. sc. Nedžad Limić, redoviti profesor (u mirovini)
Matematički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu

dr. sc. Darko Mitrović, gostujući izvanredni profesor
Matematički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu

mag. math. Marko Erceg, znanstveni novak
Matematički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu

mag. math. Marin Mišur, doktorand (stipendist HRZZ)
Matematički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu

Neformalni članovi tima

dr. sc. Luc Tartar, university professor (emeritus)
Académie des sciences, Paris

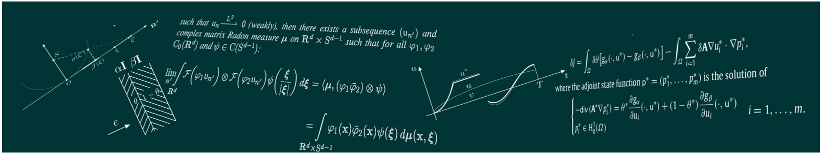
mag. math. Ivana Vuksanović, asistent
Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

mag. math. Jelena Jankov, asistent
Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

mag. math. Andrej Novak, doktorand (stipendist HRZZ)
Fakultet elektrotehnike i računarstva,
Sveučilište u Zagrebu

Smjerovi istraživanja

- homogenizacija, optimalan dizajn, upravljivost i inverzne zadaće
- inačice H-mjera i njihove primjene
- Friedrichsovi sustavi, polugrupe i primjene
- zakoni sačuvanja, porozne sredine i stohastičko modeliranje



Planirano je zapošljavanje postdoktoranda (ukupno 12 mjeseci), te se očekuje mogućnost zapošljavanja još dva doktoranda preko budućih natječaja HRZZ.

Predviđeno trajanje projekta: 1. srpnja 2014. – 30. lipnja 2018.

http://riemann.math.hr/WeConMApp

Slaba konvergencija: Banachov prostor i njegov dual

E Banachov (potpun i normiran), njegov dual E' je vektorski prostor neprekinutih linearnih funkcionala na E.

Na E' standardno definiramo normu

$$\|e'\|_{E'} := \sup_{\|e\|_E=1} |\langle e, e'\rangle| ,$$

s kojom E' postaje Banachov prostor (čak i u slučaju da E nije potpun).

Norma određuje jaku topologiju na E', i kao na E imamo:

$$\begin{aligned} e_n \longrightarrow e \quad &\text{ako} \quad \|e_n - e\|_E \longrightarrow 0 \\ e'_n \longrightarrow e' \quad &\text{ako} \quad \|e'_n - e'\|_{E'} \longrightarrow 0 \,. \end{aligned}$$

Još je jedna topologija zanimljiva, s konvergencijama

$$\begin{aligned} e_n \rightharpoonup e \quad &\text{ako} \quad (\forall\, e' \in E')\, |\langle e_n - e, e'\rangle| \longrightarrow 0 \\ e'_n \overset{*}{\rightharpoonup} e' \quad &\text{ako} \quad (\forall\, e \in E)\, |\langle e, e'_n - e'\rangle| \longrightarrow 0 \,. \end{aligned}$$

To su $\sigma(E, E')$, slaba topologija na E; i $\sigma(E', E)$,slaba zvijezda $(*)$ na E'.

Za refleksivne prostore $(E'' = E)$ se slaba i slaba $*$ topologija podudaraju.

Teorem (Banach — Alaoglu — Bourbaki) *Jedinična kugla u refleksivnom Banachovom prostoru je kompaktna u slaboj topologiji.*

Teorem. *Za E' separabilan, $\sigma(E, E')$ je metrizabilna na omeđenim skupovima.*

Uz refleksivnost i separabilnost, imamo kompaktnost i nizovi opisuju toplologiju.

Važan primjer — L^p prostori

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; $f \in \mathrm{L}^p, g \in \mathrm{L}^{p'}$ definiramo $\langle f, g\rangle = \int fg$. Vrijedi:

$(\mathrm{L}^p)' = \mathrm{L}^{p'}$, ali ne i za $p = \infty$.
L^p je refleksivan za $p \in \langle 1, \infty\rangle$.

Na L^∞ nam je, stoga, zanimljiva slaba $*$ topologija.

Koristeći L^p prostore definiramo i Soboljevljeve prostore (na $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$)

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) := \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega) : \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \in \mathrm{L}^p(\Omega), |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant m\} .$$

Ti prostori imaju ista svojstva refleksivnosti i separabilnosti kao i pripadni L^p prostori.

$p = \infty$: dovoljno je koristiti slabu $*$ topologiju.

$p = 1$: Kriterij za kompaktnost je dan Dunford-Pettisovim teoremom — složeno.

Primjena: Kako naći minimum nelinearnog integralnog funkcionala, npr.

$$F(u) := \int_\Omega f(u(x))\,dx \quad \text{ili} \qquad G(u) := \int_\Omega g(\nabla u(x))\,dx\ ?$$

Matematička analiza i fizikalni zakoni

Stvarne pojave u mehanici (i fizici) kontinuuma većinom se modeliraju s pomoću sustava (nelinearnih) parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Pokazalo se korisnim razlučiti dvije vrste fizikalnih zakona:

(linearni) zakoni sačuvanja ... mase, energije, količine gibanja, naboja
To su općenito valjani prirodni zakoni.

(nelinearni) zakoni konstitucije ... elastični fluid, elektrodinamika kontinuuma
Oni karakteriziraju pojedine vrste materijala.

Kako opisati međudjelovanje nelinearnih konstitucijskih pretpostavki i linearnih zakona sačuvanja? Na primjer, za elektrostatiku:
D – električna indukcija, E – ekupno el. polje, ρ – gustoća naboja

Maxwell: $\operatorname{div} \mathsf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathsf{E} = 0$
To su općeniti zakoni sačuvanja (linearan sustav pdj).

Pojedini materijal karakterizira veza: $\mathsf{D} = \mathsf{A}(\mathsf{E})$, A je općenito nelinearna.
U vakuumu: $\mathsf{A}(\mathsf{E}) = \varepsilon_0 \mathsf{E}$, općenito linearizirano $\mathsf{A}(\mathsf{E}) = \mathbf{A}\mathsf{E}$, pri čemu $\mathbf{A}$ ovisi o prostornoj varijabli.

Na jednostavno povezanom području je $\mathsf{E} = -\nabla u$ (gradijent potencijala), pa eliminacijom D iz sustava općenito dobivamo nelinearnu pdj:

$$-\operatorname{div} (\mathsf{A}(\nabla u)) = \rho \, .$$

Veza mikroskopske i makroskopske skale

Koji su nam matematički modeli poznati?

Vjerojatnosni pristup: $\omega \in \Pi$ - vjerojatnosni prostor, $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^d$
$u(\mathbf{x}, \omega)$ — mikroskopska, a očekivanje $E[u(\mathbf{x}, \cdot)]$ makroskopska veličina
Konceptualni nedostatak: dalje od atomarne skale znamo da su fizikalni zakoni deterministički.

Periodička modulacija: $u : \Omega \times T \longrightarrow \mathbf{R}$, $T := \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ torus
$u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — mikroskopska, a $\int_T u(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ makroskopska veličina
Dobro za kristale i neke umjetne materijale, ali je periodičnost prejaka pretpostavka.

Tartarov pristup: (u_n) titrajući niz funkcija na Ω
(niz titra ako konvergira slabo, ali ne i jako)
Prijelaz s mikro- na makro-skalu dan je limesom: $u_n \rightharpoonup u$.

Kakve to veze ima s prijelazom s jedne na drugu skalu?

Poopćenje periodičke modulacije

$u : \Omega \times T \longrightarrow \mathbf{R}$ (periodična po $\mathbf{y}$), $u_n(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}, n\mathbf{y})$
Tada $u_n \rightharpoonup u_\infty$, $u_\infty(\mathbf{x}) := \int_T u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$.

Dakle, ako imamo periodičnost po drugoj (brzoj) varijabli, i gledamo što se zbiva na limesu kad period teži k nuli (recimo, kristalna rešetka postaje sve finija—limes na kontinuum), dobivamo upravo slabi limes danog niza.

Intuitivno: prijelaz s diskretne razdiobe točkovnih masa na kontinuiranu gustoću:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{L}{n} f\left(\frac{iL}{n}\right) \longrightarrow \int_0^L f(x)\, dx \ ,$$

a formalno (f je neprekinuta na $[0, L]$):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{L}{n} \delta_{\frac{iL}{n}} \xrightharpoonup{\mathcal{M}_b *} \chi_{[0,L]} \ .$$

Pritom δ označuje Diracovu masu, a $\mathcal{M}_b$ prostor omeđenih Radonovih mjera na $[0, L]$, što je upravo dual $C[0, L]$ (i ranije opisana konstrukcija slabe $*$ topologije se može primijeniti; prostori nisu refleksivni).

Što možemo reći za nelinearna ograničenja?

Slaba se konvergencija dobro ponaša pri djelovanju s linearnim operatorom. Ali nas zanimaju i nelinearni zakoni.

Radi jednostavnosti, uzmimo L^∞ sa slabom $*$ topologijom i $F : \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekinutu (pa je $F \circ u_n$ ponovno omeđen niz, ako je u_n takav u L^∞).

Teorem. Neka je $K \subseteq \mathbf{R}^r$ omeđen skup, (u_n) niz u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; K)$, $\mathsf{u}_n \xrightarrow{*} \mathsf{u}$.
Tada je $\mathsf{u}(\mathbf{x}) \in \mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}K$ (ss $\mathbf{x}$).

I obratno, za $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}K)$ postoji *niz* $\mathsf{u}_n \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; K)$ takav da je $\mathsf{u}_n \xrightarrow{*} \mathsf{u}$.

Koristeći funkciju sinus, definiramo titrajući niz funkcija $\sin nx$.
Zaista, $\sin nx \xrightarrow{*} 0$ (konvergira svojoj srednjoj vrijednosti), ali očito ne konvergira jako (jer ne konvergira niti skoro svuda).

S druge strane, kvadrati tih funkcija, $\sin^2 nx \xrightarrow{*} 1/2 \geqslant 0^2$.

Što nam daje teorem? (slika)

Što možemo općenito reći o gomilištu $F \circ \mathsf{u}_n$?

Youngove mjere

Teorem. Za niz (u_n) u $\mathrm{L}^\infty(\Omega; K)$ postoji njegov podniz (u_{n_k}) i slabo $*$ izmjeriva familija vjerojatnosnih mjera $(\nu_x, x \in \Omega)$ nošenih na Cl K, takva da za svaku neprekinutu funkciju F na Cl K vrijedi

$$F \circ \mathsf{u}_{n_k} \xrightarrow{*} \langle \nu_\cdot, F \rangle = \int_{\mathrm{Cl}\, K} F(\lambda)\, d\nu_\cdot(\lambda)\,.$$

U slučaju omeđenog K vrijedi i obrat.

Kako primijeniti prethodni teorem za opis gomilišta $F \circ \mathsf{u}_n$. U ranijem primjeru:

$$\mathsf{E}_n \xrightarrow{*} \mathsf{E} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{D}_n \xrightarrow{*} \int \mathsf{A}(\lambda) d\nu_\cdot(\lambda)\ .$$

Posebno, općenito (na podnizu!) dobivamo da

$$u_n \xrightarrow{*} \int \lambda d\nu_\cdot(\lambda)\ .$$

Obratno, ako za svaku neprekinutu F vrijedi:

$$F \circ \mathsf{u}_n \xrightarrow{*} \int F(\lambda)\, d\nu_\cdot(\lambda)\,,$$

onda je nužno $\nu_x = \delta_{u(x)}$, i niz konvergira jako.

Primjer iz elektrostatike

Na mikroskopskoj razini polja zadovoljavaju Maxwellove jednadžbe: $\operatorname{div} \mathsf{D}_n = \rho$ i $\operatorname{rot} \mathsf{E}_n = 0$, te imamo elektrostatičku energiju $\int \mathsf{E}_n \cdot \mathsf{D}_n$.

Što možemo reći o toj energiji na makroskopskoj razini?

$$\mathsf{E}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \mathsf{E} \quad \text{i} \quad \mathsf{D}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2} \mathsf{D} \,.$$

$$\int \mathsf{E}_n \cdot \mathsf{D}_n \xrightarrow{\mathcal{M}_b *} \int \mathsf{E} \cdot \mathsf{D} \,.$$

To je posljedica poznate div-rot leme (Murat, Tartar), a fizikalno značenje je da nema skrivene elektrostatičke energije.

Primjer s valnom jednadžbom ($d = 2$)

$$\rho_n u_n'' - \operatorname{div}(\mathbf{A}_n \nabla u_n) = 0 \qquad \text{uz odgovarajuće p/r uvjete}$$

kinetička energija: $\frac{1}{2}\rho|u'|^2$
potencijalna energija: $\frac{1}{2}\mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla u$
Iz $u_n \xrightarrow{\mathrm{H}^1} 0$ slijedi

$$\frac{1}{2}\rho|u'|^2 - \frac{1}{2}\mathbf{A}\nabla u \cdot \nabla u \xrightarrow{\mathcal{M}_{b}*} 0 \,,$$

što daje makroskopsku ekviparticiju energije (a ukupna energija nije nula, jer bismo tada imali jaku konvergenciju).

Homogenizacija i optimalni dizajn

Marko Vrdoljak

Matematički odsjek PMFa, Sveučilište u Zagrebu

Zagreb, 17. prosinca 2014.

Zadaća optimalnog dizajna

Jednadžbe stanja

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\mathbf{A}\nabla u_i) = f_i \\ u_i \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,. \end{cases}$$

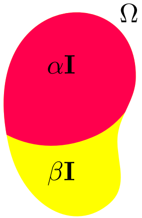
$\mathbf{A}$	–	matrica provođenja	funkcija upravljanja
$\mathsf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$	–	temperatura	funkcija stanja
$(f_1, \ldots, f_m)$	–	vanjski izvor topline	

Dopustiva upravljanja: $\mathbf{A} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \{\alpha\mathbf{I}, \beta\mathbf{I}\})$ tj. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x})\alpha\mathbf{I} + (1-\chi)\beta\mathbf{I}$

χ – karakteristična funkcija prvog materijala

Funkcional troška:

$$J(\chi) = \int_\Omega F(\mathbf{x}, \chi(\mathbf{x}), \mathsf{u}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \longrightarrow \min$$



Problem: Rješenje u pravilu ne postoji. Neprekidnost funkcionala?

Homogenizacija – jednadžba stacionarne difuzije

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla u) = f \\ u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,. \end{array} \right. \tag{1}$$

Ocjene na koeficijente – $\mathcal{M}(\alpha, \beta; \Omega)$: skup svih izmjerivih $\mathbf{A} : \Omega \to \mathrm{M}_d(\mathbf{R})$ takvih da

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} & \geq & \alpha|\boldsymbol{\xi}|^2\,, \\ \mathbf{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} & \geq & \frac{1}{\beta}|\mathbf{A}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}|^2 \end{array}$$

Definicija

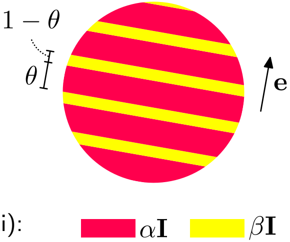
Kažemo da niz $(\mathbf{A}_n)$ *u* $\mathcal{M}(\alpha, \beta; \Omega)$ H*-konvergira prema* $\mathbf{A}_\infty$ *ako za svaki* $f \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ *niz rješenja* (u_n) *zadaća (1) zadovoljava*

$$\begin{array}{rcl} u_n & \longrightarrow & u_\infty \quad \mathrm{u} \quad \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,, \\ \mathbf{A}_n\nabla u_n & \longrightarrow & \mathbf{A}_\infty\nabla u_\infty \quad \mathrm{u} \quad \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^d). \end{array}$$

Jednostavni slojevi (lamine prvog reda)

Izotropne materijale $\alpha\mathbf{I}$ i $\beta\mathbf{I}$ slažemo slojevito

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= \chi_n \alpha \mathbf{I} + (1-\chi_n)\beta\mathbf{I} \\ \chi_n(\mathbf{x}) &= \chi(n\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}) \end{aligned}$$



Uzimamo sve tanje slojeve (odnos slojeva ostaje isti):

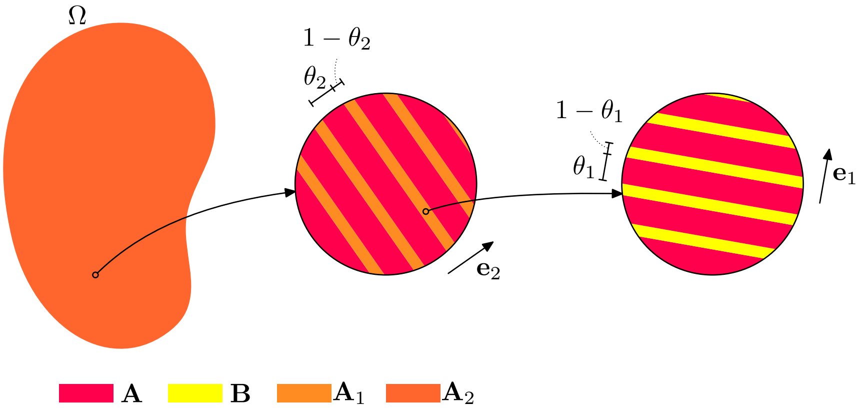
$$\chi_n \xrightarrow{*} \theta \in [0,1]$$

Na limesu imamo neizotropan materijal, ali homogen:

$$\begin{aligned} \lambda_\theta^+ &= \theta\alpha + (1-\theta)\beta \\ \frac{1}{\lambda_\theta^-} &= \frac{\theta}{\alpha} + \frac{1-\theta}{\beta} \end{aligned}$$

Općenitije, u periodičkoj situaciji prelaskom na H-limes dolazimo do homogenog materijala.

Lamine višeg reda



$$(1-\theta_1)(1-\theta_2)(\mathbf{A}_2-\mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{B}-\mathbf{A})^{-1} + \theta_1 \frac{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1}{\mathbf{A}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} + (1-\theta_1)\,\theta_2 \frac{\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2}{\mathbf{A}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2}$$

H-zatvarač

Možemo li karakterizirati skup svih H-limesa nizova

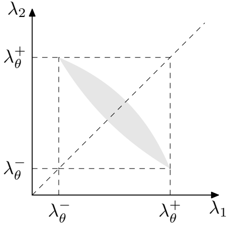
$$\mathbf{A}_n = \chi_n \alpha \mathbf{I} + (1 - \chi_n)\beta \mathbf{I}\,?$$

Skup $\mathcal{K}(\theta)$ – fiksiramo lokalni udio θ prvog materijala:

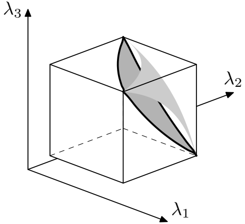
$$\chi_n \xrightarrow{*} \theta \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; [0,1])$$

Da, ali je to jedina situacija u kojoj je to moguće (ako je jedna od originalnih faza anizotropna – otvoreni problem)

$2D$



$3D$



Adjungirana zadaća

Relaksirana zadaća

$$\begin{cases} J(\theta, \mathbf{A}) & = \displaystyle\int_\Omega G(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathsf{u}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \to \min \\ & \theta \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, [0,1])\,,\ \mathbf{A} \in \mathcal{K}(\theta) \ \text{ ss na } \ \Omega \end{cases}$$

Uz uvjete rasta na G (s obzirom na u) imamo neprekidnost funkcionala J i konačno egzistenciju rješenja relaksirane zadaće.

Uz nešto jače uvjete rasta imamo i diferencijabilnost – algoritmi za numeričko rješenje.

Zbog uvjeta (rubna zadaća) javljaju se adjungirane jednadžbe

$$\begin{cases} -\mathsf{div}\,(\mathbf{A}\nabla p_i) = \dfrac{\partial G}{\partial u_i} & \qquad i = 1, \ldots, m \\ p_i \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,. \end{cases}$$

Nužni uvjeti optimalnosti

$$F(\mathbf{x},\chi,\mathsf{u}) = \theta\, g_\alpha(\mathbf{x},\mathsf{u}) + (1-\theta)\, g_\beta(\mathbf{x},\mathsf{u})$$

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{A}\nabla u_i^* \cdot \nabla p_i^* = \mathbf{A}\cdot\mathbf{M}^* \,, \quad \mathbf{M}^* = \mathrm{Sym} \sum_{i=1}^m \nabla u_i^* \otimes \nabla p_i^*$$

$$f(\theta,\mathbf{M}) := \max_{\mathbf{A}\in\mathcal{K}(\theta)} \mathbf{A}\cdot\mathbf{M}\,, \quad \theta\in[0,1]\,,\ \mathbf{M}\in Sym(d)$$

Teorem (Allaire, 2002)

Za

$$Q(\mathbf{x}) := g_\alpha(\mathbf{x},u^*(\mathbf{x})) - g_\beta(\mathbf{x},u^*(\mathbf{x})) - \frac{\partial f}{\partial\theta}(\theta^*(\mathbf{x}),\mathbf{M}^*(\mathbf{x}))\,,$$

optimalni θ^* zadovoljava

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \theta^*(\mathbf{x}) = 0\,,\\ Q(\mathbf{x}) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \theta^*(\mathbf{x}) = 1\,,\\ Q(\mathbf{x}) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \theta^*(\mathbf{x}) \in [0,1]\,. \end{aligned}$$

Skoro svuda na Ω, $\mathbf{A}^*$ je maksimizator u definiciji vrijednosti $f(\theta^*,\mathbf{M}^*)$.

Teme istraživanja

Homogenizacija, optimalni dizajn, upravljivost, inverzne zadaće

- klasična rješenja zadaća optimalnog dizajna
- usporedba algoritama za optimalni dizajn
- homogenizacija jednadžbe ploče (stacionarni slučaj i titranje)
- homogenizacija malih amplituda za jednadžbu ploče
- primjene u klasičnim inverznim zadaćama
- usrednjeno upravljanje i opažajnost (M. Lazar & E. Zuazua)

Inačice H-mjera i primjene

Martin Lazar

Sveučilište u Dubrovniku

Zagreb, 17. prosinca 2014.

WeConMApp

Zašto defektne mjere?

Niz PDJ-a

$$P_n u_n = f_n$$

P_n – parcijalni diferencijalni operator
(u_n) - omeđen u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$, $\quad u_n \rightharpoonup 0$.

Da li (u_n) konvergira jako?

Ispitujemo (*energiju* sustava):
(u_n^2) – omeđen u L^1.

Kako bismo prešli na slabi limes ulažemo $\mathrm{L}^1 \hookrightarrow \mathcal{M}_b$:

$$|u_n|^2 \rightharpoonup \nu \;\; (\text{defektna mjera})$$

$$\nu = 0 \iff u_n \longrightarrow 0 \text{ u } \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$$

P.L. Lions.[1]

Defektne mjere su elementarni alat:
- ne čuvaju informacije o jednadžbi koje zadovoljava u_n;
- ne razlikuju titranja različitih frekvencija.

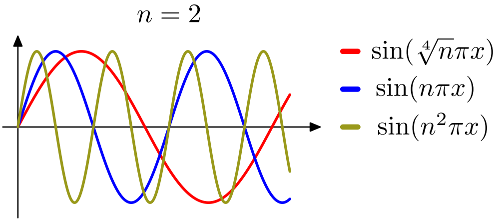
---

[1] Pierre-Louis Lions: *The concentration-compactness principle in the calculus of variations: The limit case I,II*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985) (1) 145–201, (2) 45–121.

Primjer 1: Titranja

$\alpha > 0$, $\mathsf{k} \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}$,

$$u_n(\mathbf{x}) := e^{2\pi i n^\alpha \mathsf{k}\cdot\mathbf{x}} \xrightarrow{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} 0\,,\ n \to \infty$$



Za svaki k, α pridružena defektna mjera

$$\nu = \lambda \ \ (\text{Lebesgue} - \text{ova mjera}).$$

Mikrolokalni defektni alati

– sadrže dualnu varijablu ($\boldsymbol{\xi}$), pored fizikalne ($\mathbf{x}$).

Dvije osnovne vrste:

- H-mjere (ili mikrolokalne defektne mjere)
- poluklasične (ili Wignerove) mjere

Mjere odstupanje slabe od jake konvergencije (u L^2).

Dualna varijabla je *odgovorna* za neka njihova osnovna svojstva:
- lokalizacijsko svojstvo,
- prijenosno svojstvo.

Ova svojstva uzimaju u obzir jednadžbe koje zadovoljavaju elementi niza (u_n).

Uspješno primijenjena u proučavanju PDJ-a.

(Djelomično) čuvaju podatke o vrsti titranja.

Teorem 1 (Postojanje) [2]

Neka $u_n \rightharpoonup 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d)$.
Tad postoji podniz $(\mathsf{u}_{n'})$ i nenegativna Radonova mjera μ_H na $\mathbf{R}^d \times S^{d-1}$ takva da za svaki $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_0(\mathbf{R}^d)$, $\psi \in \mathrm{C}(S^{d-1})$:

$$\lim_{n'} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}\Big(\varphi_1 u_{n'}\Big)\overline{\mathcal{F}\Big(\varphi_2 u_{n'}\Big)}\psi\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) d\boldsymbol{\xi} = \langle \mu_H, (\varphi_1 \bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi \rangle$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^d \times S^{d-1}} \varphi_1(\mathbf{x})\bar{\varphi}_2(\mathbf{x})\psi(\boldsymbol{\xi})\, d\mu(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \,.$$

Mjeru μ_H nazivamo H-mjerom pridruženom nizu (u_n).

[2] Luc Tartar: *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **115A** (1990) 193–230.

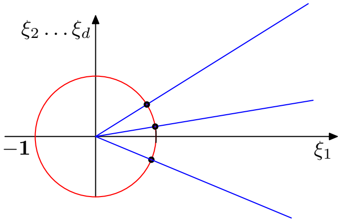
Zašto je probna funkcija ψ (u varijabli $\boldsymbol{\xi}$) definirana samo na S^{d-1}? (A ne na cijelom $\mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}}$)?

Lebesgue-ov teorem o dominiranoj konvergenciji povlači

$$\widehat{\varphi u_n} \longrightarrow 0 \quad \mathrm{u} \quad \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}}).$$

Po Plancherel-u, ako $\varphi u_n \not\to 0$ u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d_{\mathbf{x}})$, dio podataka se gubi u beskonačnosti u dualnom prostoru.

Kako bi provjerio smjer u kojem se podatci gube, Tartar je vršio integraciju uzduž zraka koje proizlaze iz ishodišta i zatim vršio projekciju na jediničnu sferu.



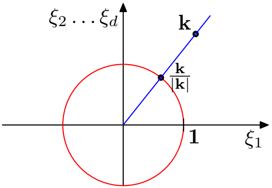
H-mjere
Primjer 1: Titranja

Razmotrimo prethodni primjer:

$$u_n(\mathbf{x}) := e^{2\pi i n^\alpha \mathsf{k}\cdot\mathbf{x}} \xrightharpoonup{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} 0\,,\ n \to \infty\,,$$

gdje je $\alpha > 0$, $\mathsf{k} \in \mathbf{Z}^d \setminus \{0\}$.
Pridružena H-mjera $\mu = \lambda(\mathbf{x}) \boxtimes \delta_{\frac{\mathsf{k}}{|\mathsf{k}|}}(\boldsymbol{\xi})$:

- Čuva podatak o smjeru širenja (k);
- ne hvata red frekevenicje (n^α).



Važno:

$$\mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} 0 \iff \mu_H = 0\,.$$

Poluklasične mjere

– slične H-mjerama,

– probna funkcija ψ definirana na cijelom $\mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}}$ ($\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d_{\boldsymbol{\xi}})$).

– ovise o karakterističnoj duljini $\omega_n \searrow 0$

$$\langle \mu_{sc}, (\varphi_1\bar{\varphi}_2) \boxtimes \psi \rangle = \lim_n \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}\Big(\varphi_1 u_n\Big)\overline{\mathcal{F}\Big(\varphi_2 u_n\Big)}\psi(\omega_n \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}$$

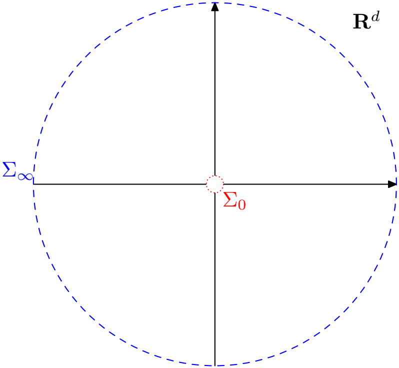
– prikladne za zadaće s iščezavajućim parametrom (e.g. viskoznost)

Nedostatak:
– gube podatke o vrsti tiranja s frekvencijama relativno malim, odnosno velikim u usporedbi s karakterističnom duljinom ω_n

$$\mu_{sc} = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} 0\,.$$

Kompaktifikacija skupa $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$

Podatci o titranju se gube u ishodištu, te u beskonačnosti dualnog prostora. Kako bi spriječio curenje podataka Tartar razmatra kompaktifikaciju dualnog prostora.



$$\Sigma_0 := \{0^{\boldsymbol{\xi}_0} \ : \ \boldsymbol{\xi}_0 \in S^{d-1}\}$$
$$\Sigma_\infty := \{\infty^{\boldsymbol{\xi}_0} \ : \ \boldsymbol{\xi}_0 \in S^{d-1}\}$$
$$\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d) := \mathbf{R}^d \setminus \{0\} \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_\infty$$

Novi objekt uzima probne funkcije iz prostora $\mathrm{C}(\mathrm{K}_{0,\infty}(\mathbf{R}^d))$.

1-skalne H-mjere

– ovise o karakterističnoj duljini $\omega_n \searrow 0$

– probne funkcije su definirane na kompaktifikaciji skupa $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$

– poopćenja su i H-mjera i poluklasičnih mjera

– hvataju i red frekvencije i smjer širenja

Važno:

$$\mu_{\mathrm{K}_{0,\infty}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{u}_n \xrightarrow{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}} 0\ .$$

Lokalizacijsko svojstvo

Imajući novi objekt, potrebno je razviti pripadnu teoriju:
– poopćiti svojstva (lokalizacijsko, prijenosno) prijašnjih objekata.

Za početak proučavamo lokalizacijsko svojstvo:
– određuje nosač mjere μ koristeći jednadžbe zadovoljene pripadnim nizom (u_n).

Ako

$$\mathbf{P}\mathsf{u}_n = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq m} \partial_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathsf{u}_n) = 0\,,$$

tada

$$\mathbf{p}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\mu}_H^{\top} = 0\,,$$

pri čemu je $\mathbf{p}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} \boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{A}^{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ glavni simbol diferencijalnog operatora $\mathbf{P}$.

Ideja: Ako $\mathbf{p}$ nije nigdje trivijalan (e.g. eliptički operator drugog reda), znamo $\boldsymbol{\mu}_H = 0$, što daje $\mathsf{u}_n \longrightarrow 0$ u $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$.

Primjene:

- Kompaktnost kompenzacijom
  – ako $u_n, v_n \rightharpoonup 0$, da li $u_n v_n \rightharpoonup 0$?
- Homogenizacija
  – defektne mjere opisuju limese kvadratičnih izraza.
- Brzinsko usrednjenje
  – uz koje uvjete $\int_{\mathbf{R}_y} u_n(x,y)\rho(y)dy \longrightarrow 0$ u L^2?
- Usrednjeno upravljanje
  – uz koje uvjete možemo upravljati usrednjenim izrazom $\int_{\mathbf{R}_y} u_n(x,y)\rho(y)dy$?

...

Friedrichsovi sustavi, polugrupe i primjene

Krešimir Burazin

Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku

Zagreb, 17. prosinca 2014.

Friedrichsov sustav

$$\mathcal{L}\mathsf{u} = \mathsf{f}\,,$$

gdje je $\mathcal{L} : \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{R}^r)$ operator dan s

$$\mathcal{L}\mathsf{u} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{u}) + \mathbf{C}\mathsf{u}\,,$$

a matrične funkcije $\mathbf{A}_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$, $k \in 1..d$, i $\mathbf{C} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ zadovoljavaju

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^\top\,;$$

$$(\exists\, \mu_0 > 0) \quad \mathbf{C} + \mathbf{C}^\top + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k \geq 2\mu_0 \mathbf{I} \qquad \text{(s.s. na } \Omega)\,.$$

K. O. Friedrichs, CPAM, 1958

...jednistvena teorija za jednadžbe različitog tipa

Apstraktna teorija

A. Ern, J.-L. Guermond, G. Caplain, (CPDE 2007), (SIAM JNA 2006, 2006, 2008)

- teorija zapisana u terminima operatora na Hilbertovim prostorima
- unutrašnji kriterij za bijektivnost *apstraktnog Friedrichsovog operatora*
- numeričko tretiranje Friedrichsovih sustava

Različiti načini prikaza rubnog uvjeta, veza s klasičnom teorijom, homogenizacija i primjene (prijenosna jednadžba , jednadžba (stacionarne) difuzije, stacionarni Maxwellov sustav, jednadžbe linearizirane elastičnosti,. . .):

N. Antonić, K. B., (CPDE 2010), (JDE 2011)

N. Antonić, K. B., M. Vrdoljak, (JMAA 2013), (NA-RWA 2014)

K. B., M. Vrdoljak, (CPAA 2014)

Glavni rezultat

L - realan Hilbertov prostor, $\mathcal{L} : L \hookrightarrow W_0'$ linearan (neomeđen) operator
Prostor grafa

$$W := \{u \in L : \mathcal{L}u \in L\}$$

Problem: za dani $f \in L$ naći $u \in W$ takav da je $\mathcal{L}u = f$.

Rezultat: dani su dovoljni uvjeti na potprostor $V \leqslant W$ uz koje je $\mathcal{L}_{|V} : V \longrightarrow L$ izomorfizam.

Istraživanja unutar WeConMApp

- primjena teorije polugrupa na nestacionarne Friedrichsove sustave i primjena na primjere
- apstraktna polulinearna zadaća - ocjene na rješenje i njegovo vrijeme egzistencij; primjena na primjere
- primjena teorije polugrupa na nestacionarne Friedrichsove sustave u kompleksnim prostorima i testiranje na primjerima
- primjena teorije polugrupa na evolucijske jednadžbe drugog reda
- asimptotika za evolucijske Friedrichsove sustave

Nestacionarni Friedrichsovi sustavi

L i $\mathcal{L}$ kao prije, $T > 0$; promatramo apstraktnu Cauchyjevu zadaću u L:

$$\begin{cases} \mathsf{u}'(t) + \mathcal{L}\mathsf{u}(t) = \mathsf{f}(t) \\ \mathsf{u}(0) = \mathsf{u}_0 \end{cases},$$

Numerika:

E. Burman, A. Ern, M. A. Fernandez, (SIAM JNA 2010)

D. A. Di Pietro, A. Ern, 2012

Dobiven rezultat dobre postavljenosti i primijenjen na simetrički hiperbolički sustav, valnu jednadžbu, nestacionarni Maxwellov sustav i nestacionarni div-grad problem

K. B., M. Erceg, *Non-stationary abstract Friedrichs systems via semigroup theory*, u recenzentskom postupku

Ocjena na rješenje polulinearnog sustava

X Banachov, $T > 0$; promatramo polulinearnu zadaću

$$\begin{cases} \mathsf{u}'(t) - A\mathsf{u}(t) = \mathsf{f}(t, \mathsf{u}(t)) & \text{in } \langle 0, T\rangle \,, \\ \mathsf{u}(0) = \mathsf{g} \,, \end{cases}$$

gdje je $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ infinitezimalni generator C_0 polugrupe na X, $\mathsf{g} \in X$, $\mathsf{f} : [0, T] \times X \longrightarrow X$ i u nepoznata funkcija.
Glavni rezultat: rješenje zadovoljava ocjenu

$$\|\mathsf{u}(t)\|_X \leqslant M e^{\omega t} v(t) \quad t \in [0, S\rangle \,.$$

gdje je v rješenje

$$\begin{cases} v'(t) = e^{-\omega t}\Phi(t, M e^{\omega t} v(t)) \\ v(0) = \|\mathsf{g}\|_X \end{cases} ,$$

K. B., M. Erceg, *Estimates for mild solutions to semilinear Cauchy problems*, Electronic Journal of Differential Equations 2014/194 (2014), 1-10

Primjene H-mjera na degenerirane paraboličke jednadžbe s osvrtom na skladištenje CO_2

Darko Mitrović

Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Zagreb, 17. prosinca 2014.

Skladištenje CO_2

Sakupljanje i skladištenje CO_2 je postupak kojim se smanjuje utjeca korištenja fosilnih goriva na globalno zagrijavanje.

Proces se temelji na sakupljanju ugljik-dioksida (CO_2) s velikih izvora, poput termoelektrana, i njegovom uklanjanju tako da se ne može vratiti u atmosferu.

Očekuje se da 10–55 % smanjenja količine emitiranog CO_2 bude postignuto upravo skladištenjem u dubokim geološkim formacijama.

Sakupljanje i kompresija CO_2 zahtijeva mnogo energije i to povećava troškove termo-elektrana za oko 25–40 %.

Tako dobivena energija je 21–91 % skuplja.

Ipak, očekuje se da uspješnim istraživanjem do 2025. godine skladištenje CO_2 bude najjeftniji način njegovog uklanjanja iz atmosfere.

Geo-odstranjivanje

Podrazumijeva ubrizgavanje CO_2 u super-kritičnom obliku u duboke geološke formacije.

Moguća mjesta odstranjivanja su:

- naftna polja
- plinska polja
- slane formacije

Mehanizmi stabiliziranja uskladištenog CO_2:

- prije svega, nepropusnim stijenama koje omeđuju prostor u kojem je CO_2 uskladišten
- otapanjem CO_2 u mineraliziranoj vodi koja se nalazi na mjestu skladištenja
- rezidualni CO_2
- mineraliziranje CO_2

Osnovne jednadžbe

Jednadžbe koje upravljaju procesom su Darcyjev zakon, nestišljivost, i sačuvanje mase (Boussinesqova jednadžba):

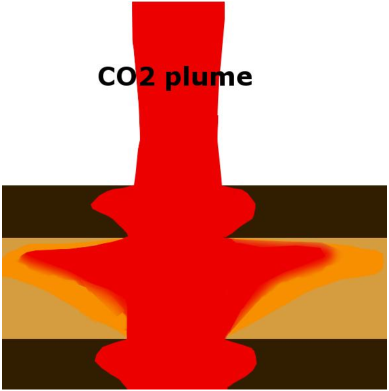
$$\begin{aligned}
\mathbf{u} =& -\mathbf{K}(\nabla P - \rho g \hat{z}), \quad \hat{z} = (0, z) && (2)\\
\langle \nabla, \mathbf{u} \rangle :=& \nabla \cdot \mathbf{u} := \mathrm{Div}\mathbf{u} := \partial_x u + \partial_z v = 0 && (3)\\
\partial_t(\phi C) + \mathrm{Div}(C\mathbf{u}) =& \phi D \Delta C, && (4)
\end{aligned}$$

gdje je g gravitacijsko ubrzanje, K permeabilnost, ϕ poroznost, C koncentracija, $\mathbf{u}$ brzina i P tlak.

Pod određenim pretpostavkama, spomenuti sustav se može zapisati u obliku degenerirane paraboličke jednadžbe

$$\partial_t u + \mathrm{div}_{\mathbf{x}} \mathfrak{f}(t, \mathbf{x}, u) = \sum_{k,j} \partial_{x_j} (a_{kj}(t, \mathbf{x}, u) \partial_{x_k} u), \tag{5}$$

gdje je $A = (a_{ij})$ ne-negativno definitna matrica.



Gornja jednadžba opisuje tok kontroliran s

- konvekcijskim pojavama ("grupnim" kretanjem čestica) koje su opisane članovima prvog reda
- difuzijskim pojavama koje su opisane članovima drugog reda
- izvorom/ponorom s.

U okviru projekta:

- pokazat ćemo postojanje slabog rješenja za jednadžbu (5) s neglatkim koeficijentima
- pokazat ćemo postojanje tragova za entropijsko rješenje jednadžbe (5)
- simulirat ćemo različite pojave opisane jednadžbama (2)–(4), kao i jednadžbom (5).